

5. KÖZVETLEN MÉRÉSEK

Az a fizikai mennyiséget n -szer megmértük, és $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -et kaptunk eredményül. Feltesszük, hogy a mérési eredmények egymástól *függetlenek, torzítatlanok*, vagyis várható értékük a :

$$M(\xi_i) = a, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.1)$$

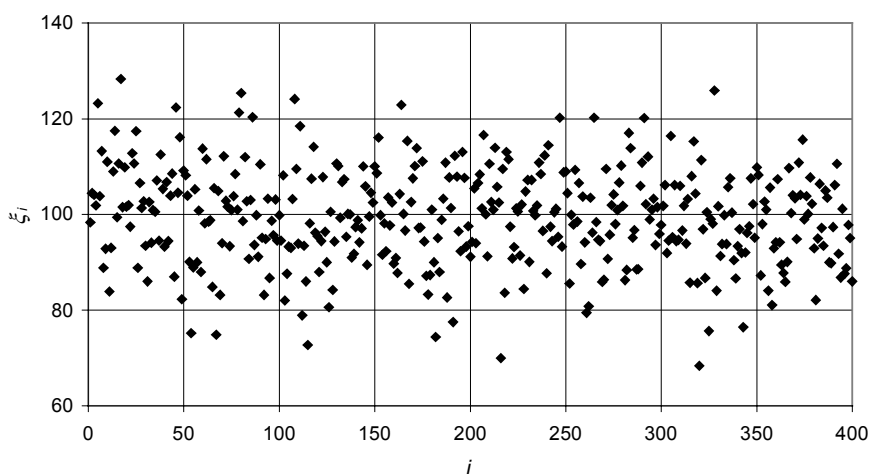
Két esetet vizsgálunk meg: (1) a mérések szórása azonos, (2) a mérések szórása változó. Mindkét esetben feltesszük, hogy a mérések Gauss-eloszlásúak.

5.1. Azonos pontosságú közvetlen mérések

Először feltesszük, hogy a mérések szórása azonos:

$$D^2(\xi_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.2)$$

Az 5.1.a. ábrán mutatunk ilyen mérési adatokat, amelyekről tudjuk, hogy várható értékük $a = 100$ és szórásuk $\sigma = 10$.¹



5.1.a. ábra. Azonos szórású és azonos várható értékű mért adatok

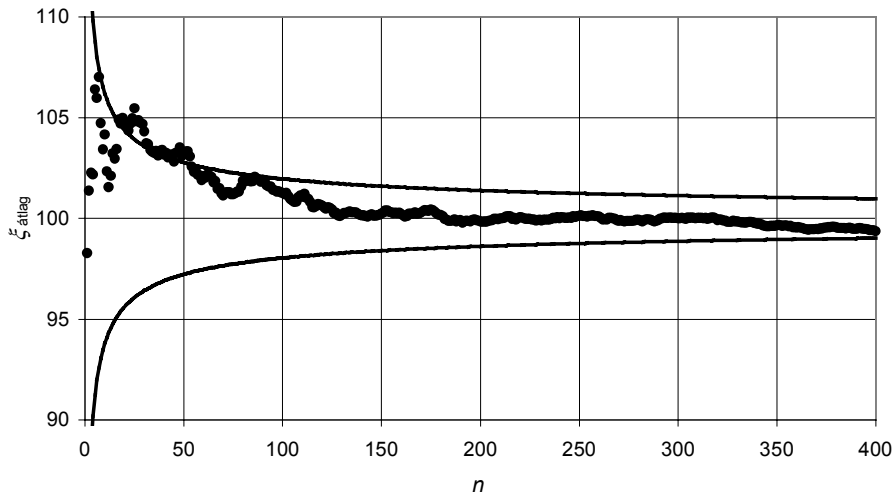
(5.1) szerint ezek bármelyike használható mint az a várható érték torzítatlan becslése. Nyilván nem azért végeztünk 400 független mérést, hogy közülük csak egyet vegyünk figyelembe, és a többit fel se használjuk. Olyan becslési

¹ Ezeket onnan ismerjük, hogy az ábra nem ténylegesen mért, hanem számítógéppel generált adatokat mutat.

eljárást keresünk, amelyben mindegyik mérés eredménye befolyásolja a becült értékét. Ennek kézenfekvő módja az

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} = \bar{\xi} \quad (5.3)$$

átlag. Az 5.1.b. ábrán ezt mutatjuk az átlagolásban figyelembe vett adatok számának a függvényében. Az ábrán látható két görbe között van az a terület, amelyen belül az átlagérték 95% valószínűséggel megtalálható. (Ennek pontosabb értelmére az intervallumbecslés tárgyalásakor még visszatérünk.) Az ábra szerint az átlagnak a várható érték körüli ingadozása már n kis értékeire is gyorsan lecsökken. Ezt követően az átlagértékek lassan ugyan, de végül mégis stabilizálódnak.



5.1.b. ábra. Az (5.3) szerinti mintaátlag az átlagolt adatok n számának a függvényében

Szemléletesen láttuk tehát, hogy érdemes ugyanazt a mennyiséget többször is megmérni és a mért adatokat átlagolni, mert így jelentősen csökkenthetjük a keresett a paraméter becült értékének a szórását. A 4. fejezetben láttuk, hogy a maximum likelihood módszer szolgáltatja a lehető legkisebb szórást. Az alábbiakban megvizsgáljuk, nem lehet-e ezzel a módszerrel még az (5.3) szerinti mintaátlagnál is jobb becslést találni.

Pontbecslés

A maximum likelihood módszer alkalmazásához mindenek előtt fel kell írunk a mért adatok együttes sűrűségfüggvényét [vö. (3.37c)]:

$$L(\mathbf{x}; a, \sigma^2) = \frac{\exp\left(-\frac{Q(a)}{2\sigma^2}\right)}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}, \quad (5.4a)$$

ahol

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 . \quad (5.4b)$$

Legyen $\bar{\xi}$ a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mért adatokból alkotott vektor.

A maximális valószínűség módszere szerint a értékét úgy kell megválasztani, hogy $\mathbf{x} = \bar{\xi}$ helyettesítés mellett L maximális legyen, amit úgy érhetünk el, hogy megkeressük Q minimumát. Deriváljuk Q -t a szerint:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q(a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n (\xi_i - a) = 0 ,$$

aminek a megoldása az (5.3) szerinti *mintaátlag*.

Vizsgáljuk meg a becslés tulajdonságait! \tilde{a} *várható értéke* az a valódi érték, tehát az (5.3) becslés *torzítatlan*:

$$M(\tilde{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n M(\xi_i)}{n} = \frac{na}{n} = a ,$$

amint ez az (5.1) feltevés alapján belátható. *Szórásnégyzetét* (5.2) alapján számítjuk ki – kihasználva, hogy a mérések függetlenek:

$$D^2(\tilde{a}) = D^2(\bar{\xi}) = \frac{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} . \quad (5.5)$$

A becslés szórása tehát a mérések számának a négyzetgyökével fordítva arányosan nullához tart. Ebből következik, hogy \tilde{a} *konzisztens* becslés. A következő alfejezetben megmutatjuk, hogy ez a becslés a lineáris becslések körében *hatékony* is.

σ^2 -et általában nem tekinthetjük ismertnek, vagyis ezt is becsülnünk kell. Ebben is az (5.4) szerinti eloszlásfüggvényből indulunk ki: L -nek nem csak a , hanem σ^2 függvényében is keressük a maximumát. Felírjuk tehát a következő egyenletrendszert:

$$\frac{\partial \ln L(\bar{\xi}, a)}{\partial a} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial \ln L(\bar{\xi}, a)}{\partial \sigma^2} = 0 .$$

Az első egyenlet megoldását (5.3)-ben már felírtuk, a második egyenlet explicit alakja pedig

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left[-\frac{Q}{2\sigma^2} - \frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \right] = \frac{Q}{2\sigma^4} - \frac{n}{2\sigma^2} = 0 ,$$

amiből

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{Q(a)}{n} \Big|_{a=\bar{\xi}}. \quad (5.6)$$

Tudjuk, hogy a maximális valószínűség módszere csak aszimptotikusan, vagyis $n \rightarrow \infty$ mellett ad torzítatlan becsléseket. Ezért célszerű megvizsgálni az (5.6) szerinti becslés várható értékét. Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} Q(a) &= \sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n [(\xi_i - \bar{\xi}) + (\bar{\xi} - a)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2 + 2(\bar{\xi} - a) \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}) + n(\bar{\xi} - a)^2 = Q(\bar{\xi}) + n(\bar{\xi} - a)^2. \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk, hogy a kettős szorzatban szereplő összeg (5.3) alapján eltűnik. $Q(a)$ várható értéke definíció szerint $n\sigma^2$, a jobb oldal második tagjára pedig σ^2 [vö. (5.5)]. Így tehát

$$M[Q(\bar{\xi})] = M[Q(a)] - M[n(\bar{\xi} - a)^2] = n\sigma^2 - \sigma^2,$$

vagyis

$$M(\tilde{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Az (5.6) szerinti becslés tehát valóban torzított.

Legutóbbi eredményünkből egyszerűen kaphatunk azonban torzítatlan becslést:

$$s^2 = \frac{Q(\bar{\xi})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1}. \quad (5.7)$$

Ezt a mennyiséget *korrigált empirikus szórásnégyzetnek* nevezzük, és szabványos jelölése s^2 . A nevezőben szereplő $(n-1)$ egy általánosabb tétel következményeként is ki fog adódni a következő fejezetben [vö. (6.22)]. A továbbiakban – az egyszerűség kedvéért – a “korrigált” jelzöt elhagyjuk, és s^2 -et *empirikus szórásnégyzetnek* fogjuk nevezni.

Intervallumbecslés

Az (5.3) képlet meghatározott számértéket ad meg az a paraméter keresett értékére. Ezért ezt *pontbecslésnek* nevezzük. Mindig erre van szükség, amikor tovább kell számolnunk a paraméter becsült értékével. Baj azonban, hogy a becsült érték soha nem fog a valódi értékkel egybeesni,² továbbá nem ad információt a becsült adat bizonytalanságáról. Erre van szükségünk például akkor, amikor a mérést azért végezzük el, hogy ellenőrizzük egy elméleti jóslat helyességét.

² Az ilyen kijelentések matematikailag a következőt jelentik: annak a valószínűsége, hogy a két érték különbsége Δ -nál kisebb legyen, $O(\Delta)$ rendben 0-hoz tart.

gét. Nyilvánvaló, hogy az elméleti jóslat és a pontbecslés mindig tapasztalható eltérése még nem jelenti az elmélet cáfolatát. A becslt adat bizonytalanságán belüli egyezést szívesen tekintenénk az elmélet igazolásának. Ezért vezetünk le az alábbiakban egy *intervallumbecslést* is: keresünk egy olyan intervallumot, amelybe a paraméter valódi értéke adott valószínűséggel esik. Szükségünk lesz két alapvető tételre:

5.1. TÉTEL. A σ^2 arányossági tényezőtől eltekintve az (5.4b) szerinti négyzetösszeg χ^2 eloszlású $(n-1)$ szabadsági fokkal:

$$Q(\bar{\xi}) = \sigma^2 \chi_{n-1}^2. \quad (5.8)$$

Ez a tétel a legkisebb négyzetek módszerében az egyik legfontosabb, általánosan érvényes tétel speciális esete. Bizonyítása meglehetősen bonyolult az általános esetben, de ebben a speciális esetben egyszerű. Fentebb beláttuk:

$$Q(\bar{\xi}) = Q(a) - n(\bar{\xi} - a)^2 = \sum_{i=1}^n (\xi_i - a)^2 - n(\bar{\xi} - a)^2.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma} \quad \text{és} \quad \bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i}{n} = \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma},$$

amivel

$$\frac{Q(\bar{\xi})}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - n\bar{\eta}^2. \quad (5.9)$$

A definícióból következik, hogy az η_i valószínűségű változók egymástól függetlenek, várható értékük zérus, szórásnégyzetük 1. Ha tehát (5.9)-ben csak a szumma szerepelne, a jobb oldal χ^2 lenne n szabadsági fokkal. A jobb oldal második tagjától egy ortogonális transzformációval szabadulunk meg:

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_2 + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \eta_n = \sqrt{n} \cdot \bar{\eta},$$

$$\zeta_2 = c_{21} \eta_1 + c_{22} \eta_2 + \dots + c_{2n} \eta_n,$$

.....

$$\zeta_n = c_{n1} \eta_1 + c_{n2} \eta_2 + \dots + c_{nn} \eta_n.$$

Ilyen ortogonális transzformációt mindig lehet találni: keresünk az első sorban szereplő $[1, 1, \dots, 1]/\sqrt{n}$ vektorra merőleges altérben $(n-1)$ egymásra merőleges egységvektort, és ezek komponensei adják meg a transzformáció 2.,

3., ..., n -edik sorait. A transzformált ζ_i valószínűségi változók szintén függetlenek, várható értékük zérus, szórásnégyzetük 1. Segítségükkel (5.9) így írható:³

$$\frac{Q(\bar{\xi})}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 - \zeta_1^2 = \sum_{i=2}^n \zeta_i^2 = \chi_{n-1}^2,$$

amint a tételben állítjuk.

5.2. TÉTEL. $\bar{\xi}$ független a $Q(\bar{\xi})$ négyzetösszegtől.

Elég megmutatni, hogy $\bar{\xi}$ a

$$Q(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2$$

négyzetösszeg mindegyik tagjától külön-külön is független. Gauss-eloszlású változókról lévén szó, azt kell megmutatnunk, hogy a szóban forgó valószínűségi változók kovarianciája eltűnik:

$$C = \text{cov}\left[(\xi_i - \bar{\xi}), \bar{\xi}\right] = \text{M}\left[(\xi_i - \bar{\xi})(\bar{\xi} - a)\right] = 0. \quad (5.10)$$

Ennek belátásához átalakítjuk a várható érték jele alatti kifejezést:

$$\begin{aligned} C &= \text{M}\left\{\left[(\xi_i - a) - (\bar{\xi} - a)\right](\bar{\xi} - a)\right\} = \\ &= \text{M}\left[(\xi_i - a)(\bar{\xi} - a)\right] - \text{M}\left[(\bar{\xi} - a)^2\right]. \end{aligned}$$

(5.5) alapján a második tag σ^2/n . Az első tag pedig szintén ugyanennyi:

$$\text{M}\left[(\xi_i - a)(\bar{\xi} - a)\right] = \text{M}\left[(\xi_i - a) \frac{\sum_{i'=1}^n (\xi_{i'} - a)}{n}\right] = \frac{\text{M}\left[(\xi_i - a)^2\right]}{n} = \frac{\sigma^2}{n},$$

vagyis az (5.10)-ben szereplő C kovariancia tényleg eltűnik, amivel a tételt igazoltuk.

Képezzük ezután a

$$t = \frac{\tilde{a} - a}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{\xi} - a}{\sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{n(n-1)}}} \quad (5.11)$$

hányadost [vö. (5.7)]. Belátjuk, hogy ez $(n-1)$ szabadsági fokú Student-tört. (5.5)-ből következik, hogy a

³ Az itt felhasznált tételeket a 2. fejezetben tárgyaljuk.

$$\vartheta = \frac{\tilde{a} - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

hányados Gauss-eloszlású valószínűségi változó, amelynek a várható értéke zérus, szórása pedig 1. Az 5.1. TÉTEL szerint $Q(\bar{\xi})/\sigma^2$ χ^2 -változó $(n-1)$ szabadsági fokkal, amely az 5.2. TÉTEL szerint független ϑ -tól. Így a

$$\frac{\vartheta}{\sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{\sigma^2(n-1)}}}$$

hányados Student-tört $(n-1)$ szabadsági fokkal. Behelyettesítéssel beláthatjuk, hogy ez nem más, mint az (5.11) alatti t hányados.

Legutóbbi eredményünk alapján már megszerkeszthetjük a keresett intervallumot. Válasszunk egy ε konfidencia-valószínűséget, és a Student-eloszlás táblázataiból kikeressük a következő feltételnek eleget tevő γ kvantilist:

$$P\{|t| < \gamma\} = 1 - \varepsilon. \quad (5.12)$$

(5.11) alapján tehát $(1 - \varepsilon)$ valószínűséggel fennáll a következő két egyenlőtlenség:

$$-\gamma < \frac{\bar{\xi} - a}{\sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{n(n-1)}}} < \gamma,$$

amit átrendezve adódik a keresett intervallum:

$$\bar{\xi} - \gamma \sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{n(n-1)}} < a < \bar{\xi} + \gamma \sqrt{\frac{Q(\bar{\xi})}{n(n-1)}} \quad (5.13a)$$

vagy egyszerűbben:

$$\bar{\xi} - \gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{\xi} + \gamma \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (5.13b)$$

A bal és jobb oldalon szereplő mennyiségekből alkotjuk meg az ún. *konfidenciaintervallumot*:

$$\left(\bar{\xi} - \gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{\xi} + \gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right). \quad (5.13c)$$

Megjegyezzük, hogy az 5.1.b. ábrán látható burkológörbék lényegében ezzel a képlettel vannak számolva. Annyi az eltérés, hogy az átlag helyett a áll, s helyett pedig σ .

$$\left(a - \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, a + \gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

γ értéke 1,96 (vö. 2. függelék).

Poisson-eloszlású mérések

A részecskeszámlálók által adott eredmények általában Poisson-eloszlásúak. Ha a beütésszám várható értéke

$$M(\xi) = a, \quad (5.14a)$$

akkor

$$P_\xi = e^{-a} \frac{a^\xi}{\xi!} \quad (5.15)$$

annak a valószínűsége, hogy pontosan ξ részecskét számlálunk meg. Ennek az eloszlásnak nevezetes tulajdonsága, hogy a szórásnégyzet megegyezik a várható értékkel:

$$D^2(\xi) = a. \quad (5.14b)$$

Amikor a beütésszám 100-as nagyságrendű vagy nagyobb, a Poisson-eloszlás jól közelíthető Gauss-eloszlással:

$$P_\xi \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left\{-\frac{(\xi - a)^2}{2a}\right\}.$$

Kisebbs beütésszámok esetében azonban ez a közelítés elromlik, így az adatok kiértékelésében célszerű az (5.15) szerinti eloszlással dolgozni.

Mint az eddigiekben, most is n mérést végeztünk, és $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -et kaptunk eredményül. Együttes valószínűségük

$$L(\vec{\xi}; a) = \prod_{i=1}^n e^{-a} \frac{a^{\xi_i}}{\xi_i!}. \quad (5.16)$$

A maximális valószínűség elve alapján $\ln L$ maximumát kell megkeresnünk a függvényében:

$$\frac{\partial L(\vec{\xi}; a)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left[-na + \sum_{i=1}^n (\xi_i \ln a - \ln \xi_i!) \right] = -n + \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{a} = 0,$$

amiből

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} = \bar{\xi}. \quad (5.17)$$

Ez pontosan megegyezik az (5.3) szerinti becsléssel.

(5.14a) alapján rögtön látszik, hogy ez torzítatlan becslés. Szórásnégyzetét (5.14b) alapján kapjuk:

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}{n^2} = \frac{na}{n^2} \approx \frac{\tilde{a}}{n} = \frac{\bar{\xi}}{n}. \quad (5.18)$$

Itt kihasználtuk, hogy független valószínűségi változók összegének a szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege.

Konfidenciaintervallumot úgy kaphatunk a legegyszerűbben, hogy a Poisson-eloszlást Gauss-eloszlással közelítjük. Legyen γ_G a Gauss-eloszlásnak a választott ε konfidencia-valószínűséghez tartozó kvantilise. Ekkor (5.18) alapján a konfidenciaintervallum:

$$\left(\bar{\xi} - \gamma_G \sqrt{\frac{\bar{\xi}}{n}}, \bar{\xi} + \gamma_G \sqrt{\frac{\bar{\xi}}{n}} \right). \quad (5.18a)$$

Csoportosított mérések

A szórásnégyzet becslése javítható, ha ugyanazzal a mérés technikával több különböző mennyiséget is megmérünk. Jelöljük ezeket a_1, a_2, \dots, a_m -mel. Az a_k -ra vonatkozó mérések eredményét jelöljük ξ_{ki} -vel ($i = 1, 2, \dots, n_k; k = 1, 2, \dots, m$). Mindegyik csoportban más a mérési eredmények várható értéke, de azonos a szórásnégyzete:

$$M(\xi_{ki}) = a_k, \quad \text{de} \quad D^2(\xi_{ki}) \equiv \sigma^2. \quad (5.19)$$

(5.3) alapján a k -adik csoportban az

$$\tilde{a}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} \xi_{ki}}{n_k} = \bar{\xi}_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.20)$$

képlettel becsülhetjük a keresett mennyiségeket. Ha formálisan gondolkozunk, (5.7) szerint csoportonként kaphatunk becslést σ^2 -re:

$$s_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_k} (\xi_{ki} - \bar{\xi}_k)^2}{n_k - 1}, \quad (5.21)$$

ami a fentiek szerint torzítatlan. Ennek alapján mindegyik csoporthoz rendelhetünk konfidenciaintervallumot ($k = 1, 2, \dots, m$):

$$\left(\bar{\xi}_k - \gamma_k \frac{s_k}{\sqrt{n_k}}, \bar{\xi}_k + \gamma_k \frac{s_k}{\sqrt{n_k}} \right), \quad (5.21a)$$

ahol γ_k az $(n_k - 1)$ szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise.

Ez az eljárás elvileg hibátlan, de nem veszi figyelembe azt a körülményt, hogy a szórásnégyzet mindegyik csoportban ugyanannyi. Ez azért baj, mert lehetne javítani σ^2 becslését. Különösen akkor lenne ez fontos, amikor a mérési adatok száma kicsi. σ^2 -et becsülhetjük a teljes mérési adathalmaz segítségével is:

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} (\xi_{ki} - \bar{\xi}_k)^2}{\sum_{k=1}^m (n_k - 1)} = \frac{\sum_{k=1}^m (n_k - 1) s_k^2}{n - m}, \quad (5.22)$$

ahol

$$n = \sum_{k=1}^m n_k.$$

Be lehet látni, hogy az 5.2. TÉTEL itt is érvényes: s^2 független az (5.20) szerint kapott becslésektől, tehát a Student-eloszlás alapján szerkeszthetjük meg a konfidenciaintervallumokat ($k = 1, 2, \dots, m$):

$$\left(\bar{\xi}_k - \gamma \frac{s}{\sqrt{n_k}}, \bar{\xi}_k + \gamma \frac{s}{\sqrt{n_k}} \right), \quad (5.22a)$$

ahol γ az $(n - m)$ szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise.

Illusztrációképpen tekintsük az 5.1. táblázatban látható példát. $m = 5$ csoportban történt a mérés. Mivel a mérések n_k száma csoportról csoportra változik, mások a γ_k kvantilisek is (amelyeknek a táblázatban megadott értéke $\varepsilon = 0,05$ -höz tartozik). A szórás meglehetősen nagy, amint ez az s_k empirikus szórásokból látszik.

5.1. táblázat. Példa csoportosított mérésekre

$i \downarrow, k \rightarrow$	1	2	3	4	5
1	11918	10054	11386	13856	7610
2	13250	6977	11679	15201	6419
3	11951	9985	12145	14274	7581
4	11977	7812	11394	13072	8430
5	10581	8898	13433	14304	6770
6		10718	13838	16031	7966
7		9783		13362	7669
8		9660		13978	
9				13114	
\bar{a}_k	11935,4	9235,9	12312,5	14132,4	7492,1
s_k	944	1268	1069	978	687
γ_k	2,7764	2,3646	2,5706	2,3060	2,4460
n_k-1	4	7	5	8	6

Az 5.1. táblázatban szereplő adatok szerint az 5.2. táblázat második oszlopában látható konfidenciaintervallumokat szerkeszthetjük meg. A harmadik oszlopban adjuk meg az intervallumok félszélességét (u), amely jellemzi a paraméterek becsült értékének a bizonytalanságát. Mivel a $\gamma_k / \sqrt{n_k}$ tényező n_k -nak monoton csökkenő függvénye, azt várná az ember, hogy u azokra a csoportokra kicsi, amelyekben sok mérés van. Tehát a legkisebb u -t a 2. és a 4. csoportban várjuk, amiről azonban a táblázatban szó sincs. A jelenség magyarázata abban rejlik, hogy az s_k empirikus szórások σ -nak meglehetősen bizonytalan becslései, amikor – mint esetünkben is – n_k kicsi.

A megoldás tehát σ becslését javítani. Ez az (5.22) szerinti becslés szerepe: s^2 segítségével σ^2 -et $n - m = 30$ szabadsági fokkal becsüljük, aminek a bizonytalansága sokkal kisebb. Az adott példában $\gamma = 2,0423$, és (5.22) szerint $s = 1017$. Az ezekkel (5.22a) szerint számolt konfidenciaintervallumok és bizonytalanságok az 5.2. táblázat negyedik, illetve ötödik oszlopában található. Látható, hogy ezek a számok sokkal inkább megfelelnek a józan várakozásnak.

5.2. táblázat. Konfidenciaintervallumok és bizonytalanságok

Csoport	(5.21a) alapján	u	(5.22a) alapján	u
1	(10763, 13108)	1172	(10006, 12846)	929
2	(8176, 10296)	1060	(8502, 9970)	734
3	(11191, 13434)	1122	(11465, 14313)	848
4	(13381, 14884)	752	(13440, 14824)	692
5	(6857, 8127)	635	(6707, 8277)	785

A végeredmény közlése

A fenti példa alapján összefoglaljuk, hogyan kell egy kiértékelt mérés eredményét közölni. A felhasználóknak *három* adatra van szükségük ahhoz, hogy eredményeinkkel dolgozhassanak: a pontbecslésre, az empirikus szórásra és a szabadsági fokok számára. Ha ugyanis ezeket közöljük, az (5.21a) vagy (5.22a) képletek alapján megszerkeszthetik az általuk választott ε konfidencia-

valószínűséghez tartozó konfidenciaintervallumokat. A γ kvantiliseket persze ki kell keresniük a Student-eloszlásra vonatkozó statisztikai táblázatokból.

A közlés formája célszerűen a következő:

$$14132 \pm 326, \quad (5.23a)$$

amint ez – például – az 5.1. táblázat $k = 4$ oszlopában található: $\tilde{a} = 14132$ és $s_k / \sqrt{n_k} = 978 / \sqrt{9} = 326$. A \pm jel arra utal, hogy a konfidenciaintervallum megszerkesztéséhez az empirikus szórás γ_k -szorosát negatív és pozitív előjellel hozzá kell adnunk a pontbecsléshez.⁴ Ezt azonban ki kell egészítenünk az s^2 becslésében szereplő szabadsági fokok számával, ami nélkül a felhasználók nem tudnák a γ_k kvantiliseket meghatározni.

Felmerül a kérdés, miért nem olvastjuk γ_k -t az empirikus szórásba, vagyis miért nem az

$$\tilde{a} \pm s_k \gamma_k / \sqrt{n_k} = 14132 \pm 752 \quad (5.23b)$$

formában közöljük eredményünket. A válasz egyszerű: γ függ az ε valószínűségtől, amit nem mi, hanem a felhasználók fognak megválasztani. Ha tehát mégis beolvastjuk a végeredmény közlésébe, *korlátozzuk* a felhasználókat. Tételezzük fel például, hogy egy felhasználó $\varepsilon = 0,01$ mellett kíván intervallumbecslést végezni. Haz (5.23a) szerint közöljük az eredményünket, továbbá megadjuk n_k értékét, akkor a táblázatokból kikeresheti a $\gamma_k = 3,3554$ kvantilist, amivel az empirikus szórást beszorozva $326 \cdot 3,3554 = 1094$ adódik a konfidenciaintervallum félszélességére. (5.23b) esetében viszont csak akkor tudja ezt megcsinálni, ha közöljük ε általunk választott értékét is. Ekkor – n_k ismeretében – ki tudja keresni az általunk használt γ_k -t, a bizonytalanságot ezzel elosztja, és az eredményül adódó szórást beszorozza az általa választott ε -hoz tartozó kvantilissel. Nyilvánvaló, hogy ez jelentős és teljesen felesleges többletmunka mind a mi részünkről, mind a felhasználók részéről.

Hasonlóan felesleges és zavaró a *t-faktor* használata, amelynek az lenne a feladata, hogy a felhasználóknak ne kelljen törődniük a véges szabadsági fokokkal, hanem minden esetben a végtelen szabadsági foknak megfelelő Gauss-eloszlással dolgozhassanak. Konkrétan arról van szó, hogy a becsült szórásokat beszorozzuk a γ_n / γ_G hányadossal, ahol γ_n és γ_G a véges n , illetve a végtelen szabadsági fokokhoz tartozó kvantilisek. Tekintve, hogy mindkettő függ a választott ε -tól, ismét korlátozzuk a felhasználók jogait, tehát ezt a gyakorlatot sem tudjuk támogatni.

A szórás becslése a mérés kiértékelésének ugyanolyan alapvető eredménye, mint maga a pontbecslés, tehát egyiket sem szabad semmiféle tényezővel beszorozni. *Mindkettőt pontosan úgy kell közölni, ahogy azok kijöttek.* A kísérletezőnek fel kell tételeznie, hogy eredményeit olyanok fogják használni, akik tisztában vannak a matematikai statisztikával, továbbá nem lusták a sta-

⁴ A pontbecslést kerekítettük. A kerekítés kérdésével az 5.4. alfejezetben külön foglalkozunk.

tisztikai táblázatokat használni. Nem fognak örülni a lustaságuk feltételezéséből kiinduló látszatudvariasságnak.

E szakasz befejezéséként megjegyezzük, hogy ezek a megállapítások nem korlátozódnak az azonos pontosságú közvetlen mérésekre, hanem általánosan is érvényesek.

5.2. Változó pontosságú közvetlen mérések

Akkor beszélünk *változó pontosságú* közvetlen mérésekről, amikor az a fizikai mennyiség $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mért értékeinek a szórásnégyzete i -től függ:

$$D^2(\xi_i) = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.24a)$$

Továbbra is feltesszük, hogy a mérési eredmények *Gauss-eloszlásúak*, egymástól *függetlenek*, *torzítatlanok*, vagyis várható értékük a :

$$M(\xi_i) = a, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.24b)$$

Az (5.3) szerinti súlyozatlan mintaátlag minden esetben az a várható érték torzítatlan becslése. Kérdés azonban, célszerű-e ezt használni. Könnyű belátni, hogy nem. Számítsuk ki ugyanis az (5.3) mintaátlag szórásnégyzetét:

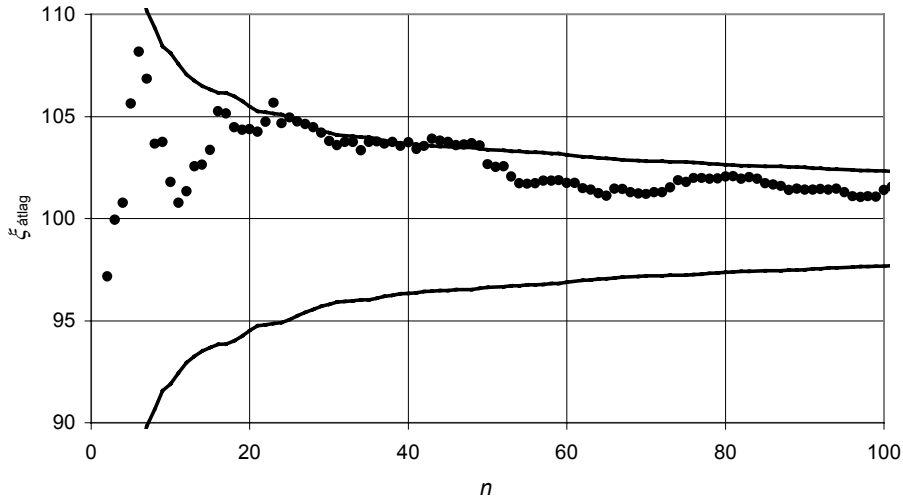
$$D^2(\bar{\xi}) = \frac{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n^2}.$$

Ez meglehetősen kellemetlen eredmény. Tegyük fel ugyanis, hogy méréseink pontossága nagyon különböző. Az ember azt szeretné, hogy a pontos mérések domináljanak, és a pontatlanok alig játsszanak szerepet. A súlyozatlan mintaátlag esetében ennek éppen a fordítottja történik: szórását a legpontatlanabb mérések határozzák meg. Tegyük fel például, hogy $\sigma_1 \rightarrow \infty$, miközben a többi szórással nem változik. Ebben az esetben a mintaátlag szórása átmegy a σ_1/n aszimptotikába, ami ellentmond a józan észnek: hiába végzünk pontos méréseket, a közös várható értéket mégis úgy becsüljük, hogy a becslés szórását a legpontatlanabb mérés határozza meg.

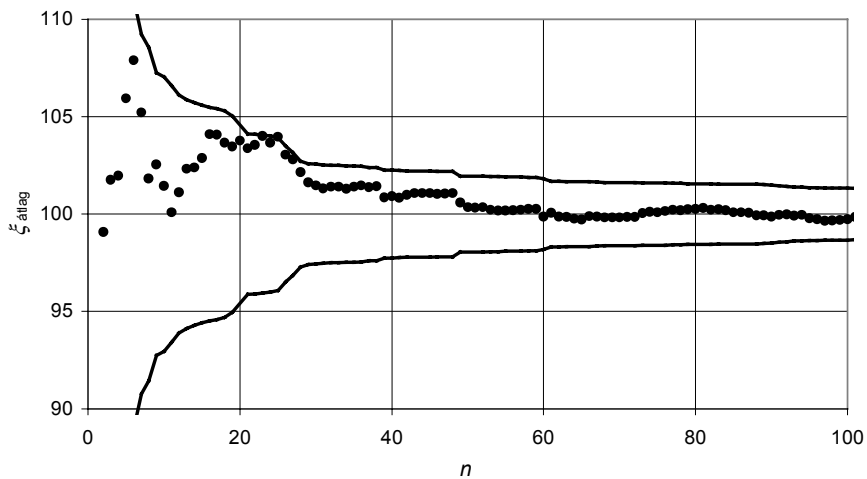
Illusztrációképpen tekintsük az 5.2.a. ábrát, amely az 5.1.b. ábrán látható becslést mutatja, de változó szórású mért adatokra vonatkozóan.⁵ Az egyes mérések szórása ugyan nem nő minden határon túl, de a legkisebb és legnagyobb szórással arányban 1:9. A σ_i szórássokat úgy választottuk meg, hogy átlaguk a korábbi $\sigma = 10$ legyen. Így a mostani mintaátlagok összevethetők az 5.1.b. ábrán láthatókkal. Ha a 95%-os valószínűséghez tartozó burkológörbét összevetjük az 5.1.b. ábrán láthatókkal, azonnal feltűnik, hogy azok most nem simák. Ennek egyszerű a magyarázata: a változó σ_i szórássok az átlag szórásában "szeszélyes" ugrásokat okoznak (legalábbis kis n -re). Fontosabb dolog is látszik azonban: a 95%-os burkológörbék közötti távolság minden n -re lényegesen nagyobb most, mint az 5.1.b. ábrán. $n = 100$ -re például a távolság a korábbi 3,93-ról 4,66-ra

⁵ Magukat a mért adatokat nem mutatjuk, mert az ábra szemre alig különbözne az 5.1.a. ábrától.

nőtt. Ennek az az oka, hogy a súlyozatlan átlagolás kiemeli a pontatlanabb (nagyobb szórású) mért adatok hatását – ahelyett, hogy éppen csökkented.



5.2.a. ábra. Súlyozatlan átlag függése n -től változó szórású mérések esetében



5.2.b. ábra. Optimálisan súlyozott átlag függése n -től változó szórású mérések esetében

Problémánk megoldását az jelentheti, hogy az (5.3) mintaátlag helyett *súlyozott* átlagot használunk alkalmasan megválasztott súlyokkal:

$$\tilde{a} = \sum_{i=1}^n w_i \xi_i, \quad (5.25a)$$

ahol

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1. \quad (5.25b)$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy kedvezően megválasztott súlyokkal lényegesen jobb eredményeket lehet elérni. Ilyen átlagok láthatók az 5.2.b. ábrán. A

mintaátlagok ingadozása már n sokkal kisebb értékeire lecsökken, mint korábban, továbbá a 95%-os határgörbék közötti távolság is sokkal kisebb: $n = 100$ -re most 2,66, vagyis a súlyozatlan átlagoláshoz tartozó távolság felénél alig több. Ennek az az oka, hogy az optimálisan súlyozott átlagolás kiemeli a pontosabb (kisebb szórású) mért adatok hatását, és ezáltal az keresett a paraméter becslés értéke is pontosabb lesz. A metrológiai szóhasználat (vö. 2. függelék) szerint “az ilyen becslés bizonytalansága kisebb”.

A súlyozott átlag optimalizálása

Mivel a mérések egymástól statisztikailag függetlenek, az (5.25a) szerinti becslés szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}) = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2. \quad (5.26)$$

Ennek minimumát keressük a w_i súlyok függvényében. Alkalmazzuk a Lagrange-multiplikátorok módszerét:

$$\frac{\partial}{\partial w_j} \left(\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^n w_i + \lambda \right) = 2w_j \sigma_j^2 - \lambda = 0,$$

amiből

$$w_j = \frac{\lambda/2}{\sigma_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.27a)$$

vagyis a megoldást a szórásnégyzetek reciprokával arányos súlyozás adja. $\lambda/2$ értéke az (5.25b) normálási feltételből számítható ki:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (5.27b)$$

Könnyen beláthatjuk, hogy a kapott súlyok valóban minimumhoz vezetnek. Ha ugyanis a fentitől eltérő

$$w_i = \frac{\lambda/2}{\sigma_i^2} + \Delta_i$$

súlyokat választjuk, a normálási feltétel miatt

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = 0.$$

Ezt (5.26)-ba helyettesítve

$$D^2(\tilde{a}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^2/4}{\sigma_i^4} + \lambda \frac{\Delta_i}{\sigma_i^2} + \Delta_i^2 \right) \sigma_i^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} + \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \sigma_i^2$$

adódik, ami akkor minimális, amikor $\Delta_i \equiv 0$ minden i -re. Ebből melléktermékként az is kiadódott, hogy a minimális szórásnégyzet

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (5.28)$$

Az elmondottaknak speciális esetét jelentik az azonos pontosságú mérések: $\sigma_i^2 \equiv \sigma^2$. Ekkor (5.25a)-ban az (5.3) szerinti súlyozatlan mintaátlagot kapjuk, amelynek a szórásnégyzetét (5.5) adja meg. A fentiekben azt is beláttuk, hogy azonos pontosságú közvetlen mérések esetében a mintaátlag – az (5.25) alakú lineáris becslések körében – hatékony.

A most kapott eredményt egyes szerzők *Gauss tételeként* emlegetik. Gyakorlati haszna, hogy megmutatja, hogyan kell átlagolni a különböző pontosságú méréseket, és hogyan kell az így kapott átlag szórását becsülni. A továbbiak szempontjából pedig mindez azért érdekes, mert jól illusztrál két dolgot: egyrészt a becslés optimalizálásával a szórás csökkenthető, másrészt a szórás nem csökkenthető minden határon túl, hiszen a lineáris becslések körében (5.28) alsó korlátot jelent. Felmerül a kérdés: létezik-e olyan *nemlineáris* becslés, amellyel a szórás tovább csökkenthető? A kérdésre a Cramér-Rao egyenlőtlenség (vö. 4. fejezet) ad választ: nem létezik! A Gauss-eloszlás esetében (5.28) a becslések széles osztályában alsó korlát.

σ^2 becslése változó pontosság esetében

Változó pontosságú mérések esetében nem mindig sikerül az egyes mérések szórásnégyzetét meghatározni. A leggyakrabban csak ezek *relatív* értékét tudjuk elfogadható módon meghatározni. Matematikailag ez azt jelenti, hogy a szórásnégyzeteket

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{w_i} \quad (5.29)$$

alakban írjuk fel, ahol σ^2 ismeretlen arányossági tényező, a w_i súlyok pedig ismertek. Az 5.1. alfejezetben is ezt a modellt használtuk a $w_i \equiv 1$ választással. Az alábbiakban megnézzük, hogyan módosulnak a korábbi képletek a változó súlyok esetében.

A mért adatok együttes sűrűségfüggvénye (5.4) helyett most

$$L(\mathbf{x}; a, \sigma^2) = \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^n w_i}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{Q(a)}{2\sigma^2}\right), \quad (5.40a)$$

ahol

$$Q(a) = \sum_{i=1}^n w_i (x_i - a)^2. \quad (5.40b)$$

A keresett paraméter becslését úgy kapjuk, ide $\mathbf{x} = \bar{\xi}$ -t helyettesítünk, majd keressük az így adódó Q minimumát a

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q(a)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a)$$

egyenlet megoldásával:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \xi_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \bar{\xi}. \quad (5.41)$$

E becslés szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2 D^2(\xi_i)}{\left(\sum_{i=1}^n w_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2 \frac{\sigma^2}{w_i}}{\left(\sum_{i=1}^n w_i\right)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (5.42)$$

Ahhoz, hogy ezt használni tudjuk, szükségünk van σ^2 becslésére. Az 5.1. TÉTEL-re adott bizonyítást általánosítva belátjuk, hogy a tétel a mostani esetben is igaz. Az 5.1. alfejezetben alkalmazott levezetést most kis változtatással megismételhetjük:

$$\begin{aligned} Q(a) &= \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a)^2 = \sum_{i=1}^n w_i \left[(\xi_i - \bar{\xi}) + (\bar{\xi} - a) \right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \bar{\xi})^2 + 2(\bar{\xi} - a) \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - \bar{\xi}) + (\bar{\xi} - a)^2 \sum_{i=1}^n w_i = \\ &= Q(\bar{\xi}) + (\bar{\xi} - a)^2 \sum_{i=1}^n w_i, \end{aligned}$$

amiből

$$Q(\bar{\xi}) = \sum_{i=1}^n w_i (\xi_i - a)^2 - (\bar{\xi} - a)^2 \sum_{i=1}^n w_i.$$

A következő valószínűségi változók várható értéke nulla és szórása 1:

$$\eta_i = \sqrt{w_i} \frac{\xi_i - a}{\sigma} \quad \text{és} \quad \bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \sqrt{w_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}} = \frac{\bar{\xi} - a}{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i}.$$

Segítségükkel Q kifejezhető a

$$\frac{Q(\bar{\xi})}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 - \bar{\eta}^2 \sum_{i=1}^n w_i$$

alakban [vö. (5.9)]. Innentől kezdve alkalmazhatjuk az 5.1. TÉTEL bizonyítására vonatkozó gondolatmenetünket. A tételből adódik σ^2 -re a

$$\tilde{\sigma}^2 = s^2 = \frac{Q(\bar{\xi})}{n-1} \quad (5.43)$$

becslés [vö. (5.7)]. (5.42) alapján vezethetjük le a következő konfidenciaintervallumot:

$$\left(\bar{\xi} - \gamma \frac{s}{\sqrt{w}}, \bar{\xi} + \gamma \frac{s}{\sqrt{w}} \right), \quad (5.43a)$$

ahol γ az $(n-1)$ szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise, továbbá

$$w = \sum_{i=1}^n w_i$$

[vö. (5.13a)].

Részecskeszámlálás változó mérési időekkel

Tegyük fel, hogy egy radioaktív sugárforrás erősségét⁶ kell megmérnünk. Az i -edik mérésben a számlálási idő T_i . A beütésszám várható értéke ekkor

$$M(\xi_i) = aT_i. \quad (5.44)$$

Célunk az időegység alatt számlált részecskék a számának becslése. (5.15) mintájára annak a valószínűsége, hogy az i -edik mérésben ξ_i -t mérünk:

$$P_{\xi_i} = e^{-aT_i} \frac{(aT_i)^{\xi_i}}{\xi_i!},$$

⁶ Forráserősség: 1 s alatt történő bomlások száma.

vagyis a mért adatok együttes valószínűsége:

$$L(\vec{\xi}; a) = \prod_{i=1}^n e^{-aT_i} \frac{(aT_i)^{\xi_i}}{\xi_i!}. \quad (5.45)$$

a -t a maximális valószínűség elve alapján becsljük:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\vec{\xi}; a)}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a} \left[\sum_{i=1}^n (-aT_i + \xi_i \ln(aT_i) - \ln \xi_i!) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\xi_i}{a} - T_i \right) = 0, \end{aligned}$$

amiből

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{\sum_{i=1}^n T_i}. \quad (5.46)$$

Azt kaptuk tehát, hogy hiába mértük n részletben a beütésszámokat, a -t úgy a legjobb becslni, hogy a teljes beütésszámot osztjuk a teljes mérési idővel. Szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i)}{\left(\sum_{i=1}^n T_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n aT_i}{\left(\sum_{i=1}^n T_i \right)^2} = \frac{a}{\sum_{i=1}^n T_i}. \quad (5.47)$$

*Korrelált mérések

Befejezésül megvizsgáljuk, milyen következményekkel jár, ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mért adatok statisztikailag *nem* függetlenek egymástól. Továbbra is feltételezzük, hogy várható értékük (5.1) szerint állandó. Ezt a következőképpen írhatjuk át vektoros alakba:

$$M(\vec{\xi}) = a\mathbf{e}, \quad (5.48)$$

ahol az \mathbf{e} vektor minden eleme 1-gyel egyenlő, a $\vec{\xi}$ vektor komponenseit pedig a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mért adatok alkotják. Az eddigiektől eltérően megengedjük, hogy a mért adatok kovarianciája ne tűnjön el. A kovarianciamátrix definíciója

$$\mathbf{B} = M \left[\left(\vec{\xi} - a\mathbf{e} \right) \left(\vec{\xi} - a\mathbf{e} \right)^T \right]. \quad (5.49)$$

A $\vec{\xi}$ vektor sűrűségfüggvénye

$$L(\mathbf{x}; a) = \frac{\exp\left(-\frac{Q(a)}{2}\right)}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{B}}}, \quad (5.40a)$$

ahol

$$Q(a) = (\mathbf{x} - a\mathbf{e})^T \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - a\mathbf{e}). \quad (5.40b)$$

A maximális valószínűség elve szerint ennek a minimumát kell a függvényében megkeresnünk az $\mathbf{x} = \bar{\boldsymbol{\xi}}$ helyettesítéssel:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial Q(a)}{\partial a} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} - a \mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} = 0,$$

amiből

$$\tilde{a} = \frac{\bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^T \mathbf{w}. \quad (5.41)$$

Azt kaptuk tehát, hogy az a paraméter becslt értéke most is a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ mért adatok (5.25a) alakú lineáris kombinációja, de a súlyokból alkotott \mathbf{w} vektor komponenseit most nem az (5.27) képletek adják meg, hanem

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}. \quad (5.42)$$

Nyilvánvaló, hogy ezek a súlyok 1-re vannak normálva:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} = 1.$$

Érdeemes megnézni, a \mathbf{w} súlyok most is minimalizálják-e a becslés szórásnégyzetét, amelyet (5.26) helyett most a következő alakban kell felírunk:

$$D^2(\tilde{a}) = \mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{w}.$$

A korábban követett gondolatmenet analógiájára írjuk a súlyvektort a

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} + \bar{\boldsymbol{\Delta}}$$

alakba, ahol

$$\mathbf{e}^T \bar{\boldsymbol{\Delta}} = 0.$$

Ezzel

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{1}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} + \frac{\bar{\boldsymbol{\Delta}}^T \mathbf{B} \bar{\boldsymbol{\Delta}}}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}},$$

mint ez egyszerűen belátható. Mivel \mathbf{B} pozitív definit mátrix, ez akkor minimális, amikor $\tilde{\mathbf{A}}$ a nullvektor. Melléktermékként azt is beláttuk ezzel, hogy az (5.41) szerinti becslés szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{1}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}}. \quad (5.43)$$

A legkisebb négyzetek módszere tehát korrelált mérések esetében is jól alkalmazható, csak alkalmas módon kell a súlyfaktorokat megválasztani. Ebben az esetben is érvényes az 5.1. TÉTEL, de ennek bizonyítását későbbre halasztjuk.

Mért mennyiségek egyenlősége

A konfidenciaintervallumok nem csak elméleti jóslatok kísérleti ellenőrzésére használhatók, hanem egyéb célokra is. Ilyen például két mért mennyiség egyenlőségének a vizsgálata. Mért mennyiségek számértéke természetesen soha nem fog egymással megegyezni, csak annak a vizsgálatáról lehet szó, hogy *várható értékük* megegyezik-e.

Nézzük példaképpen az 5.1. táblázatban szereplő adatokat, és kérdezzük: van-e különbség a_3 és a_4 között? Ennek eldöntésére becsült értékük különbsége adhat választ. Tegyük fel tehát, hogy $a_3 = a_4$, vagyis

$$M(\tilde{a}_3) = M(\tilde{a}_4). \quad (5.44)$$

Mivel a két becslés egymástól független, különbségük szórásnégyzete

$$D^2(\tilde{a}_3 - \tilde{a}_4) = D^2(\tilde{a}_3) + D^2(\tilde{a}_4) = \frac{\sigma^2}{n_3} + \frac{\sigma^2}{n_4}.$$

σ^2 becslésére az (5.22) képletet használjuk. A korábban mondottak szerint s^2 független a két becsléstől, tehát

$$t = \frac{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_4}{\sqrt{\frac{s^2}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma^2}{n_3} + \frac{\sigma^2}{n_4} \right)}} = \frac{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_4}{s \sqrt{\frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4}}} \quad (5.45)$$

$(n - m)$ szabadsági fokú Student-tört. Értéke

$$t = \frac{12312,5 - 14132,4}{1017 \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{9}}} = -3,395.$$

A 30 szabadsági fokú Student-eloszlás kvantilise $\varepsilon = 0,05$ mellett 2,042 (2. független), ami kisebb, mint a fenti t abszolút értéke. Eszerint 95% konfidenciaszinten elvetjük az (5.44) szerinti hipotézist. Ezt a következtetést úgy szoktuk megfogalmazni, hogy a_3 és a_4 között *szignifikáns különbség* van.

Megjegyezzük, hogy az 5.1. táblázatban szereplő s_k empirikus szórások két okból sem igazán alkalmasak a fenti kérdés eldöntésére. Egyrészt túlságosan alacsony a szabadsági fokok száma, és így a kvantilisek sokkal nagyobbak.

Másrészt nem sikerülne olyan világosan kezelhető statisztikát felírni, mint az (5.45) alatti t . Ugyanis két független Student-tört különbségével kellene dolgoznunk, amire vonatkozóan nincsenek alkalmas statisztikai táblázatok.

A helyzet egyszerűbb, amikor a szabadsági fokok száma elegendően nagy ahhoz, hogy az (5.45) alakú statisztikákhoz használt γ kvantilist a Gauss-eloszlás táblázataiból vehessük. Ilyenkor is ügyelnünk kell azonban arra, hogy az összehasonlított mennyiségek korreláltak is lehetnek. Tekintsünk egy ilyen példát is! Legyen a két mennyiség ξ_1 és ξ_2 , szórásuk rendre σ_1 és σ_2 . Azt a hipotézist vizsgáljuk, hogy várható értékük azonos. Az eddigiekkel ellentétben azonban most nem tesszük fel, hogy

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_1 \sigma_2 \rho$$

kovarianciájuk eltűnik. A ρ tényezőt *korrelációs együtthatónak* nevezzük. Ezzel

$$D^2(\xi_1 - \xi_2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho.$$

A két mért mennyiség várható értékét akkor tekintjük a választott konfidenciaszinten egyenlőnek, ha

$$\zeta = \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho}} < \gamma_G,$$

ahol γ_G a Gauss-eloszlás kvantilise.

A korrelációs együttható hatása nagyon jelentős lehet. Vannak esetek,⁷ amikor $\rho \approx 1$. Ekkor a ζ statisztikára a

$$\zeta \approx \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{|\sigma_1 - \sigma_2|}$$

közelítő egyenlőség adódik, ami azt jelenti, hogy erősen korrelált mennyiségek esetében már nagyon kis különbségek is szignifikánsak lehetnek, amikor $\sigma_1 \approx \sigma_2$.

Ilyesmi akkor fordul elő, amikor ugyanabból az illesztésből származó becült paramétereket hasonlítunk össze (lásd 7. fejezet). Tekintsük a következő példát:

$$\tilde{a}_1 = 10872 \pm 429, \quad \tilde{a}_2 = 9925 \pm 372, \quad \rho = 0,832.$$

Az egyszerűség kedvéért Gauss-eloszlásúnak tekintjük ezeket a mennyiségeket, és azt összehasonlítást 95% konfidenciaszinten végezzük el. Ebben az esetben a 2. függelék szerint az $\varepsilon = 0,05$ -höz tartozó kvantilis $\gamma_G = 1,96$. Ha a mennyiségeket függetlennek tekintjük, akkor a

$$\zeta = \frac{10872 - 9925}{\sqrt{429^2 + 372^2}} = 1,668$$

⁷ Ilyenek lehetnek például az együttesen illesztett paraméterek. Ezekre a későbbi fejezetekben látunk majd példát.

hányadost kell a kvantilissal összevetni, vagyis a próba azt mutatja, hogy \tilde{a}_1 és \tilde{a}_2 között nincs szignifikáns különbség. Más következtetésre jutunk, ha figyelembe vesszük e két mennyiség közötti erős korrelációt:

$$\zeta = \frac{10872 - 9925}{\sqrt{429^2 + 372^2 - 2 \cdot 429 \cdot 372 \cdot 0,832}} = 3,971,$$

ami lényegesen nagyobb a kvantilisnél, tehát \tilde{a}_1 és \tilde{a}_2 között *van* szignifikáns különbség.

5.3. Korrekciók

Az 1.3. alfejezetben már volt szó a *korrekciókról*. Mindig fellépnek, amikor a mérési eredményeket befolyásoló paraméterek egyikének-másikának az értéke eltér a névleges értéktől. Az alábbiakban a korrekciók figyelembevételének a módjáról lesz szó. Az 1. függelék szerint egy korrekció mindig additív, vagyis a szisztematikus hiba (lásd alább) megszüntetése érdekében valamit hozzáadunk a közvetlenül mért értékhez. Vannak esetek, amikor a szisztematikus hibát egy *korrekciós tényező* segítségével szüntetjük meg. Az alábbiakban csak a korrekciókkal foglalkozunk, de a mondottak kis változtatással átvihetők a korrekciós tényezőkre is.

Korrekció

Legyen a ξ_i mérések ($i = 1, 2, \dots, n$) várható értéke

$$M(\xi_i) = a + c\mu_0. \quad (5.46)$$

Az eddigiekhez képest újdonság, hogy nem úgy sikerült a keresett a mennyiséget megmérni, ahogy szeretttük volna, hanem volt egy paraméter (például a laboratórium hőmérséklete), amely a névleges értéktől (20°C) eltért. Az eltérés valódi értéke legyen μ_0 , amelyre vonatkozóan valamilyen μ független mérési adatunk van σ_μ szórással. A c tényező a -nak a μ paraméterre való

$$c = \frac{\partial a}{\partial \mu},$$

érzékenysége, amit ismertnek tételezünk fel.⁸ Így tehát van két ismeretlen paraméterünk (a és μ_0), továbbá $(n + 1)$ mérési adatunk (μ és ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$). Meghatározásukra a maximális valószínűség elvét alkalmazzuk. Együttes sűrűségfüggvényük

$$L(\mathbf{x}, \mu; a, \mu_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_\mu^2}\right) \times$$

⁸ Általában elméleti úton kell meghatározni.

$$\times \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - a - c\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.47)$$

ahol σ^2 a ξ_i mérések közös szórásnégyzete. Ennek kell a maximumát megkeresnünk a és μ_0 függvényében az $\mathbf{x} = \bar{\xi}$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^2} (\xi_i - a - c\mu_0) = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_0} &= \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_\mu^2} + \sum_{i=1}^n \frac{c}{\sigma^2} (\xi_i - a - c\mu_0) = 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása egyszerűen adódik:

$$\tilde{\mu}_0 = \mu \quad \text{és} \quad \tilde{a} = \bar{\xi} - c\mu. \quad (5.48)$$

Ez a becslés torzítatlan, hiszen

$$M(\tilde{a}) = M(\bar{\xi}) - cM(\mu) = a + c\mu_0 - c\mu_0 = a.$$

A korrigált becslés szórásnégyzete:

$$D^2(\tilde{a}) = D^2(\bar{\xi}) + c^2\sigma_\mu^2 \cong \frac{s^2}{n} + c^2\sigma_\mu^2, \quad (5.49)$$

ahol s^2 a ξ_i mérések empirikus szórásnégyzete [vö. (5.7)], vagyis σ^2 becslése. Azt kaptuk tehát, hogy az eredetileg mért mennyiségek szórásnégyzetét meg kell növelni a korrekció szórásnégyzetével. Ha nem is mindig ilyen egyszerűen vezethető le, de a korrekciók hatása mindig így vehető figyelembe.

Ha a fentiek szerint járunk el, könnyen elkerülhetjük a tévedéseket. Egyszerű példával illusztráljuk, milyen tévedések fenyegetnek azonban, ha nem a maximális valószínűség elvét alkalmazzuk. Csináljuk tehát a dolgot másképpen, és korrigáljuk az egyes mérési eredményeket külön-külön:

$$\xi'_i = \xi_i - c\mu, \quad (5.50)$$

majd vegyük ezek átlagát:

$$\bar{\xi}' = \frac{\sum_{i=1}^n \xi'_i}{n} = \bar{\xi} - c\mu.$$

Ugyanezt kaptuk a maximális valószínűség módszerével, tehát a dolog rendben levőnek tűnik. Szórásnégyzetének becslése érdekében kiszámítjuk a korrigált értékek empirikus szórásnégyzetét [vö. (5.7)]:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (\xi'_i - \bar{\xi}')^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n [(\xi_i - c\mu) - (\bar{\xi} - c\mu)]^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1} = s^2,$$

amiből a korrigált értékek átlagának a szórásnégyzetére az s^2/n becslés adódik. A fentiekből tudjuk, hogy ez nem az a paraméter becslt értékének a szórásnégyzete, hanem annál $c^2\sigma_\mu^2$ -tel kisebb. Hol van tehát a hiba?

A válasz nem triviális, mert a baj ott van, hogy “vakon” alkalmaztuk a képleteket, és nem vettük figyelembe alkalmazhatósági feltételeiket. Esetünkben arról van szó, hogy az (5.7) szerinti s^2 a σ^2 szórásnégyzetnek csak akkor torzítatlan becslése, amikor a képletben szereplő mennyiségek egymástól függetlenek. A korrigált mérések azonban nem ilyenek, hiszen mindegyikben a μ valószínűségi változónak ugyanaz az értéke szerepel. A jelen szakasz végén megmutatjuk, hogy tényleg erről van szó.

Előbb néhány szót szólnunk a konfidenciaintervallumról, amelynek megszerkesztése esetünkben nem egyszerű. Ha a szabadsági fokok $(n-1)$ száma elég nagy, fel lehet tételezni, hogy a -nak (5.48) szerinti becslése Gauss-eloszlású. Ekkor a konfidenciaintervallum megszerkesztése nem jelent problémát. Ellenkező esetben azonban problémák merülnek fel. Megvilágításukra vezessük be az alábbi jelölést:

$$S_{n-1}(y) = P\{t < y\},$$

ami az $(n-1)$ szabadsági fokú Student-eloszlás eloszlásfüggvénye. Ezzel a γ kvantilist a

$$P\{|t| < \gamma\} = S_{n-1}(\gamma) - S_{n-1}(-\gamma) = 1 - \varepsilon$$

egyenletből számítjuk ki. Ha $\mu = \mu_0$, érvényes a következő összefüggés:

$$P\left\{\left|\frac{\bar{\xi} - a - c\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| < \gamma\right\} = S_{n-1}(\gamma) - S_{n-1}(-\gamma)$$

hiszen $M(\bar{\xi}) = a + c\mu_0$. Tekintve, hogy μ_0 -at kénytelenek vagyunk μ -vel becsülni, ez nem alkalmas konfidenciaintervallum konstruálására. Ha μ -t rögzítjük, felírhatjuk az alábbi feltételes valószínűséget:

$$\begin{aligned} & P\left\{\left|\frac{\bar{\xi} - a - c\mu}{s/\sqrt{n}}\right| < \gamma \mid \mu \text{ adott}\right\} = \\ & = S_{n-1}\left(\gamma - \frac{c(\mu - \mu_0)}{s/\sqrt{n}}\right) - S_{n-1}\left(-\gamma - \frac{c(\mu - \mu_0)}{s/\sqrt{n}}\right) = g(\gamma, \mu), \end{aligned}$$

ahol a további képletek egyszerűsítése érdekében bevezettük a $g(\gamma, \mu)$ jelölést. Ahhoz, hogy a γ kvantilis helyes értékét kiszámítsuk, ennek μ sűrűségfüggvényére vett átlagát kell $(1 - \varepsilon)$ -nal egyenlővé tenni, és az eredményül kapott egyenletet γ -ra megoldani:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\mu}^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_{\mu}^2}\right) \cdot g(\gamma, \mu) d\mu = 1 - \varepsilon.$$

Ritkán szokták ezt az egyenletet konkrét esetekben felírni és megoldani, pedig a korrekt adatkezeléshez hozzátartozna. A dolog oka a felmerülő matematikai nehézségekben keresendő.

A gyakorlatban a korrekciók kicsik a mért mennyiségekhez képest, így szórásnégyzetük is kicsi a mért mennyiségekéhez képest. Ezért a gyakorlati esetek többségében megelégszünk azzal, hogy hatásukat (vagyis $c^2\sigma_{\mu}^2$ értékét) beolvasztjuk a becsült szórásokba, és ezután úgy tekintjük, mintha a korrekció szórása 0 lenne, amivel a képletek egyszerűsödnek.

Befejezésül megmutatjuk, hogyan kellene a korrigált mérési adatokat matematikailag korrektül kezelni.⁹ Az eredeti ξ_i mérések ($i = 1, 2, \dots, n$) egymástól függetlenek, és szórásuk azonos, tehát kovarianciamátrixuk $\sigma^2\mathbf{E}$. Az (5.50) szerinti korrekció mindegyik mérésnél azonos, tehát kovarianciamátrixa olyan $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden eleme a korrekció szórásnégyzete. Ennek megfelelően a korrigált mérések kovarianciamátrixa

$$\mathbf{B} = \sigma^2\mathbf{E} + c^2\sigma_{\mu}^2\mathbf{e}\mathbf{e}^T. \quad (5.51)$$

Az (5.42) képlet alkalmazásához ki kell számítanunk a $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}$ szorzatot. Szerencsénk van, mert

$$\mathbf{B}\mathbf{e} = (\sigma^2 + nc^2\sigma_{\mu}^2)\mathbf{e},$$

amiből

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}}{\sigma^2 + nc^2\sigma_{\mu}^2}.$$

Így az (5.42) szerinti súlyvektor

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{e}}{n}.$$

Az a paraméternek a maximális valószínűség elve alapján való becslése:

$$\tilde{a} = \bar{\xi}'^T \mathbf{w} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi'_i}{n} = \bar{\xi}',$$

⁹ Ezt csak azoknak javasoljuk elolvasni, akik az 5.2. alfejezet korrelált mérésekről szóló szakaszát áttanulmányozták

amint ezt fent heurisztikusan is felírtuk. Az (5.43) képlet viszont a korrekt szórásnégyzetet adja:

$$D^2(\tilde{a}) = \frac{1}{\mathbf{e}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}} = \frac{\sigma^2 + nc^2 \sigma_\mu^2}{n} \cong \frac{s^2}{n} + c^2 \sigma_\mu^2.$$

Ezt a levezetést “elrettentésül” hoztuk. Szó sincs arról, hogy bárkit ilyen számításokra buzdítanánk. Mindössze azt kívántunk bemutatni, mennyivel egyszerűbben kapjuk meg a helyes eredményt, ha minden esetben a maximális valószínűség elvéből indulunk ki.

Nem kézben tartott paraméterek hatása

Tételezzük fel, hogy a mérést befolyásolja a δ mennyiség, de az egyes mérésekben felvett értékét nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy δ várható értéke 0, szórása σ_δ . Ha az i -edik mérésben felvett értéke δ_i volt, akkor

$$M(\xi_i | \delta_i) = a + c \delta_i,$$

ahol c a mért mennyiségek érzékenysége a δ paraméterre: $c = \partial a / \partial \delta$. Ennek alapján ξ_i feltételes sűrűségfüggvénye

$$L(x_i | \delta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - a - c\delta_i)^2}{2\sigma^2}\right),$$

amiből kapjuk ξ_i perem-sűrűségfüggvényét:

$$L(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x_i | \delta_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta^2}} \exp\left(-\frac{\delta_i^2}{2\sigma_\delta^2}\right) d\delta_i.$$

Ezt kiintegrálva az

$$L(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma'^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - a)^2}{2\sigma'^2}\right)$$

sűrűségfüggvény adódik, ahol

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + c^2 \sigma_\delta^2.$$

Végeredményben tehát mindegyik mérés szórásnégyzetét meg kell növelni az ismeretlen értékű hatáshoz tartozó $c^2 \sigma_\delta^2$ értékkel. Ezután az ilyen hatások nem különböztethetők meg az eredendően fennálló statisztikus hibáktól.

Az elmondottak azt jelentik, hogy ha az egyes ξ_i mennyiségek mérését úgy ismételjük meg n -szer, hogy közben a δ paramétert nem ellenőrizzük, a megfigyelt szórás σ helyett σ' lesz. Ez lényeges eltérés a fentiekben vizsgált korrekciók hatása és a δ paraméter hatása között. Jóllehet *formálisan* mindkettő tekinthető úgy, mint az eredeti σ szórást megnövelő hatás, statisztikai kezelésük

elvileg eltérő: az előbbi esetében előfordulhat, hogy az empirikusan becsült szórárs nem tükrözi az alkalmazott korrekció bizonytalanságát, viszont az utóbbi esetében elég az empirikus szórársból kiindulni.

Két esetet érdemes egymástól megkülönböztetni. Az egyik esetben a mérést δ azonos, de ismeretlen értékénél végeztük el, és tudjuk, hogy ennek hatása van a mérési eredményre. Ebben az esetben a fenti módon meg kell növelni a szórársnégyzetet. Ha azonban a mérést úgy ismételtük meg n -szer, hogy közben δ változhatott, akkor az (5.7) szerint becsült empirikus szórárs ennek hatását tükrözni fogja, tehát a szórársnégyzet fenti módon való megnövelésére nincs szükség. Erre példa: tegyük fel, hogy a mérést naponta ismételtük, és nem ügyeltünk arra, hogy a hőmérséklet állandó legyen, sőt meg sem mértük¹⁰. Ilyenkor a hőmérséklet napi változásainak, vagyis δ_i hatása tükröződni fog s^2 -ben. Ha ugyanis $\delta_i \equiv 0$ lenne, akkor

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1}$$

lenne, ami σ^2 torzítatlan becslése. Amikor $\delta_i \neq 0$, feltehetjük, hogy korrelálatlanok a ξ_i mérési adatokkal, vagyis a

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})(\delta_i - \bar{\delta})$$

összeg közel van 0-hoz. Így a most adódó empirikus szórársnégyzet jó közelítéssel így írható:

$$s'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i + c\delta_i - \bar{\xi} - c\bar{\delta})^2}{n-1} \approx \frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1} + c^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\delta_i - \bar{\delta})^2}{n-1},$$

ami $\sigma'^2 = \sigma^2 + c^2 \sigma_\delta^2$ torzítatlan becslése, vagyis δ_i hatása tényleg tükröződik s^2 -ben.

σ_δ becslésére többnyire egyszerű megfontolásokat alkalmazunk. Tegyük fel például, hogy δ a laboratórium hőmérsékletének a 20 °C névleges hőmérséklettől való eltérése. Erre (és hasonló paraméterekre) vonatkozóan gyakran legfeljebb ilyen kijelentéseket tudunk tenni: “ δ abszolút értéke nem haladhatta meg a 3 °C-t”. Ilyenkor aligha tudunk okosabbat mondani, mint azt, hogy δ a (-3 °C, +3 °C) intervallumban minden értéket egyenlő valószínűséggel vett fel. A Θ terjedelmű egyenletes eloszlás szórársnégyzete $\Theta^2/12$. Esetünkben

$\Theta = 6$ °C, tehát $\sigma_\delta^2 = 6^2/12 = 3$ (°C)², vagyis

$$\sigma_\delta = \sqrt{3} \text{ °C} \approx 1,7 \text{ °C}.$$

¹⁰ Ha ugyanis megmértük volna, akkor a hatását korrekcióként tudnánk figyelembe venni.

Mérési hiba és bizonytalanság

A fentiek alapján tudjuk a mérések kiértékelésének két alapvető fogalmát megvilágítani: *mérési hiba* és *bizonytalanság*. Tulajdonképpen mindkettőt lehetne valószínűség-elméleti oldalról is megközelíteni, de az alábbiakban a kísérletezők szempontjaiból indulunk ki. A mérések módszereivel és kiértékelésével foglalkozó tudományt *metrológiának* nevezzük, amelynek a szóhasználata némileg eltér a valószínűség-elmélet terminológiájától. Mindkettőnek megvan a létjogosultsága: az utóbbi az elméleti megfontolások, az előbbi pedig a gyakorlati munka területén használandó. Az 1. függelékben összefoglaljuk a leggyakoribb metrológiai kifejezéseket és jelöléseket, valamint megadjuk néhányuk valószínűség-elméleti megfelelőit. A jelen részben csak kettővel foglalkozunk.

Mérési hiba

A mérési hiba fogalmát a legtöbb szerző a nem választja szét a bizonytalanság különböző mérőszámaitól. A metrológia szerint *a ξ mérési hiba a mért mennyiségnek a valódi értékétől való eltérése:*

$$\xi = M(\xi) + \zeta.$$

Metrológiai szóhasználat szerint nem *várható* értékről, hanem *valódi* értékről beszélünk. Mivel ezt nem ismerjük, a mérési hibát sem ismerhetjük. Ezért a gyakran hallható “hibaszámítás” – szigorúan vett metrológiai értelemben – szerencsétlen kifejezés, amelyet jobb kerülni. Ha ugyanis ki tudnánk számítani a hibát, ezt levonnánk a mért értékből, és így megkapnánk a valódi értéket. A hibaszámítás valójában a bizonytalanság becslését jelenti, amiről később lesz szó.

A mérési hibának két fajtája van: véletlen és rendszeres (szisztematikus) hiba:

- A *véletlen hiba* valószínűségi változó, amelynek a várható értéke zérus. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a mérés többször való ismétlésekor váltokozva vesz fel pozitív és negatív értékeket, és az ismétlések számának növekedésekor az átlaga nullához tart.¹¹ Ezt gyakran úgy mondjuk, hogy a “véletlen hiba *kiátlagolódik*”. A véletlen hibának két alfaja van aszerint, hogy mi az eredete. Erről később lesz szó.
- A *rendszeres* vagy *szisztematikus hiba* lehet konstans érték vagy olyan valószínűségi változó, amelynek a várható értéke nem zérus. Ha valószínűségi változó, szintén vehet fel pozitív és negatív értékeket, de ezek nem átlagolódnak ki. Ha mérésünkben ilyen fajta hiba fellép, arra vonatkozóan *minden esetben* kell korrekciót alkalmazni – akármilyen kicsi (és bizonytalan) ez a korrekció. Ennek módjáról a fentiekben volt már szó, és lesz még szó a 7.6. alfejezetben. Ha van szisztematikus hiba, az *a* paraméterre az (5.3) vagy (5.25) szerint adott becslés *torzított* lesz, és a torzítás értéke megegyezik a szisztematikus hiba várható értékével. A korrekció célja éppen a torzítás megszüntetése.

¹¹ Ezt valószínűségi értelemben kell venni: annak a *valószínűsége* tart 0-hoz, hogy az átlag abszolút értéke egy rögzített, ámde tetszőlegesen kicsiny ε számnál nagyobb legyen.

Vannak megfigyelések és kísérletek, amelyek lényegéhez tartozik, hogy eredményük valószínűségi változó. Ilyen a szerencsejáték, bizonyos nukleáris jelenségek megfigyelése, a Földet érő meteorok száma, tömege és iránya, földrengések előfordulása stb. Nem lehet például megmondani, hogy egy adott földrajzi helyen mikor lesz földrengés (vagy egyáltalán lesz-e), legfeljebb annak a valószínűségét határozhatjuk meg, hogy valahol egy adott időszakon belül lesz földrengés. A tektonikai jelenségek lényegéhez tartozik, hogy a valószínűségen túlmenően többet nem tudunk mondani.¹² Azt, hogy egy radioaktív atom mikor bomlik el, szintén nem tudjuk előre megmondani, de tudjuk, hogy $e^{-\lambda t}$ annak a valószínűsége, hogy t idő alatt ne bomoljon el. A bomlásig eltelt idő várható értéke $1/\lambda$, így t mérésekor $(t - 1/\lambda)$ a mérési hiba. Vannak szerzők, akik a véletlen hibának ezt a fajtáját *statisztikus hibának* nevezik. Az elnevezésen kívül¹³ a dolog logikus, mert – eredetét tekintve – elvileg különbözik a következő fajta véletlen hibától.

Egy mért mennyiség más okból is lehet valószínűségi változó: lehetnek olyan nem kézben tartott paraméterek, amelyek értéke maga is valószínűségi változó, viszont befolyásolják a mérés eredményét. Az előbb említett szerzők az ilyen eredetű hibákra korlátozzák a véletlen hiba fogalmát. Nem kívánunk mély filozófiai elemzésekbe bocsátkozni, mert ez messze vezetne jegyzetünk témájától. Az 1930-as években a fizikában lezajlott egy vita, a fenti értelemben vett statisztikus hiba visszavezethető-e rejtett paraméterek hatására, vagy valóban a jelenség lényegéhez tartozik-e a véletlenszerűség. Például Albert Einstein élete végéig sem tudta az utóbbi álláspontot elfogadni. Számunkra csak az fontos, hogy a két fajta véletlen hiba matematikai kezelése formálisan azonos. Ezért nem fogjuk erőltetni a két fajta hiba közötti különbségtevést. Az 1. függelékben olvasható definíciók szerint a metrológia sem különbözteti meg ezeket egymástól. Ugyanakkor azonban hangsúlyozzuk: az egyes hibák hatása nagyon különböző lehet, amint azt az előző szakasz végén a labor hőmérsékletével kapcsolatban megbeszéltük.

Mérési bizonytalanság

A mérési hibát elvileg nem ismerjük, de léteznek mérőszámok, amelyek mutatják annak valószínű nagyságát. Gyűjtőnevük: *mérési bizonytalanság*. A legfontosabb ilyen mérőszám a *szórás*. Ismert tételek (például a Csebisev-egyenlőtlenség) segítségével felső becslést kaphatunk a véletlen hiba nagyságára. A szórás az alapja az intervallumbecslésnek, vagyis a konfidenciaintervallum megszerkesztésének. Mivel az intervallum hossza mindenképpen mértéke az a paraméter keresett értékére vonatkozó tudásunknak (vagy inkább: tudatlanságunknak), az intervallum félhosszát szintén szoktuk mérési bizonyta-

¹² Természetesen csak a földtudományok mai fejlettségi szintjén.

¹³ A legtöbb nyelven írt valószínűség-elméletben a “véletlen” és a “statisztikus” szavak egymás szinonimái, vagy csak az egyiket használják. Ha már megkülönböztetjük a két fajta hibát, az elnevezés éppen fordítva lenne logikus: a jelenségek valódi véletlenszerűségéből eredő hibát kellene inkább véletlen hibának nevezni.

lanságnak nevezni. Mikor azonban ezt használjuk, pontosan meg kell mondanunk a konfidenciaszintet és a szabadsági fokok számát.

A bizonytalanság becslésére a metrológia két módszert különböztet meg: *A-típusú* és *B-típusú* becslés. Az előbbi az (5.7) képlettel (vagy rokon képletekkel) becsült *empirikus szórás*. Ha ezt alkalmazzuk, akkor a szórás becsült értékét s -sel jelöljük. Elméleti megfontolásokban általában a σ jelölést használjuk a szóráshoz, de ennek A-típusú becslésére a szabványos jelölés s . Az angol irodalom a szórást “standard deviation”-nek nevezi.¹⁴ Ha ebből (5.5) szerint kiszámítjuk az átlag s/\sqrt{n} szórását, akkor ennek angol neve: “standard error”. Feltehetően ebből ered a magyarban is elő-előforduló “standard hiba”. Mind ez, mind az idézett angol kifejezés elavult és kerülendő, sőt a metrológiai szabványok egyenesen tiltják az utóbbi használatát.

A bizonytalanság B-típusú becslésére az előző szakaszban láttunk példát: a szórást nem empirikusan, hanem valamilyen fizikai vagy mérés-technikai megfontolásból vezetjük le. Az így kapott bizonytalanság szabványos jele az angol “uncertainty” (= bizonytalanság) kifejezésből: u . Ha a végeredmény bizonytalanságát A- és B-típusú becslések kombinációjával kaptuk, a szabványos jelölés: u_c .¹⁵

Bármilyen szisztematikus hibáról van tudomásunk, azt feltétlenül korrekcióba kell vennünk. Ezzel kapcsolatban egy rendkívül súlyos tévedésre kell a figyelmet felhívni. *A szisztematikus hibát nem szabad a véletlen hibával összevonni!* Tekintsünk egy egyszerű példát: megmértük egy rúd hosszát: $l = 2534,5 \pm 2,4$ mm, amelyhez a mérőeszköz hibás kalibrálása miatt egy korrekciót kell alkalmaznunk, amelyet csak elég nagy bizonytalansággal tudunk meghatározni: $\Delta l = 0,6 \pm 1,3$ mm. A korrigált mérési eredmény nyilván

$$l_{\text{kor}} = l + \Delta l = 2534,5 + 0,6 = 2535,1 \text{ mm}.$$

Ennek a szórását a szórásnégyzetek összeadási szabálya [vö. (3.31)] alapján kapjuk:

$$D^2(l_{\text{kor}}) = 2,4^2 + 1,3^2 = 7,45 \text{ mm}^2 = (2,7 \text{ mm})^2.$$

A korrigált hosszúság tehát $l_{\text{kor}} = 2535,1 \pm 2,7$ mm. Ez lenne a helyes eljárás. Sajnos, két típushibával is lehet találkozni. Mindkettőben közös, hogy nem törődnek a korrekció szórásával, viszont a korrekciót összekeverik a mért mennyiségével:

- 1) A mért mennyiség szórásához hozzáadják a szisztematikus hibát, vagyis a korrigált eredményt az $l = 2534,5 \pm 3,0$ mm alakban publikálják. Ebben az eljárásban több hiba van, mint amennyi szó szükséges a leírásához. Csak egyet említünk: a szórás a mért adat bizonytalanságát jellemzi, a korrekció pedig a torzítását. A kettőnek egymáshoz semmi köze.

¹⁴ Vannak, akik a magyarban is “standard deviáció”-ról beszélnek.

¹⁵ A “c” index az angol “combined” melléknév rövidítése.

2) A mért mennyiség szórását és a szisztematikus hibát úgy vonják össze, mint-ha mindkettő szórás lenne. Először tehát kiszámítják a

$$2,4^2 + 0,6^2 = 6,12 \text{ mm}^2 = (2,5 \text{ mm})^2$$

mennyiséget, majd a korrigált eredményt az $l = 2534,5 \pm 2,5 \text{ mm}$ alakban publikálják. Ez a dolog már egyenesen komikus, de sajnos előfordul.

Befejezésül megjegyezzük, hogy azt a “szisztematikus hibát”, amelynek a várható értéke zérus, a fentiekben “nem kézben tartott paraméterek” címszó alatt tárgyaltuk. Ezt is figyelembe vesszük azáltal, hogy a “korrigált” érték szórását az ott mutatott módon megnöveljük.

5.4. Kerekítés

A becsült paraméterekre vonatkozó intervallumbecslésben a szórás becslése éppen olyan fontos, mint magáé a paraméteré. Ennek ellenére előfordul, hogy a szórását csak egyetlen értékes számjegyre adják meg, továbbá a becsült értéket a szórás nagyságrendjének megfelelő számjegyre kerekítik – mondván, hogy “a mérési bizonytalanságon belül úgysem érdekesek a számjegyek”. Például,

$$\begin{array}{lll} 58,72 \pm 9,63 & \text{helyett} & 60 \pm 10, \\ 58,72 \pm 1,52 & \text{helyett} & 59 \pm 2. \end{array}$$

Amióta számítógépekkel dolgozunk, erre különösebb ok nincs (hiszen a számítógépnek mindegy, hány számjegyre adjuk meg az input adatokat), mégis lehet a dologgal találkozni. Nézzük meg, milyen következményei vannak az ilyen jellegű “nagyvonalúságnak”.

A szórását minden esetben legalább két értékes jegyre célszerű megadni. Ennek indoklására tekintsük az alábbi szélsőséges (ámde tanulságos) példát. Legyen két mérés ($\xi_1 = 1,02$ és $\xi_2 = 3,14$) szórása rendre

$$\sigma_1 = 1,49 \quad \text{és} \quad \sigma_2 = 1,51.$$

Az 5.2. alfejezet végén mutatott módszerrel könnyű belátni, hogy ezek között a mért értékek között nincs szignifikáns különbség. Közös várható értékük becslésére tehát vehetjük súlyozott átlagukat: $2,06 \pm 1,06$. Kerekítsük most a szórásokat egyetlen értékes jegyre:

$$\sigma'_1 = 1 \quad \text{és} \quad \sigma'_2 = 2.$$

Ha ezeket használjuk súlyozott átlagolásra, akkor az eredetileg majdnem egyenlő súlyok aránya a kerekítés után 1:4 lesz. A velük képzett súlyozott átlag: $1,44 \pm 1,12$. A két átlag eltérése ugyan nem haladja meg a szórás értékét, de azal azonos nagyságrendű. Ezt az eltérést teljesen feleslegesen okoztuk egy egyszerű kerekítéssel. Jóllehet a kerekítés hatása nem mindig ilyen mértékű, általában érezhetően eltorzítja a súlyokat és az átlagokat.

Még szembeűnőbb a kerekítés hatása az intervallumbecslésre. Gauss-eloszlás esetében a 95% konfidenciaszinthez tartozó kvantilis $\chi_G = 1,96$ (kerekben: $\chi_G \approx 2$). $\sigma_1 = 1,49$ esetében tehát az intervallum szélessége kb. 3, viszont

a kerekítés után adódó $\sigma'_1 = 1$ -re csak kb. 2. Ha ezt visszaszámoljuk az eredeti σ_1 szórásra, a kerekítés tehát annyit jelent, hogy a kvantilist önkényesen lecsökkentettük

$$\gamma = 1,96 \cdot 2/3 = 1,33$$

értékre, ami 82% konfidenciaszintnek felel meg. A kerekítés tehát jelentősen eltorzítja a statisztikai próbát: szándékunk szerint 95%, de a kerekítés miatt ténylegesen csak 82% konfidenciaszinttel dolgozunk, ami jelentős különbség. Ha tehát túlzott módon kerekítjük a szórást, akkor nemcsak a súlyozást változtatjuk meg feleslegesen, hanem a kvantiliseket is.

Nézzük meg ezután, milyen pontosan célszerű megadni a becsült paramétereket. A legegyszerűbb, de még elfogadható megoldás a becsült paramétert is legalább a szórás utolsó megadott számjegyéig megadni. Például:

$$58,72 \pm 9,63 \text{ vagy } 58,7 \pm 9,6,$$

kerülendő azonban az 59 ± 10 -nek megfelelő kerekítés. Indoklásul megmutatjuk: ha kerekítünk, szintén feleslegesen eltorzítjuk a statisztikai próbákat és az intervallumbecsléseket, amit tanácsos elkerülni. Legyen ξ a tekintett paraméternek a várható értékétől való eltérése, és legyen σ a szórása. A statisztikai próbák esetében a

$$P\{|\xi| < \gamma\sigma\} = 1 - \varepsilon \quad (5.52)$$

egyenlettel definiált γ kvantiliseket vesszük alapul. Ha a paramétert kerekítjük, akkor az történik, hogy ξ -hoz hozzáadunk egy egyenletes eloszlású r valószínűségi változót. Ekkor tehát a kvantilist a

$$P\{|\xi + r| < \gamma\sigma\} = 1 - \varepsilon$$

egyenletből kell kiszámolni.¹⁶ Vezessük be a

$$\Phi(x) = P\{\xi < x\}$$

jelölést, amivel

$$P\{|\xi| < x\} = \Phi(x) - \Phi(-x).$$

Hasonlóan, legyen

$$F(\gamma) = P\{\xi + r < \gamma\sigma\},$$

amivel

$$P\{|\xi + r| < \gamma\sigma\} = F(\gamma) - F(-\gamma).$$

Ha r egyenletes eloszlásának a terjedelme Θ , akkor

¹⁶ A kerekítésnek ezt a modelljét a véletlen folyamatok kvantálásának az elméletéből kölcsönöztük. Végso eredményeink tájékoztató jellegűnek tekintendők, mert ez a modell közelítő.

$$\begin{aligned}
F(\gamma) &= \int_{-\Theta/2}^{\Theta/2} P\{\xi+r < \gamma\sigma|r\} \frac{dr}{\Theta} = \int_{-\Theta/2}^{\Theta/2} \Phi(\gamma\sigma-r) \frac{dr}{\Theta} = \\
&= \int_{\gamma\sigma-\Theta/2}^{\gamma\sigma+\Theta/2} \Phi(r) \frac{dr}{\Theta}.
\end{aligned}$$

A példa kedvéért tekintsük ξ -t Gauss-eloszlású változónak. Ekkor

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right),$$

ahol

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Az integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P\{|\xi+r| < \gamma\sigma\} = \\
&= \frac{\gamma\sigma + \Theta/2}{\Theta} \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma\sigma + \Theta/2}{\sigma\sqrt{2}}\right) + \frac{2\sigma}{\Theta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\gamma\sigma + \Theta/2)^2}{2\sigma^2}\right] - \\
&- \frac{\gamma\sigma - \Theta/2}{\Theta} \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma\sigma - \Theta/2}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \frac{2\sigma}{\Theta\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\gamma\sigma - \Theta/2)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Látható, hogy (γ -n kívül) ez csak a Θ/σ hányadostól függ. A kapott formula kétféle módon használható:

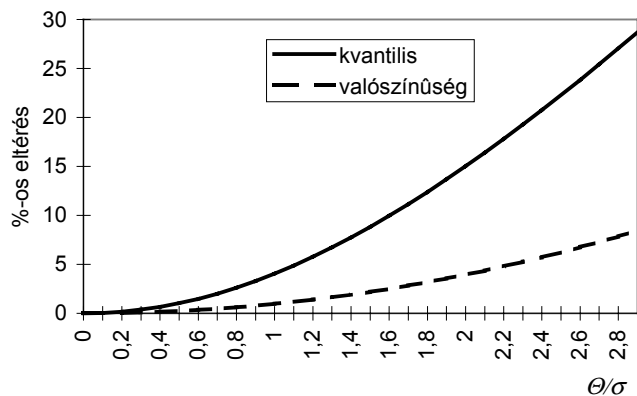
1. A

$$P\{|\xi| < \gamma_G \sigma\} = 1 - \varepsilon'$$

képlettel kiszámíthatjuk belőle, hogy a Gauss-eloszláshoz tartozó γ_G kvantilis az adott esetben valójában milyen ε' konfidencia-valószínűséghez tartozik.

2. Az (5.52) egyenletnek γ -ra való megoldásával meghatározhatjuk, hogy – tudva a kerekítés tényéről – az adott konfidencia-valószínűséghez mekkora (természetesen megnövelt, $\gamma > \gamma_G$) kvantilist kell használnunk.

Az 5.3. ábrán a Θ/σ hányados függvényében megadjuk mindkét mennyiségnek a kerekítés nélkül érvényes értékétől való eltérését $\varepsilon = 0,05$ konfidencia-valószínűség mellett. A kerekítés nélküli kvantilis $\gamma = 1,96$. Látható, hogy a szórással azonos nagyságrendű kerekítési hiba esetében a kvantilis eltérése már 5% körüli érték, továbbá a látszólagos konfidencia-valószínűség eltérése 1% (azaz $\varepsilon' = 0,06$). Levonhatjuk azt a következtetést, hogy *a mért értéket a szórásnál legalább egy nagyságrenddel pontosabban kell megadni.*



5.3. ábra. A kvantilis torzulása a kerekítés miatt

Az előző példában $\sigma=9,63$, tehát az 5.3. ábra szerint elég a $\theta \approx 1$ -nek megfelelő kerekítés, vagyis a becült paramétert kerekíthetjük egész számra: 59. σ ennek megfelelő kerekítése 10 lenne. Ez igazában csak egyetlen értékes számjegy, amit a fentiek szerint tanácsos elkerülni. Ezért σ javasolt kerekítése: 9,6. Ezzel viszont logikusan együtt jár, hogy a becült paraméterben is egy további számjegyet adjunk meg: 58,7. Így a végeredmény javasolt megadása: $58,7 \pm 9,6$.

Fontos dolog, hogy a “0” számjegyet is adjuk meg, ha éppen az lett a kerekítés eredménye! Ha például a kerekítendő szám 58,99, akkor ennek egy tizedesjegyre való kerekítése 59,0 és nem 59. A “0” számjegy elhagyása ugyanis azt sugallná, hogy a kerekítés a tizedesvessző előtti számjegyre történt, ami félreértés. Az adatok további értelmezése szempontjából tehát 59 és 59,0 nem ugyanazt jelenti!

A fenti végkövetkeztetéseket egyébként egyszerűbben is meg lehetett volna kapni. A kerekített mennyiség szórása

$$\sigma'^2 = \sigma^2 + \frac{\theta^2}{12}.$$

Például $\theta = \sigma$ esetében $\sigma' = 1,04\sigma$, tehát használhatjuk a γ_G kvantilist, ha 4%-kal megnöveljük a szórás. A konfidenciaintervallum félszélessége közelítőleg ugyanaz, mint korábban:

$$\gamma\sigma' \approx \gamma_G\sigma.$$

A Gauss-eloszlás kvantilisével kapott konfidenciaintervallum szélessége a kerekítés miatt azonban mindenképpen megnő ($\gamma_G\sigma$ helyett $\gamma_G\sigma'$).

Az 5.3. ábra értékeléséhez tekintsük az alábbi példát. A mérés eredménye – sok jegyre kiírva – legyen

$$156,745 \pm 6,872.$$

95%-os konfidenciaszinten a megfelelő intervallumbecslés

$$(143,276; 170,214).$$

Ha a pontbecslést és a szórást az általunk javasolt módon kerekítjük, a mérési eredmény

$$156,7 \pm 6,9$$

lesz. Itt tehát $\Theta = 0,1$, vagyis $\Theta/\sigma = 0,014$. A kvantilis emiatt fellépő megnövekedése elhanyagolható, tehát az intervallumbecslés

$$(143,2; 170,2),$$

ami csak az utolsó számjegyben egy egységgel tér el az eredeti intervallumtól.

Nézzük meg ezután, mivel jár, ha a kerekítésben tovább megyünk. A pontbecslést kerekítjük, de a szórást nem:

$$160 \pm 6,9.$$

A fenti jelölésekkel tehát $\Theta = 10$, $\sigma = 6,9$, vagyis $\Theta/\sigma = 1,45$. Ha továbbra is a $\gamma = 1,96$ kvantilist használjuk, a konfidenciaintervallum

$$(146,5; 173,5).$$

A korábbi és a mostani intervallumot az 5.4. ábrán ábrázoljuk. Látható erről, hogy a helyes intervallumbecsléshez képest az utóbbi felfelé van eltolva. Az 5.3. ábrán látható görbe szerint azonban ez valójában nem 95%, hanem 92,9% konfidencia-valószínűséghez tartozik. Ha továbbra is ragaszkodunk a 95%-hoz, akkor a kvantilist 8,8%-kal meg kell növelnünk, vagyis $\gamma_G = 1,96$ helyett $\gamma = 2,14$ -et kell használnunk. Az így számolt intervallumbecslés

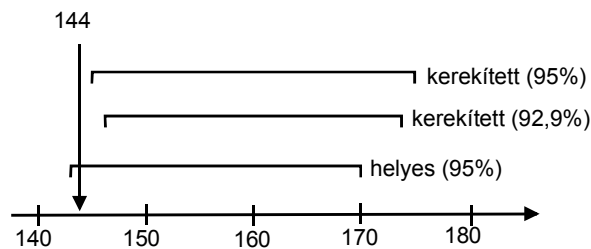
$$(145,2; 174,8),$$

ami a helyes intervallumbecsléshez képest szintén felfelé van eltolva. Nyilván mindkettő téves. A tévedést el lehetett volna kerülni, ha nem lennének lusták két tizedesjeggyel többet leírni. Ne vegyük a dolgot félvállról! Ha például az elméleti jóslat 144, a helyes intervallumbecsléssel ezt elfogadnánk 95% konfidenciaszinten, viszont a kerekítés után elvetjük. Az adatkezelésben tett megfontolatlan lépés tehát a végkövetkeztetést drámaian befolyásolhatja.

A fenti okfejtést tovább lehetne fejleszteni, ha a szórás értékét is kerekíténénk, vagyis a fenti mérési eredményt

$$160 \pm 10$$

alakban adnánk meg. Erre az estre vonatkozóan (5.53) helyett egy másik képletet kellene levezetnünk, de ezt már elhagyjuk. Reméljük, hogy az eddigiek is elég meggyőzően mutatják: kerekíteni ugyan érdemes, de csak mértékkel.



5.4. ábra. A konfidenciaintervallumok változása kerekítés miatt

