Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar

Szatmáry Zoltán

Mérések kiértékelése

Egyetemi jegyzet

Budapest, 2002

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

A mérnök-fizikus hallgatók már a második szemeszterben végeznek laboratóriumi méréseket. Kívánatos, hogy addigra tisztában legyenek a mérések kiértékeléséhez minimálisan szükséges ismeretekkel. Enélkül nem képesek a mérések korrekt elvégzésére, de a laborgyakorlat legfontosabb eredményének, a *mérési jegyzőkönyv*nek az elkészítésére sem. Aki tisztában van a kiértékelés követelményeivel és módszereivel, sokkal mélyebben érti meg a mérés lényegét, mint az, aki ilyesmiről még nem hallott. A gyakorlatvezetők számára pedig felesleges és kellemetlen teher, ha ezeket az ismereteket sietve, a gyakorlat elvégzésére szánt idő rovására kell átadniuk.

Miután a fizikusok kikerülnek az életbe, a mérések kiértékelése területén lényegesen több ismeretre lesz szükségük, mint amit a laborgyakorlatok megkövetelnek. Ezért a későbbi évfolyamokon választhatnak egy jóval nagyobb matematikai felkészültséget és rutint igénylő előadást, amely elmélyíti az alapfokú ismereteket. A két előadás tulajdonképpen ugyanarról szól, de különböző szinten.

Az alapszintű előadásban bizonyos megalkuvásra van szükség, hiszen a második szemeszterben rendelkezésre álló matematikai tudás még hiányos. A témakör megértéséhez szükséges a valószínűség-elmélet ismerete. Azon belül is elengedhetetlenek a matematikai statisztika legfontosabb tételei. Egy fizikusnak ismernie kell a matematika legtöbb területét, de megtanulásuknak követnie kell az anyag belső logikáját. Így a valószínűség-elméletre csak a negyedik szemeszterben kerülhet sor. Emiatt ebben a jegyzetben elkerülhetetlen a legfontosabb ismeretek összegzése olyan szinten, ahogy az első szemeszterben tanult lineáris algebra és analízis alapján lehetséges. A dolog nem megoldhatatlan, de figyelmeztetjük az Olvasót, hogy az itt tanultak a későbbiekben nem mentik fel a valószínűség-elmélet *alapos* elsajátítása alól. Némi bíztatást és segítséget jelentett a valószínűség-elmélet két nagy orosz tudósának, Gnyegyenkónak és Hincsinnek az 1950-es években írt könyvecskéje [1], amely ezt a feladatot remekül megoldotta.

A magasabb szintű előadás már épít a fizikusoktól elvárható matematikai ismeretekre, anyaga ezért túlságosan nehéz az elsőéves hallgatók számára. Tulajdonképpen két jegyzetre lenne szükség: az egyik az elsőéves hallgatók, a másik pedig a felsőbbévesek számára. Megpróbáltam mindkettőt megírni. Azt tapasztaltam, hogy az előbbi hemzseg a bizonyítatlan állításoktól, az utóbbi esetében pedig az egyes fejezetek bevezető példái megegyeznek az előbbiben található példákkal. Ezért célszerűbbnek találtam a két jegyzetet egyesíteni, és csillaggal megjelölni azokat a részeket, amelyek elolvasása nem ajánlható az elsőévesek számára. Ez rögtön lehetővé teszi az érdeklődő elsőévesek számára, hogy az anyagban annyira mélyedjenek el, amennyire érdeklődésük szerint kívánnak és matematikai ismereteik engedik. Így talán sikerült olyan jegyzetet a kezükbe adni, amelyet későbbi tanulmányaik, sőt kutatómunkájuk végzése közben is kikinyitnak majd.

A mérések sokfélék, és mindegyik kiértékelésének megvan a saját módja. A mérések kiértékelésével számos könyv [1] foglalkozik, mindegyik tartalmaz képleteket és kidolgozott példákat. A fiatal fizikusok munkájuk során azt fogják tapasztalni, hogy gyakran nagyon nehezen vagy egyáltalán nem találják meg ezekben a könyvekben az éppen végzett mérés kiértékelésére vonatkozó képleteket. A legbiztosabb és a leggyorsabb ilyen esetekben, ha ezeket saját maguk levezetik. Ezért a mérések kiértékelésével foglalkozó műveknek fontos része a képletek levezetése, mert ennek *módszerét* érdemes megtanulni. Így nem jöhetünk zavarba, ha nem találjuk az éppen keresett formulát. A 6. fejezet (amely főleg a felsőbbévesek számára készült) tartalmaz egy általános formalizmust, amely szerint elegendő az illesztőfüggvényt felírni, a mért értékek szórásait meghatározni, és az általános formalizmusból közvetlenül le lehet vezetni a konkrét probléma megoldását.

Nem ritkán nagy tömegű mérési adatot kell kiértékelnünk. Ez csak számítógép segítségével lehetséges, amihez valamilyen programra van szükségünk. Több ilyen program is létezik, amelyek a mért adatok sokkal mélyebb és alaposabb elemzését teszik lehetővé, mint amit kézzel vagy zsebszámológéppel elvégezhetünk. A jegyzetben igyekeztem ezt a körülményt figyelembe venni: nem csak a kézzel alkalmazható, hanem a számítógépre való algoritmusokat is ismertetem. A tapasztalat azt mutatja, hogy súlyos tévedéseknek van kitéve, aki anélkül alkalmaz mások által írt programokat, hogy azok alapelveivel kellő mértékben tisztában lenne, és alaposan ismerné a programok alapjául szolgáló algoritmusokat.

A jegyzetben számos példa található az előadott módszerek illusztrálására. Ezek egy része nem valóságos mérések eredménye, hanem számítógéppel szimulált "méréseké". Ilyenek kiértékelésekor előny, hogy ismerjük a végeredményt, tehát könnyen ellenőrizhetjük az alkalmazott módszerek helyességét. A szimulált mérésekről is úgy fogok azonban beszélni, mintha tényleges mérések lennének.

Az 1. fejezet általános ismertetés a kísérletezésről, annak szakaszairól, a helyesen elvégzett és kiértékelt mérésekkel szemben támasztott követelményekről. Ez a fejezet lényegesen több problémát említ, mint aminek a kifejtésére egy ilyen jegyzetben lehetőség van. Ha ennek tartalmát a többi fejezet tartalomjegyzékével összevetjük, láthatjuk, mi mindenről lehetne még szó, de különböző megfontolásokból kimaradt.

A jegyzet szerkesztéséből következik, hogy az anyaggal csak most ismerkedő hallgatók folytassák a 2.– 4. fejezetekkel, majd folyamatosan olvashatják a szöveget, de a csillaggal megjelölt fejezeteket hagyják ki. A szöveg ugyan hivatkozik olyan képletekre és tételekre, amelyek levezetése csillagos fejezetekben található, a tételek megfogalmazása olyan egyszerű, hogy kezdők is megérthetik.

Az 5. fejezet tartalmazza a legegyszerűbb kísérleti adatok, a közvetlenül mért adatok kiértékelését. Ez az a fejezet, amelyből a legfontosabb fogalmakat meg lehet érteni. A közvetett, vagyis csak függvényillesztéssel kezelhető mérések kiértékelésének általános elmélete a 6. fejezetben olvasható. A felhasznált matematikai apparátusra való tekintettel ez a fejezet csak a felsőbbévesek számára készült. E fejezet egyes lineáris algebrai problémáit vázolja a 2. fejezet. A témakörrel csak most ismerkedők a 2. és 6. fejezetet átugorva a 7. fejezetben folytassák az olvasást. Ez ugyan hivatkozik a 6. fejezet néhány tételére, de lényegében attól függetlenül olvasható. A 7. fejezet elsősorban a [9] jegyzetsorozatban leírt mérések igényeit igyekszik kielégíteni, vagyis olyan problémákat tárgyal, amelyek megoldására a hallgatóknak a laboratóriumi gyakorlatok során szükségük lesz. Ami nem kezelhető a 7.1.–7.7. alfejezetek általános fejtegetései alapján, azt a 7.8. alfejezetben külön tárgyalom.

Külön magyarázatot igényel a 8. és 9. fejezet. Az előbbi a mérések kiértékelésének talán leginkább vitatott, de égető problémájával, a kiszóró pontok megtalálásával és kezelésével foglalkozik. Az utóbbi olyan – nem kevésbé nehéz – problémával foglalkozik, amellyel csak az utolsó évfolyamokon vagy a kutatómunka során fognak a hallgatók találkozni, ha egyáltalán találkoznak. Ezért ezt az egész fejezetet nyugodt szívvel láttam el csillaggal. A probléma nehézségére való tekintettel legszívesebbben ezt tettem volna a 8. fejezettel is, de ez lehetetlen: a kiszóró pontokkal már a kezdő kísérletezők is találkoznak, és nem engedhető meg, hogy legalább az alapvető ismeretekkel ne rendelkezzenek. Ezért ennek a fejezetnek azokat részeit a kezdők számára is ajánlom, amelyek nem kaptak csillagot. Senki se számítson azonban könnyű olvasmányra!

Kezdőknek és haladóknak egyaránt figyelmébe ajánlom az 1. függeléket. Tudom, hogy sokan nem örülnek ennek, először magam is így voltam ezzel. Senki sem szereti, ha szabványokkal és tilalmakkal korlátozzák, milyen szavakat használhat és milyeneket nem. Az arányérzék hiányáról tanúskodna azonban, ha ezeket a dolgokat nem vennénk komolyan. A szabványok, a fogalmak pontos körülírása, a szavak értelmének szűkítése segít abban, hogy mondataink, gondolatmeneteink mindenki számára érthetők legyenek, és mindenki ugyanazt értse rajtuk.

Bár a fentiekben többször hangsúlyoztam, hogy ez a jegyzet elsősorban a fizikus hallgatók számára íródott, azt is remélem, hogy kutatók és egyetemi oktatók is haszonnal forgathatják mint olyan művet, amely gyakorlati problémáikat rendszerezett módon, azonos szemlélettel tárgyalja. Pályám kezdetén nekem Linnyik könyve [1] nyújtotta ugyanezt, amelynek megértése lehetetlen lett volna Rózsa Pál kitűnő mátrixelméleti könyve [5] nélkül.

Budapest, 2002. február. Szatmáry Zoltán

JELÖLÉSEK

A jegyzet minden fejezetében alkalmazott jelölések:

Jelölés	Magyarázat
$\mathrm{M}(\xi)$	A ξ valószínűségi változó várható értéke
$\mathrm{D}^2(\xi)$	A ξ valószínűségi változó szórásnégyzete
$\mathrm{P}\{\dots\}$	A {...} relációval definiált esemény valószínűsége
$P(A)$	Az A esemény valószínűsége
$\mathbf{A}_{n,m}$	n sorból és m oszlopból álló mátrix; a sorok és szolopok számát csak akkor jelöljük, ha elhagyásuk félreértést okozhat
$[\mathbf{A}]_{kl}$	Az $\mathbf{A}$ mátrix (k, l) eleme
$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$	Az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja
rang($\mathbf{A}$)	Az $\mathbf{A}$ mátrix rangja
diag(x)	Olyan diagonális mátrix, amelynek a főátlójában az x_i mennyiségek vannak
$\mathbf{E}$	Egységmátrix
$f(x, \mathbf{a})$	Illesztőfüggvény, amely az x független változón kívül az ismeretlen $\mathbf{a}$ paramétervektortól függ
$\mathbf{a}$	Paramétervektor, komponensei az a_1, a_2, ..., a_m paraméterek
Q	A legkisebb négyzetek módszerében minimalizálandó négyzetösszeg
$\boldsymbol{\xi}$	A mért értékek vektora, komponensei a ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n valószínűségi változók
w_i	A ξ_i mért érték szórásnégyzetét a $\mathrm{D}^2(\xi_i) = \sigma^2 / w_i$ képlet szerint meghatározó súlyfaktor
σ^2	(Általában) ismeretlen szorzótényező, amely a súlyokkal együtt megadja a szórásnégyzeteket
$\mathbf{W}_{n,n}$	A w_i súlyfaktorokból képzett diagonális mátrix
$\mathbf{F}_{n,m}$	Az illesztőfüggvénynek az a_1, a_2, ..., a_m paraméterek szerint vett deriváltjaiból mint sorokból alkotott mátrix
$\mathbf{R}_{m,m}$	$= \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{F}$
$\tilde{a}_k$	Az a_k paraméter becsült értéke
$\tilde{y}_i$	Az illesztőfüggvény becsült értéke ($= f(x_i, \tilde{\mathbf{a}})$)
s^2	Empirikus szórásnégyzet (σ^2 becslése)
$\delta\mathbf{a}$	Az $\mathbf{a}$ paramétervektor becslésének a torzítása

1. BEVEZETÉS

A kísérletezésnek a modern tudományban kialakult módszertana van, amely az alábbi lépések megtételét igényli:

1. megfogalmazzuk a problémát,
2. kimondjuk a feltevéseket,
3. megtervezzük a kísérletet,
4. megfigyeléseket vagy méréseket végzünk,
5. értelmezzük a kapott adatokat,
6. levonjuk a következtetéseket.

E lépéseket először egy egyszerű, kevés elméleti felkészültséget igénylő kísérletre vonatkozóan beszéljük meg. Remélhetőleg ez meg fogja könnyíteni az általános eszmefuttatások megértését.

1.1. A rugalmassági együttható meghatározása (példa)

A probléma megfogalmazása

Külső erő hatására a szilárd testek alakja megváltozik. Ha az erő nem túlságosan nagy, megszűnte után a test visszanyeri eredeti alakját. Ebben az esetben *rugalmas* alakváltozásról beszélünk. Ilyen esetekben az alakváltozás mértéke arányos a ható erővel. Célunk az arányossági tényező meghatározása egy rúd alakú próbatest esetében.

Feltevések

Legyen a vizsgált rúd hossza l, keresztmetszete A, amelyet a rúd egész hosszában egyenletesnek tételezünk fel. A rudat egyik végén rögzítjük. A másik végén ható F húzó erő hatására megnyúlik. A mérhető Δl megnyúlás a *feszültség*gel, vagyis a keresztmetszet egységnyi területére ható húzó erővel arányos:

$$\Delta l = \frac{\alpha l F}{A},$$

ahol α valamilyen arányossági tényező. Helyette általában az *E rugalmassági modulus*t vagy *Young-modulus*t használjuk:

$$\Delta l = \frac{lF}{EA}. \tag{1.1}$$

Feltételezzük, hogy a kísérletben alkalmazott F erők nem mennek túl a *rugalmasság határán*, vagyis csak olyan erőket, alkalmazunk, amelyekre az (1.1) összefüggés érvényes. Ez azt is jelenti, hogy amikor a megnyúlást egymás után többször megmérjük, a kapott eredmény független az előző mérések eredményétől.[1] Feltesszük továbbá, hogy mind az erőt, mind a Δl megnyúlást minden mérés esetében azonos bizonytalansággal mérjük. Végül elhanyagoljuk az l hosszúság és az A keresztmetszet mérési hibáját. Végeredményben tehát a következő feltevéseket tesszük:

- az (1.1) egyenlet érvényessége;
- az egyes mérések függetlensége;
- l és A mérési hibájának elhanyagolhatósága;
- a mérési bizonytalanság azonossága.

A kísérlet tervezése

Jóllehet a mérés feladata a rugalmassági modulus értékének *meghatározása*, ajánlatos ezt annak *igazolásásával* kiegészíteni, hogy a vizsgált alakváltozások rugalmasak. Ellenkező esetben ugyanis a rugalmassági modulusra torzított értéket fogunk kapni. Az utóbbi, kiegészítő célkitűzésből következik, hogy az F erő minél több különböző értékénél kell megmérnünk a Δl megnyúlást, hiszen csak így ellenőrizhetjük az (1.1) szerinti lineáris összefüggés fennállását. Ehhez ügyelnünk kell, nehogy az F erő túlságosan nagy értékei forduljanak elő, különben előfordulhat, hogy tartós alakváltozást idézünk elő a próbatesten. Ebből a szempontból a kísérlet tervezésében nagy segítséget jelenthetnek a korábbi kísérletek eredményei. Ha ilyenek nincsenek, ajánlatos próbaméréseket végezni. Az előbbi, eredeti célkitűzés ugyanakkor azt igényli, hogy az F erőnek csak olyan értékeit válasszuk ki, amelyek biztosítják, hogy a rugalmassági modulus értékét minél nagyobb pontossággal tudjuk meghatározni. Meg lehet mutatni, hogy ehhez az F erő lehető legnagyobb értékéig kívánatos elmenni. Látjuk tehát, hogy egymásnak ellentmondó követelményeket kell kielégítenünk.

A használt próbatest kiindulási adatait (l hosszúság és A keresztmetszet) általában az a műhely szolgáltatja, ahol a próbatest készült. Ezeket *névleges érték*eknek nevezzük, és mérési hibájukat általában elhanyagoljuk, mint a fentiekben is tettük. Ennek ellenére a tervezés során nem kerülhetjük meg az ezzel kapcsolatos elemzéseket. A műhely ugyanis minden esetben megkérdezi, milyen *tűrés*sel kívánjuk a próbatestet elkészíttetni. Erre pedig csak akkor tudunk felelni, ha számszerűen elemezzük a tűrésnek a végső mérési pontosságra való hatását. Minél kisebb a tűrés, annál nagyobbak a gyártási költségek, tehát nem biztos, hogy az az optimális, ha a tűrések okozta bizonytalanság elhanyagolhatóan kicsi.

A mérés tervezésének fontos része azoknak a külső körülményeknek a számbavétele, amelyek hatással lehetnek a mérés eredményeire. Az adott mérés esetében ilyen például a laboratórium *hőmérséklet*e: jóllehet a rugalmassági modulust nem a hőmérséklet függvényében kívánjuk megmérni, a hőtágulás befolyásolja a

[1] Más szóval: a korábbi mérések nem okoztak maradandó alakváltozást. A rugalmasság határának túllépése nem mindig okoz maradandó alakváltozást, de ezt – az egyszerűség kedvéért – figyelmen kívül hagyjuk.

Δl megnyúlás mért értékeit. Célszerű tehát a mérést (ismert) állandó hőmérsékleten elvégezni. Ha ez nem lehetséges, ajánlatos a hőmérsékletet szintén megmérni, hogy az esetleges korrekciókat el lehessen végezni. Ha az alkalmazott nyúlásmérőt és erőmérőt mi magunk kalibráljuk, az erre vonatkozó méréseket is meg kell terveznünk.

Mérések

Mihelyt a mérési eljárást a fentiek értelmében maghatároztuk, a mérést a lehető legnagyobb *gondosság*gal kell elvégeznünk, ami nemcsak azt jelenti, hogy el kell kerülnünk az esetleges durva hibákat (téves beállítások, téves leolvasások, a leolvasott értékek hibás feljegyzése stb.), hanem azt is, hogy az alapul vett feltevések teljesüljenek. Különösen ügyelnünk kell a mérés olyan külső körülményeire, amelyek ugyan nem képezik a mérés tárgyát, de befolyásolják annak eredményét. Esetünkben ilyen a külső hőmérséklet vagy (esetleg) a mérőberendezések kalibrációja.

A mérés végrehajtásának alapvetően fontos része a mérési eredmények feljegyzése vagy – általánosabban – *dokumentáció*ja. A kapott eredményeket pontosan úgy kell rögzítenünk, ahogy azok megszülettek. A mérés tervezésekor fel kellett mérnünk, melyek azok a mennyiségek, amelyeket szeretnénk meghatározott értéken tartani, de legalábbis figyelni. Tehát az F erő és a Δl megnyúlás mért értékei mellett fel kell jegyeznünk a hőmérséklet és a műszerek kalibrációjára vonatkozó adatokat is (ha a kalibrációt mi végeztük).

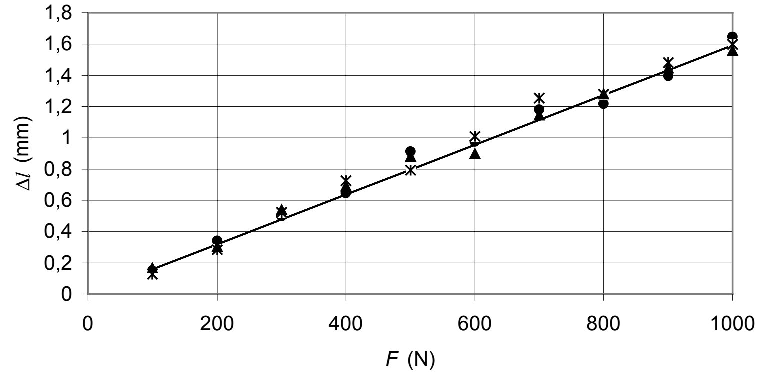
1.1a. táblázat. Rugalmassági együttható mérése (sikeres)

F (N)	Δl (mm) (1. sorozat)	Δl (mm) (2. sorozat)	Δl (mm) (3. sorozat)
100	0,151	0,129	0,169
200	0,341	0,283	0,305
300	0,498	0,522	0,542
400	0,646	0,724	0,690
500	0,912	0,793	0,882
600	0,974	1,008	0,899
700	1,180	1,255	1,147
800	1,217	1,281	1,280
900	1,397	1,482	1,446
1000	1,646	1,599	1,559

Az *1.1a. táblázat* egy ilyen mérés eredményét mutatja, amelyet az *1.1.a. ábrá*n grafikusan ábrázoltunk. A próbatest egy 2 mm átmérőjű, 1 m hosszúságú acél huzal, tehát az (1.1) képlet szerinti mennyiségek:

$$l = 1000 \text{ mm}, \qquad A = 3{,}14 \text{ mm}^2.$$

A rugalmassági modulus értéke $E = 2 \cdot 10^5$ N/mm^2 (irodalmi adatok alapján). A húzó erő tíz értékénél három sorozatban mértük végig a Δl megnyúlás értékeit. Az ábráról úgy látszik, hogy mindhárom sorozatban a kapott pontok jól illeszkednek az (1.1) képlet szerint várt egyenesre. A későbbi fejezetekben tárgyalt módszerekkel ez a három méréssorozat az E rugalmassági modulus valóban nagy pontosságú meghatározását teszi lehetővé. Ez tehát *sikeres* mérés.



1.1a. ábra. Rugalmassági együttható mérése (sikeres)

A tapasztalat azt mutatja, hogy célszerű olyan részleteket is feljegyeznünk, amelyeket a mérés végzésekor nem feltétlenül tartunk lényegesnek: a használt műszerek beállítására vonatkozó adatok, a végrehajtás geometriáját jellemző méretek stb. Igaz, ezekre nincs szükség, ha a mérést sikerült rendben végrehajtani, viszont lehetséges, hogy éppen ezek segítenek egy sikertelennek tűnő mérés megmentésében.

Az adatok értelmezése

A mérési eredmények megszületését követően tudjuk a kitűzött célt elérni: meghatározzuk az E rugalmassági modulus értékét. Ezt a műveletet a matematikai statisztikában *paraméterbecslés*nek nevezik. Nincs olyan műszer, amely közvetlenül mérné a rugalmassági modulust, tehát nem tehettünk mást, mint a vele az (1.1) képlet szerint összekapcsolható Δl és F mennyiségeket mérni, és ezek mért értékeiből *következtetni* a keresett E mennyiség értékére. Mivel az előbbieket csak adott bizonytalansággal tudjuk mérni, az utóbbit is csak valamilyen bizonytalansággal kaphatjuk meg. Azt, hogy az (1.1) képlet érvényes-e, először célszerű grafikusan ellenőrizni, amint az *1.1a. ábrá*n tettük. Ugyanerre természetesen más módszereket is fogunk látni.

Tekintve, hogy E becslésének alapja az (1.1) összefüggés, illetve a többi, fent megfogalmazott feltevés, a kiértékelés fontos része a feltevések teljesülésének ellenőrzése. Ha úgy találjuk, hogy ezek nem teljesülnek maradék nélkül, *korrekciók*at kell alkalmazni. Gyakori, hogy a hőmérséklet megfigyelt értékei (T) eltérnek a névleges hőmérséklettől (T_0), tehát a hőtágulási együttható (c) segítségével a megfigyelt Δl megnyúlásokat vissza kell számolnunk a névleges hőmérsékletre. Matematikailag ezt úgy fejezhetjük ki, hogy Δl-et nem (1.1), hanem a módosított

$$\Delta l = \frac{lF}{EA} + c\left(T - T_0\right) \qquad (1.2)$$

képlet adja meg. Az itt szereplő c együtthatót általában az irodalomból vesszük, vagy – ha irodalmi adat nem áll rendelkezésünkre – nekünk magunknak kell c-t megmérnünk.[2]

[2] Szilárd testek hőtágulása kicsi, tehát a korrekciós tag várhatóan elhanyagolhatónak fog bizonyulni a gyakorlatban. Annak, hogy szerepeltetjük, csak módszertani jelentősége van.

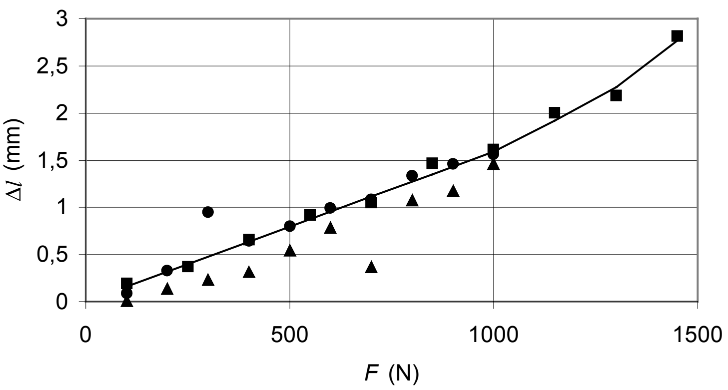
Következtetések levonása

A fentiekben vázolt eljárás végén a levonható legfontosabb következtetés nyilvánvalóan az E rugalmassági modulus becsült értéke, ami magában foglalja a bizonytalanság mértékének és természetének a meghatározását is. Ha a mérést valamilyen ipari megrendelésre, szolgáltatásképpen végeztük, egy erről szóló *jegyzőkönyv* tulajdonképpen elégséges (amely természetesen tartalmazza a mérési körülmények és a paraméterbecslés részleteinek a leírását is).

Tudományos célú mérés esetében azonban célszerű az alapfeltevésekre és az alkalmazott mérési módszerre vonatkozóan is következtetéseket levonni, esetleges továbbfejlesztési javaslatokat tenni. Nagyon gyakori következtetés, hogy a kapott mérési pontosság nem elégséges, ezért kívánatos a mérést megismételni. Fel kell ismernünk az "elrontott" méréseket, és vagy elvégezni a korrekciókat, vagy – ha lehetséges – a mérést megismételni és az elrontott mérést csak próbamérésnek tekinteni. Egy ilyen esetet elemzünk az alábbi részben.

Egy elrontott mérés elemzése

Néha sajnos előfordul, hogy durva hibákat követünk el, és – ami szintén nem ritka – ez csak a kiértékelés során derül ki.[3] Ilyen eset látható az *1.1b. ábrá*n és az *1.1b. táblázat*ban. A $\Delta l = f(F)$ függvény mérésének második sorozatában az F erő túllépte a rugalmas alakváltozás határát, ami onnan látszik, hogy a kapott pontok eltérnek az (1.1) képlet szerinti egyenestől.[4] Az E rugalmassági modulus meghatározására csak a görbe egyenes szakasza alkalmas, a többi pontot figyelmen kívül kell hagynunk. A leírt módon torzított méréseket valószínűség-elméleti szigorúsággal kiválasztani a valóságban nem egyszerű. A későbbi fejezetekben ezt a kérdést érinteni fogjuk. A problémát magát az *aszimptotikus tartomány keresése* néven szoktuk emlegetni, ugyanis arról van szó, hogy az (1.1) függvény az F változónak nem minden értékére érvényes, hanem csak a rugalmasság határán belül, aszimptotikusan érvényes. Erről szól a 9. fejezet.



1.1b. ábra. Rugalmassági együttható mérése (elrontott)

---

[3] Ha még akkor sem derül ki, az már baj: hibás végeredményt fogunk publikálni, amire az sem mentség, hogy jóhiszeműen tesszük.

[4] A gyakorlatban nem tudjuk az ábrára berajzolni az itt látható folytonos görbét, hiszen ehhez ismernünk kellene a $\Delta l = f(F)$ függvény elméleti alakját. Az *1.1b. ábrá*ra csak azért rajzoltuk be, hogy világosabban látsszon az egyenestől való eltérés.

1.1b. táblázat. Rugalmassági együttható mérése (elrontott)

F (N)	Δl (mm) (1. sorozat)	Δl (mm) (2. sorozat)	Δl (mm) (3. sorozat)
100	0,089		0,0049
200	0,331		0,138
300	0,948		0,228
400	0,641		0,312
500	0,799		0,540
600	0,991		0,781
700	1,087		0,364
800	1,336		1,077
900	1,459		1,172
1000	1,558		1,460
100		0,193	
250		0,370	
400		0,656	
550		0,918	
700		1,049	
850		1,464	
1000		1,614	
1150		2,003	
1300		2,187	
1450		2,815	

Az elkövetett baklövésnek azonban további következményei is vannak: a mérés után a próbatest hossza maradandóan megváltozott, tehát l értéke nagyobb lett egy kicsivel. Az adott példában ez a maradandó megnyúlás körülbelül 0,2 mm. A próbatest névleges hossza ezután l = 1000,2 mm, aminek a hatása az (1.1) képletben elhanyagolható. A harmadik sorozat mérésekor azonban egy újabb hiba is történt: ezt a hosszváltozást nem vettük figyelembe a Δl megnyúlások mérésekor. Az *1.1b. ábrá*n emiatt kerültek a harmadik sorozatnak megfelelő háromszögek az előbbi két sorozat görbéi alá.

Ha a mérési eredményeket úgy rögzítettük, ahogy megszülettek, tehát világosan látszanak az egyes sorozatok, a kiértékelés keretében esetleg helyrehozhatjuk az elkövetett hibákat. Egyrészt ki kell választanunk az egyenestől elhajló pontokat, és a rugalmassági modulus becslésében csak a többit szabad felhasználnunk. Másrészt a harmadik sorozatban mért megnyúlásokhoz egy Δl_0 additív korrekciót kell alkalmaznunk, vagyis (1.2) helyett ezekre a

$$\Delta l = \frac{lF}{EA} + c\left(T - T_0\right) + \Delta l_0 \qquad (1.3)$$

képlet érvényes. Mivel a hibát csak utólag vettük észre, Δl_0 értékét sem ismerjük. Ez azt jelenti, hogy az eredetileg keresett E mellett ezt is becsülnünk kell.

Végeredményben tehát az elkövetett hibákat rendbe lehetett tenni, de lássuk be, hogy ennek az volt a feltétele, hogy a feljegyzésekből pontosan látszott, hogyan történt a mérés. Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy az eredetileg tett alapfeltevésekhez továbbiak járultak, hiszen csak feltevésünk lehet arról, mi lehetett a mérés során elkövetett hiba jellege. Helyzetünket természetesen könnyíti, ha nem siettünk a mérés nyomainak eltüntetésével. Például hasznos, ha utólag meg lehet vizsgálni a próbatestet, valóban bekövetkezett-e rajta a feltételezett maradandó alakváltozás, és ha igen, akkor az mekkora (vagyis Δl_0 értékét utólag meg lehet mérni).

Befejezésül még két hibát kell az *1.1b. ábrán* és az *1.1b. táblázatban* észrevennünk, amelyekhez hasonlók gyakran előfordulnak, ha gondatlanul mérünk és rendetlenül dolgozunk. Az adatoknak a számítógépbe való bevitelekor történt két elírás:

- az első sorozatban az $F = 300$ N-hoz tartozó megnyúlás valójában 0,448;
- a harmadik sorozatban az $F = 700$ N-hoz tartozó megnyúlás valójában 0,864.

Ha rendetlenül írunk, a 4-est könnyen olvashatjuk 9-esnek, a 8-ast 3-asnak. Ezeket a hibákat azért csempésztük a szimulált "mérésbe", hogy megvilágíthassuk az ún. *kiszóró pontok* fogalmát. Így nevezzük azokat a mérési adatokat, amelyekre valamilyen durva mérési hiba folytán nem érvényesek az alapfeltevések. Azonosításuk és kezelésük a matematikai statisztika egyik nehéz problémája. Ennek szenteljük a 8. fejezetet.

1.2. Általános követelmények

Az 1.1. alfejezetben tárgyalt példa után az alábbiakban általánosan is megfogalmazzuk a mérések végzésével és kiértékelésével szemben támasztott követelményeket. Ez egyes szakaszok címe tulajdonképpen azonos az előző alfejezet címeivel. Nehogy ez félreértést okozzon, az alábbiakban a szakaszokat betűjellel látjuk el.

a) A probléma megfogalmazása

Ne tévesszenek meg bennünket a folyóiratcikkek világos és logikus okfejtései, amelyekkel témájukat bevezetik. Általában rengeteg ötletre és intuícióra volt szükség ahhoz, hogy egyáltalán egy tárgyalható problémát tudjanak megfogalmazni. A középszerű és a kiváló tudóst többek között az különbözteti meg egymástól, milyen ötletesen és mekkora képzelőerővel tűzi ki a megoldandó problémát. A probléma kitűzése többnyire már előrevetíti a siker vagy a kudarc lehetőségét. Néhány példa probléma kitűzésére:

- VALAMILYEN FIZIKAI MENNYISÉG MÉRÉSE. A keresett mennyiséget néha közvetlenül meg tudjuk mérni: egy rúd hossza, egy edény térfogata stb. A leggyakoribb azonban az, hogy a keresett mennyiség (vagy mennyiségek) helyett másokat tudunk közvetlenül megmérni, amelyek az előbbiekkel ismert kapcsolatban vannak. Ilyen feladat a rugalmassági modulus fentiekben tárgyalt mérése is. Kézenfekvő példa továbbá minden csillagászati mérés: az égitesteknek az égbolton való látszólagos helyét vagy mozgását mérjük meg, és geometriai meg égi mechanikai megfontolásokkal tudjuk a közvetlenül mért mennyiségeket az égitestek tényleges helyével vagy mozgásával összekapcsolni.
- FIZIKAI ÖSSZEFÜGGÉSEK KÍSÉRLETI MEGHATÁROZÁSA. Vannak fizikai mennyiségek, amelyeknek valamilyen változótól való függését elméletileg rosz-

szul vagy egyáltalán nem tudjuk megjósolni, így ezt kísérletileg kell meghatározni. Példák: a víz sűrűsége különböző hőmérsékleteken, szilárd testek fajhőjének a hőmérséklettől való függése, hatáskeresztmetszetek függése a reakciót kiváltó részecske energiájától, a műszerek kalibrációja stb.

- ELMÉLETI KIJELENTÉS IGAZOLÁSA. Az elméleti kijelentés általában egy mennyiség számértéke vagy fizikai mennyiségek közötti függvénykapcsolat alakja. A kísérleti igazolás érdekében megmérjük a megjósolt mennyisége(ke)t, és *ellenőrizzük* azt a *hipotézist*, hogy az elméleti kijelentés helyes. A végső következtetés ekkor a hipotézis elfogadása vagy elvetése. Tekintve, hogy minden mérés eredményét terheli valamilyen bizonytalanság, az ilyen típusú következtetések sohasem lehetnek biztosak. Legfeljebb arról lehet szó, hogy a hipotézis helyes vagy téves voltát valamilyen *valószínűséggel* mondjuk ki.
- SZÁMÍTÁSI MÓDSZER VALIDÁLÁSA. A korszerű számítástechnika lehetővé teszi, hogy bonyolult jelenségeket, például egy atomreaktor működését számítógéppel szimuláljuk. A számítógépi program számos közelítést alkalmaz, továbbá nagy számú magfizikai adatot használ. A biztonság érdekében meg kell követelni, hogy a számítási pontosság kielégítő legyen.[5] Ennek az utóbbi követelménynek hatósági érvényű kielégítését *validálásá*nak nevezzük, ami azt igényli, hogy a számítások eredményeit kísérleti adatokkal ellenőrizzük. Ha a számítások eredményei a kísérleti adatoknak ellentmondanak, a validálás feladata a *számítási pontosság minősítése* (esetleg *számszerűsítése*) is.
- MÉRÉSI MÓDSZER BEGYAKORLÁSA. A hallgatói laboratóriumi gyakorlatok elsődleges célja, hogy a hallgatók kidolgozott méréseken keresztül megtanulják a kísérleti fizikus mesterfogásait. Ez azt jelenti, hogy a gyakorlatot előkészítő tanár az alábbiak nagy részét már megtette. A hallgatók feladata csak a mérés elvégzése és kiértékelése.

b) Feltevések

A mérés számára elsőként alapul vett feltevés mindenkor a mérés céljából következik. Ha a cél valamilyen mennyiség meghatározása, fel kell tennünk annak az összefüggésnek a helyességét, amely a közvetlenül mért mennyiségeket a keresett mennyiséggel összekapcsolja. Hasonlóan fel kell tennünk az igazolandó elmélet vagy a validálandó számítógépi modell helyességét. Ezt a hozzállásunkat a kapott eredmények értelmezéséig fenn kell tartanunk. Elvetnünk csak a végső következtetések levonásakor szabad – ha egyáltalán szükséges.

Tekintve, hogy minden mérés eredménye bizonyos mértékig bizonytalan, ennek a bizonytalanságnak a természetére és mértékére szintén kell feltevéseket tennünk. Hogy ez konkrétan mit jelent, arról a későbbi fejezetekben bőven lesz szó.

A mérést befolyásoló külső feltételekre vonatkozóan további feltevések szükségesek. Ezek szabják majd meg az alkalmazandó korrekciókat. Fontosságukat

[5] A mérésekhez hasonlóan, a számítások pontossága is véges – ha másért nem, akkor a felhasznált adatok véges pontossága miatt.

mutatja, hogy nemritkán döntő szerepet játszanak a végső eredmények eredő bizonytalanságában.

c) Tervezés

A kísérletek tervezése igényli a legtöbb fantáziát, és ez az a terület, amelyről a legkevesebbet lehet általánosságban mondani.

Tegyük fel, hogy elképzeltük a kísérleti berendezést. Méreteit, tűréseit, a műszerezettségére vonatkozó adatokat a kísérletezőnek kell meghatároznia annak érdekében, hogy a megfogalmazott probléma megoldására alkalmas legyen. A döntő természetesen a mérési pontosság kérdése. Erre két példát hozunk. Amikor a kísérlet révén szeretnénk két elméleti jóslat között választani, a mérési bizonytalanságnak nyilvánvalóan sokkal kisebbnek kell lennie, mint a két jóslat közötti eltérés. Számítógépi programok validálásakor pedig a mérési pontosságnak általában jobbnak, de legalábbis közel azonosnak kell lennie, mint a számításoktól elvárt pontosság. Ha ezt nem tudjuk elérni, akkor a kísérletek számának a növelésével tudjuk a mérések pontatlanságát ellensúlyozni. Mind a pontosság javításáa, mind a kísérletek számának a növelése többletköltséggel jár. Már a kísérletek tervezésekor meg kell tehát találnunk a legkisebb költségekre vezető optimumot.

Gondosan tervezendő az adatok dokumentálásának a módja. Már a kísérlet megkezdése előtt el kell döntenünk, hogyan fogjuk az adatokat kiértékelni, melyek lesznek azok a külső befolyásoló tényezők, amelyeket kézben tartunk, melyek azok, amelyeket korrekcióba veszünk, és végül melyek azok, amelyek hatását elhanyagoljuk. Terv szükséges a mérőberendezés kalibrálására, helyes működésének ellenőrzésére, ennek módjára és gyakoriságára.

A kísérletek tervezésének általános tárgyalására ebben a jegyzetben nem kerülhet sor. Vannak művek [2], amelyek ezzel a kérdéssel is foglalkoznak. Általánosan alkalmazható receptek nem születtek még. Más szóval: *a kísérletek tervezéséből nem lehet kiiktatni a gondolkodást.*

d) A mérések végrehajtása

Miután a fentiekben összegzett előkészítés megtörtént, a mérések kivitelezhetők. A legfontosabb követelmény a kísérleti terv lehető legnagyobb gondossággal való végrehajtása. Ezen túlmenően a következőket ajánlatos szem előtt tartani:

- Az esetleges hibákat a legkönnyebben a mérések végzése közben hozhatjuk helyre. A mérések befejezése után már aligha ellenőrizhetjük a leolvasások helyességét, a műszerek beállítását stb. Ezért a kapott eredmények értelmezésével nem okos dolog megvárni a mérések végét, hanem már a részeredményeket is célszerű elemezni. Az *1.1b. ábrá*n illusztrált hibák felismerésére és helyrehozására csak a legtapasztaltabb kísérletezők képesek.[6]
- A munka közben készített feljegyzések legyenek részletesek, és tartalmazzanak minden olyan információt, amely segíthet a kiértékelésben. A kísérletezők gyakran esnek abba a hibába, hogy emlékezetüket végtelen

[6] Más kérdés, hogy azok el sem követik ezeket a baklövéseket.

hosszúnak tekintik. Arra kell számítanunk, hogy a fontos részletek többségére már egy hét múlva sem fogunk emlékezni.

- Minden kiértékelés feltételezéseken alapul (lásd fentebb), így érvényét veszti, ha ezek a végső következtetések szerint helytelennek bizonyulnak. Ilyen esetekben új feltevéseket kell tenni, és az adatokat újra ki kell értékelni. Ez azonban csak akkor lehetséges, ha megvannak a *nyers mérési adatok*. Az a korszerű, ha tárolásuk formája valamilyen kiértékelő program által olvasható számítógépes fájl.
- A dokumentáció legyen olyan, hogy mások is át tudják tekinteni. Aki erre nem ügyel, lenézi saját méréseit, hiszen fel sem tételezi, hogy eredményei után mások is érdeklődni fognak. A hallgatók különösen ügyeljenek arra, hogy mérési jegyzőkönyvükön legalább a tanár el tudjon igazodni.

e) Kiértékelés

A kiértékelés módszereiről és szabályairól a jegyzet többi fejezetében bőségesen lesz szó. Három általános megjegyzést azonban itt is tennünk kell:

- Kiértékeléskor megváltozik a kísérlethez való viszonyunk. Az előkészítésben azzal foglalkoztunk, hogyan tudjuk a kísérletet a kitűzött célnak legjobban megfelelő módon elvégezni. Miután a mérés lezajlott, azokra az adatokra kell támaszkodnunk, amelyeket a mérésben megkaptunk. Ezek tartalmazhatnak hibákat, utólag ugyanis rájöhetünk, hogy valamit másképp kellett volna csinálnunk. Kiértékeléskor mindezen már nem tudunk változtatni: abból az adathalmazból kell a kívánt információt kiszednünk, ami rendelkezésünkre áll.
- A kísérleti adat nagy érték. Ennek megfelelő tisztelettel kell bánnunk vele. Ez különösen a nyers mérési adatokra vonatkozik, ugyanis azok jelentik a *kísérleti tényeket*. Minden *kiértékelt* eredmény már függ a tett feltevésektől, tehát csak akkor kísérleti tény, ha minden feltevés helyes.
- A kiértékelésnek ugyan része az esetleges durva hibák kiszűrése, de ez nem vezethet a mérési adatok önkényes megváltoztatására vagy kihagyására, ahogy mondani szokás, “kozmetikázására”. A kérdéssel a 8. fejezetben foglalkozunk.

f) Következtetések

Ahhoz képest, amit a végső következtetésekkel kapcsolatban az 1.1. alfejezetben mondtunk, már kevés hozzátennivalónk marad. A legfontosabb, amit az egész műveletsor végén el kell döntenünk, az a következő: *sikerült a megfogalmazott problémát megoldani*? Ha erre a kérdésre igennel felelhetünk, munkánkat elvégeztük, és nem marad más hátra, mint a *kutatói jelentés*t vagy a *tudományos cikk*et megírni[7]. Ellenkező esetben újabb kísérletet vagy kiértékelést kell javasolnunk.

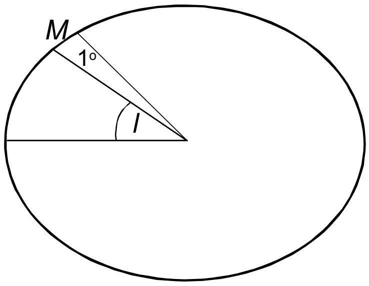
[7] Lelkiismeretes tudósok mindkettőt megírják. A kutatói jelentés tartalmazza a részleteket, amelyek alapján mások megismételhetik a mi kísérletünket. A tudományos cikk a kísérleti eredmények, de főleg a következtetések elegáns, lényegretörő megfogalmazása.

Hallgatói labormérések esetében a legfontosabb “következtetés” a mérési jegyzőkönyv elkészítése, amely nem a tudományos cikk, hanem a kutatói jelentés rokona.

1.3. Jellegzetes példák mérések kiértékelésére

Történelmi visszapillantás

Abban az értelemben, ahogy azt ma értjük, a 18. század végén merültek fel méréskiértékelési problémák. Nevezetes P. S. Laplace számítása (1786), amellyel a Föld alakját meghatározta. Már akkor tudták, hogy a Föld nem gömb alakú, hanem egy forgási ellipszoiddal közelíthető. Az ellipszoid paramétereit méréssel határozták meg. Tekintsük az *1.2. ábrá*t. A Föld keresztmetszetét mutatja, amely a feltevés szerint ellipszis. Különböző földrajzi helyeken megmérték a délkör 1° középponti szöghöz tartozó darabjának M hosszát. A mérés helyét az l szélességi körrel jellemezték. Geometriai megfontolásokkal levezették, hogy M és l között az (1.4) képlet szerinti összefüggés áll fenn, ahol a és b az ellipszis alakjától függő ismeretlen állandók.[8]



$$M = a + b\sin^2 l = a + bx \qquad (1.4)$$

1.2. ábra. A Föld alakja

A mérési eredmények az *1.2. táblázat*ban találhatók.[9] Laplace a következőképpen okoskodott. Tekintve, hogy nem lehet a és b értékét úgy megválasztani, hogy az (1.4) képlet minden mérésre pontosan érvényes legyen, a képlet hibáját a lehető legkisebb értékre próbálta leszorítani. Adott a és b mellett meghatározta az

$$\left| M - a - b\sin^2 l \right|$$

hibatagok maximumát, majd megkereste a és b olyan értékeit, amelyek mellett ez a maximum a legkisebb. A modern terminológia szerint ezt *minimax becslés*nek nevezzük. Laplace eredménye a következő volt:

$$a = 25525{,}1 \text{ dupla öl} \qquad \text{és} \qquad b = 308{,}2 \text{ dupla öl.}$$

1.2. táblázat. A Föld alakjára vonatkozó mérések

Földrajzi hely	l (°)	$x = \sin^2 l$	M

[8] a és b nem az ellipszis féltengelyeinek a hossza, de azokkal ismert összefüggésben áll. Ha tehát meghatározzuk a-t és b-t, a féltengelyeket is megkapjuk.

[9] A hosszúságot akkoriban “dupla öl” egységekben mérték. Csak az érdekesség kedvéért hagytuk ezt meg. A szögeket azonban átszámoltuk a ma használatos fokokra, jóllehet eredetileg olyan fokban mérték, amely szerint a teljes szög 400°.

			(dupla öl)
Peru	0,0	0,0	25538,85
Jóreménység foka	37,0093	0,30156	25666,65
Pennsylvania	43,5556	0,39946	25599,60
Olaszország	47,7963	0,46541	25640,55
Franciaország	51,3327	0,52093	25658,28
Ausztria	53,0926	0,54850	25683,30
Lappföld	73,7037	0,83887	25832,25

1 dupla öl = 2×1,949 m

Eredetileg A. M. Legendre javasolta 1806-ban a *legkisebb négyzetek módszerét*. Javaslatát az *1.2. táblázat*ban szereplő adatokra vonatkozóan fogalmazzuk meg. Ha az egyes mérések megkülönböztetésére bevezetjük az i indexet, akkor szerinte a

$$Q = \sum_{i=1}^{7} \left(M_i - a - bx_i \right)^2 \tag{1.5}$$

négyzetösszeg minimumát kell keresni. C. F. Gauss csillagászati és geodéziai megfigyelések kiértékelésével foglalkozott. 1809-ben ő vetette meg a legkisebb négyzetek módszerének az alapjait. Lényegében a mai napig használjuk az általa bevezetett fogalmakat és jelöléseket.

Újabb áttörést eredményezett A. Fisher munkássága a 20. század tizes éveiben, akinek a nevéhez fűződik a *maximális valószínűség*[10] ma általánosan alkalmazott módszere. Eszerint a keresett paraméterek becsült értékét úgy választjuk meg, hogy azok mellett a kapott kísérleti eredmény a legvalószínűbb legyen. A módszer előnye, hogy matematikailag jól kezelhető formulákra vezet, továbbá hogy a becslésnek kedvező matematikai statisztikai tulajdonságai vannak.

A hipotézisek vizsgálata elsősorban J. Neyman és K. Pearson munkássága révén fejlődött ki a 20. század 30–40-es éveiben. Számos statisztikai próba született, amelyek közül a legfontosabbakat ebben a jegyzetben is tárgyaljuk.

Az 1980-as évek végére újból előkerültek olyan becslési módszerek, amelyeket a 19. század végén már alkalmaztak, de a maximális valószínűség módszere háttérbe szorította őket. Közéjük tartozik a már említett minimax módszer, továbbá a *legkisebb abszolút értékek* módszere. Az utóbbi szerint a

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{7} \left| M_i - a - bx_i \right| \tag{1.6}$$

összeg minimumát keressük az a és b paraméterek függvényében. Matematikai szempontból ez a probléma visszavezethető a gazdasági optimalizálás céljaira kidolgozott *lineáris programozás*ra. A módszer akkor jött újra divatba, amikor erre közhasznú programok jelentek meg. A matematikusok ajánlják ennek a használatát *is*, ugyanis a módszer jelentős előnye, hogy sokkal kevésbé érzékeny a kiszóró pontokra, mint akár a legkisebb négyzetek, akár a maximális

[10] Egyes magyar szerzők a módszer eredeti angol neve után *maximum likelihood* módszerről beszélnek. Gyakran – beszédben – ma is ezt a kifejezést használjuk.

valószínűség módszere. Úgy mondjuk, hogy ezek *robusztus* becslések. Részletesebb tárgyalásukra sajnos nincs helyünk ebben a jegyzetben.

Paraméterbecslés függvényillesztéssel

*Függvényillesztés*ről beszélünk, amikor a *közvetlenül mért* és a *keresett* mennyiségek között matematikailag megfogalmazható függvénykapcsolat van. Az előbbieket ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n-nel, a keresett mennyiségeket pedig a_1, a_2, ..., a_m-mel jelöljük. Ekkor a kapcsolatot a következő alakban írhatjuk fel:

$$\xi_i = f(x_i, \mathbf{a}) + \zeta_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{1.7}$$

ahol x_i az ún. *független változó*, **a** az ismeretlen mennyiségekből képezett vektor, ζ_i a *hibatag*. Az utóbbi azért lép fel, mert – mint már többször hangsúlyoztuk – a mért mennyiségek értéke bizonyos mértékig a véletlentől függ, tehát az elméletileg levezetett összefüggés sohasem teljesül pontosan. A "keresett mennyiségeket" ebben az összefüggésben *paraméterek*nek szoktuk nevezni. Nos, a *paraméterbecslés* abban áll, hogy az a_1, a_2, ..., a_m mennyiségeket úgy választjuk meg, hogy a hibatagok valamilyen értelemben a lehető legkisebbek legyenek.

Már több, az (1.7) képletnek megfelelő függvénykapcsolatot is felírtunk korábban. Laplace problémájában az (1.7) szerinti függvénykapcsolat a következő [vö. (1.4) képlet]:

$$f(x_i, \mathbf{a}) = a_1 + a_2 x_i , \qquad \xi_i = M_i , \qquad x_i = \sin^2 l_i , \qquad a_1 = a , \qquad a_2 = b .$$

Az *1.2. táblázat*ban a mérési pontok száma $n = 7$, a keresett paramétereké pedig $m = 2$. A rugalmassági modulus mérésekor a függvénykapcsolat alakja attól függ, a felírt képletek melyike alkalmazandó. A legegyszerűbb az (1.1) képletnek megfelelő eset:

$$f(x_i, \mathbf{a}) = \frac{l x_i}{a_1 A} , \qquad \xi_i = \Delta l_i , \qquad x_i = F_i , \qquad a_1 = E .$$

Az (1.2) esetben az ismeretlen paraméterek száma továbbra is $m = 1$, de a független változók száma most kettő: $x = F$ és $y = T$:

$$f(x_i, y_i; \mathbf{a}) = \frac{l x_i}{a_1 A} + c(y_i - T_0) , \qquad x_i = F_i , \quad y_i = T_i .$$

Mindkét függvényben *l, A, c* és T_0 ismert állandóknak tekintendők. Nem ritka, hogy – a fenti esethez hasonlóan – egy paraméterbecslési problémának egynél több független változója van. Ennek ellenére – az egyszerűség kedvéért – ezt csak akkor jelöljük külön, ha feltételenül szükséges. Az (1.3) képlet esetében a paraméterbecslés tovább bonyolódik:

$$f(x_i, y_i; \mathbf{a}) = \frac{l x_i}{a_1 A} + c(y_i - T_0) + a_2 ,$$

ahol

$$a_2 = \begin{cases} 0 & \text{az 1. + 2. sorozatban,} \\ \Delta l_0 & \text{a 3. sorozatban.} \end{cases}$$

A keresett paraméterek száma tehát $m = 2$-re nőtt, de az a_2 paramétert csak a 3. sorozatban kell figyelembe venni.[11]

A keresett paraméterekre kapott becsült értékeket az $f(x_i,\mathbf{a})$ függvénybe visszahelyettesítve olyan értékeket kapunk, amelyek – a választott értelemben – a lehető legközelebb állnak a közvetlenül mért adatokhoz. Ilyenek az *1.1a. ábrá*ra berajzolt egyenes pontjai. Így az eljárást *függvényillesztés*nek is nevezzük, hiszen az $f(x_i,\mathbf{a})$ függvény paramétereit úgy választjuk meg, hogy a függvény görbéje a lehető legközelebb haladjon a mért adatokat ábrázoló pontokhoz. Ebben az összefüggésben az $f(x_i,\mathbf{a})$ függvényt *illesztőfüggvény*nek nevezzük. Nem túlzás azt állítani, hogy sikeres kiválasztása a mérés kiértékelésének a kulcsa.

Regresszió

Számos szerző minden függvényillesztést *regresszió*nak nevez. A legegyszerűbb a *lineáris regresszió*, mert a neki megfelelő illesztőfüggvényt a fentiekben már felírt

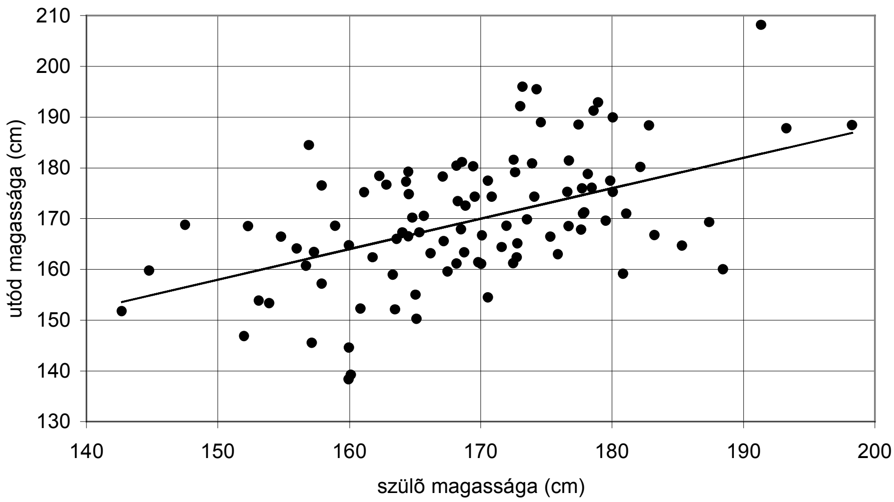
$$f(x_i,\mathbf{a}) = a_1 + a_2 x_i \tag{1.8}$$

képlet adja meg. Az illesztést zsebszámológéppel, sőt grafikusan is végre lehet hajtani. A gyakorlatban a legtöbb illesztési problémát igyekszünk ilyen illesztésre visszavezetni, amit a probléma *linearizálás*ának nevezünk. A dologra a későbbi fejezetekben még visszatérünk, mert ez az eljárás nem mentes a csapdáktól (vö. 7.1. alfejezet)

Nem árt tudni, hogy a “regresszió” kifejezés eredetileg sokkal szűkebb dolgot jelentett. A fogalmat Sir Francis Galton vezette be, aki az élőlények egyes mérhető tulajdonságainak az összefüggését vizsgálta a szülők és az utódok között. Vegyünk egy példát. Azt találta, hogy az átlagnál magasabb szülők gyermekei várhatóan szintén magasabbak az átlagnál, de magasságuk a szülők magassága és az átlag közé esik. Analóg kijelentést lehet tenni az átlagnál alacsonyabb szülők utódairól is.

---

[11] Érdemes megjegyezni, hogy ilyen típusú problémákra a közhasznú számítógépi programok többsége nincs felkészülve. A különlegesség abban áll, hogy az $f(x_i,\mathbf{a})$ függvény *alakja* más az adatok különböző csoportjaira.



1.3. ábra. A szülők és utódok magassága közötti korreláció

Az ebben a szűkebb értelemben vett regressziót az *1.3. ábrá*n látható példával illusztráljuk. Általánosságban megmutatjuk, hogy a hasonló grafikonokon a vizsgált mennyiségek között lineáris kapcsolatnak kell lennie, és az egyenes meredeksége felvilágosítást ad a kapcsolat mértékéről, amit ebben az összefüggésben *korrelációnak* nevezünk. Ha egyáltalán nincs korreláció, a meredekség nulla. A dolgot érdemes külön is megvizsgálnunk (vö. 7.1. alfejezet), mert az ilyen grafikonok hasznosak, ugyanakkor néha meghökkentő és komikus félreértésekre adnak alapot. Számos ilyen példa kering a matematikai statisztika hasznát kétségbe vonó irodalomban. Az elvi különbség miatt ebben a jegyzetben a regresszió kifejezést csak ebben a szűkített értelemben használjuk.

Kiegyenlítés

Tegyük fel, hogy megmértük egy háromszög szögeit, és a következő eredményt kaptuk (Linnyik [1]):

$$\alpha = 54°5' \qquad \beta = 50°1' \qquad \gamma = 76°6'.$$

Összegük 180°12', vagyis 180°-tól eltér. Az eltérés oka a mérési hiba. Az adatok nyilván nem maradhatnak így, hiszen a szögekkel csak akkor dolgozhatunk tovább, ha összegük *pontosan* 180°. A mért szögekhez tehát alkalmaznunk kell valamilyen korrekciót:

$$\alpha = \alpha_0 + \zeta_1 \qquad \beta = \beta_0 + \zeta_2 \qquad \gamma = \gamma_0 + \zeta_3,$$

ahol

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 12'. \tag{1.9}$$

A legkisebb négyzetek módszere alapján a korrekciókra a következő feltételt írhatjuk fel:

$$Q = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 = \text{minimum}. \tag{1.10}$$

Ezt a problémát egyszerű megoldani. Q ugyanis a következő alakba írható át:

$$Q = \sum_{i=1}^{3} \left(\zeta_i - \overline{\zeta} \right)^2 + 3\overline{\zeta}^2 ,$$

ahol

$$\overline{\zeta} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}{3} = \frac{12'}{3} = 4' .$$

Látható, hogy Q akkor veszi fel a minimumát, amikor

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \overline{\zeta} = 4' .$$

A keresett szögek tehát:

$$\alpha_0 = 54°1' \qquad \beta_0 = 49°57' \qquad \gamma_0 = 76°2'.$$

A most megoldott problémát *kiegyenlítés*nek nevezzük. Általánosabban fogalmazva arról van szó, hogy a függvényillesztés során a keresett paraméterek értékét nem választhatjuk meg szabadon, hanem értéküknek ki kell elégíteniük bizonyos összefüggéseket. A most tárgyalt problémában ez az (1.9) képlet. Néha könnyebb a paraméterek közötti összefüggéseket nem explicit formában felírni, hanem azt megkövetelni, hogy az illesztett függvény görbéje egy vagy több rögzített ponton átmenjen. Egyenes illesztésekor például megkövetelhetjük, hogy az egyenes menjen át az origón.

Normálás

Az *1.3. táblázat* egy, az r változó függvényében mért függvényt mutat, amelyet három részletben mértek ki. A mérés részecskeszámlálóval történt, amelynek az érzékenysége mérésről mérésre változott, így a függvény görbéjének más a *normálás*a az egyes mérésekben. Az *1.4a. ábrá*n együtt mutatjuk a három mérésben kapott görbedarabokat.[12]

1.3. táblázat. Eloszlás mérése három részletben

r (cm)	1. mérés	2. mérés	3. mérés
–1	4975		
0	5022		
1	4757		
4	4942	6979	
5	4730	6581	
6	4336	5966	
7	4264	5923	
8		5779	
10		5369	
12		4421	8415
13		3952	7571
14		3591	6506
15		3418	6102
16		3201	5789
17			6184

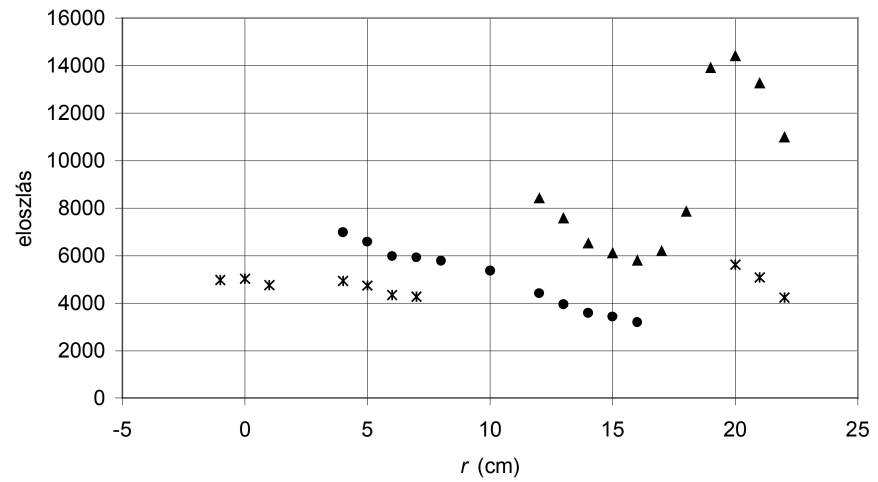
[12] Ezek nem szimulált, hanem tényleges mérések.

18			7854
19			13897
20	5606		14399
21	5076		13248
22	4237		10973

Ahhoz, hogy megkapjuk a keresett $\psi(r)$ eloszlást, a három görbedarabot *össze kell normálni*. Ezen azt értjük, hogy mindegyik darabhoz keresnünk kell egy *normálási tényezőt*, amellyel azt elosztva olyan értékeket kapunk, mintha a detektor érzékenysége minden mérésben azonos lett volna. Ennek a feladatnak a megoldása egyszerű – legalábbis első látásra. A normálási tényezőt valamelyik mérésre vonatkozóan 1-nek választjuk. Legyen ez a 3. mérés. Az első és második mérés normálási tényezőjét a közös r-eknél kapott értékek összevetésével kapjuk:

$$a_1 = \frac{\dfrac{5606}{14399} + \dfrac{5076}{13248} + \dfrac{4237}{10973}}{3} = 0{,}386\,;$$

$$a_2 = \frac{\dfrac{4421}{8415} + \dfrac{3952}{7571} + \dfrac{3591}{6506} + \dfrac{3418}{6102} + \dfrac{3201}{5789}}{5} = 0{,}542\,.$$

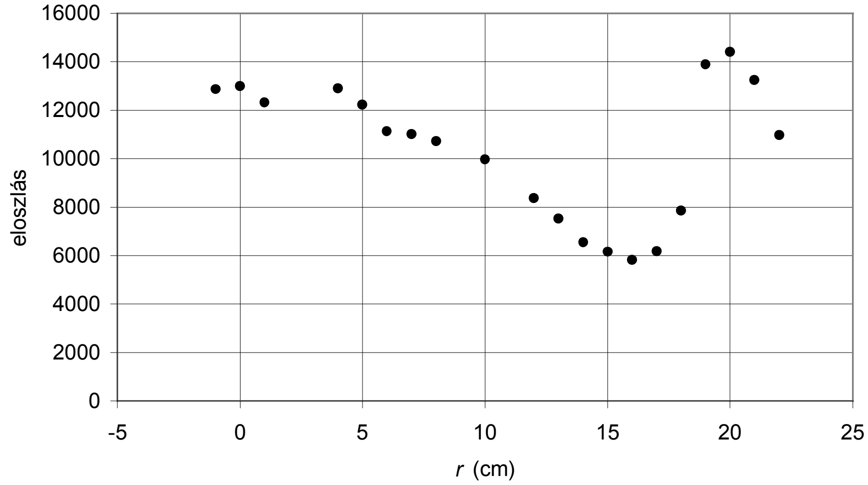


1.4a. ábra. Három részletben mért eloszlás

Ha nincs megfelelő függvényillesztő program, a fenti megoldás elfogadható, de nem ideális. A normálási problémát meg lehet ugyanis függvényillesztési feladatként is fogalmazni. A j-edik méréshez tartozó normálási tényezőt a_j-vel jelöljük ($j = 1, 2, 3$). Ekkor az illesztőfüggvényt a következő alakban írhatjuk fel:

$$f(x, j; \mathbf{a}, \vec{\psi}) = a_j \psi(x), \qquad x = r\,. \tag{1.11}$$

Az *1.3. táblázat*ban szereplő adatokat most két független változó jellemzi: a mérés sorszáma (j) és a mérés helye (r). Kétfajta paramétert kell becsülnünk: a normálási tényezőket (a_j) és a $\psi(r)$ eloszlást, amelynek az értékeit a $\vec{\boldsymbol{\psi}}$ vektor komponenseinek tekintjük. Mivel az *1.3. táblázat*ban az r változó 20 különböző értéke szerepel, a “ψ-típusú” paraméterek száma is ennyi. Mivel a három közül az egyik normálási tényezőt szabadon választhatjuk meg, a becsült paraméterek teljes száma: $m = 20 + 2 = 22$.



1.4b. ábra. Az összenormált eloszlás az (1.11) illesztőfüggvény szerint

Ha a 7.7. alfejezetben tárgyalt módszerekkel a függvényillesztést elvégezzük, a végeredmény a következő:

$$a_1 = 0{,}386 \qquad a_2 = 0{,}539.$$

Ez lényegében ugyanaz, mint a “kézzel” kapott megoldás. Az (1.11) illesztőfüggvény alkalmazásának számos előnye van, amelyekről a későbbi fejezetekben lesz szó. A teljes normált görbe az *1.4b. ábrá*n látható.

Korrekciók

Már a rugalmassági modulus becslésének alapjául szolgáló (1.2) és (1.3) képletekben alkalmaztunk korrekciót a hőtágulásra, illetve a próbatest maradandó megnyúlására vonatkozóan. A gyakorlatban kivételesek az olyan mérések, amelyek kiértékelésében nincs szükség hasonló korrekciókra. Természetesen a korrekció nem mindig egy járulékos tag levonását (vagy hozzáadását) jelenti. Vannak korrekciós osztó- vagy szorzótényezők is, sőt ezek kombinációja is előfordul.

A korrekciók alkalmazása egyszerűnek tűnik. Valóban az is. Nem szabad azonban félvállról venni a dolgot. A korrekciók hatással vannak a végeredmény eredő bizonytalanságára, aminek a figyelembevétele rejt magában csapdákat. Gyakran nem triviális a korrekciókat pontosan ott és pontosan úgy alkalmazni, ahogy azok a mérési adatokat befolyásolják.

Simítás

Az *1.4b. ábrá*n kapott függvénygörbéről elméletileg tudjuk, hogy az r változó közepes értékeire ($r < 15$ cm) sima, lassan változó függvény. Ezzel szemben az ábrán látható pontok meglehetősen nagy szórást mutatnak, ami feltehetően a mérési hiba következménye. Ha nem ismerjük az elméleti görbe konkrét alakját, gyakran simítjuk a görbét. Ennek az a matematikai alapja, hogy lassan változó függvények Taylor-sorba fejthetők, tehát a pontokra szakaszonként egymáshoz illeszkedő polinomokat illesztve egy sima, lassan változó függvényt kaphatunk.

A simított görbe jól használható például a mért görbe numerikus deriválására. A görbesimítás másik alkalmazása lehet az interpoláció, amikor a mért függvényre a független változó olyan értékénél van szükségünk, amelyre vonatkozóan nem történt mérés.