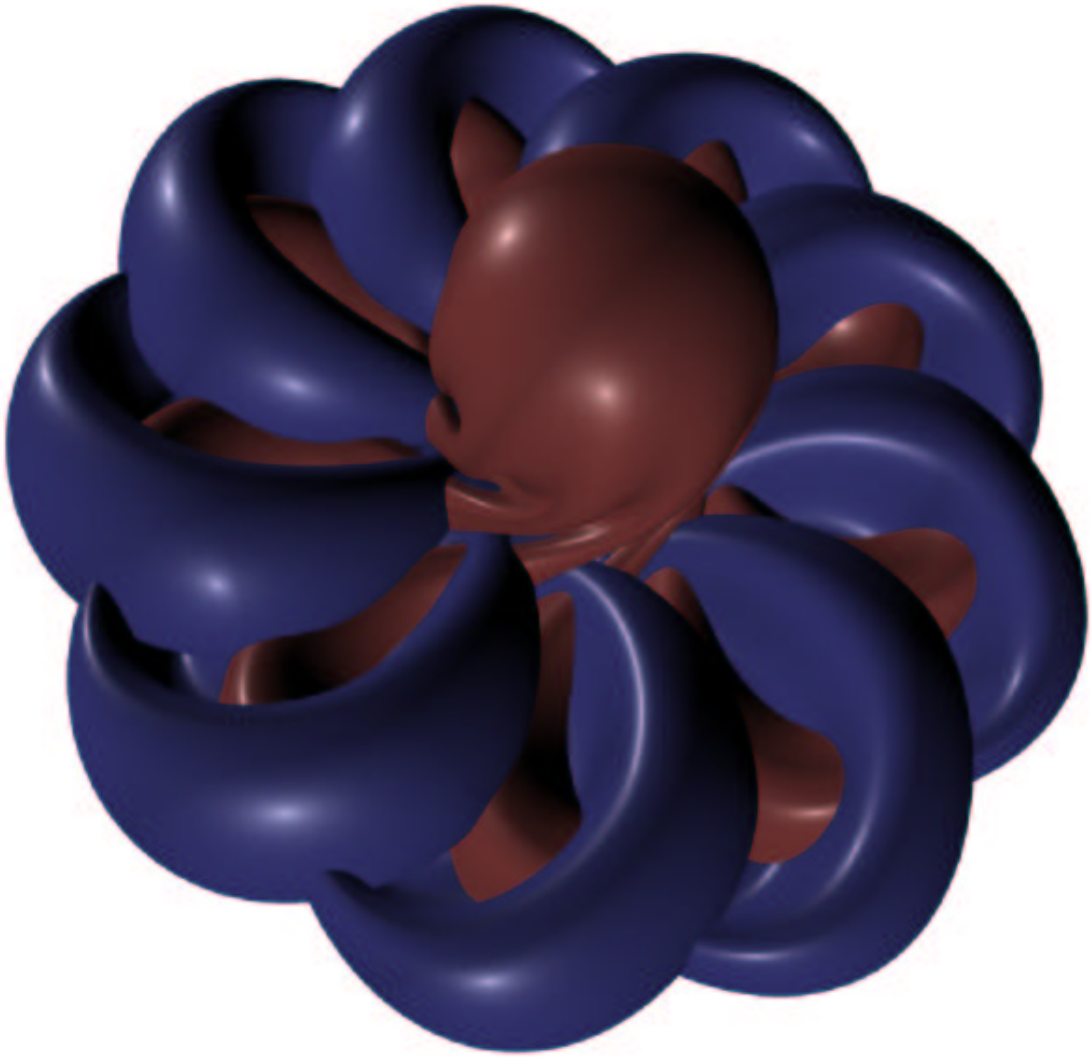
Fizika és geometria

Fizikus-matematikus nyári iskola

Óbánya, 1997. július 12-25.



Budapest, 2003.

Fizika és geometria

Matematikus-fizikus nyári iskola

Óbánya, 1997. július 12-25.

Budapest, 2003.

2. javított, átdolgozott kiadás

ISBN: 963-214-495-3

A borítón az „Outside In” című számítógépes animációs film egyik jelenete látható.
Reproduced with permission by the Publisher, A K Peters, Ltd., Natick, MA, USA

Geometria est archetypus pulchritudinis mundi.

J. Kepler: Mysterium Cosmographicum

Tartalomjegyzék

Előszó **v**

I A topológia és a fizika története **1**

1 Bevezetés – pillantás a múltba 2

2 A topológia születése 3

3 Összegzés 8

Irodalomjegyzék 9

II Lineáris algebrai bevezető **11**

1 Alapfogalmak 12

2 Bilineáris leképezések 19

3 Komplex vektorterek 21

4 Multilineáris leképezések 23

5 Tenzorszorzatok és formák 24

III Topológiai alapfogalmak **29**

1 Bevezetés 30

2 Sima sokaságok 30

3 Lie-csoportok 35

4 Nyalábok 37

5 Homológia-csoportok 40

Irodalomjegyzék 43

IV Klasszikus mezőelméletek geometriája 45

1 Bevezetés 46

2 A de Rham kohomológia-elmélet alapjai 46

3 Elektrodinamika – mágneses monopólusokkal 59

4 A Yang – Mills-elméletek matematikai alapjai 69

Irodalomjegyzék 83

V Geometriai kvantálás és a Jones – Witten-elmélet 85

1 Bevezetés 86

2 A klasszikus mechanika matematikai modelljei 87

3 Szimplektikus sokaságok geometriai kvantálása 98

4 Jones – Witten-elmélet 110

Irodalomjegyzék 121

VI A kvantummező-elméletek szerkezete 123

1 Bevezetés 124

2 Átfogalmazás 125

3 Az $n+1$ dimenziós KME szerkezete 127

Irodalomjegyzék 131

VII Kvantumelmélet és algebrai geometria 133

1 Bevezetés 134

2 Algebrai geometria 134

3 Fizikus megoldás 138

Irodalomjegyzék 145

Tárgymutató **146**

Táblázatok és ábrák jegyzéke

Az elektrodinamika reprezentációja a spinormezők Hilbert-terén 65

Dirac-szál az $\mathbf{A}^{\pm}$ mértékekben 67

Fizikai mezők és geometriai megfelelőik 82

A mechanikai modellek összehasonlítása 100

A bogozási reláció 119

A differenciáltopológia és a KME kapcsolata 126

d-ed fokú sík- ill. racionális görbék paramétereinek száma 138

$3d-1$ ponton átmenő d-ed fokú racionális görbék száma 139

d-ed fokú rac. görbék száma egy általános 5-öd fokú hiperfelületen 140

Előszó

1997-ben Óbányán – a Mecsek oldalában fekvő kicsiny településen – először került sor arra, hogy Magyarország matematikusai és fizikusai együttesen nyári iskolát tartsanak egyetemista diákoknak. Dávid Gyula, Etesi Gábor, Hausel Tamás és a Magyar Fizikus Hallgatók Egyesületének (Mafihe) szervezésében több kíváló előadást hallgathattak meg a résztvevők. Hosszas előkészületek és rengeteg egyeztetés után végre jelen jegyzetben nyomtatott formában is megjelenhetett ezen előadások anyaga, amelyek az alapoktól egészen napjaink „nagy fizikai-matematikai problémáiig" kalauzolják a türelmes Olvasót.

A nyári iskola megszervezéséért, és lebonyolításáért köszönet illeti Dávid Gyulát, Etesi Gábort, Hausel Tamást és a Mafihét. Tisztelettel tekintünk előadóinkra: Dávid Gyulára, Etesi Gáborra, Hausel Tamásra, Karp Lászlóra, Matolcsi Tamásra, Rimányi Richárdra, és Szenes Andrásra, akik fáradtságot és nyári szabadságukat nem sajnálva igyekeztek átadni tudásuk legjavát. Köszönet illeti az előadók legtöbbjét, továbbá Major Mártont a jegyzet megszerkesztésében nyújtott segítségükért. Köszönjük továbbá a Mafihe és a Paksi Atomerőmű Részvénytársoság anyagi támogatását, amelyet jelen jegyzet kiadásához nyújtottak. Végül, de nem utolsó sorban köszönet illeti Elekes Verát és Hausel Katalint akik dacolva az időjárással és az örökké éhes szájakkal, gondot fordítottak a nyári iskola népes táborának mindennapi étkeztetésére.

Budapest, 1999. április 1.

Barnaföldi Gergely Gábor

I. A topológia és a fizika története

Barnaföldi Gergely Gábor
ELTE Természettudományi Kar
Fizikus szak IV. évfolyam

bgergely@rmki.kfki.hu

1 Bevezetés – pillantás a múltba

Sosem szabad elfelejtenünk, hogy valamikor réges-régen minden tudomány egyazon tőről fejlődött ki! A cél – ahogy napjainkban is – mindvégig a természet rendjének megismerése, valamilyen emberi nyelven történő leírása volt. Kevés kivétellel azt mondhatjuk, hogy az élettelen természet makro- és mikroszkópikus világában végbemenő változások leírására a fizika és a matematika kelléktára vált be leginkább.

Az emberiség múltjába visszatekintve nehéz meglelni azt a pillanatot, amikor a ókorban a fizika és matematika fogalmai először körvonalazódtak. Időszámításunk kezdete körül azonban már hét szabad művészeti ágba sorolja a tudományokat a krétai – majd később az egész Mediterrániumban szétterjedő – kultúra. Szomorúan vehetjük észre, hogy a későbbi korokban ezek – s így a számunkra fontos matematika és fizika is – fokozatosan eltávolodtak. Az ókori görög és római kúltúrákban létrejött egyenrangúság a középkor dogmatikus világában felbomlott. A matematika absztrakt objektumai – néhány esettől eltekintve, mint például II. Szilveszter pápa a számok oszthatóságáról írt „ördögi" műve –, nem bántották senki személyét, semmilyen vallás tekintélyelvű világát. A fizika ellenben – amely éppen a kozmosz rendjét akarja megfogalmazni – igen. Nem csoda hát, hogy a fejlődés egysége felbomlott, és a matematika jelentős előnyre tett szert.

A XVII. századig nagyon lassan fejlődött mindkét tudomány. Az elemi matematika gazdasági, hadászati és építészeti szempontból nélkülözhetetlen volt, így fokozatosan minden e téren felvetődő problémát megoldottak a kor éleseszű gondolkodói. A fizikában felbukkanó kérdésekre a nagy fizikus-matematikus polihisztorok adtak kielégítő válaszokat. Gyakran mégis úgy tűnt, hogy az így kidolgozásra kerülő matamatikát csak saját elméletük „szebb" leírására találták ki. Az 1800-as évek közepétől azonban az újonnan születő fizikai elméletek egyre-másra nőtték ki a régi matematika – az algebra, az analízis vagy például a vektorszámítás – kereteit.

A XX. század elején új fizika bontakozott ki, amely előhírnökei a relativitáselmélet és a kvantummechanika voltak. A felhalmozódó kidolgozatlan elméletek rengeteg féreértést okoztak. Szerencsére a fizikusok segélykiáltása ekkor már újból eljuthatott a matematikusokhoz, akik szorgalmasan nekiláttak az addig megalkotott fizikai modellek precíz matematikai kidolgozásának. Nem maradt hálatlan a fizikus társadalom sem, hiszen napjainkban,

a XXI. század küszöbén – egyre gyakrabban –, fizikai megoldások segítik ki matematikusainkat a bonyolult fogalmi rendszerek útvesztőjéből.

Úgy tűnik, hogy a *matematikai fizika* és az újonnan kialakult *fizikai matematika*, egyre inkább egy nagy közös cél felé tart, amely ma a kvantummező-elméletek leírása.

2 A topológia születése

A továbbiakban azt fogjuk figyelemmel kísérni, hogyan alakult ki a matematika egy új ága: a *topológia*; valamint hogyan fejlődött ezen tudományág kapcsolata a fizikával.

KEZDETEK

A XVII. században Sir Isaac Newton megalkotta a kalsszikus mechanikát, az ehhez szükséges matematikai apparátussal. Talán ezt a lépést tekinthetjük kiindulópontunknak, bár a differeciál- és integrálszámítás csak motiválja a később elénk táruló topológiát.

A legkorábbi topológiainak is tekinthető feladat a híres königsbergi hidak probémája. A városatyák által feladott találós kérdés így szólt: a várost átszelő Pregolja folyó két szigetét s partjait összekötő hét hídon végig lehet-e sétálni úgy, hogy minden hídon pontosan egyszer megyünk végig? A bolyongási problémát 1736-ban L. Euler oldotta meg. Euler gondolatmenete azután alapja lett a későbbi *gráfelmélet*nek. A gráfelmélet emellett fizikai alkalmazásokban is fokozatosan előtérbe került. Például: az elektromos hálózatok leírására használt *Kirchhoff-törvények* kapcsán, vagy a XX. századi részecskefizika R.P. Feynmanról elnevezett részecskebomlásokat leíró gráfok révén.

Az euklideszi geometria ötödik – párhuzamossági – axiómájának bizonyíthatóságával sokan foglalkoztak a XIX. század első feléig. N.I. Lobacsevszkij 1823-ban egy előadásában felhívta a figyelmet, hogy ez semmiképpen nem vezethető le a korábbi axiómákból. Ennek kapcsán azután új matematika fejlődött ki, melynek első megalkotója Bolyai János volt 1823-ban. Bolyai észrevette, hogy ha az ötödik axiómát tagadásával helyettesítjük, akkor is ellentmondásmentes rendszert építhetünk fel. Lobacsevszkij 1830-ban hasonló eredményeket közölt, s letette a későbbi *hiperbolikus geometria* alapjait. Bolyai sok prioritási vitát kiváltott műve csak 1831-ben jelent meg *Appendix* címmel. Az 1894-ben *Bolyai – Lobacsevszkij-geometriá*ra keresztelt elméletnek is sokáig kellett várnia, míg a fizika alkalmazni kezdte.

C.F. Gauss 1833-ban megjelent munkájában áramvezető hurkok kölcsönös idukciójának meghatározása közben a *csomóelmélet* alapjait rakta le, mely egy S^1 körvonal S^3-ba való beágyazásainak ekvivalenciájáról nyilatkozik. Ugyanebből az időből származik a topológia szó is, amely szülőatyja J.C. Maxwell volt. A csomóelmélet további kidolgozása már más fizikai problémával kapcsolatos. W.H. Thomson (később Lord Kelvin) egy 1867-

es cikkében megmutatta, hogyan számítható ki a nátrium jellegzetes D-vonalainak hullámhossza, speciális Riemann-sokaságokként elképzelt atomi elektronpályákkal.

Hatlmas lökést adott a geometria és a topológia összekapcsolásának H. Poincaré. Poincaré differenciálegyenletek megoldásainak vizsgálata során megadta a háromtest probléma egy speciális megoldását. További matematikai eredményeit viszont csak a későbbi fizika tudta alkalmazni. Tisztán logikai alapokra támaszkodva megalkotta a speciális relativitáselmélet matematikai hátterét, amelyhez a fizikai interpretációt – Poincarétól függetlenül – majd A. Einstein adja. Geometriai elméletei közül a topológia szempontjából a *fixpont tétel*e, valamint a *homotópia* és *homológia* fogalom megalkotása a legfontosabb. Ezen fogalmak szogáltattak alapot az *algebrai topológia* megszületéséhez, mely arra hivatott, hogy tisztán topológiai kérdéseket konvertál jól ismert algebraiakba. A topológia fizikai alkalmazásoban való használatba vételét nagyban elősegítette a P.A.M. Dirac által 1931-ben megalkotott mágneses monopólus, amelyről a IV. fejezetben még részletesen szólunk. Előljáróban csak annyit jegyzünk meg, hogy az elméletben megfelelő geometriai konstrukcióval bevezethető – a Maxwell-egyenleteknek nem ellentmondó – *mágneses monopólus*. A mezőegyenletek ezen megoldása több szempontból is érdekes: egyrészt hogy tartalmaz egy szinguláris szálat, másrészről ezek elmélete természetes módon megkívánja a mágneses és az elektromos töltés kvantáltságát. A fizikát és a topológiát azonban ezek a felfedezések csak kissé közelítették egymáshoz. A távolságtartás talán azzal magyarázható, hogy az ezidőtájt felvetett modellek problémáinak zöme még fenomenologikusan felállított axiómarendszerrel a kísérleti adatok alapján – mondván: Hisz' ilyen a természet! – „kidumálható" volt. A korai elméletek közös vonásai még nem sugallták eléggé, hogy a leírást más módszerrel – mélyebb, szigorú matamatikai módon – felépítve jobban fedi a valóságot, több jóslatot ad.

Relativitáselmélet

Az elektrodinamikán kívűl az Einstein-féle speciális és általános relativitáselmélet hozott nagy változást a fizikában alkalmazott matematikai módszerekben. Mindmáig talán ez a fizika egyik olyan ága – hasonlóan például a szilárdtest- vagy a molekulafizikához – amelynél nem tudjuk elhallgatni a geometria jelenlétét. Századunk hajnalán a fizikusok arra a következtetésre jutottak, hogy a fizikai elméletek kulcsa a geometria. Erről az útról a csak a kvantummechanika funkcionál-analitikus problémái térítették el a kutatókat az 1920-es években.

Az Einstein-féle speciális, majd a későbbi általános relativitáselmélet arra ösztönözte a tudósokat, hogy megértsék a téridő geometriáját. S. Chandrasekhar 1931-es cikkében foglalkozott a nagy tömegű objektumok gravitációs összeomlásával. A gravitációs kollapszus problémájának megértéséhez Chandrasekhar a Schwarzschild által 1918-ban felírt metrikát használta, az így számított megoldások azonban szingularitásokat tartalmaznak. Az már az 1930-as évektől kezdve ismert volt, hogy ezen szingularitások egy része a térképezés hibájából eredő *koordináta szingulatitás* – amely jól választott térképezéssel

kiküszöbölhető –, másik része viszont éppen a fizikai tartalmat hordozó *valódi* vagy *lényeges szingularitás*. 1965-ben R. Penrose megmutatta, hogy minden fizikailag releváns Lorentz-sokaságon léteznek valódi szingularitások. A szingularitások problémája furcsa módon a Dirac-monopólus esetében is előkerül. Ennek felfedezése ismét rávilágított arra a tényre, hogy érdemes először egy-egy fizikai probléma geometriáját vizsgálni. A szingularitások problémakörét 1973-ban S.W. Hawking és G.F.R. Ellis dolgozta ki részletesebben.

MÉRTÉKELMÉLETEK (YANG – MILLS-ELMÉLETEK)

A topológia középpontba kerülésének legfőbb okai a fizikai mértékelméletek[1] voltak, amelyeknek létezik egy egyszerű megfogalmazása a fibrált nyalábok nyelvén. A fizikában a XX. század második felére a vizsgálatok homlokterébe került néhány Lie-csoport, melyek a fizikai rendszer szimmetriáit reprezentálják. Így például az $SU(3)$, amely a *kvantumszíndinamika (QCD)* , vagy az $SU(2) \times U(1)$, amely a *Salam – Weinberg-modell* mértékcsoportja. A mértékelmélet lényege az, hogy megköveteljük elméleteink ezen csoportokkal szembeni lokális invarianciáját.

AZ ELSŐ FIZIKAI-MATEMATIKAI SIKEREK

A Dirac-monopólus kapcsán felvetődő problémák – mint például a Dirac-szál léte – nem hagyták nyugodni sem a matematikusokat, sem a fizikusokat. 't Hooft és Polyakov egymástól függetlenül 1972-ben megalkották a mágneses monopólust nem-abeli mértékelméletekben, amely később 't Hooft – Polyakov-monopólus néven vált ismertté. Ennek az a különlegessége, hogy olyan mint a Dirac-féle monopólus, ám ennek nincsenek szingularitásai $\mathbb{R}^3$-ban. Érdekes módon ennek a statikus nem-abeli $SU(2)$ mértékelméletnek a monopólus-megoldásait a II. fajú szupravezetőkben kialakuló mágneses örvényeket leíró modell motiválta. A topológia még inkább előtérbe kerülésének oka A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwarz és Y.S. Tyupkin 1975-ös cikke volt. Belavin és társai publikációjukban megadták egy topológiailag nem triviális megoldását az euklideszi Yang – Mills- egyenleteknek négy dimenzióban, amely az *insztanton* nevet kapta. Az insztanton megoldások abból szempontból érdekesek számunkra, hogy euklideszi Yang – Mills-egyenletek esetében egyszerre nem-perturbatívak és topologikusak. További érdekesség, hogy a nem-abeli mértékelméletek nemtriviális insztanton megoldásai a CP (azaz töltékonjugáció és paritás) szimmetria sérülését indukálják, ami nagy probléméja a kvantummező[2]-elméleteknek. Az *önduális parciális-differenciálegyenlet* insztanton megoldásainak holomorf vektornyalábokkal való ek-

[1] A 'mérték' az angolból helytelenül fordított gauge (– mérce) szóból ered. A magyar fizikus terminológiában azonban ez terjedt el, így könnyvünk is eme elnevezést használja, mindaddig amíg ez féreértésre okot nem ad.

[2] Itt most eltérünk a magyar fizikai terminológiától és a 'quantum field'-et szigorúan kvantummezőnek fordítjuk a helytelen kvantumtér helyett.

vivalenciáját R.S. Ward mutatta meg 1977-es cikkében. Ugyanebben az évben Ward M.F. Atiyah-hal közösen felhívta a figyelmet arra, hogy az önduális egyenletek megoldásának problémája azonos egy régen ismert algebrai geometriai kérdéssel. Az S^4 feletti insztanton megoldásokat M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, V.G. Drinfeld és Y.I. Manin adta meg 1978-ban, amely az *ADHM-konstrukció* nevet viseli. A megoldás további sokaságokra való kidolgozáása Atiyah, Drinfeld és I.M. Singer nevéhez fűződik. Talán azt mondhatjuk, hogy ez volt az a pillanat, amikor a matematikusok ismét figyelemmel kezdték kísérni az elméleti fizikai kutatásokat.

Az érdeklődés hamar meghozta gyümölcsét, hiszen S.K. Donaldson 1983-ban híres cikkében éppen a – fizikában addigra már jól ismert – Yang – Mills-egyenletek segítségével sikerült négy-sokaságok világának mélyebb vizsgálata. Az általa bevezetett új differenciáltopológiai invariánsokért (*Donaldson-polinomok*) 1986-ban Fields-érmet kapott.

Topologikus kvantummező-elméletek

A '80-as évek közepétől új nagy előrelépes következett be a *három-sokaság*ok és a csomóelmélet terén. A csomók jellemzésére 1985-ben V.F.R. Jones bevezette a később róla elnevezett *Jones-polinom*okat, D. Evans pedig felismerte, hogy ennek a konstrukciónak már létezik megfelelője a *statisztikus mechaniká*ban.

Witten 1988-ban a Jones-polinomokat leszármaztatta egy speciális *topologikus kvantummező-elméletből*[3], a Chern – Simons-elméletből. A topologikus kvantummező-elméletek egy lehetséges axiomatikus felépítését később Atiyah adta meg. Ezek az elméletek – többek között – ezért fontosak számunkra, mert az elmélet *hatásfüggvénye* nem függ a rendszerben választott metrikától.

1988-ban E. Witten megmutatta, hogyan lehet előállítani a Donaldson-polinomot egy ún. $N = 2$ *szuperszimmetrikus topologikus mezőelmélet*ben. A nagy áttörést azonban nem ez, hanem a Seiberggel közösen írt cikke hozta 1994-ben. A későbbi *Seiberg – Witten* néven ismertté vált elmélet ismét fizikai motiváció alaplján tesz állításokat a négy-sokaságok topológiájáról. A fontos előrelépést annak a ténynek a felismerése tette lehetővé, hogy kis energián, azaz *erős csatolás*ban, az *abeli monopólusok elmélete* – a Seiberg – Witten-elmélet – és a *gyenge csatolás*i határértékben vett Donaldson – Witten-elmélet között dualitás van.

[3]Erre a jegyzetben az angol TQFT, vagy a magyar TKME rövidítést használjuk.

DINAMIKAI RENDSZEREK ÉS A MORSE-ELMÉLET

Már Poincaré korai munkáiban is láthatóvá válik, hogy a soktestrendszerek vizsgálata nem nélkülözheti a topológiát. A XX. század elejétől az *n-test rendszer*ek vizsgálatára egyre több topológiai technikát alkalmaztak a kutatók. A differenciálegyenletek lehetséges megoldás halmazainak vizsgálatából sokat tanult a modern matematikai-fizika, amely sok új elmélet kialakulását vonta maga után. Többek között ilyen volt 1931-ben G.D. Birkhoff *ergodelmélete*, az ötvenes-hatvanas évek *KAM* elmélete, amely a szerzőkről (Kolmogorov, Arnold és Moser) kapta nevét. A '70-es évek *katasztrófa-elmélete*, amely R. Thom munkássága nyomán fizikai, kémiai és biológiai alkalmazásokban is megjelent.

A fent említett elméletek egyre bonyolultabb és összetettebb sokaságokat és rajtuk értelmezett leképezéseket igényeltek. Ezek megoldásában segít M. Morse 1934-es elmélete, mely kapcsolatot teremt egy M sokaság topológiája és egy a sokaságon értelmezett $M \to \mathbb{R}$ sima leképezés kritikus pontjai között. Hasonlóan mint az *Euler – Poincaré-karakterisztika*, mely a sokaságon értelmezett *vektormezők* segítségével vizsgálja a sokaság topológiáját. 1982-ben Witten kvantummechanikai szempontokat figyelembe véve, egyszerűen bizonyította a Morse-elmélet fő eredményét képező *Morse-egyenlőtlenségek*et.

HÚROK, DUALITÁS

Végezetül ejtünk néhány szót napjaink egyik legígéretesebb modelljéről az ún. húrelméletről, melynek kialakulása a XIX. század első feléig vezethető vissza. Reményeink szerint ez lesz az az elmélet, amelyben össze tudjuk kapcsolni a kvantummező-elméleteket és a gravitációs kölcsönhatást.

A részecskefizikai szórások egyik lehetséges tárgyalásaként, a részecskerezonanciák vizsgálatára használt Regge-pólusok elméletéből, Virasoro és Veneziano munkája nyomán az ún. *bootstrap-modell* fejlődött ki a '60-as évek végére. Sajnos ez nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket, így Veneziano javaslatára új modellt dolgoztak ki, amely az egyrészecske cserével járó szórási folyamatokat akarta egy duális elmélettel leírni. Ebben egy rezgő húr alap és gerjesztett állapotai adják meg a rezonáns részecskéket. A húr konstrukciója azután forradalni változáson ment keresztül, melynek eredményeként egy új fizikai szemszögből történő leírás alakulhatott ki. Ebben a kis egy dimenziós objektum – a zárt, vagy nyílt húr – vette át a pontrészecske szerepét. A későbbiekben kidolgozásra került modell célja továbbra is a részecske- és rezonanciaspektrumok meghatározása volt. A korai húrelméleteknek azonban volt néhány hibájuk: csak a bozonok tárgyalására voltak képesek, továbbá nem volt fizikai magyarázat a bennük felbukkanó 26 dimenziós téridőre. További matematikai pontosításra volt szükség. Az élmélet topológiai szempontból nagyon érdekes hiszen, a húr

egy kétdimenziós felületet – az ún. világlepedőt – súrólja mozgása során. Dinamikája tehát tükröződni fog a világlepedő topológiájában, ezen túlmenően húrunk egy pontrészecskénél jobban „érzi" a teridő topológiáját is. A szépséget és a nehézséget is ez adja, hiszen több információt kaphatunk a térről – ahol húrunk mozog – de egyenleteink is bonyolódni fognak. A hetvenes évek elején Neveu, Schwarz, Green, Goddard, Thorn, Brower és Friedmann munkássága nyomán megszületett a *szuperhúr-elmélet*. Ebben már „csak" 10 dimenziós a téridő, továbbá nagy előrelépést jelentett, hogy bozonikus és fermionos megoldások is generálódnak. Mintegy évtizednek kellett eltelnie ahhoz, hogy a szuperszimmetrikus elméletek kapcsán ismét a figyelem középpontjába kerüljenek a húrok. Green, Schwarz és Witten öt különböző szuperszimmetrikus húrelméletet alkotott meg, melyek mindegyike magába foglalja a Yang – Mills-mezőket. Ezekben a modellekben már a téridő tíz dimenziós voltára is kaptunk fizikai interpretációt. Négy a hagyományos értelemben vett térdő, míg a további hat dimenziót egy, három komplex dimenziós ún. *Calabi – Yau-sokaság*ként kapjuk, amely a makroszkópikus megfigyelőhöz képest sokkal kisebb térrészben van.

3 Összegzés

Röviden láthattuk, hogyan csökkent a távolság két önálló tudományág között. Bízunk benne, hogy a híd – amelynek alapjait Poincaré, Einstein, Atiyah, Witten rakta le – építését a fizika és a matematika között, korunk tudósai folytatják. Reméljük, hogy a Kedves Olvasóban elegendő érdeklődést keltettünk ahhoz, hogy mélyebben beleássa magát az itt említett fizikai-matematika és matematikai-fizika világába. Végezetül álljon itt egy kérdés, amelyen a jegyzet elolvasása után elgondolkodhatunk:

VAJON A FIZIKA ÉS A GEOMETRIA „UGYANARRÓL" SZÓL?

Irodalomjegyzék

[1] C. Nash: *Topology and Physics—a historical essay*, hep-th/9709135;

[2] Rimányi Richárd: *Csomók és 3-sokaságok*, Mafihe Budapest, (1995);

[3] Sain Márton: *Matematikatörténeti ABC*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1987);

[4] J. H. Schwarz: *Superstrings Vol. 1.*, 5, Word Scientific, (1992).

II. Lineáris algebrai bevezető

Matolcsi Tamás
ELTE Természettudományi Kar
Alkalmazott Analízis Tanszék
Rákóczi út 5-7.
Budapest, 1088

matolcsi@ludens.elte.hu

1 Alapfogalmak

Definíció. Legyen $\mathbb{K}$ a valós, illetve a komplex számok teste. Azt mondjuk, hogy a $V \neq \emptyset$ halmaz vektortér $\mathbb{K}$ felett, ha értelmezve van két művelet, az összeadás és a számmal szorzás:

(i) $+ : V \times V \to V$,

(ii) $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$,

amelyek értelemszerűen asszociatívok, kommutatívok, és a számmal szorzás az összeadásra nézve disztributív.

Példák:

(i) $\mathbb{K}^N$ azaz a valós vagy komplex szám N-esek halmaza,

(ii) $C_{[a,b]}$ az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények összessége,

(iii) $L_{[a,b]}$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható függvények összessége,

(iv) $C_{\mathbb{R}}, L_{\mathbb{R}}$.

Melyek a szokásos pontonkénti műveletekkel vannak ellátva.

Lineáris függetlenség

Definíció. A V vektortér $x_1, x_2, ..., x_N \in V$ elemeinek $c_1, c_2, ..., c_N \in \mathbb{K}$ együtthatós *lineáris kombinációja* a $\sum_{i=1}^{N} c_i x_i$ összeg. Azt mondjuk, hogy $x_1, x_2, ..., x_N \in V$ lineárisan függetlenek, ha bármely lineáris kombinációjuk csak úgy lehet nulla, ha az együtthatók mind nullák, azaz a $\sum_{i=1}^{N} c_i x_i = 0$ egyenlőségből $c_1 = c_2 = ... = c_N = 0$ következik.

Bázis

Definíció. Az $(x_i)_{i \in I}$ vektorrendszert *bázis*nak nevezzük, ha a V minden x elemére $x = \sum_{F \subset I} c_i x_i$, ahol F az I valamely véges részhalmaza. (Vigyázat: mindig véges összegről van szó, még ha I végtelen, akkor is: végtelen összeg nem értelmes.) Bármely két bázis számossága megegyezik; a vektortér dimenziója egy tetszőleges bázisának a számossága.

Példa: $\mathbb{K}^N$ -ben a $(1, 0, ..., 0), \ldots, (0, ..., 1, ..0), \ldots, (0, ...0, 1)$ vektorok bázist alkotnak, amelyet *standard bázis*nak nevezünk.

Lineáris altér

Az $E \subset V$ halmazt lineáris altérnek nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

(i) $E + E \subset E$,

(ii) $\mathbb{K} \cdot E \subset E$.

Példák:

(i) $\{0\}$ és V az úgynevezett triviális alterek,

(ii) $\{(a, 0) \mid a \in \mathbb{K}\} \in \mathbb{K}^2$,

(iii) a polinomok összessége $C_{\mathbb{R}}$-ben.

Lineáris leképezések

Legyen V és U vektortér. Az $L : V \to U$ leképezés lineáris, ha:

(i) $L(x+y) = Lx + Ly$,

(ii) $L(\alpha x) = \alpha\, Lx$,

teljesül minden $\alpha \in \mathbb{K}$ és $x, y \in V$ esetén. Ez ekvivalens azzal, hogy:

$$L\left(\sum_{i=1}^{N} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{N} c_i L x_i.$$

Példák:

(i) $p_k : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$, $k = 1, ..., N$, a k-adik kanonikus projekció,

(ii) ha $N < M$, akkor $\mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$, $(x_1, x_2, ...x_N) \to (x_1, x_2, ..., x_N, 0, ..., 0)$,

(iii) $L_{[a,b]} \to \mathbb{K} : f \longmapsto \int\limits_a^b f$,

(iv) $C_{[a,b]} \to \mathbb{K} : f \longmapsto f(x)$ minden $x \in [a, b]$ esetén.

Lineáris leképezesek kompozíciója, pontonként értelmezett összege, számszorosa szintén lineáris leképezés.

A $V \to U$ lineáris leképezések halmazát $\mathrm{Lin}(V, U)$ jelöli[1]. Az előbb említett

(i) $(A + B)x = Ax + Bx$,

(ii) $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$, ahol $A, B \in \mathrm{Lin}(V, U)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in V$,

pontonkénti műveletekkel $\mathrm{Lin}(V, U)$ is vektortér, amelyre: $\dim(\mathrm{Lin}(V, U)) = (\dim(V)) \cdot (\dim(U))$.

1. Állítás. *Lineáris leképezést egyértelműen meghatározzák egy bázison felvett értékei.* $\diamond$

[1] Ezt gyakran a $\mathrm{Hom}(V, U)$-val jelölik.

IZOMORFIZMUSOK

Definíció.

(i) Az $L : V \to U$ lineáris leképezést, ha bijekció, *izomorfizmus*nak mondjuk.

(ii) Izomorfizmus inverze is izomorfizmus.

(iii) *Izomorf*nak nevezünk két vektorteret, ha van közöttük izomorfizmus.

2. Állítás. *A V és U vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha* $\dim(V) = \dim(U)$. $\diamond$

Az izomorf vektorterek „ugyanolyanok" a vektortér szerkezetét tekintve, de nem „azonosak". Jól meg kell érteni az „ugyanolyan" és az „azonos" közötti különbséget.

Egy konkrét vektortérben a vektortér struktúráján kívül, más tulajdonságok is megjelenhetnek, amely tulajdonságok azonban nem szükségképpen vannak meg egy vele izomorf vektortérben. Például $\mathbb{R}^N$-ben értelmes a lexikografikus rendezés, de egy akármilyen N dimeniós valós vektortérben (amely izomorf $\mathbb{R}^N$-nel) nem.

„Azonosnak" akkor tekintünk két vektorteret, ha van egy „kitüntetett", azaz „jobb mint a többi" izomorfizmus közöttük.

Egyszerű példát hozhatunk erre, később többel is találkozunk. Az

$$L_{[a,b]} \to L_{\mathbb{R}}, \quad f \longmapsto \begin{cases} f(x)\ , & \text{ha } x \in [a,b] \\ 0\ , & \text{ha } x \notin [a,b] \end{cases}$$

leképezés lineáris injekció, amely „természetes", és általa azonosítjuk $L_{[a,b]}$-t az $L_{\mathbb{R}}$ egy lineáris alterével, azzal, amely az $[a,b]$ intervallumon kívül nulla függvényekből áll.

A „természetes", „kitüntetett", stb. nem matematikai fogalom, és rajtunk áll, milyen izomorfizmust fogadunk el azonosításnak.

KOORDINÁTÁZÁS I.

Ha $\dim(V) = N$, akkor létezik $K : V \to K^N$ izomorfizmus, azaz véges dimenziós vektortér minden eleméhez hozzárendelhetünk egy szám N-est. Az ilyen izomorfizmust *koordinátázás*nak nevezzük, az inverzét, azaz a $P := K^{-1} : \mathbb{K}^N \to V$ leképezést *paraméterezés*nek.

Koordinátázást nagyon sokféleképpen (kontinuum sok módon) megválaszthatunk, és egyik sem sem jobb, különb a többinél. Ugyanazt a vektort különböző koordinátázásokban különböző szám N-esek reprezentálják, nem mondhatjuk, hogy egy vektor azonos volna egy szám N-essel. Az N dimenziós vektortér ugyanolyan, mint $\mathbb{K}^N$, de nem azonos vele.

Ha K_1 és K_2 a V két koordinátázása, akkor

$$K_2 \circ K_1^{-1} = K_2 \circ P_1$$

a transzformációs szabály, amely megmondja, mi a kapcsolat két szám N-es között, amelyek ugyanannak a vektornak felelnek meg a két koordinátázás szerint.

Koordinátázás során a lineáris leképezéseket mátrixokkal reprezentálhatjuk: ha $L : V \to V$ lineáris leképezés és $K : V \to \mathbb{K}^N$ koordinátázás, akkor $K \circ L \circ K^{-1} : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ lineáris leképezés, amelyet egy $N \times N$-es mátrixszal adunk meg.

Vegyük a V-nek egy $(x_1, \ldots, x_N)$ bázisát, és jelölje $(e_1, \ldots, e_N)$ a $\mathbb{K}^N$ standard bázisát. Ekkor az $x_i \mapsto e_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ hozzárendeléssel $V \to \mathbb{K}^N$ lineáris bijekciót, azaz koordinátázást határozunk meg. Viszont, ha K koordinátázás, akkor $\{K^{-1}e_i \mid i = 1, \ldots, N\}$ bázis V-ben. Tehát koordinátázások és bázisok kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak.

Faktorterek

Legyen $E \subset V$ lineáris altér. Ekkor az $\{x, y \in V \mid x \sim y \text{ ha } x - y \in E\}$ formulával maghatározott reláció ekvivalencia. Az *ekvivalencia-osztályok halmazát* V/E jelöli.

Az ekvivalancia-osztályok az E lineáris altér eltoltjai, azaz $x + E$ alakúak.

V/E-t vektortérré tesszük az

(i) $(x + E) + (y + E) = (x + y) + E$,

(ii) $\alpha\,(x + E) = (\alpha x) + E$, $\alpha \in K$,

összeadással illetve számmal szorzással; ezt nevezzük *faktortér*nek, vagy *hányadostér*nek.

3. Állítás. *A $V \to V/E$, $x \mapsto x + E$ leképezés lineáris.* $\diamond$

A DUÁLIS TÉR

Definíció. A $V^* = \mathrm{Lin}(V, \mathbb{K})$ vektorteret a V vektortér *duális*ának, elemeit *kovektor*oknak nevezzük. Ha $x \in V$ és $p \in V^*$, akkor a $(p \mid x)$ jelölést használjuk p-nek az x-en felvett értékére (px vagy $p(x)$ helyett). Bizonyos tulajdonságaiban és a jelölésben is $(\ \mid\ )$ hasonlít a skaláris szorzathoz, de ne tévesszük össze a skaláris szorzattal: annak mindkét változója ugyanabból a vektortérből való, ennek nem.

$\dim(V^*) = \dim(V)$, tehát a vektortér és a duálisa izomorfak, „ugyanolyanok", de általában nem „azonosak".

Viszont a V minden x elemére megadható az

$$i_x : V^* \to \mathbb{K}, p \longmapsto (p \mid x)$$

lineáris leképezés, és

$$V \to (V^*)^* =: V^{**},\ x \longmapsto i_x$$

lineáris injekció, amely olyan „természetes", hogy általa azonosítjuk V-t a V^{**} egy lineáris alterével.

Ha $\dim(V) < +\infty$, akkor $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$, tehát ekkor V-t az egész V^{**}-gal azonosíthatjuk, amit így írunk:

$$V \equiv V^{**} \text{ és } (p \mid x) \equiv (x \mid p),$$

Speciális esetben előfordulhat, hogy már egy vektortér és a duálisa között is létesíthetünk azonosítást. A legegyszerűbb példa:

$$(\mathbb{K}^N)^* = \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^N, \mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^N$$

hiszen az $N \times 1$-es mátrixok azonosíthatók szám N-esekel.

TRANSZPONÁLTAK

Legyenek U, V vektorterek. Az $L : U \longrightarrow V$ lineáris leképezés *transzponáltja* az $L^* : V^* \longrightarrow U^*$, $p \mapsto p \circ L$ lineáris leképezés.

Belátható, hogy $U = \mathbb{K}^N$, $V = \mathbb{K}^M$ esetén a $(\mathbb{K}^N)^* \equiv \mathbb{K}^N$ azonosítással L^* éppen az L mátrix transzponáltja.

A definíció szerint tehát, ha $x \in U$ és $p \in V^*$, akkor

$$(L^*p|x) = (p|Lx)\,.$$

A $\mathrm{Lin}(U,V) \to \mathrm{Lin}(V^*,U^*)$, $L \mapsto L^*$ leképezés lineáris, továbbá ha L bijekció, akkor $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$.

KOORDINÁTÁZÁS II.

Egy V véges dimenziós vektortér tetszőleges $\{x_i \mid i = 1,\dots,N\}$ bázisához megadható egy $\{p^i \mid i = 1,\dots,N\}$ bázis V^*-ban, amelyet a V-beli bázis *duális bázisá*nak nevezünk, és amelyet következő tulajdonság jellemez:

$$(p^i \mid x_j) = \delta^i_j$$

ahol, δ^i_j a *Kronecker-féle szimbólum.*

Az $\{x_i \mid i = 1,\dots,N\}$ bázisnak megfelelő K koordinátázásban

$$Kx = \{(p^i \mid x) \mid i = 1,\dots,N\} \qquad (x \in V).$$

A V vektortér K koordinátázása meghatározza a V^* egy koordinátázását: $(K^*)^{-1} = (K^{-1})^* = P^*$-ot. Ugyanis ha a $K : V \longrightarrow \mathbb{K}^N$ izomorfizmus, akkor $K^* : \left(\mathbb{K}^N\right)^* \longrightarrow V^*$ is izomorfizmus, amelynek az inverze $(K^*)^{-1} : V^* \longrightarrow \left(\mathbb{K}^N\right)^* \equiv \mathbb{K}^N$.

Egyszerű belátni, hogy

$$P^*p = \{(p \mid x_i) \mid i = 1,\dots,N\} \qquad (p \in V^*).$$

Ha K_1 és K_2 a V két koordinátázása, akkor

$$P_2^* \circ (P_1^*)^{-1} = ((K_2 \circ P_1)^*)^{-1}$$

a transzformációs szabály, amely megmondja, mi a kapcsolat két szám N-es között, amelyek ugyanannak a kovektornak felelnek meg a két koordinátázás szerint.

Látható, hogy a vektori transzformációs szabály és a kovektori transzformációs szabály különböznek egymástól.

2 Bilineáris leképezések

Definíció. Egy $B : V_1 \times V_2 \to U$ leképezést *bilineáris*nak nevezünk, ha mindkét változójában lineáris. $B : V_1 \times V_2 \to U$ bilineáris leképezések összességét $\mathrm{Lin}^2(V_1 \times V_2, U)$ jelöli. A pontoknénti műveletekkel ez is vektortér.

Példák: (Bilineáris leképezésre)

(i) $\mathrm{Lin}(V, U) \times V \to U, \quad (L, x) \longmapsto Lx,$

(ii) $V^* \times V \to \mathbb{K}, \quad (p, x) \mapsto (p \mid x),$

(iii) $\mathrm{Lin}(V) \times \mathrm{Lin}(V) \to \mathrm{Lin}(V), \quad (A, B) \mapsto A \circ B.$

Ha V véges dimenziós vektortér, akkor a következő azonosításaink vannak:

(i) $\mathrm{Lin}(V, V) \equiv \mathrm{Lin}^2(V \times V^*, \mathbb{K}), \quad A \equiv ((x, p) \mapsto (p \mid Ax)),$

(ii) $\mathrm{Lin}(V, V^*) \equiv \mathrm{Lin}^2(V \times V, \mathbb{K}), \quad B \equiv ((x, y) \mapsto (By \mid x)),$

(iii) $\mathrm{Lin}(V^*, V) \equiv \mathrm{Lin}^2(V^* \times V^*, \mathbb{K}), \quad C \equiv ((q, p) \mapsto (p \mid Cq)),$

(iv) $\mathrm{Lin}(V^*, V^*) \equiv \mathrm{Lin}^2(V^* \times V, \mathbb{K}), \quad D \equiv ((p, x) \mapsto (Dp \mid x)).$

Ezek szerint, mivel $(\mathbb{K}^N)^* \equiv \mathbb{K}^N$, a $\mathbb{K}^N \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezések is reprezentálhatók mátrixszal.

Szimmetrikusság és antiszimmetrikusság

Definíció. A $B : V \times V \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezéseket *szimmetrikus*nak nevezzük, ha $B(x, y) = B(y, x)$ minden $x, y \in V$ esetén, illetve *antiszimmetrikus*nak, ha $B(x, y) = -B(y, x)$. Hasonlóan értelmezést adhatunk $C : V^* \times V^* \to \mathbb{K}$ bilineáris leképezésre.

Világos, hogy a szimmetrikusság és antiszimmetrikusság csak olyan leképezésekre értelmes, amelyeknek mindkét változója ugyanabból a halmazból való, a fentiek szerint csak a (ii) és a (iii) esetben. Tehát egy $V \to V^*$ illetve egy $V^* \to V$ lineáris leképezés szimmetrikussága értelmes fogalom, $V \to V$ és $V^* \to V^*$ lineáris leképezésé nem.

A szimmetrikus illetve antiszimmetrikus bilineáris leképezést akkor nevezzük *nemelfajuló*nak, ha a megfelelő lineáris leképezés injektív.

Pszeudo-euklideszi vektorterek

Definíció. A (V, B) párt *pszeudo-euklideszi vektortér*nek hívjuk, ha V véges dimenziós valós vektortér és $B : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris, szimmetrikus, nemelfajuló leképezés.

Az előző pont szerint a B-vel azonosított $V \to V^*$ lineáris leképezés bijekció, azaz izomorfizmus és ez „kitüntetett" a többi között, tehát létesítehetjük a $(V \equiv V^*)$, $\quad x \equiv B(x, \cdot)$ azonosítást. (Ennek felel meg az indexek lehúzása a metrikus tenzor segítségével a relativitáselméletben.)

Ha $E \subset V$ lineáris altér, akkor az E *ortogonálisá*nak nevezzük az $E^\perp := \{x \in V \mid B(x, y) = 0, y \in E\}$ halmazt, amely szintén lineáris altér.

*Euklideszi*nek nevezzük a vektorteret, ha B pozitív definit, azaz $B(x, x) > 0$, ha $0 \neq x \in V$. Ekkor B skaláris szorzat, és ekkor értelmes a „vektor hossza", egyébként nem.

Euklideszi esetben – de csak ekkor – bármely altér a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) $E \cap E^\perp = \{0\}$

(ii) $E + E^\perp = V$

Szimplektikus vektorterek

Definíció. A valós vektortéren értelmezett $\omega : W \times W \to \mathbb{R}$ bilineáris, antiszimmetrikus, nemelfajuló leképezést *szimplektikus formá*nak nevezzük, a (W, ω) párt pedig *szimplektikus vektortér*.

Mivel ω antiszimmetrikus, minden x vektorra $\omega(x, x) = -\omega(x, x) = 0$. A nemelfajulás miatt, ha minden $y \in V$ esetén $\omega(x, y) = 0$, akkor $x = 0$. Az ω-val azonosított $V \to V^*$ lineáris leképezés bijekció, azaz izomorfizmus.

Példák:

(i) Vegyük $\mathbb{R}^2$-n az $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixszal reprezentált bilineáris leképezést, azaz

$$(x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1. \qquad \text{(II.2.1)}$$

Hasonlóan értelmezhetünk $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}$ szimplektikus formát úgy, hogy a 0-ák helyett $N \times N$-es nulla-mátrix álljon, az 1-esek helyett pedig $N \times N$-es egységmátrixok.

(ii) A fenti példák általánosítása bármely V valós vektortérre az

$$\omega_V : (V \times V^*) \times (V \times V^*) \to \mathbb{R}, \quad ((x,p),(y,q)) \longmapsto (p \mid y) - (q \mid x)$$

kanonikus szimplektikus forma.

4. Állítás. (W, ω) *szimplektikus vektortér, akkor* $\dim(W)$ *páros. Továbbá létezik* V*, hogy* $\dim(V) = \frac{1}{2}\dim(W)$*, valamint* $L : W \to V \times V^*$ *lineáris bijekció úgy, hogy* $\omega = \omega_V \circ (L \times L)$*, azaz* $\omega(x,y) = \omega_V(Lx, Ly)$. $\diamond$

Szimplektikus vektortéren is bevezetjük egy E altér ortogonálisát: $E^\perp := \{x \in W \mid \omega(x,y) = 0, y \in E\}$.

Itt messze nem teljesülnek az euklideszi terekben jól ismert, és korábban ismertetett tulajdonságok. Például az $\mathbb{R}^2$-n fent adott szimplektikus formára az $\{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ altér ortogonálisa önmaga.

Definíció. Legyen (W, ω) szimplektikus vektortér. Az $E \subset W$ lineáris altér

(i) *izotróp altér*, ha $E \subset E^\perp$,

(ii) *koizotróp altér*, ha $E^\perp \subset E$,

(iii) *Lagrange-altér*, ha $E = E^\perp$.

3 Komplex vektorterek

Komplexifikáció

Definíció. Legyen V valós vektortér. Ekkor $V \times V$-t komplex vektortérré tehetjük úgy, hogy az összeadás a komponensenkénti műveletét, azaz $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ és komplex számal való szorzást $(\alpha_1 + i\alpha_2)(x_1, x_2) := (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)$ módon vezetjük be. Ezt a V *komplexifikáltjá*nak nevezzük, és $V_\mathbb{C}$-vel jelöljük. A komplexifikált vektortér elemeit célszerűen $x_1 + ix_2 := (x_1, x_2)$ alakba írjuk, és így a komplex számmal való szorzást a jól ismert szabályok szerint végezhetjük.

$V_\mathbb{C}$ (komplex) dimenziója megegyezik V (valós) dimenziójával, hiszen egy (valós) bázis V-ben (komplex) bázis $V_\mathbb{C}$-ben.

$V_{\mathbb{C}}$-ben bevezethetjük a komplex konjugálást: $(x_1 + ix_2)^* := (x_1 - ix_2)$. Nyilvánvaló, hogy $(\mathbb{R}^N)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^N$.

Hermitikus formák

Definíció. Legyen Z komplex vektortér. Egy $B : Z \times Z \to \mathbb{C}$ leképezést *szeszkvilineáris*nak mondunk, ha $B(x, \cdot)$ $B(\cdot, x)$, konjugált lineáris (azaz a komplex szám konjugáltját lehet kiemelni alóla) minden $x \in Z$ esetén.

A szeszkilineáris B leképezés *hermitikus*, illetve *antihermitikus*, ha $B(x, y)^* = B(y, x)$ illetve $B(x, y)^* = -B(y, x)$minden $x, y \in Z$ esetén.

A hermitikus forma *skaláris szorzás*, ha pozitív definit, azaz $B(x, x) > 0$ minden $0 \neq x \in Z$ esetén. A V valós vektortéren adott $B : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris formát komplexifikálhatjuk $B_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ bilineáris leképezéssé a

$$B_{\mathbb{C}}(x + iy, u + iv) := B(x, u) - B(y, v) + i(B(x, v) + B(y, u))$$

a hozzárendeléssel és $\hat{B}_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ szeszkilineáris leképezéssé a

$$\hat{B}_{\mathbb{C}}(x + iy, u + iv) := B_{\mathbb{C}}(x - iy, u + iv)$$

hozzárendeléssel.

Ellenőrizhető, hogy ha B szimmetrikus (antiszimmetrikus), akkor $B_{\mathbb{C}}$ is szimmetrikus (antiszimmetrikus), és $\hat{B}_{\mathbb{C}}$ hermitikus (antihermitikus).

Kalibrált komplex sturktúrák

Egy Z komplex vektortér egyben valós vektortér is, ha csak a valós számmal szorzást tekintjük. A Z komplex vektortér ilyen valós „leszűkítését” $Z_{\mathbb{R}}$-el jelöljük. Ha $(z_1, z_2, ..., z_N)$ bázist alkotnak Z-ben, akkor $(z_1, ..., z_N, iz_1, ..., iz_N)$ bázis $Z_{\mathbb{R}}$-ben.

A $J : Z_{\mathbb{R}} \to Z_{\mathbb{R}}, \quad x \longmapsto ix$ leképezés valós-lineáris és $J^2 = -\mathrm{id}_{Z_{\mathbb{C}}}$

Legyen a Z komplex vektortér a $\langle\ ,\ \rangle$ skaláris szorzással ellátva. Ekkor

$$g : Z_{\mathbb{R}} \times Z_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto \mathrm{Re}\,(\langle x, y\rangle)$$

euklideszi forma, és

$$\omega : Z_{\mathbb{R}} \times Z_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \longmapsto \mathrm{Im}\,(\langle x, y\rangle)$$

szimplektikus-forma.

Egyszrűen kapjuk, hogy: $\omega\,(Jx, Jy) = \omega\,(x, y)$ és $\omega\,(x, Jy) = g\,(x, y)$

Definíció. Ha V valós vektortér, és $J : V \to V$ olyan lineáris leképezés, hogy $J^2 = -\mathrm{id}_V$, akkor azt mondjuk, hogy J *komplex struktúra* V-n.

Definíció. Ha még adott egy g euklideszi forma és egy ω szimplektikus forma is V-n úgy, hogy g, ω és J között a fenti két összefüggés is teljesül, akkor a (V, J, g, ω) négyest *kalibrált komplex struktúrá*nak nevezzük.

4 Multilineáris leképezések

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és V_i $(i = 1, \ldots, n)$ vektortér (a $\mathbb{K}$ test felett). Egy $M : V_1 \times ... \times V_n \longrightarrow \mathbb{K}$ leképezést *n-lineáris*nak nevezünk, ha bármely $n-1$ változó rögzítése mellett a maradék egy változóban lineáris.

*Multilineáris*nak mondunk egy leképezést ha n-lineáris valamilyen n-re.

Ha V_i ugyanaz a V vektortér minden i-re, akkor az M multilineáris leképezés

(i) *szimmetrikus*, ha $M\left(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}\right) = M\,(x_1, ..., x_n)$,

(ii) *antiszimmetrikus*, ha $M\left(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}\right) = \mathrm{sign}(\pi) M\,(x_1, ..., x_n)$,

(iii) az $\{1, ..., n\}$ minden π permutációjára.

Az M tetszőleges multilineáris leképezésnek definiáljuk a szimmetrikus részét:

$$S(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} M\left(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}\right) \qquad (\text{II.4.1})$$

és antiszimmetrikus részét:

$$A(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \mathrm{sign}(\pi) M\left(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}\right). \qquad (\text{II.4.2})$$

5 Tenzorszorzatok és formák

Legyen V vektortér (a $\mathbb{K}$ test felett) és V^* a duálisa.

Vegyünk $x, y \in V$ és $p, q \in V^*$ elemeket. Ekkor definiálhatjuk a következő bilineáris formákat:

$$x \otimes y \in \mathrm{Lin}^2\left(V^* \times V^*, \mathbb{K}\right), \quad (x \otimes y)(p, q) := (p|x) \cdot (q|y), \tag{II.5.1}$$

$$p \otimes y \in \mathrm{Lin}^2\left(V \times V^*, \mathbb{K}\right), \quad (p \otimes x)(y, q) := (p|y) \cdot (q|x), \tag{II.5.2}$$

és hasonlóan az $x \otimes q$, $p \otimes q$ formákat.

Meg lehet mutatni, hogy ha V véges dimenziós, akkor az ilyen formák lineáris kombinációjaként megkaphatjuk az összes megfelelő formát, ezért a következő jelöléseket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
V \otimes V &:= \mathrm{Lin}^2\left(V^* \times V^*, \mathbb{K}\right) \equiv \mathrm{Lin}\left(V^*, V\right), \\
V^* \otimes V &:= \mathrm{Lin}^2\left(V \times V^*, \mathbb{K}\right) \equiv \mathrm{Lin}\left(V, V\right), \\
V \otimes V^* &:= \mathrm{Lin}^2\left(V^* \times V, \mathbb{K}\right) \equiv \mathrm{Lin}\left(V^*, V^*\right), \\
V^* \otimes V^* &:= \mathrm{Lin}^2\left(V \times V, \mathbb{K}\right) \equiv \mathrm{Lin}\left(V, V^*\right).
\end{aligned} \tag{II.5.3}$$

Mint már korábban megállapítottuk, az első és a negyedik esetben van értelme beszélnünk *szimetrikusság*ról, illetve *antiszimmetrikusság*ról. Ennek megfelelően például

$$2 \cdot S(x \otimes y) = x \otimes y + y \otimes x =: x \vee y, \tag{II.5.4}$$

$$2 \cdot A(x \otimes y) = x \otimes y - y \otimes x := x \wedge y. \tag{II.5.5}$$

A szimmetrikus illetve az antiszimmetrikus leképezések lineáris alteret alkotnak, amelyeket így jelölünk:

(i) *szimmetrikus altér*: $V \vee V \subset V \otimes V$,

(ii) *antiszimmetrikus altér*: $V \wedge V \subset V \otimes V$.

Ezeket a fogalmakat is lehet általánosítani hiszen, ha veszünk $\{p_i \in V_i^* \mid i = 1, 2, ..., n\}$ elemeket, akkor előállíthatjuk a $p_1 \otimes p_2 \otimes ... \otimes p_n \in \mathrm{Lin}^n\left(V_1 \times ... \times V_n, \mathbb{K}\right)$ n-lineáris formát, amelyet $\left(p_1 \otimes ... \otimes p_n\right)(x_1, ..., x_n) := (p_1|x_1)(p_2|x_2)...(p_n|x_n)$ $\{x_i \in V_i \mid i = 1 \ldots, n\}$ határoz meg.

Itt is alkalmazzuk a fentieknek megfelelő jelölést:

$$\mathrm{Lin}^n\left(V_1 \times ... \times V_n, \mathbb{K}\right) = V_1^* \otimes ... \otimes V_n^* = \bigotimes_{i=1}^{n} V_i^*. \qquad (\text{II.5.6})$$

Hasonlóan, a vektorterek és duálisaik szerepét felcserélve kapjuk:

$$\bigotimes_{i=1}^{n} V_i = \mathrm{Lin}^n\left(V_1^* \times ... \times V_n^*, \mathbb{K}\right). \qquad (\text{II.5.7})$$

Ha V_i ugyanaz a V vektortér minden i-re, akkor vehetjük az n-lineáris szimmetrikus illetve antiszimmetrikus leképezések terét, amelyet $\bigvee^n V^*$ illetve $\bigwedge^n V^*$ jelöl, és ennek megfeleően

$$p_1 \vee ... \vee p_n := n! \cdot S\left(p_1 \otimes ... \otimes p_n\right), \qquad (\text{II.5.8})$$

$$p_1 \wedge ... \wedge p_n := n! \cdot A\left(p_1 \otimes ... \otimes p_n\right). \qquad (\text{II.5.9})$$

Legyen $(x_1, ..., x_N)$ V-beli bázis, és $(p^1, ..., p^N)$ ennek a duálisa a V^*-ben.

Ekkor

$$\left\{p^i \otimes p^k | i, k = 1, ..., N\right\} \subset V^* \otimes V^*\text{-ben},$$

$$\left\{p^i \vee p^k | i \leq k; i, k = 1, ..., N\right\} \subset V^* \vee V^*\text{-ben},$$

$$\left\{p^i \wedge p^k | i < k; i, k = 1, ..., N\right\} \subset V^* \wedge V^*\text{-ben}$$

bázis.

Egyszerű kombinatorikai meggondolások alapján látható, hogy ez utóbbi $\binom{N}{2}$ elemű.

Külső formák

Definíció. A V vektortéren adott antiszimmetrikus n-lineáris formákat *n-formák*nak, az antiszimmetrikus multilineáris formákat *külső formák*nak hívjuk.

(i) Az 1-formák a V^* elemei, vagyis a kovektorok.

(ii) $\mathbb{K}$ elemeit célszerűen 0-*formá*knak nevezzük.

Az előző formulák általánosításaként kapjuk, hogy N dimenziós vektor esetén az n-formák vektortere $n > N$ esetén nulla dimenziós (csak a nulla lehet antiszimmetrikus n-lineáris forma, ha $n > N$), és $\binom{N}{n}$ dimenziós ha $0 \leq n \leq N$; egy bázisát $n > 0$ esetén következőképpen állíthatjuk elő:

$$\left\{p^{i_1} \wedge ... \wedge p^{i_n} | i_1, ..., i_n = 1, ..., N; 1 \leq i_1 < ... < i_n \leq N\right\}. \qquad \text{(II.5.10)}$$

Vegyünk egy $M \in \bigwedge^n V^*$ és egy $P \in \bigwedge^m V^*$ elemet. Ezekből előállíthatjuk az $M \otimes P \in \bigotimes^{n+m} V^*$ szorzatot úgy, hogy

$$(M \otimes P)(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) := M(x_1, ..., x_n)\, P(x_{n+1}, ..., x_{n+m}). \qquad \text{(II.5.11)}$$

Ezzel képezhetjük az M és P *külső szorzatát*:

$$M \wedge P := \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!} \cdot A(M \otimes P) \in \bigwedge^{m+n} V^*. \qquad \text{(II.5.12)}$$

A külső szorzás tulajdonságai:

(i) Asszociatív: $M_1 \wedge (M_2 \wedge M_3) = (M_1 \wedge M_2) \wedge M_3$,

(ii) Kommutatív, illetve antikommutatív: $M_1 \wedge M_2 = (-1)^{n_1 n_2} M_2 \wedge M_1$, ahol M_1 n_1-forma, M_2 n_2-forma.

(iii) Bilineáris: $(M_1 + M_2) \wedge M_3 = M_1 \wedge M_3 + M_2 \wedge M_3$.

Definiáltunk tehát minden n, m-re egy $\left(\bigwedge^n V^*\right) \times \left(\bigwedge^m V^*\right) \longrightarrow \bigwedge^{n+m} V^*$ külső szorzást.

Az $\mathcal{A} := \bigtimes_{n=0}^{N} \bigwedge^N V^*$ halmaz a komponensenkénti művelettel ellátva vektortér; a külső szorzás kiterjeszthető $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ leképezéssé a disztributivitással, azaz például $(0, 0, M, 0, \ldots, 0) \wedge (M_1, M_2, \ldots, M_N) := (0, 0, 0, M \wedge M_1, M \wedge M_2, \ldots, M \wedge M_{N-2})$.

Ezzel $\mathcal{A}$ algebra lesz, amelyet *Grassmann-algebrá*nak hívunk.

Valós vektortér irányítása

Mivel $\bigwedge^N V$ egydimenziós, bármely két nemnulla eleme egymás számszorosa. Ezért jó az alábbi meghatártozás.

Definíció. Legyen V véges dimenziós valós vektortér. Az $(x_1, ..., x_N)$ rendezett bázist és az $(x'_1, ..., x'_N)$ rendezett bázis *azonos irányítású*, ha $\bigwedge_{k=1}^N x_k$ és $\bigwedge_{k=1}^N x'_k$ egymás pozitív számszorosai. *Ellentétes irányításúak*, ha egymás negatív számszorosai. Könnyen belátható, hogy azonos *irányítás*ú nak lenni ekvivalencia reláció, azaz reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Az egyszerűen látható, hogy két ekvivalencia-osztály van.

Egy véges dimenziós valós vektortér egy *irányítása* az egyik ekvivalencia-osztályt jelenti. A kijelölt ekvivalencia-osztályban levő bázisokat pozitív irányításúnak („jobbsodrásúnak") mondjuk.

Hodge-operáció

5. Állítás. *Legyen (V, B) pszeudo-euklideszi vektortér. Ekkor létezik olyan $(x_1, ..., x_N)$ bázis, hogy $B(x_i, x_j) = 0$ minden $i \neq j$ esetén, továbbá létezik egyértelműen $n \in [0, N]$, hogy:*

$$B(x_i, x_i) = \begin{cases} < 0, & \text{ha } i = 1, \ldots, n \\ > 0, & \text{ha } i = n+1, \ldots, N \end{cases} \qquad (\text{II.5.13})$$

◇

Nyilván az is elérhető, hogy ekkor $|B(x_i, x_i)| = 1$ legyen minden i-re. Az ilyen bázisokat *B-ortonormál*t nak nevezzük.

6. Állítás. *Ha $(x_1, ..., x_N)$ és $(x'_1, ..., x'_N)$ azonos irányítsú B-ortonormált bázisok, akkor $\bigwedge_{k=1}^N x_k = \bigwedge_{k=1}^N x'_k$.* ◇

Ha tehát V irányított, akkor egyértelműen megadható az $\varepsilon := \bigwedge_{k=1}^N x_k \in \bigwedge^N V$ úgynevezett *Levi–Civita-tenzor*, ahol $(x_1, ..., x_N)$ tetszőleges pozitív irányítású B-ortonormált bázis.

Mivel a pszudo-euklideszi vektortérre $V \equiv V^*$, úgy is felfoghatjuk, hogy $\varepsilon \in \bigwedge^N V^*$, azaz ε N-lineáris forma. Ezzel minden $0 \leq n \leq N$ esetén megadhatjuk az:

$$* : \bigwedge^n V \longrightarrow \bigwedge^{N-n} V, \quad x_1 \wedge ... \wedge x_n \longmapsto \varepsilon(x_1, ..., x_n, \cdot, ..., \cdot)$$

lineáris leképezést, amelyet *Hodge-operáció*nak nevezünk.

Természetesen, a mondott azonosítás miatt a Hodge-operációt felfoghatjuk

$$\bigwedge^n V^* \longrightarrow \bigwedge^{N-n} V^*$$

lineáris leképezésnek is.

Érdemes megjegyezni, hogy ha V három dimenziós irányított euklideszi vektortér, akkor a vektoriális szorzás a Hodge-operációval van értelmezve: $x \times y := *(x \wedge y)$.

III. Topológiai alapfogalmak

Rimányi Richárd
ELTE Természettudományi Kar
Analízis Tanszék
Rákóczi út 5-7.
Budapest, 1088

rimanyi@cs.elte.hu

1 Bevezetés

Jelen dolgozat az 1997 nyarán Óbányán megrendezésre került nyári iskola néhány bevezető előadásának kivonata. Olyan fogalmakat tárgyal, melyeket a következő előadások sűrűn használnak, például: sima sokaságok, Lie-csoportok, homológia. Nyilvánvaló azonban, hogy a későbbi előadások megértéséhez ezen alapfogalmakról mély, leülepedett tudásra van szükség. Senki nem gondolhatja, hogy csupán a jelen cikk olvasásával ez megszerezhető. Inkább tekintsük a mostani bevezetőt útbaigazításnak, mely után az irodalomjegyzékben szereplő (vagy más) könyvek segítségével már könnyebb lesz a topológia alapfogalmait megérteni.

Hadd modjak köszönetet itt Barnaföldi Gergelynek, akinek hosszú és fáradságos szakmai és szervezési munkája mindenképpen szükséges volt a kötet megjelenéséhez.

2 Sima sokaságok

Ebben a fejezetben a (sima) sokaság fogalmát definiáljuk. A definíció megértéséhez nem lesz más előismeretre szükség, mint a közönséges analízis többváltozós differenciálszámítására, mely elmélet egyben a sokaság fogalmának motivációja is. A sokaság egy absztrakt tér, mely az $\mathbb{R}^n$ euklideszi teret helyettesíti, s rajta éppen úgy lehet differenciálni, mint $\mathbb{R}^n$-en. Emlékeztető: $\mathbb{R}^n$ egy U részhalmaza nyílt, ha minden p pontja körül van olyan kicsi gömb, mely része U-nak.

Definíció. Egy M halmazt *n dimenziós sima sokaság*nak nevezünk (elemeit a *sokaság „pontjainak”*), ha adott rajta a következő struktúra. Legyen M-en véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok U_i részhalmaz, s rajtuk $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ injektív függvények $\mathbb{R}^n$ egy-egy nyílt részhalmazára. Megköveteljük, hogy a $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ úgynevezett *áttérésfüggvény*ek akárhányszor differenciálhatóak (=: simák) legyenek.

A dimenzió hangsúlyozására használatos M-re az M^n jelölés is. Az (U_i, ϕ_i) párt, vagy pongyolán ezek egyikét szokás *térkép*nek nevezni. A térképek összessége: *atlasz*. A sokasá-

gra úgy gondolunk, hogy a kicsi U_i darabokból van összeragasztva, melyek külön-külön azonosítva vannak – ϕ_i által – $\mathbb{R}^n$ egy nyílt részhalmazával. Persze, bizonyos részek több ilyen azonosításban is szerepelnek. Például $U_1 \cap U_2$ azonosítódik ϕ_1 és ϕ_2 által is. Ezért tettük az áttérésfüggvényekről szóló feltételt: a két azonosítás valamilyen értelemben legyen kompatibilis.

A sokaság tehát olyasmi, ami lokálisan modellezi $\mathbb{R}^n$ differenciálható struktúráját (lokálisan olyan, mint $\mathbb{R}^n$), globálisan azonban nem feltétlenül. Ezt nemsokára példákon fogjuk látni. Jegyezzük meg azonban, hogy a lokális hasonlóság $\mathbb{R}^n$-re korlátozott: csak olyan fogalmak értelmezhetők a sokaságon, melyek diffeomorfizmusokra (az áttérésfüggvényekre) invariánsok – például: az egyenes, a távolság vagy a szögfogalom nem. Lássunk néhány további definíciót.

Definíció. Az M olyan részhalmazait, melyek valamilyen $\mathbb{R}^n$-beli nyílt halmaz ϕ_i-nél vett ősképei, vagy ilyenek uniója, M-beli *nyílt* halmazoknak nevezzük. A $p \in M$ pontot tartalmazó $V \subset M$ nyílt halmazt a p *környezeté*nek mondjuk.

Bizonyos degenerációk kiszűrésére ki kell még kötnünk egy feltételt a sokaság fogalmára. Fel fogjuk tenni a következő úgynevezett *Haussdorff-tulajdonság*ot: M bármely két különböző p és q pontjának léteznek U és V *diszjunkt* környezetei.

Példák:

(i) $\mathbb{R}^n$ tetszőleges U nyílt részhalmaza n dimenziós sima sokaság, egyetlen térképpel (ϕ =identitás).

(ii) Ha adottak az $M^m = \bigcup_i U_i$, $N^n = \bigcup_j V_j$ sima sokaságok, definiáljuk $M \times N$ direkt szorzatukat, melynek alaphalmaza az M és N halmazok halmazelméleti direkt szorzata, térképeik pedig: $U_i \times V_j$, minden (i, j) párra.

(iii) Tekintsük most $\mathbb{R}^3$ egységgömbjét:

$$S^2 := \{\ (w, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid w^2 + x^2 + y^2 = 1\ \}.$$

U_1 legyen S^2-ből kivéve a „déli sarkot" ($D := (-1, 0, 0)$), U_2 pedig $S^2 \setminus \{$ északi sark $\}$($E := (1, 0, 0)$). A *sztereografikus projekció* E-ből egy-egyértelműen leképezi U_2-t az (x, y)-síkra: ϕ_1. Ugyanez D-ből legyen ϕ_2. Az áttérésfüggvényekre kirótt feltétel ellenőrzéséhez ki kell számolnunk a $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ leképezést. Némi számolás azt adja, hogy

$$\phi_1(w, x, y) = \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}\right) \qquad \phi_2(w, x, y) = \left(\frac{x}{1+w}, \frac{y}{1+w}\right).$$

Tehát az áttérésfüggvény:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Ez kétségtelenül sima, tehát S^2 tényleg sokaság.

(iv) Tekintsük a következő ekvivalencia-relációt $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$-n:

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Az ekvivalencia-osztályok halmaza legyen $\mathbb{R}P^n$, és nevezzük *valós projektív tér*nek. Az $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ osztályát jelölje $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$. Legyen

$$U_i := \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \mid x_i \neq 0\}.$$

Minden U_i-re definiáljuk az evidens

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}; \frac{x_1}{x_i}; \ldots; \frac{x_n}{x_i}\right)$$

térképezést. Tanulságos kiszámolni az áttérésfüggvényeket, s konstatálni, hogy valóban simák.

SIMA LEKÉPEZÉSEK

Definíció. Az $f : M^m \longrightarrow N^n$ leképezést *sima*nak mondjuk, ha minden M-beli (U_i, ϕ_i) és N-beli (V_j, ψ_j) térképre a $\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1}$ leképezés – ahol definiált – akárhányszor differenciálható.

Nyilván definiálható lenne az $x \in M$-beli differenciálhatóság is, s éppen a térképek kompatibilitási tulajdonsága miatt nem függne attól, hogy melyik p-t tartalmazó térképpel tekintenénk a definíciót.

ÉRINTŐTÉR, ÉRINTŐNYALÁB

Mivel $\mathbb{R}$, és annak nyílt részhalmazai is sima 1 dimenziós sokaságok, a fenti definíció értelmezi a sima görbéket M^n-ben.

Legyen M^n sima sokaság, $p \in M$ és φ egy p körüli térkép. A p-n átmenő $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ sima görbéken definiáljuk a következő ekvivalencia relációt: $\gamma \sim \gamma_1$, ha $(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \gamma_1)'(0)$. Az ekvivalencia-osztályok halmazát T_pM jelöli. Nevezzük ezt az M p-beli érintőterének. Bizonyítható, hogy ez a reláció a φ térkép választásától független.

Igaz, hogy T_pM n-dimenziós vektortér. (A λ skalárral való szorzást úgy kapjuk, hogy „λ-szor gyorsabban járjuk be a görbét”, az összeadást pedig úgy, hogy a térképen használjuk az $\mathbb{R}^n$ lineáris struktúráját.)

Megjegyzés. Az n-dimenziós sokaságokra gyakran úgy gondolunk, hogy valamilyen magas dimenziós $\mathbb{R}^n$ euklideszi térbe vannak beágyazva (vagyis egy sima, injektív leképezés képei). Például S^2-t így is definiáltuk. Whitney megmutatta, hogy az úgynevezett kompakt (ld. később) sokaságok mindig beágyazhatók valamilyen $\mathbb{R}^N$-be, tehát egyáltalán nem nagy megszorítás így gondolni a sokaságokra. Persze ilyenkor egy p-beli érintőtérnek van geometriai tartalma, oda tudunk képzelni p-hez $\mathbb{R}^N$ egy n dimenziós alterét, mint érintőteret. Megmutatható, hogy a két definíció természetesen izomorf, sőt bizonyos tankönyvek az érintővektorokra egy harmadik – szintén hasznos – definíciót használnak, ahol minden érintővektor egy differenciáloperátor, mely az $M \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvényeken hat (ld. Etesi Gábor előadásában).

Megjegyezzük, hogy a $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ halmazon létezik egy természetes topológia, melyre a $T_pM \ni x \mapsto p$ leképezés folytonos sőt, van rajta egy sima sokaság struktúra, melyre a fenti leképezés sima. Az így nyert $TM \longrightarrow M$ leképezést az M sokaság *érintőnyalábj*ának hívjuk.

DERIVÁLTLEKÉPEZÉS

Legyenek M^n, N^p sima sokaságok és $f : M^n \to N^p$ sima leképezés. Az f *deriváltleképezés*ének nevezzük a $Tf : TM \to TN$; $[\gamma] \longmapsto [f \circ \gamma]$ leképezést, ahol $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M^n$ sima görbe.

Könnyen belátható, hogy Tf minden T_xM-et lineárisan képez $T_{f(x)}N$-be. Érdemes átgondolni, hogy ez a definíció hogyan azonosítható az analízis többváltozós derivált-fogalmával.

Definíció. Legyenek M^n, N^p n, illetve p dimenziós sima sokaságok. Az $f : M^n \to N^p$ bijekció *diffeomorfizmus*, ha sima és létezik sima inverze. Az lesz a nézőpontunk, hogy diffeomorf sokaságokat nem különböztetünk meg.

Egy $f : M^n \longrightarrow P^p$ diffeomorfizmus Tf deriváltja az $x \in M$-beli T_xM érintőteret $T_{f(x)}P$-be képezi lineárisan. Az inverze $T_{f(x)}P$-t viszi vissza lineárisan T_xM-be. S mivel ezek egymás inverzei, így ugyanez a deriváltakra is igaz. Ez csak akkor lehet, ha midkét említett lineáris leképezés *lineáris izomorfizmus*, s egymás inverzei. Speciálisan $n = p$, tehát diffeomorf sokaságok azonos dimenziósak.

A differenciáltopológia egyik fő kérdése a sima kompakt (lásd alább) n-sokaságok osztályozása:

$n = 0$ eset: Véges sok pont

$n = 1$ eset: Véges sok körvonal diszjunkt uniója

$n = 2$ eset: S^2, tórusz (azaz az úszógumi felülete), n-személyes úszógumi felülete ($n = 2, 3, 4, ...$), valamint egy nem irányítható („kétoldalas") felületekből álló végtelen sorozat (ide tartozik például: $\mathbb{R}P^2$, Klein-kancsó).

$n = 3$ eset: Sokminden ismeretes, de mindezidáig megoldatlan. (Bővebben lásd később.)

$n \geq 4$ eset: A probléma elméletileg sem megoldható: bizonyítható, hogy már a 4 dimenziós sokaságok osztályozása is – valamilyen konkrét értelemben – *nehezebb*, mint a csoportok osztályozása, amiről viszont ismert, hogy *elméletileg* nem megoldható.

Záró megjegyzés. Mint kiderült, a sokaság az euklideszi terek differenciálhatósági struktúráját modellezi. Létezik egy olyan fogalom, mely az euklideszi terek folytonossági viszonyainak absztrakciója: topologikus tér.

Topologikus térnek hívunk egy X halmazt, ha adottak bizonyos részhalmazai (ezek összessége legyen Ω). Ezeket a halmazokat *nyílt* halmazoknak nevezzük, és persze kikötünk néhány tulajdonságot Ω-ról: $\emptyset \in \Omega$, $X \in \Omega$, valamint Ω-nak zártnak kell lennie a véges metszetre és tetszőleges unióra. Ha megvannak a nyílt halmazok, akkor definiálhatók a pontok környezetei és a folytonosság: a p-t tartalmazó nyílt halmazokat p környezeteinek nevezzük. Egy $f : X \longrightarrow Y$ leképezés folytonos az $x \in X$ pontban, ha $f(x)$ minden V környezetéhez létezik x-nek olyan U környezete, melyre $f(U) \subset V$. Érdekes, hogy a folytonosság értelmezése máshogy is megy, egy $f : X \longrightarrow Y$ pontosan akkor folytonos minden $x \in X$ pontban, ha minden $V \subset Y$ nyílt halmaz f-ősképe nyílt X-ben. Zárt halmazoknak nevezzük a nyílt halmazok komplementereit.

Már láttuk, hogy minden sokaság egyben egy topologikus tér is. Ez azért hasznos, mert használhatók rájuk a topológia fogalmai, melyek közül a *kompakt*ságot most definiáljuk.

Definíció. Egy X topologikus tér *kompakt*, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható véges fedés (nyílt fedés := nyílt halmazokkal való lefedés). Analízisből tudjuk, hogy $\mathbb{R}^n$-beli kompakt halmazok pontosan megegyeznek a korlátos és zárt halmazokkal. A kompakt terek (sokaságok) talán legfontosabb tulajdonsága, hogy rajtuk értelmezett folytonos (sima) $\mathbb{R}$-be képező függvényeknek mindig van minimuma és maximuma.

Átgondolandó, hogy $\mathbb{R}^n$ nem kompakt, $\mathbb{R}^n$ (nem-üres) nyílt részhalmazai sem; míg S^1 (=körvonal), S^2 és $\mathbb{R}P^n$ kompaktak.

3 Lie-csoportok

A Lie-csoportok és a szorosan kapcsolódó Lie-algebrák elmélete nagyon fontos a geometriában és a (differenciál-)topológiában. Ezért persze elméletük is igen kiterjedt. Ebből mi most nem tudunk sokat megmutatni, csupán a definíciókat.

Definíció. *Lie-csoport*nak nevezzük az M sima sokaságot, ha az csoport, valamint hogy a két struktúra legyen kompatibilis, vagyis legyenek az:

$$M \times M \longrightarrow M \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

$$M \longrightarrow M \qquad x \mapsto x^{-1},$$

csoportműveletek simák.

Példák:

(i) Ha G tetszőleges csoport, diszkrét topológiával, akkor G 0 dimenziós Lie-csoport,

(ii) $(\mathbb{R}^n, +)$,

(iii) $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$,

(iv) $S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ (kvaternió egységgömb),

(v) $GL_m(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \mid \det A \neq 0\}$,

(vi) $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = I\}$,

(vii) $Sp_m(\mathbb{R}) = \{A \mid A^T J A = J\}$ ahol $J = [[0, E], [-E, 0]]$ a standard szimplektikus struktúrát fixen hagyó lineáris transzformáció (bővebben később),

(viii) $GL_m(\mathbb{C}) \subset GL_{2m}(\mathbb{R}) = \{A \mid A^{-1} J A = J\}$,

(ix) $U(m) = \{A \in \mathbb{C}^{m \times m} \mid A^+ A = I\}$,

(x) $SU(m) = \{A \in U(m) \mid \det(A) = 1\}$.

Vizsgáljuk meg $O(n)$ érintőterét az egységelemben (I). Vegyünk egy I-n átmenő görbét $O(n)$-ben: $A(t)$. Nyilván $A(t)^T A(t) = I$ minden t-re. Ezt deriválva kapjuk az $(A(t)^T)' A(t) + A(t)^T A(t)' = 0$-át. Ez az $A = I$ helyen $(A(t)^T)' I + I A(t)' = 0$ amely az antiszimmetrikus mátrixok definiáló függvénye A'-re. Tehát $T_I O(n) = \{X | X^T + X = 0\}$.

A Lie-csoportok csoportművelete definiál egy bizonyos algebrai struktúrát az érintőtereken, például: az egységben tekintett érintőtéren – ennek neve: Lie-algebra.

Definíció. Az L lineáris tér *Lie-algebra*, ha adott rajta egy $[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ bilineáris leképezés, melyre:

(i) $[a,b] = -[b,a]$

(ii) $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$ (*Jacobi-identitás*).

Legyen G Lie-csoport, $\mathfrak{g} = T_E G$. Definiálunk egy $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ függvényt a $g \in G$-vel való konjugálás deriváltfüggvényeként, továbbá a következőt:

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to GL(\mathfrak{g})$$

$$\mathrm{ad}(X)(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{Ad}\Big(\gamma_X(t)\Big)(Y)\,|_{t=0},$$

ahol γ_X egy olyan görbe, melyre $\dot\gamma(0) = X$. Ezt a továbbiakban $[\cdot,\cdot]$ -el fogjunk jelölni, és *Lie-zárójel*nek nevezzük. Belátható, hogy ez Lie-algebrát indukál $T_E G$-n.

A definíció maga nyilván nem elégséges az érintőtéren definiált Lie-algebra-struktúra megértéséhez, ehhez Lie-algebra tankönyvekhez kell fordulni. Az viszont kiderül ebből is, hogy a Lie-algebra-művelet valamelyest a csoport nem-kommutativitását méri. Triviális csoportművelet (kommutatív-csoport) triviális Lie-algebra-műveletet ($[X,Y] = 0\ \forall X,Y$) indukál.

Megjegyzés. Ha bevezetjük az $\mathrm{ad}_X : L \to L$, $\mathrm{ad}_X(Y) := [X,Y]$ függvényt, akkor a Jacobi identitás a következő alakot veszi fel: $\mathrm{ad}_X[Y,Z] = [\,\mathrm{ad}_X Y, Z] + [Y,\ \mathrm{ad}_X Z]$, amiben felismerhetjük a Leibniz-szabályt.

Megjegyzés. A Lie-csoportok tanulmányozásának egyik fő eszköze, hogy a csoportokról szóló állításokat gyakran lefordíthatjuk az érítőterekről szóló állításokra. Ezek, lévén lineáris terekről szólnak, gyakran sokkal könnyebben kezelhetőek. Ezt hívják a linearizálási technikának. Mivel az érintőtérre való áttérés deriválást jelent, a linearizálás valójában valamilyen értelemben a probléma deriválását jelenti. Ha már megoldottuk a probléma „deriváltját”/„linearizáltját”, persze még valahogy vissza kell térnünk az eredeti szintre, a csoporthoz. Ez az „integrálási” szakasz.

Megjegyzés. A Lie-csoportok egyik fő előnye a közönséges sokaságokkal szemben, hogy a csoportművelet által a tér bizonyos homogenitását kapjuk: ha valamit az egységelem környékén ismerünk, vagy definiálunk, azt a csoportművelettel „szét tudjuk kenni”. Például:

1. Tétel. *Minden Lie-csoporton létezik-sehol-sem eltűnő sima vektormező. (Vektormező: az M sokaság minden p pontjához egy T_pM-beli vektort rendelő leképezés.)*

Bizonyítás. Legyen a Lie-csoport G, egységeleme: e. Legyen T_eG-ben v egy tetszőleges nem-nulla vektor. Minden $g \in G$-hez van egy $L_g : G \longrightarrow G$ diffeomorfizmusa G-nek: $x \mapsto g \cdot x$. Ennek TL_g deriváltja T_eG-t T_gG-re képezi izomorfan. A $g \mapsto TL_g(v)$ egy sima sehol-sem-nulla vektormező G-n. $\diamond$

Szinte bármely topológiai eszközzel (például: fundamentális-csoport, homológia-elmélet, stb.) könnyen belátható, hogy például: az S^2-n nem létezik sehol-sem-nulla vektormező. Ezt úgy szokták mondani, hogy a sündisznó nem fésülhető meg. A fenti tétel szerint tehát az S^2-n nem adható meg Lie-csoport-struktúra. Feladat: S^{2n+1} viszont megfésülhető (vagyis van rajta sehol-sem-nulla vektormező). Ez nem jelenti azt, hogy minden páratlan dimenziós gömbön lenne Lie-csoport-struktúra, sőt alig-alig van ilyen – de ennek bizonyítása nehezebb.

4 Nyalábok

Ahogy a sokaságok olyan terek, amik lokálisan olyanok, mint $\mathbb{R}^n$, úgy a nyalábok olyan leképezések lesznek, amik lokálisan olyanok, mint a direkt szorzatról való vetítések.

Definíció. Legyenek E és M sima sokaságok, és $\pi : E \longrightarrow M$ sima leképezés. A $\xi = (E, \pi, M)$ hármast *n-rangú (sima) vektornyalábnak* nevezzük, ha adott minden $E_p := \pi^{-1}(p)$-n egy valós n dimenziós vektortér-struktúra, valamint π lokálisan triviális, vagyis: létezik $\{N_i\}$ nyílt fedése M-nek, hogy $\varphi_i : N_i \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(N_i)$ diffeomorfizmus, amire $\varphi_i : (p, \ ) \longrightarrow E_p$ lineáris izomorfizmus.

Elnevezések. A ξ vektornyaláb *rangja* a k, $\mathbb{R}^k$ a *fibruma*, M az *alapja*, E a *totális tere*, π a *projekciója*. Minden M sima sokaság fölött létezik nyaláb: $M \times \mathbb{R}^k \longrightarrow M$; $(m, r) \mapsto m$ ez a *triviális nyaláb*.

Definíció (Szelés). A $\pi : E \longrightarrow B$ nyaláb *szelése* egy $s : B \longrightarrow E$ sima leképezés, amelyre $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$ teljesül. Látható, hogy a B bázisú triviális 1-rangú nyalábok szelései kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben vannak a $B \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényekkel. Tehát a szeléseket általánosított függvényeknek tekinthetjük.

Példák:

(i) A *Möbius-szalag*ot vetítsük a középvonalára, és képzeljük úgy, hogy a pontok ősképei nem véges hosszú szakaszok, hanem egyenesek. Ez egy lokálisan triviális sima leképezés – 1-rangú vektornyaláb S^1 fölött. Viszont nem triviális. Gondoljuk át, hogy ennek a nyalábak nincsen sehol-sem-nulla szelése.

(ii) Ha M^n egy sima sokaság, akkor a nyilvánvaló leképezés $\pi : TM \longrightarrow M$ egy M rangú nyaláb. Jelölése τ_M.

Vegyük észre, hogy τS^1 az S^1-bázisú *triviális* $\mathbb{R}$*-nyaláb.*

Definíció. Ha a τM triviális nyaláb, akkor M-et *paralelizálhatónak* mondjuk.

Példa: Tekintsük az S^2-t. Az az igazság, hogy S^2 nem paralelizálható, ugyanis τS^2-nek egyetlen sehol-sem-nulla szelése sincs. Ez egy klasszikus tétel, mely *„sündisznótétel"* névre hallgat ("hairy ball theorem"), és megtalálható minden bevezető differenciáltopológia tankönyvben.

Felmerül a kérdés, hogy az n dimenziós gömbök közül melyek paralelizálhatóak. Csakúgy, mint S^2 esetén, minden páros n-re igaz, hogy S^n-nek nincsen egyetlen sehol-sem-nulla szelése, így nem lehet triviális. Maradnak a páratlan dimenziós gömbök. Az S^3 tényleg paralelizálható, ehhez érdemes S^3-at a kvaternió-algebra egységgömbjeként elképzelni. Kiderül azonban, hogy S^5 nem paralelizálható, S^7 viszont igen. Ehhez megint érdemes S^7-et a Cayley-számok (8 dimenziós algebra) egységgömbjének tekinteni.

Feladat: *Igazoljuk, hogy minden Lie-csoport paralelizálható.*

Nagyon nehéz tétel, hogy több paralelizálható gömb nincsen, csak a már felsoroltak: $n = 1, 3, 7$.

VEKTORNYALÁBOK KONSTRUÁLÁSA

(i) *Triviális nyalábok összeragasztása.* Legyen adott a B sokaság egy $\{N_i\}$ nyílt fedése, és Egy V vektortér. Tegyük fel, hogy adott minden i, j párra a $\varphi_{ij} : N_i \cap N_j \longrightarrow GL(V)$ sima leképezést, amely kielégíti a

(a) $\varphi_{ii} = \mathrm{id}$

(b) $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ij}$

(c) $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = \mathrm{id}$

összefüggéseket. Az $\bigcup_i N_i \times V$ diszjunkt unión definiáljuk (x, v)-t ekvivalensnek (x, v')-vel ($x \in N_i \cap N_j$), ha $\varphi_{ij}(x)(v) = v'$. Ezen ekvivalencia-reláció szerinti faktor egy E sokaság lesz, egy kanonikus leképezéssel B-re, mely egy vektornyalábot alkot.

(ii) *Vektornyaláb indukálása.* Már létező nyaláb segítségével újabb nyalábot állíthatunk elő. Legyen $\pi : E \longrightarrow B$ nyaláb és $f : M \longrightarrow B$ tetszőleges folytonos leképezés.

Legyen $E' := \{(m,e) \in M \times E | f(m) = \pi(e)\}$. Ennek az M-re való projekciója vektornyaláb, amit a $\xi := \{\pi : E \longrightarrow B\}$-ből *$f$-által indukált vektornyalábnak* nevezünk és $f^*\xi$-vel jelöljük.

(iii) *Régi nyalábokból újakat.* Filozófia: amit vektorterekkel és lineáris leképezésekkel meg lehet tenni, azt vektornyalábokkal is. Például, vektortereknek és lineáris leképezéseknek is van direkt összegük: létezik $V \oplus W$ ha V és W vektortér, valamint létezik $\psi \oplus \phi : V \oplus W \longrightarrow V' \oplus W'$ ha $\psi : V \longrightarrow V'$ és $\phi : W \longrightarrow W'$ lineáris leképezés. Legyenek most $\xi : E_1 \longrightarrow M$ és $\eta : E_2 \longrightarrow M$ vektornyalábok. Megkonstruáljuk a $\xi \oplus \eta : E \longrightarrow M$ vektornyalábot. Legyen N_i egy nyílt fedése M-nek, mely trivializálja mind ξ-t, mind η-t. Tekintsük most az $\bigcup_i N_i \times (F_1 \oplus F_2)$ diszjunkt uniót, és az

$$\alpha_{i,j} := \psi_{i,j} \oplus \phi_{i,j} : N_i \cap N_j \longrightarrow GL(F_1 \oplus F_2)$$

leképezéseket. Az (i) pont szerint ebből konstruált nyaláb lesz ξ és η direkt összege.

F-FIBRUMÚ NYALÁBOK

Nemcsak vektornyalábokat fogunk használni, hanem kicsit általánosabban F-fibrumú nyalábokat.

Legyen F sima sokaság G pedig egy rögzített részcsoportja a $\{\varphi : F \longrightarrow F\}$ diffeomorfizmusok csoportjának. Ekkor az *F fibrumú G struktúracsoportú nyalábnak* nevezünk egy $\xi = \{\pi : E \longrightarrow B\}$ leképezést, ha

(i) minden pont fibruma F, azaz minden $b \in B$-re a $\pi^{-1}(b) \cong F$,

(ii) *lokálisan triviális*, azaz létezik N_i nyílt fedése B-nek, hogy a $\varphi_i : N_i \times F \longrightarrow \pi^{-1}(N_i)$ fibrumtartó diffeomorfizmus,

(iii) valmint az $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x)$ „áttérésfüggvények" értékei G-ből vannak.

Példák:

(i) Ha $F = \mathbb{R}^n$, $G = GL(\mathbb{R}^n)$, akkor az F fibrumú G struktúra-csoportú nyalábok éppen a vektornyalábok.

(ii) *Irányítható vektornyalábról* beszélünk, ha $F = \mathbb{R}^k$, és $G = GL^+(\mathbb{R}^k)$, ahol a $+$ jel a pozitív determinánsra utal. Ellenpéldaként megemlíthető a Möbius-szalag, amely nem irányítható. Ha $F = \mathbb{R}^k$ és $G = O(k)$, akkor *Euklideszi-nyalábról* beszélünk.

(iii) Legyen G Lie-csoport, mely természetesen hat saját magán a balról vett szorzással, tehát G tekinthető a saját diffeomorfizmus-csoportjának részcsoportjaként. Így van értelme G struktúracsoportú G fibrumú nyalábról beszélni. Ezt *principális G-nyaláb*nak nevezzük.

(iv) A principális H-nyalábot úgy is definiálhatjuk, ha veszünk E sima sokaságot, és H Lie-csoportot, valamint definiálunk egy $\nu : E \times H \longrightarrow E$ leképezést, amelynek tetszőleges $h \neq 1$ esetén nincs fixpontja. Az E elemeinek pályái (orbitok) halmaza legyen B (tegyük fel, hogy ez örököl az E-ből egy természetes topológiát, amivel B sima sokaság lesz). Az $E \longrightarrow B$ faktorleképezés principális H-nyaláb.

5 Homológia-csoportok

Az itt ismertetésre kerülő úgynevezett szinguláris homológia-elmélet minden topologikus térhez és minden nemnegatív egész q számhoz hozzárendel egy Abel-csoportot, a tér q-adik homológia-csoportját. Az q-adik homológia-csoport körülbelül azt méri a térről, hogy hány q dimenziós lyuk van benne. Persze ezt az állítást nem lehet precízzé tenni.

A homológia-elmélet geometriai ötlete a következő. Vizsgáljuk a térbe képezhető q-dimenziós felületeket (mondjuk az irányíthatóakat, és nem feltétlenül kell gömbnek lenniük, lehetnek mások, például: tórusz, stb.). Két ilyen q-dimenziós felületet *homológnak* mondunk, ha együtt határolnak egy $q+1$ dimenziós felületet. A homológia szerinti ekvivalencia-osztályok lesznek az q-adik homológia-csoport elemei.

Ezen program kivitelezése számos technikai problémába ütközik. Pl. mik legyenek az „q dimenziós felületek”? 1, 2 dimezióban még rendben van, de feljebb? Nos e technikai nehézségeket győzi le a következő bonyolultnak tűnő elmélet. Ne felejtsük viszont el, hogy gyakran a bonyolultabb definíciók vezetnek számolhatóbb, hasznosabb elméletekhez.

Definíció. Legyen Δ_q a *q dimenziós standard szimplex*

$$\{(t_0, t_1, \ldots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0 \}.$$

($q = 0$-ra ez egy pont, $q = 1$-re egy szakasz, $q = 2$-re egy háromszög, stb.) Δ_q-nak $q + 1$ oldala van, azaz $q + 1$ hiperoldala, $q - 1$-dimeziós lapja; az i-ediket a $t_i = 0$ egyenlet definiálja.

Definíció. Legyen X egy topologikus tér. A Δ_q egy folytonos leképezését X-be *szinguláris q-szimplex*nek nevezzük. Ilyenből persze meglehetősen sok van. *q-dimenziós lánc*nak nevezzük ilyen szinguláris q-szimplexek (egész együtthatós) formális lineáris kombinációit. Pl. ha f_1 és f_2 szinguláris q-szimplex, akkor $7f_1 - 2f_2$ egy szinguláris q-lánc. Jegyezzük azonban meg, hogy csak véges sok nem-nulla együtthatót tekinthetünk. A szinguláris q-láncok

a formális összeadásra csoportot alkotnak, legyen e csoport $C_q(X)$. Ez nyilván egy meglehetősen sok elemmel generált szabad Abel-csoport.

Most egy homomorfizmust definiálunk: $\partial_q : C_q(X) \longrightarrow C_{q-1}(X)$. Nyilván elég a szinguláris q-láncokon definiálni ∂_q-t; a többire lineárisan kiterjed. Legyen f egy szinguláris q-szimplex.

$$\partial_q(f) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f|_{\Delta_q\ i\text{-edik lapja}}.$$

A definícióban szereplő $f|_{\Delta_q\ i\text{-edik lapja}}$ azért egy szinguláris $q-1$-szimplex, mert Δ_q i-edik lapját, ami $\{(t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_q)\}$, $\{(t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_q)\}$ -ként azonosítjuk Δ_{q-1}-gyel. Adódik tehát egy hosszú sorozat:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_3} C_2(X) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} 0.$$

Standard „szumma-cserés" bizonyítás adja, hogy $\partial_q \circ \partial_{q-1} = 0$ vagy, ami ugyanaz: $\mathrm{im}(\partial_q) \subset \ker(\partial_{q-1})$.

Definíció. A $H_q(X) := \ker(\partial_{q-1})\ /\ \mathrm{im}(\partial_q)$ faktorcsoportot nevezzük az X tér *q-adik homológia-csoportjá*nak.

Látható, hogy $\ker(\partial_{q-1})$-ben valamiféleképpen zárt $q-1$-ciklusok szerepelnek, $\mathrm{im}(\partial_q)$-ban pedig olyan $q-1$-ciklusok, melyek egy q dimenziósat határolnak, tehát tényleg a bevezetőben említett programot valósítottuk meg.

A homológia-elmélet felépítésére itt nem vállalkozunk, csupán néhány kérdést válaszolunk meg.

Vajon számolhatók a homológia-csoportok? A $q = 0$ eset még igen, ez jó gyakorlat lehet az olvasónak. A többi így, a definícióból nem igazán. Mégis számolhatók a homológia-csoportok, és ennek az az oka, hogy több tétel is szól arról, hogy ha a C_q-kban csak bizonyos (sokkal kevesebb) q-szimplexet veszünk figyelembe, akkor is ugyanazt a homológia-csoportot kapjuk. Például ha az X tér szimplexekre van bontva, és a C_q-ban csak olyan leképezéseket veszünk figyelembe, melyek az X q dimenziós szimplexeire képeznek identikusan, akkor is ugyanzt a H_q-t kapjuk. Ilyen leképezésekből pedig esetleg csak véges dimenziónyi van.

Mire jók a homológia-csoportok? Azonnal látható, hogy segítségükkel megkülönböztethetők topologikus terek. Például ha tényleg elvégzünk számolásokat, akkor azt látjuk, hogy $H_1(S^2) = 0$ míg $H_1(\text{tórusz}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Tehát S^2 és a tórusz nem ugyanaz. Ez persze egyébként is elég szemléletes, de magasabb dimenzióban a szemléletünk elég korlátolt.

Mi közük van a homológia-csoportoknak a differenciálható struktúrához ha X sima sokaság? Látszólag semmi, a definíció csupán folytonosságot használt. Valójában azonban a de

Rham-elmélet megmutatja, hogy a homológia-csoportok azt is mérik, hogy bizonyos parciális differenciálegyenleteknek hány megoldása van az adott X-en (ld. Etesi Gábor előadását).

Miért egész együtthatókat tekintettünk a láncok definíciójában? Ez valójában nem volt fontos. Tekinthettünk volna az együtthatókat tetszőleges G Abel-csoportból, s akkor azonos konstrukció után ún. *G-együtthatós homológia-csoport*okat kaptunk volna, amiket $H_q(X;G)$ jelöl.

Van-e a homológia-csoportokon valami más művelet? Nincs, csak a csoportművelet (összeadás) és az együtthatócsoport elemeivel való szorzás („modulus"). Viszont van egy úgynevezett duális-elmélet, a *kohomológia-elmélet*, mely kohomológia-csoportokat ($H^q(X;G)$) definiál, s a kohomológia-csoportokon van egy nagyon hasznosnak bizonyuló szorzás: $x \in H^q(X;R)$ és $y \in H^p(X;R)$ szorzata $H^{p+q}(X,R)$-ben, van, ha R gyűrű. Az is igaz, hogy maguk a kohomológia-csoportok kiszámolhatók pusztán a homológia-csoportok ismeretével, de a kohomologikus szorzás nem.

Irodalomjegyzék

[1] J. F. Adams: *Algebraic Topology — A student's guide*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1972);

[2] Th. Bröcker, K. Jänich: *Introduction to differential topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1982);

[3] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov: *Modern Geometry — Methods and Applications, Parts I-III.* Grad. Texts in Math. 93, 104, 124, Springer-Verlag, Berlin (1992);

[4] D. B. Fuks, V. A. Rokhlin: *A Beginner's Course in Topology* Universitext, Springer-Verlag, Berlin (1984);

[5] W. S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction* Grad. Text in Math. 56, Springer-Verlag, (1989);

[6] Hirsh: *Differential Topology* Grad. Texts in Math. 33, Springer-Verlag, (1976);

[7] D. Husemoller: *Fibre bundles* McGraw-Hill, (1966);

[8] J. Milnor: *Topology from the differential viewpoint* U. P. of Virginia, Virginia (1965);

[9] A. Mishenko, A. Fomenko: *A course of differential geometry and topology* Mir, Moscow (1988);

[10] M. Postnikov: *Lectures in Geometry, Semester III, Smooth Manifolds* Mir, Moscow (1989);

[11] М. Постников: *Лекции по геометриыы, IV. Дифференциалная геометрия* Наука, Москба (1988);

[12] M. Postnikov: *Lectures in Geometry, Semester V, Lie groups and Lie algebras* Mir, Moscow (1986);

[13] E. Spainer: *Algebraic Topology* McGraw-Hill, (1966);

[14] R. M. Switzer: *Algebraic Topology — Homotopy and Homology* Springer-Verlag, (1975);

[15] J. W. Vick: *Homology Theory* Academic Press New York, London (1973);

IV. Klasszikus mezőelméletek geometriája

Etesi Gábor
MTA Rényi Alfréd
Matematikai Kutatóintézet
Reáltanoda utca 13-15.
Budapest, 1053

etesi@math-inst.hu

1 Bevezetés

A most következő oldalakon a modern fizika relativisztikus mezőelméleteinek mélyére hatolunk és olyan nézőpont után kutatunk, melyből ezek az elméletek egyszerre vizsgálhatók. A tanulásban megfáradt elme számára mindig üdítő élmény, ha sikerül egy olyan rendezőelvet fölfedeznie, melynek megértésével az összes, szerteágazó részterület problémái megfogalmazhatók és tanulmányozhatók. Kiderült, hogy a klasszikus mezőelméletek nehéz birodalmában ilyen arkhimédeszi pont a modern geometria; ez mind a XX. századi matematika, mind a fizika egyik legmeglepőbb és legmesszebb mutató fölismerése.

Sőt, kiderült, hogy a geometria nem csupán egy rendezőelv, hanem egy olyan közös nyelv is, melyen a matematikusok és a fizikusok el tudtak kezdeni kommunikálni egymással, s ez által fölismerhették, hogy problémáik nagy része valójában közös: a kvantumelmélet nehéz kérdései átfogalmazhatók modern geometriai kérdésekké és viszont. Így problémák serege fogalmazható meg, melynek tanulmányozásával, az egyes kérdések közti összefüggések tisztázásával a XXI. század matematikai fizikájának körvonalait pillanthatjuk meg.

A dolgozatban megvizsgáljuk a klasszikus elektrodinamika és ennek természetes általánosítása, az ún. Yang–Mills-elméletek geometriáját. Az általános relativitáselmélet tárgyalására sajnos helyszűke miatt nincs mód, majd legközelebb.

Végül köszönöm Barnaföldi Gergelynek a segítséget, melyet a jegyzet megírásához nyújtott.

2 A de Rham kohomológia-elmélet alapjai

Ebben a fejezetben megismerkedünk a *de Rham kohomológia*-elmélet alapfogalmaival: bevezetjük a differenciálforma fogalmát egy M sokaságon, megismerkedünk a külső deriválással; értelmezzük a de Rham-csoportot, mint egy lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszer M fölötti megoldhatatlanságának „mércéjét”, végül ejtünk néhány szót arról is, hogyan lehet e csoportokat kiszámolni; ennek kapcsán megbeszéljük, hogyan kell formákat integrálni sokaságon.

A témával kapcsolatban számtalan bevezető könyv létezik, pl. [2, 12], melyekre mi is támaszkodunk.

Műveletek vektornyalábokkal

Rimányi Richárd előadásában megismerkedtünk a vektornyaláb fogalmával, most vegyünk szemügyre ezek közül közelebbről egy speciálisat, ami nem más, mint az M differenciálható sokaság *érintőnyalá*bja.

Legyen adott egy M differenciálható sokaság (a továbbiakban: sokaság), $p \in M$ egy pont, s tekintsünk egy $\gamma : \mathbb{R} \to M$ sima görbét, melyre teljesül, hogy $\gamma(0) = p$; jelölje e görbe paraméter szerinti deriváltját a p pontban $\dot{\gamma}(0)$ (ez könnyedén értelmezhető, hiszen bármely pont kis környezete diffeomorf az $\mathbb{R}^n$ valamilyen nyílt halmazával, ahol deriválni jól tudunk). Ezután nevezzünk két görbét, γ-t, δ-t ekvivalensnek, s egy ilyen osztályt jelöljünk $[\gamma]_p$-vel, ha $\gamma(0) = \delta(0) = p$, valamint $\dot{\gamma}(0) = \dot{\delta}(0)$ teljesül.

Definíció. Az M sokaság $M \ni p$*-beli érintőterén*ek nevezzük a

$$T_pM := \{[\gamma]_p \mid \gamma(0) = p\}$$

teret, M *érintőnyalá*bja pedig az

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

diszjunkt unió.

Könnyedén látható, hogy

(i) T_pM ellátható egy valós vektortér-struktúrával,

(ii) $\dim T_pM = \dim M$,

(iii) TM lokálisan triviális, vagyis (TM, π, M) egy sima vektornyaláb M fölött, ahol a $\pi : TM \to M$ projekció nem más, mint $\pi([\gamma]_p) = p$.

Létezik az érintőnyalábnak egy másik, absztraktabb bevezetése is. Jelölje $F(M, p)$ az $f : M \to \mathbb{R}$ sima függvények terét, melyek értelmezési tartománya tartalmazza a p-t.

Definíció. Az $X_p : F(M, p) \to \mathbb{R}$ leképezést *derivác*iónak nevezzük, ha $\mathbb{R}$-lineáris és teljesíti a Leibniz-szabályt, vagyis

$$X_p(fg)(p) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g).$$

Nyilván a derivációk is egy n dimenziós valós vektorteret alkotnak minden p-re. Jelölje a derivációk terét D_pM, ekkor egy p körüli $(U, x^1, ..., x^m)$ ($\dim M = m$) térkép esetén D_pM egy bázisát jelölje

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}(p), ..., \frac{\partial}{\partial x^m}(p)\right).$$

Nyilvánvalóan D_pM is ellátható egy $\mathbb{R}$ fölötti vektortér struktúrával, hiszen lineáris, elsőrendű differenciál-operátorok lineáris kombinációja is az.

Lemma. *Létezik egy természetes lineáris izomorfizmus T_pM és D_pM között.*

Bizonyítás. Egy $(U, x^1, ..., x^m)$ térképhez tartozzék az $(e_1(q), ..., e_m(q))$ bázismező U-n ($q \in U$); ekkor egy $\gamma : (-\delta, \delta) \to U$, $\gamma(t) = (x^1(t), ..., x^m(t))$, $\gamma(0) = p$ görbe $\dot{\gamma}(t)$ deriváltja megadható

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{k=1}^{m} \dot{x}^k(t) e_k$$

alakban, ahol az együtthatók a t változó sima függvényei. Hasonlóan, egy $X_q \in D_qM$ deriváció alakja is a korábban bevezetett bázisban

$$X_q = \sum_{i=1}^{m} X^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$$

alakú, ahol az X^i együtthatók is a q sima függvényei. Adjuk meg a $T_pM \to D_pM$ lineáris izomorfizmust az $e_k(p) \mapsto \partial/\partial x^k(p)$ lineáris kiterjesztésével. Ekkor létezik egy olyan kicsi $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, hogy $(tX^1(p), ..., tX^m(p)) \in U$, és erre a γ görbére $\dot{\gamma}(0) = X_p$. $\diamond$

Ennélfogva ezentúl a T_pM jelölést alkalmazzuk, s az érintővektorokra mindig úgy gondolunk, ahogy éppen kellemes: az érintőteret elképzelhetjük úgy, mint az érintővektorok terét, de gondolhatunk rá úgy is, hogy az a sima függvényeket egy pontban első rendben deriváló parciális differenciál-operátorok alkotta tér.

Ha adott egy (E, π, M) sima vektornyaláb M fölött (ld. Rimányi-előadás), akkor egy $s : M \to E$ sima leképezést *szelés*nek hívunk, ha rá $\pi(s(x)) = x$ teljesül minden $x \in M$ esetén. A sima szelések terét $\Gamma(E)$-vel jelöljük. Speciálisan, egy $X \in \Gamma(TM)$ szelést *vektormező*nek nevezünk. E szerint egy vektormező nem más, mint egy M-mel paraméterezett vektorsereg, ill. elsőrendű differenciál-operátor-sereg.

Két fontos mejegyzés:

(i) amennyiben adott egy $\varphi : M \to N$ sima leképezés két sokaság közt, akkor segítségével egy $X \in \Gamma(TM)$ vektormezőt „előre tudunk tolni" N-re egy $\varphi_* X \in \Gamma(TN)$ vektormezővé: ha $f \in F(N, \varphi(p))$, akkor $\varphi_* X(f) := X(f \circ \varphi)$;

(ii) könnyen láthatjuk, hogy $X, Y \in \Gamma(TM)$ esetén általában XY nem vektormező, de $[X, Y] := XY - YX$ már mindig az.

Legyen adott egy (TM, π, M) érintőnyaláb, $\dim M = m$. A most következőkben elmondjuk, hogy minden lineáris algebrából ismert operáció nehézség nélkül átvihető a vektornyalábok elméletére, a bizonyításokat mellőzzük [7].

Jelölje T_p^*M a T_pM duális terét ($p \in M$), továbbá tekintsük a

$$T_p^{(r,s)}M := \underbrace{T_p^*M \otimes ... \otimes T_p^*M}_{r} \otimes \underbrace{T_pM \otimes ... \otimes T_pM}_{s}$$

tenzorteret. Mindezek után, jelölje $\Lambda_p^r M$ az $T_p^{(r,0)}M$ tenzortér antiszimmetrikus részét („antiszimmetrikus r indexes tenzorok"). Nyilván, egy q-ed és egy r-ed rendű antiszimmetrikus tenzor tenzorszorzatának antiszimmetrizáltja egy $q+r$-ed rendű antiszimmetrikus tenzor. A bázis-tenzorokon ilyetén módon definiálva, majd lineárisan kiterjesztve, egy $\wedge_p : \Lambda_p^q M \times \Lambda_p^r M \to \Lambda_p^{q+r} M$ lineáris leképezést kapunk.

1. Állítás. *Legyen M egy sokaság. Az alábbi diszjunkt unió terek elláthatók sima vektornyaláb-struktúrával:*

(i) *legyen*

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M,$$

ezt az M duális érintőnyalábj*ának nevezzük;*

(ii) *legyen*

$$T^{(r,s)}M := \bigcup_{p \in M} T_p^{(r,s)}M,$$

ez az M fölötti (r, s)-típusú tenzorok nyalábja;

(iii) *legyen*

$$\Lambda^r M := \bigcup_{p \in M} \Lambda_p^r M,$$

ez az M fölötti r-ed rendű differenciálformák nyalábja, *míg*

$$\Lambda^* M := \bigcup_{p \in M} \bigoplus_{k=1}^{m} \Lambda_p^k M$$

a differenciálformák nyalábja. $\diamond$

A fentebbi mintára, tetszőleges, M feletti vektornyalábok tetszőleges lineáris algebrai kombinációi értelmezhetők.

Az $\Omega^r M := \Gamma(\Lambda^r M)$ vektortér elemeit M *fölötti r-ed rendű differenciálformák*nak nevezzük (sima szelések), s beszélhetünk a $\Omega^* M := \Gamma(\Lambda^* M)$ szelésekről is. Vegyük észre, hogy a $\wedge_p$ operáció pontonként értelmezve kiterjed egy $\wedge : \Omega^* M \times \Omega^* M \to \Omega^* M$ műveletté, mely $\Omega^* M$-et egy (végtelen dimenziós) $\mathbb{R}$ feletti algebrává teszi (az M *Grassmann-algebrája*).

Hogyan néznek ki lokálisan ezek a differenciálformák (ld. a Matolcsi-előadást ill. [8]-t)? Legyen egy $p \in M$ körüli térkép $(U, x^1, ..., x^m)$, ekkor $T_p^* M$ azon bázisát, mely a $T_p M$ már korábban bevezetett bázisával duális, jelöljük imígyen: $(\mathrm{d}x^1(p), ..., \mathrm{d}x^m(p))$; ekkor fönnáll:

$$\mathrm{d}x^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}(p)\right) = \delta^i_j.$$

Ennek alapján $\Lambda^r M$ egy lokális bázisát jelölje ez:

$$\{\mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_r} \mid 1 \leq i_1 < ... < i_r \leq m\}.$$

Jegyezzük meg, hogy egy ilyen objektum két elem megcserélésére előjelet vált az antiszimmetria miatt, ezáltal ha a felsorolásban két azonos indexű bázisvektor szerepel, a kifejezés azonosan nulla. Innen az is látható, hogy $\dim \Lambda^r M = \binom{\dim M}{r}$, vagyis csak $\dim M = m$-nél kisebb fokú differenciálformák lehetnek nem triviálisak. Egy általános $\omega|_U \in \Omega^r U$ elem alakja:

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < ... < i_r} \omega_{i_1 ... i_r} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_r}, \qquad \text{(IV.2.1)}$$

ahol az $\omega_{i_1 ... i_r}$ együtthatók sima függvények U-n.

Legyen adott egy $\varphi : M \to N$ sima leképezés két sokaság között. Megint csak, egy $\omega \in \Omega^r N$ formát „vissza tudunk húzni" egy $\varphi^* \omega \in \Omega^r M$ formává ily módon: adottak $X_1, ..., X_r \in \Gamma(TM)$ vektormezők, akkor $\varphi^* \omega(X_1, ..., X_r) := \omega(\varphi_* X_1, ..., \varphi_* X_r)$.

A KÜLSŐ DERIVÁLÁS

A most következő leképezés, melyet egy M sokaságon adott *külső deriválás*nak hívnak, alapvető fontosságú a differenciálgeometriában. Az alábbi állításban összegyűjtjük legfontosabb tulajdonságait [12].

2. Állítás. *Legyen M egy m dimenziós differenciálható sokaság, $0 \leq r \leq m$. Ekkor létezik egyértelműen egy $\mathrm{d} : \Omega^r M \to \Omega^{r+1} M$ leképezés, melyre:*

(i) d *lineáris;*

(ii) d *egy antidifferenciálás, vagyis bármely $\theta \in \Omega^r M$, $\omega \in \Omega^p M$ formákra teljesül:*

$$\mathrm{d}(\theta \wedge \omega) = \mathrm{d}\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge \mathrm{d}\omega;$$

(iii) *ha $\varphi : M \to N$ egy sima leképezés, $\omega \in \Omega^r N$, akkor*

$$\mathrm{d}(\varphi^* \omega) = \varphi^*(\mathrm{d}\omega);$$

(iv) *ha $f \in \Omega^0 M = F(M)$, $X \in \Gamma(TM)$, akkor*

$$\mathrm{d}f(X) = Xf;$$

(v) *ha $\omega = \mathrm{d}f$ valamilyen függvényre, akkor* $\mathrm{d}\omega = 0$. $\diamond$

A bizonyítás megtalálható [12]-ban. Most az a kérdés ötölhet föl bennünk, hogyan lehet az előbb adott d leképezést realizálni? A választ az alábbi állítás adja, igazságát fáradságos munkával mi is beláthatjuk, az előző állítást pontonként ellenőrizve [12]:

3. Állítás. *Legyen $\mathrm{d} : \Omega^r M \to \Omega^{r+1} M$ a külső deriválás M-en, valamint legyenek $X_1, ..., X_{r+1}$ vektormezők.*

(i) *Ekkor fönnáll, hogy:*

$$\mathrm{d}\omega(X_1, ..., X_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, ...\widehat{X}_i, ...X_{r+1}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=i+1}^{r+1} \omega([X_i, X_j], ..., \widehat{X}_i, ..., \widehat{X}_j, ..., X_{r+1}),$$

(itt az $\widehat{X}_i$ jelölés azt jelenti, hogy a felsorolásból az i-edik vektort ki kell hagyni);

(ii) *Ha $(U, x^1, ..., x^m)$ egy térkép M-en, akkor* d *hatását lokálisan az alábbi formula adja: ha ω az* (IV.2.1) *kifejezéssel adott, akkor:*

$$\mathrm{d}\omega|_U = \sum_{i_1 < ... < i_r} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \omega_{i_1 ... i_r}}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_r}. \quad \diamond \qquad \text{(IV.2.2)}$$

Megjegyezzük, hogy a most megismert külső deriválás a háromdimenziós vektorszámításban megtanult vektorműveletek közös általánosítása. Ugyanis (IV.2.2)-ből rögtön kapjuk, hogy:

$$(\mathrm{d}\omega)_{j_1\dots j_{r+1}} = \sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k+1}\frac{\partial\omega_{j_1\dots\hat{j}_k\dots j_{r+1}}}{\partial x^{j_k}}.$$

Legyen most $M = \mathbb{R}^3$, ezt a formulát használva kapjuk:

(i) Ha $f \in \Omega^0\mathbb{R}^3$, vagyis egy függvény, akkor

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3,$$

vagyis $\mathrm{d}f$ azonosítható a grad f *gradiens*sel.

(ii) Ha $\mathbf{v} \in \Omega^1\mathbb{R}^3$, vagyis $\mathbf{v}$ egy vektor értékű függvény, akkor

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^3 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3,$$

ezért $\mathrm{d}\mathbf{v}$ azonosítható a rot $\mathbf{v}$ *rotáció*val.

(iii) Végül, ha $\mathbf{w} \in \Omega^2\mathbb{R}^3$, vagyis megint csak egy vektor értékű függvény, akkor:

$$\mathrm{d}\mathbf{w} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x^1} + \frac{\partial w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial w_3}{\partial x^3}\right)\mathrm{d}x^1\wedge\mathrm{d}x^2\wedge\mathrm{d}x^3,$$

tehát ebben az esetben $\mathrm{d}\mathbf{w}$-re tekinthetünk, mint a div $\mathbf{w}$ *divergencia*ra.

A vektorszámításból megtanult és nehezen memorizálható div rot$= 0$ típusú azonosságok az univerzális $\mathrm{d}^2 = 0$ formula aleseteiként könnyedén adódnak (ld. a következő oldal!).

A de Rham-kohomológia-csoportok

Most pedig hozzákezdhetünk a de Rham-kohomológia-csoportok fogalmának ismertetéséhez. Első kérdésünk így hangzik: ha adott egy $\omega \in \Omega^r M$, valamint egy $\theta \in \Omega^{r+1}M$ forma, akkor hogy néz ki, mit ír le lokálisan az

$$\mathrm{d}\omega = \theta \qquad (\text{IV.2.3})$$

egyenlet egy M sokaság fölött? (IV.2.1), valamint a 3. állítás (ii) pontja alapján egy $(U, x^1, ..., x^m)$ térképen az előző egyenlet alakja:

$$\theta_{j_1\dots j_{r+1}}(x^1,...,x^m) = \sum_{k=1}^{r+1}(-1)^{k+1}\frac{\partial\omega_{j_1\dots\hat{j}_k\dots j_{r+1}}(x^1,...x^m)}{\partial x^{j_k}}.$$

Tehát az előttünk fekvő egyenlet nem más, mint egy $\binom{m}{r}$ egyenletből álló lineáris, parciális differenciálegyenlet-rendszer igen tömör alakja M-en. Majd látjuk, hogy a fizika fontos egyenletei is ilyen alakba írhatók.

Kérdésünk, mikor oldható meg egy ilyen egyenletrendszer? Származik-e az M sokaság *topológiájá*ból valamilyen megszorítás a megoldások létezésére? Először is, egy lemmácska:

Lemma. *Bármely* $\omega \in \Omega^r M$ *formára* $\mathrm{d}^2\omega := \mathrm{dd}\omega = 0$ *teljesül.*

Bizonyítás. Mivel d lineáris, ezért elég egy $\omega = f\mathrm{d}x^\alpha$ monomra igazolni, ahol α egy multiindex ($\mathrm{d}x^\alpha = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_r}$). Ekkor d hatása ekképpen írható:

$$\mathrm{d}(f\mathrm{d}x^\alpha) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^\alpha;$$

ugyanakkor a 2. állítás (ii) ill. (v) pontja alapján

$$\mathrm{dd}(f\mathrm{d}x^\alpha) = \mathrm{d}(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^\alpha) = \mathrm{dd}f \wedge \mathrm{d}x^\alpha - \mathrm{d}f \wedge \mathrm{dd}x^\alpha = 0. \quad \diamond$$

E lemmácska fényében tehát (IV.2.3) megoldhatóságának *szükséges* föltétele, hogy $\mathrm{d}\theta = 0$ teljesüljön. Az *elegendőség* föltételének tanulmányozása a de Rham-elmélet.

Definíció. A

$$\Lambda : V^0 \xrightarrow{\mathrm{d}} V^1 \xrightarrow{\mathrm{d}} ... \xrightarrow{\mathrm{d}} V^k \xrightarrow{\mathrm{d}} ...$$

objektumot *de Rham-komplexus*nak hívjuk, ha a V^i-k valós vektorterek és d egy olyan lineáris leképezés köztük, melyre $\mathrm{d}^2 = 0$.

A definícióban nem adtuk meg konkrétan, hogy mik is ezek a vektorterek és leképezések. Amennyiben M egy m dimenziós sokaság, akkor belátható, hogy $\Omega^i M$ egy (általában végtelen dimenziós) valós vektortér-struktúrával látható el, valamint – ahogy azt már tudjuk – a rajta adott d külső deriválásra $\mathrm{d}^2 = 0$ teljesül; tehát egy sokaságon adott diffrernciálformákkal realizálható egy Λ de Rham-komplexus.

Mivel $\mathrm{d}^2 = 0$, ezért fönnáll, hogy $\mathrm{im}\,\mathrm{d} \subset \ker \mathrm{d}$; ennélfogva képezhetjük a következő faktortereket:

Definíció. A

$$H^k(M) := \frac{\ker \mathrm{d}_k}{\mathrm{im}\,\mathrm{d}_{k-1}}$$

faktorteret az M sokaság (valós) *k-adik de Rham-kohomológia csoportjá*nak nevezzük (itt $\mathrm{d}_k : \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$), a $b_k := \dim_{\mathbb{R}} H^k(M)$ számot pedig, ha véges, a sokaság *k-adik Betti-szám*ának.

Megjegyzések. Tehát ezek a csoportok valójában vektorterek, amik fölfoghatók $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ alakú objektumokként, ahol G egy Abel-csoport; innen az elnevezés (meg még más is indokolja a „csoport" szó használatát, ahogy azt majd később látjuk). Sőt, bebizonyítható, hogy ha M *kompakt*, akkor $H^i(M)$ *véges dimenziós* minden $i = 0, 1, ..., m$-re.

Ha bevezetjük a

$$Z^k(M) := \ker \mathrm{d}_k = \{\omega \in \Omega^k M \mid \mathrm{d}_k \omega = 0\}$$

zárt formák terét, valamint a

$$B^k(M) = \operatorname{im} \mathrm{d}_{k-1} = \{\xi \in \Omega^k M \mid \xi = \mathrm{d}_{k-1}\eta\}$$

egzakt formák terét, akkor a de Rham csoportok $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ alakban is írhatók.

Most már látjuk, hogy (IV.2.3) megoldhatóságának *elegendő* feltétele, hogy az egyenletben szereplő θ forma $\mathrm{d}\omega$ alakú legyen; vagyis a szükségesség és az elégségesség biztos fönnáll, ha $H^{r+1}(M) = 0$ *teljesül a sokaság* $r+1$*-ik de Rham-csoportjára.*

Még azt mondjuk meg, hogy egy $[\omega] \in H^k(M)$ elemet (ami tehát egy ekvivalencia-osztály) írhatunk $\omega + B^k(M)$ alakban, s ezt a komplexust reprezentálhatjuk egy $\omega + \mathrm{d}\eta$ alakú elemmel, ahol tehát $\mathrm{d}\omega = 0$, $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.

Végül jól jegyezzük meg, hogy a $H^k(M)$ csoportokat egy differenciálható sokaság valmilyen differenciálható struktúrájához rendeltük hozzá, vagyis a konstrukció miatt nem várhatjuk el, hogy a differenciálható struktúra „alatt" fekvő topologikus információkból e csoportok számolhatók legyenek. Azonban mégis ez a helyzet, ez adja e csoportok jelentőségét.

A de Rham-csoportok kiszámítása

Az előző pontban megismerkedtünk a differenciálható sokaságokhoz rendelhető de Rham-csoportokkal, melyek a sokaság fölötti differenciálegyenletek megoldhatatlanságát mérik. Nyilván ez a tudás csak akkor ér valamit, ha ezeket a csoportokat könnyen ki tudjuk számolni.

Egy fontos eredmény ezzel kapcsolatban *Poincaré lemmája.* Jelölje $I \subset \mathbb{R}$ az $(0, 1)$ nyílt intervallumot. Ha M egy m dimenziós sokaság, akkor adódik egy természetes $\pi : M \times I \to M$ projekció, mely indukál egy

$$\pi^* : H^k(M) \longrightarrow H^k(M \times I), \quad (k = 0, 1, ..., m+1)$$

homomorfizmust a formák visszahúzása által.

4. Állítás. *A fenti* π^* *homomorfizmus egy izomorfizmus a megfelelő de Rham-csoportok között.* $\diamond$

Ennek az állításnak a bizonyítása is [12]-ben lelhető meg.

Következmények.

(i) $H^k(M)$ *diffeomorfizmus-invariáns, vagyis ha* $\varphi : M \to N$ *egy diffeomorfizmus, akkor az indukált* $\varphi^* : H^k(N) \to H^k(M)$ *egy izomorfizmus;*

(ii) (Poincaré lemmája) *Ha* $I^n \subset \mathbb{R}^n$ *jelöli az n dimenziós nyílt kockát, akkor* $H^k(I^n) = 0$, $(k = 1, ..., n)$. $\diamond$

Az (i) pont nyivánvaló, míg (ii)-höz a 4. állítás n-szeri alkalmazásával jutunk el.

Már a Poincaré-lemma is azt sejteti, hogy ezek a csoportok valójában nem érzékenyek az M-en adott differenciálható struktúrára, hanem esetleg az M még mélyebb, pusztán topologikus adataiból is kiszámolhatók. Emlékezzünk Rimányi Richárd előadásából a $H_i(X, \mathbb{Z})$ $(i = 0, 1, ...)$ $\mathbb{Z}$ *együtthatós szinguláris homológia-csoportok* konstrukciójára, melyek egy topologikus tér topologikus invariánsai, vagyis homeomorfizmus izomorfizmust indukál e csoportokon (valójában a $H_i(X, \mathbb{Z})$ csoportok csupán az X homotópia-osztályára érzékenyek). Definiáljuk az X topologikus tér *i-edik* $\mathbb{Z}$ *együtthatós szinguláris kohomológia-csoportját* a következőképpen:

$$H^i(X, \mathbb{Z}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_i(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

Nyilván ez is egy topologikus invariáns. Ekkor teljesül, hogy [15]:

1. Tétel (de Rham). *Ha M egy m dimenziós differenciálható sokaság, akkor az M k-adik szinguláris kohomológia-csoportja megegyezik az M k-adik de Rham-kohomológia-csoportjával, pontosabban léteznek az alábbi izomorfizmusok:*

$$H^k(M, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq H^k(M), \quad (k = 0, 1, ..., m). \diamond$$

Ennek alapján e csoportok meghatározását visszavezettük algebrai topológiai módszerek alkalmazására.

Egy egyszerű esetben bonyolult technikák nélkül is ki tudjuk számolni a kohomológia-csoportokat.

Lemma. $H^0(S^1) \simeq \mathbb{R}$, valamint $H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Először is vizsgáljuk a 0. kohomológiát. Mivel megállapodás alapján $\Omega^{-1}X = \emptyset$ minden X sokaságra, ezért $\mathrm{im}\, \mathrm{d}_{-1} = \{0\}$ szintén. Ezért $H^0(X) = \ker \mathrm{d}_0$. Mivel $\Omega^0 X$ az $f : X \to \mathbb{R}$ sima függvényekből áll, ezért a külső deriválás magjában a konstans függvények helyezkednek el, melyek azonosíthatóak $\mathbb{R}$-rel. Ennélfogva minden összefüggő X sokaságra $H^0(X) \simeq \mathbb{R}$ (figyelem, itt nem használtuk ki X kompaktságát!). Speciálisan $H^0(S^1) \simeq \mathbb{R}$.

Áttérve az 1. kohomológiára, legyen $\omega \in \Omega^1(S^1) = \ker \mathrm{d}_1$ (mivel minden 2-forma már zérus); ekkor $\omega = f(t)\mathrm{d}t$, $(0 \leq t < 2\pi)$. Definiáljuk az $I : \Omega^1(S^1) \to \mathbb{R}$ leképezést az alábbi integrállal:

$$\omega \mapsto I\omega := \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

Nyilván a leképezés lineáris és szürjekív, ennélfogva $\operatorname{im} I = \mathbb{R}$.

Legyen $\omega = \mathrm{d}g$ alakú, vagyis egzakt, ahol $g \in F(S^1) = \Omega^0(S^1)$, ekkor g nyilván periodikus $\mathbb{R}$-en, vagyis egy függvény S^1-en, melyre $g = f'$ teljesül. Ekkor

$$I\omega = \int_0^{2\pi} g'(t)\mathrm{d}t = [g(t)]_0^{2\pi} = 0.$$

Ha viszont $I\omega = 0$, akkor a

$$g(t) := \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

függvény periodikus, vagyis $g \in F(S^1)$, melyre $\omega = \mathrm{d}g$. Ez azt bizonyítja, hogy $\operatorname{im} \mathrm{d}_0 = \ker I$, vagyis

$$H^1(S^1) = \frac{\ker \mathrm{d}_1}{\operatorname{im} \mathrm{d}_0} = \frac{\Omega^1 S^1}{\ker I} \simeq \operatorname{im} I = \mathbb{R}. \quad \diamond$$

Általában az n dimenziós gömb kohomológiái ekképpen festenek [12]:

$$H^i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{ha } i = 0, n \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{IV.2.4}$$

A hátralevőkben megbeszéljük, hogyan kell formákat integrálni sokaságokon, ha már így előkerült az integrálás.

DIFFERENCIÁLFORMÁK INTEGRÁLÁSA

Az X topologikus tér *parakompakt*, ha X minden fedése finomítható lokálisan véges fedéssé (minden kompakt tér parakompakt). Igen gyakran egy M differenciálható sokaság definíciójába beleértik a parakompaktságot, mi is ezt tesszük. Legyen M egy, valamelyik fedésével kompatibilis, térképezése $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ (a korábbiakban a $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ leképezéseket az egyszerűség kedvéért $(x^1, ..., x^m)$-nel jelöltük, utalva arra, hogy a ϕ_α^{-1} homeomorfizmusokkal az $\mathbb{R}^n$ egy bázisát előre tolva lokális bázis adható meg U_α-n).

A parakompaktság miatt létezik egy *térképezéssel kompatibilis egységosztás* az M-en, vagyis olyan $\eta_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}_+$ sima függvények rendszere, hogy

(i) $\mathrm{supp}(\eta_\alpha) \subset U_\alpha$,

(ii) fönnáll, hogy minden $p \in M$ esetén

$$\sum_{\alpha \in I} \eta_\alpha(p) = 1.$$

Vegyük észre, hogy a parakompaktság miatt minden p-re véges sok tagot kell csupán összegezni.

Az M *irányítható* sokaság, ha érintőnyalábja ragasztó-leképezéseinek (ld. Rimányi-előadás) determinánsa pozitív.

Definíció. Legyen M egy m dimenziós irányítható sokasság, aminek egy térképezéssel kompatibilis egységosztása $\{(U_\alpha, \phi_\alpha, \eta_\alpha) \mid \alpha \in I\}$. Vegyünk továbbá egy $\omega \in \Omega^m M$ maximális rendű formát.

Az ω U_α*-n vett integráljá*nak nevezzük az

$$\int_{U_\alpha} \omega|_{U_\alpha} := \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} f(x^1, ..., x^m) \mathrm{d}x^1 ... \mathrm{d}x^m$$

integrált, ahol

$$(\phi_\alpha^{-1})^*(\omega|_{U_\alpha}) = f(x^1, ..., x^m) \mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^m;$$

az ω forma M*-re vett integrálja* pedig legyen

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in I} \int_{U_\alpha} \eta_\alpha \omega|_{U_\alpha}.$$

Megjegyzések. Jegyezzük meg jól, hogy egy k dimenziós sokaságon csak k-formák integrálását értelmeztük, kisebb formákat a sokaság megfelelő dimenziós részsokaságain integrálhatunk.

Továbbá lássuk tisztán azt is, hogy miért *formákat* integrálunk, és miért *irányítható* sokaságokon: jól ismert, hogyha egy integrálban koordináta-transzformációt hajtunk végre, akkor az integrandusban megjelenik a transzformáció Jacobi-determinánsának *abszolút értéke.* Viszont egy legnagyobb rendű forma (teljes antiszimmetrikussága révén) szintén a Jacobi-determinánssal transzformálódik. Ezért ha az integrált mint egy *forma* integrálját értelmezzük, akkor az integrál pl. az egyik koordináta-környezetről a másikra való áttéréshez tartozó transzformáció során éppen az integráloktól elvárt módon transzformálódik, ha a sokaság *irányítható.*

Definíció. Az M m dimenziós sokaságnak *határa van*, ill. *peremes*, ha létezik egy $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ fedése, s az I indexhalmaz egy J részhalmazára léteznek az $\phi_\beta : U_\beta \to \mathbb{R}^m_+ = \{(x^1, ..., x^m) \in \mathbb{R}^m \mid x^m \geq 0\}$ homeomorfizmusok ($\mathbb{R}^m_+$ az egyik félteret jelöli, $\beta \in J \subset I$). Azokat az $p \in M$ pontokat, melyekre $\phi_\alpha(p) \in \partial\mathbb{R}^m_+ = \mathbb{R}^{m-1}$, az M *határ-*, vagy *perempontjai*nak mondjuk.

Megjegyzések. Egyszerűen olyan objektumokra kell gondolnunk, melyeknek intuitivan is van határuk pl. egy körlap, tömör úszógumi, fagylaltgombóc, stb.

$M \setminus \partial M$ ellátható egy m dimenziós sokaság-struktúrával, míg ∂M egy $m-1$ dimenziós sokasággá tehető.

Sőt mi több, ha M irányítható és irányított, akkor ∂M is az, és örököl egy természetes irányítást M-ből: egyszerűen egy perempont fölötti irányított bázisból hagyjuk el azt a vektort, amelyik nincs $T_p\partial M$-ben és a maradék vektorok irányított bázist formálnak $T_p\partial M$-ben (amennyiben M egydimenziós, vagyis irányított szakaszokból áll, akkor a végpontokat úgy irányítjuk, hogy a kisebb paraméter-értékű végpontok legyenek negatív, a nagyobbak pedig pozitív irányításúak).

Kimondhatjuk az integrálás alaptételét [12], mely az összes, iskolában tanult integrálformula közös általánosítása, ezért is nevezik röviden *Stokes – Newton – Leibniz – Gauss – Osztrogradszkij – Green – Poincaré-tétel*nek. Egy $\omega \in \Omega^k M$ forma *kompakt tartójú*, ha az $\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\} \subset M$ halmaz kompakt.

2. Tétel. *Legyen M egy m dimenziós irányított peremes sokaság, $\omega \in \Omega^{m-1}M$ pedig egy kompakt tartójú differenciálforma. Ekkor fennáll:*

$$\int_{\partial M} \omega|_{\partial M} = \int_M \mathrm{d}\omega. \qquad \diamond$$

Bizonyítás *helyett* nézzük meg ezt a szép egyenlőséget az $M := [a, b] \subset \mathbb{R}$ speciális esetben. Ekkor $\partial M = \{a\} \cup \{b\}$, és a két pont irányítása ellentétes, a korábbiak alapján. Legyen az $\mathbb{R}$ irányítása a szokásos, vagyis „a pozitív irányba mutató”. A maximális forma a peremen egy $\omega = f$ függvény, tehát

$$\int_{\{a\}\cup\{b\}} \omega = f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} \mathrm{d}\omega = \int_a^b f'(x)\mathrm{d}x,$$

ami nem más, mint a Newton- Leibniz-formula.

3 Elektrodinamika – mágneses monopólusokkal

Most hozzákezdünk az elktrodinamika tárgyalásához, s ennek során nagy hasznát vesszük az előző fejezetben szerzett ismereteinknek.

FORMÁS ELEKTRODINAMIKA

Legyenek $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ legalább kétszer folytonosan differenciálható vektormezők; a forrásmentes *Maxwell-egyenletek* alakja ekkor:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{E}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \tag{IV.3.1}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\mathbf{B}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0. \tag{IV.3.2}$$

Itt a c egy konstans („fénysebesség"). Azonosítsuk az $\mathbb{R}^4$-et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$-mal a természetes $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (ct, x, y, z)$ megfeleltetéssel, s lássuk el az $g : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ szimmetrikus, bilineáris, ún. *Minkowski-formá*val, vagy *-metrikáv*al, melyet az

$$g(x, x') := -x_0 x'_0 + x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3$$

formula értelmez. Az (M, g) párt *relativisztikus téridő*nek nevezzük, ahol M egy négydimenziós valós vektortér. Képezzük az alábbi antiszimmetrikus mátrixot:

$$\mathbf{F} := (F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{IV.3.3}$$

és nevezzük el *elektromágneses térerősségtenzor*nak. $\mathbf{F}$-hez természetes módon rendelhetünk egy – ugyancsak $\mathbf{F}$-fel jelölt – 2-formát, vagyis $\Omega^2\mathbb{R}^4$ egy elemét:

$$\mathbf{F} = \sum_{i<j} F_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j =$$

$$= -c(E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}t + B_z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - B_y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + B_x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

Ekkor az $\mathbf{F}$ külső deriváltját képezve a következő csúnyaságok bukkannak elő:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial x}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + c\left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z +$$

$$+c\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + c\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Innen azonnal kiolvassuk, hogy a $\mathrm{d}\mathbf{F} = 0$ egyenlet pontosan megfelel az (IV.3.1) első egyenletcsoportnak.

A második egyenletcsoport leírásához be kell vezetnünk egy újabb operációt a formák terén, mely nagyon fontos lesz a későbbiekben is, az ún. *Hodge-operáció*t. A helyett, hogy ezt itt bevezetnénk teljes általánosságban – majd később tesszük meg, ld. „A Yang–Mills-elméletek matematikai alapjai" c. fejezetet – definiáljuk „operatívan", vagyis mondjuk azt, hogy a Hodge-operáció egy olyan $* : \Lambda^2\mathbb{R}^4 \to \Lambda^2\mathbb{R}^4$ lineáris leképezés, mely a $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ bázisán ekképpen hat:

$$\begin{aligned} *(\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1) &= -\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3, & *(\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3) &= \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1, \\ *(\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2) &= \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3, & *(\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3) &= -\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^2, \\ *(\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3) &= -\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2, & *(\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2) &= \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^3. \end{aligned} \tag{IV.3.4}$$

Ily módon egy $*\mathbf{F}$ 2-formát állítunk elő:

$$*\mathbf{F} = -c(B_x\mathrm{d}x + B_y\mathrm{d}y + B_z\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}t - E_z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + E_y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z - E_x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

melyről, az előző számolást egyszerűen utánozva, láthatjuk: a $\mathrm{d} * \mathbf{F} = 0$ egyenlet éppen a (IV.3.2) egyenletcsoport tömör alakja. Végeredményben a (forrásmentes) Maxwell-egyenletek igen tömör, ún. *relativisztikus alakja* így fest:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = 0, \quad \mathrm{d} * \mathbf{F} = 0. \tag{IV.3.5}$$

Megjegyezzük, hogy amennyiben adott egy $(\rho, \mathbf{j})$ forrás is egy ρ elektromos töltéssűrűséggel, valamint egy $\mathbf{j}$ elektromos árammal, akkor bevezetve a $\mathbf{j} := \rho\mathrm{d}t + j_x\mathrm{d}x + j_y\mathrm{d}y + j_z\mathrm{d}z$ négyesáram-1-formát, a forrásos egyenletek a következő alakot öltik valamilyen egységrendszerben:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = 0, \quad \mathrm{d} * \mathbf{F} = *\mathbf{j}.$$

(A $*\mathbf{j}$ jelentésével kapcsolatban ld. a Hodge-operáció általános értelmezését később, ill. a Matolcsi-előadás ide vonatkozó részeit!)

Ha meg szeretnénk oldani a (IV.3.5) egyenleteket, akkor nagy hasznát vesszük a képzetes értékű $\mathbf{A}$ *négyespotenciál-1-formá*nak , melyet a $-i\,\mathrm{d}\mathbf{A} := \mathbf{F}$ formula értelmez. Korábbi, de Rham-elméleti ismereteink alapján, e forma akkor létezik, ha

(i) $\mathbf{F}$ zárt: $\mathrm{d}\mathbf{F} = 0$ (szükségesség), de ez teljesül (IV.3.1)alapján,

(ii) valamint $\mathbf{F}$ egzakt: $\mathbf{F} = -i\,\mathrm{d}\mathbf{A}$ alakban írható. Ez teljesül, ha $H^2(\mathbb{R}^4) = 0$ (elegendőség), ami szintén igaz a 4. állításból kapott *Poincaré-lemma* miatt.

A térerősség ezek alapján az $\mathbf{A}(x) = A_i(x)\mathrm{d}x^i$ négyespotenciálból, ahol $A_k : \mathbb{R}^4 \to i\mathbb{R}$ sima függvények, ily módon nyerhető:

$$F_{jk} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j}\right). \tag{IV.3.6}$$

Ám most vegyük észre, hogy az $\mathbf{A}$ nem egyértelműen meghatározott egy rögzített $\mathbf{F}$ forma esetén! Ha $\chi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ egy valós értékű függvény, akkor az

$$\mathbf{A}' := \mathbf{A} + i\,\mathrm{d}\chi$$

vektorpotenciál *ugyanahhoz* az $\mathbf{F}$ térerősséghez tartozik. Bevezetve a $f := \exp(\chi) = \mathrm{e}^{i\chi}$ függvényt (ami tehát az $U(1) \cong S^1$ Lie-csoportban veszi föl értékét), ez úgy is írható, hogy

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + f^{-1}\mathrm{d}f. \qquad (\text{IV.3.7})$$

Az (IV.3.7) egyenletet *mérték-transzformáció*nak nevezzük. Ez a trafó a $\mathbf{F}$ térerősséget nem változtatja meg.

Vezessük be a $\delta := *\mathrm{d}*$ jelölést, s definiáljuk a

$$\triangle : \Omega^2\mathbb{R}^4 \to \Omega^2\mathbb{R}^4, \qquad \triangle := \mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d}$$

*Laplace-operátor*t (ellenőrizzük, hogy $\triangle$ lokálisan tényleg a jól ismert differenciál-operátort adja!). A (IV.3.5) egyenletekből látjuk, hogy az egyenletrendszert egy $\mathbf{A}$ megoldja, ha teljesül rá az

$$\mathrm{d} * \mathrm{d}\mathbf{A} = 0 \qquad (\text{IV.3.8})$$

differenciálegyenlet. Az $\mathbb{R}^4$-en mérték-transzformációkkal mindig elérhető, hogy az $\mathbf{A}$ teljesítse az ún. *Lorentz-mérték* feltételt:

$$\delta\mathbf{A} = \mathrm{d} * \mathbf{A} = 0.$$

Azonban ebben a mértékben az (IV.3.8) egyenlet a

$$\triangle\mathbf{A} = 0$$

alakot ölti, vagyis lokálisan

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_k}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_k}{\partial t^2} = 0 \quad (k = x, y, z, t)$$

formájú, aminek megoldásai a jól ismert, vákuumban c fénysebességgel száguldó elektromágneses hullámok.

A még hátralevő részben felírjuk az elektrodinamika *Lagrange-függvény*ét, mely invariáns a (IV.3.7) transzformációkkal szemben (természetesen a Lorentz-transzformációkkal szemben is), valamint Euler–Lagrange-egyenletei éppen a (IV.3.5) Maxwell-egyenletek. Emlékszünk, hogy a $\mathbf{F} \wedge *\mathbf{F}$ egy 4-forma, tehát beszélhetünk az $\mathbb{R}^4$-re vett integráljáról. Az

$$S(A) := \|\mathbf{F_A}\|^2 := -\frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathbf{F_A} \wedge *\mathbf{F_A} \qquad (\text{IV.3.9})$$

integrált az elektromágneses tér *Yang – Mills-funkcionál*jának, vagy fizikusan szólva *hatás*ának hívják az emberek.

Az elektrodinamika reprezentációja spinormezőkön

A relativisztikus elektromágneses térrel való megismerkedés után nem kerülhetjük el a találkozást a spinor-, vagy Dirac-, ill. elektron-pozitron mezőkkel sem.

Legyen V egy komplex kétdimenziós vektortér, melyen adott az $SL(2,\mathbb{C})$ csoport kanonikus hatása is (az $SL(2,\mathbb{C})$ csoportra úgy gondolunk, mint a Lorentz-csoport egységkomponensének univerzális fedőcsoportjára). Ekkor indukálódik egy természetes reprezentáció a $\overline{V}^*$ vektortéren is, a V komplex konjugáltjának (vonás) duálisán (csillag) is. Képezzük a $W := V \oplus \overline{V}^*$ komplex négydimenziós vektorteret, majd az $S := \mathbb{R}^4 \times W$ triviális vektornyalábot a téridő felett.

Definíció. Az S vektornyalábot *spinornyaláb*nak, $\psi \in \Gamma(S)$ sima szeléseit pedig *spinormező*knek hívjuk (*elektron-pozitron mező*, *Dirac-mező*).

Hogyan néz ki egy ilyen ψ szelés lokálisan? Írjuk $\psi(x) = (\xi(x), \overline{\eta}^*(x))$, $x \in \mathbb{R}^4$ alakban. Most operátorokat definiálunk a spinornyalábon:

(i) egy $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ sima függvényre legyen $T_f : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$, $T_f\psi := f\psi$ az f-fel szorzó operátor. Egy $\mathbb{R}^4$-beli bázis kiválasztása után legyen $\partial/\partial x^i : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ a

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\psi) := \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$$

differenciál-operátor. Ily módon, ha adott egy $\zeta = \zeta_i(x)\mathrm{d}x^i \in \Omega^1\mathbb{R}^4$ képzetes 1-forma $\mathbb{R}^4$-en, képezhetjük a

$$\nabla_i := \frac{\partial}{\partial x^i} + T_{\zeta_i} := \frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta_i$$

differenciál-operátort, hiszen $\zeta_k : \mathbb{R}^4 \to i\mathbb{R}$ sima függvények.

(ii) nyilván valamely rögzített $x \in \mathbb{R}^4$ esetén $T_x\mathbb{R}^4$-en hat az $SL(2,\mathbb{C})$ csoport mint a Lorentz-csoport egységkomponense (ill. ennek kétszeres fedése); ennélfogva indukálódik egy reprezentáció az $T_x\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{C}$ komplexifikált érintőtéren is. Könnyen ellenőrizhető, hogy – mint $SL(2,\mathbb{C})$-modulusok – fennáll: $T_x\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{C} \cong V_x^* \otimes V_x$. Válasszunk egy g-ortonormált bázist $T_x\mathbb{R}^4$-ben és jelöljük az elemeit $\partial/\partial x^i$-vel ($i = 0,1,2,3$). A $V_x^* \otimes V_x \cong \mathrm{Hom}(V_x, V_x)$ izomorfizmus figyelembe vételével a bázisvektorokhoz kanonikus módon $V_x \to V_x$ komplex-lineáris leképezések rendelhetők. E leképezéseket kiterjesztjük $\gamma^i(x) : W_x \to W_x$ komplex-lineáris leképezésekké, megkövetelve a

$$\gamma^i(x) \circ \gamma^j(x) + \gamma^j(x) \circ \gamma^i(x) = 2g^{ij}\,\mathrm{Id}$$

azonosság teljesülését (részletesebben ld. pl. [13]). Mivel $\mathrm{Hom}(W_x, W_x) \cong \mathbb{C}(4)$, ahol $\mathbb{C}(4)$ jelöli a 4×4-es komplex mátrixok algebráját, $\gamma^i(x)$-ek komplex mátrixokkal reprezentálhatók. Egy konkrét reprezentációt megadhatunk ekképpen:

$$\sigma^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

s ezekkel

$$\gamma^0(x) := i\sigma^0 \otimes \sigma^1, \quad \gamma^1(x) := \sigma^0 \otimes \sigma^2, \quad \gamma^2(x) := \sigma^1 \otimes \sigma^3, \quad \gamma^3(x) := \sigma^2 \otimes \sigma^3.$$

Végül, ha az $x \in \mathbb{R}^4$ változót futni hagyjuk, akkor a

$$\not{\partial}_\zeta := \sum_{j=0}^{3} \gamma^j \circ \nabla_j \; : \; \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S)$$

operátort pedig a ζ 1-formával *csavart Dirac-operátor*nak nevezzük.

Az előzőekben bevezettük $\mathrm{End}(\Gamma(S))$ két elemét. Mi közük ezeknek az elektrodinamikához? Legyen adott egy $\psi \in \Gamma(S)$ spinor, valamint egy $\mathbf{A} = A_i(x)\mathrm{d}x^i \in \Omega^1\mathbb{R}^4$ négyespotenciál-1-forma. Láttuk, hogy a vektorpotenciálok nem egyértelműek, az $f : \mathbb{R}^4 \to U(1)$ függvények az (IV.3.7) szabály szerint hatnak az összes vektorpotencálok $\mathcal{A}$ terén. Ezért a spinorok és a vektorpotenciálok elméletét egy közös leírássá gyúrhatjuk össze, ha megadjuk e függvények hatását az S nyalábon is. Az $U(1)$ – lévén kommutatív csoport – négy darab egydimenziós reprezentácó direkt összegével hat W-n, s e fibrumonkénti hatással az $f : \mathbb{R}^4 \to U(1)$ függvények is természetes módon hatnak S-en: $f\psi$ nem jelent mást, mint hogy $\psi(x)$ minden komponensét megszoroztuk egy $f(x)$ egységnyi komplex számmal minden $x \in \mathbb{R}^4$-re. Azt is mondhatjuk – reprezentációelméleti szempontból –, hogy az S spinornyalábon adott az $SL(2, \mathbb{C})$ csoport korábban bevezetett ábrázolása, valamint az elektrodinamikában szerepet játszó $U(1)$ csoporté. Fizikus nyelven szólva az S nyaláb ψ szelésein, a spinormezőkön, a „téridőszimmetriák” és a „belső szimmetriák” is reprezentálódnak.

Tekintsünk egy konkrét $\psi \in \Gamma(S)$ spinort, egy $\mathbf{A}$ vektorpotenciált, melyből legyártjuk a

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + A_i \tag{IV.3.10}$$

operátort, valamint egy $f : \mathbb{R}^4 \to U(1)$ mértéktrafót. Ekkor

$$\nabla_i(f\psi) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + A_i\right)(f\psi) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\psi + f\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + A_i\right)\psi =$$

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + A_i + f^{-1}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\psi =: f\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + A'_i\right)\psi = f(\nabla'_i\psi). \tag{IV.3.11}$$

Vegyük észre, hogy itt $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + f^{-1}\mathrm{d}f$, ami éppen (IV.3.7). A Dirac-operátor konstrukcióját tekintve innen azonnal látható, bevezetve az $\psi' := f^{-1}\psi$ jelölést, hogy

$$\partial\!\!\!/_{\mathbf{A}'}\,\psi' = f^{-1}(\partial\!\!\!/_{\mathbf{A}}\psi).$$

Szavakban: a transzformált Dirac-(spinor)-operátor hatása az transzformált spinoron felfogható, mint az eredeti operátor eredeti spinoron vett hatásának egy $U(1)$-beli elemmel vett elforgatottja. Ennélfogva spinorok segítségével „geometrizáltuk" az első pillantásra szokatlan (IV.3.7) szabadságot az elektrodinamikában. Leolvashatjuk azt is, hogy az ∇_i operátor és a ψ spinor mérték-transzformációra

$$\nabla_i' = f^{-1}\nabla_i f, \quad \psi' = f^{-1}\psi$$

módon változik, ami ∇_i esetén pontosan egy Lie-csoport saját Lie-algebráján való adjungált reprezentációjának felel meg, ami nem meglepő, hiszen az A_k-k, képzetesek lévén fölfoghatók, mint $i\mathbb{R} \cong \mathfrak{u}(1)$-beli függvények. Míg a ψ-n vett hatás nem más mint az $U(1)$ egy $\mathbb{C}^4$-en vett reprezentációja. *Tehát a mérték-transzormáció nem más, mint egy forgatás, de nem az téridőn, hanem a spinornyalábon, s nem a téridő szimmetria-csoportjával, $SL(2,\mathbb{C})$-vel, hanem az elektrodinamikai $U(1)$-gyel.*

A vektorpotenciált sikerült, hasonló transzformációs tulajdonságai révén, azonosítani a spinorokon ható ∇_i operátorokkal. Vajon van-e hasonló reprezentációja az $\mathbf{F}$ térerősség-2-formának? Tekintsük az $[\nabla_j, \nabla_k] : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ operátort. Egy spinoron kiértékelve látható, hogy

$$[\nabla_j, \nabla_k] := \nabla_j \circ \nabla_k - \nabla_k \circ \nabla_j = \frac{\partial A_j}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^j} = iF_{jk},$$

összevetve a (IV.3.6) kifejezéssel. Vagyis a térerősséget is tudjuk spinor-operátorként értelmezni (ami egy egyszerű szorzó-operátor).

Definiáljunk a $\Gamma(S)$ végtelen dimenziós komplex vektortéren egy $\langle\ ,\ \rangle : \Gamma(S) \times \Gamma(S) \to \mathbb{C}$ *Hermite-skalárszorzás*t ily módón: ha $\psi := (\xi, \overline{\eta}^*) \in \Gamma(S)$, valamint $\phi := (\alpha, \overline{\beta}^*) \in \Gamma(S)$, akkor

$$\langle \psi, \phi \rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^4} \left(\eta^*(\alpha) + \overline{\beta}^*(\overline{\xi}) \right) \mathbf{v}$$

($\mathbf{v}$ a térfogati forma, ld. később!) és jelölje $\mathcal{H}$ a $\langle\ ,\ \rangle$ szerint véges normájú szelések terének norma szerinti lezártját, ami nem lesz más, mint az összes L^2-integrálható szelések vektortere (emlékezzünk, $\Gamma(S)$ csak a sima szelésekből áll!). Ekkor $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ egy komplex, szeparábilis Hilbert-tér, melyre az előbb bevezetett operátorok természetes módon kiterjednek. Ennélfogva elmondhatjuk: az $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ algebra néhány elemét sikerült az imént realizálni.

A most bevezetett skalárszorzás alkalmat ad arra is, hogy papírra vessük a spinormezőkkel bővített elektrodinamika hatását:

$$S(\mathbf{A}, \psi) := \|\mathbf{F}_{\mathbf{A}}\|^2 + \langle (\partial\!\!\!/_{\mathbf{A}} + im)\psi\ ,\ \psi \rangle,$$

(m egy pozitív paraméter: „klasszikus elektrontömeg"). Természetesen ez a kifejezés invariáns a Lorentz-trafókon túl mérték-transzformációkra is:

$$\langle(\partial\!\!\!/_{\mathbf{A}'} + im)\psi' \,,\, \psi'\rangle = \langle f^{-1}(\partial\!\!\!/_{\mathbf{A}} + im)f(f^{-1}\psi) \,,\, f^{-1}\psi\rangle = \langle(\partial\!\!\!/_{\mathbf{A}} + im)\psi \,,\, \psi\rangle.$$

Összefoglalásképpen: látjuk, hogy az elektrodinamika alapmennyiségeit egy végtelen dimenziós komplex Hilbert-téren reprezentáltuk. A következő táblázatot állíthatjuk össze:

KLASSZIKUS ELEKTRODINAMIKA	REPREZENTÁCIÓ $\mathcal{H}$-N
$\mathbf{A} = A_i \mathrm{d}x^i$ négyespotenciál 1-forma	$\nabla_i \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ fotontér-operátor
$\mathbf{F} = F_{ij}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ térerősség 2-forma	$[\nabla_i, \nabla_j] \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ térerősség-operátor
—	$\partial\!\!\!/_{\mathbf{A}} \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ csavart Dirac-operátor
—	$\psi \in \mathcal{H}$ spinormező
$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + f^{-1}\mathrm{d}f$ mértéktrafó	$(\nabla_i, \psi) \mapsto (f^{-1}\nabla_i f \,,\, f^{-1}\psi)$ mértéktrafó

IV. 3. 1. Táblázat: Az elektrodinamika reprezentációja a spinormezők Hilbert-terén

A DIRAC-FÉLE MÁGNESES MONOPÓLUS

Most megvizsgáljuk, mi módon lehet az elektrodinamikába bevezetni ellentmondásmentesen a mágneses monopólusokat. De először is: miféle dolog az a mágneses monopólus?

Nyilvánvalóan valami olyasmit szertnének magunk előtt látni, mint ami az „elektromos monoplólus", vagyis a ponttöltés mágneses megfelelője. Ez azt jelenti, hogy egy nyugvó, sztatikus monopólush az $\mathbb{R}^3$-on a

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = g\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{IV.3.12}$$

mágneses, ill elektromos mezőket keltse. Itt $g \in \mathbb{R}$ a monopólus mágneses töltése. Azonban ezeket az egyenleteket behelyettesítve az (IV.3.1) egyenletekbe azonnal látjuk, hogy div $\mathbf{B} \neq 0$, ami kellemetlen, hiszen ekkor $\mathrm{d}\mathbf{F} \neq 0$ is fönnáll, s ennélfogva nem vezethető be az $\mathbf{A}$ vektorpotenciál, melynek legalább két hasznát láttuk: egyrészt a Maxwell-egyenletek megoldásában nélkülözhetetlen, másrészt az elektromágneses mező operátoros megjelenítésében fontos.

További bonyodalmakat okoz egy kohomologikus észrevétel. Ha a mágneses monopólus egy pont volna, akkor világvonala egy egyenes lenne, vagyis a téridőből egy egyenest kellene kihagynunk, s rajta kívül kellene a vektorpotenciál értelmes legyen (a klasszikus elektrodinamikában nem firtatjuk a mezők forrásainak szerkezetét, ezért őket szingularitásokként

kezeljük, a mezők regularitását a források világvonlának komplementerén követeljük meg). Azonban $H^2(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}) = H^2(S^2 \times \mathbb{R}^2) = H^2(S^2) = \mathbb{Z}$, homotópiák , ill. (IV.2.4) alkalmazásával. Ezért ha még valahogy el is tudjuk érni, hogy egy monopólusra $\mathrm{d}\mathbf{F} = 0$, nem nyilvanvaló, hogy $\mathbf{F}$ a nulla kohomológia-osztályt reprezentálja, vagyis $\mathbf{F} = -i\mathrm{d}\mathbf{A}$ írható.

A két problémát egyszerre oldjuk meg egy huszárvágással: legyen a mágneses monopólus egy olyan kiterjedt objektum, aminek K (esetleg sokdimenziós) „világlepedője" teljesíti a $H^2(\mathbb{R}^4 \setminus K) = 0$ feltételt. Kézenfekvő először egydimenziós „monopólussal" próbálkozni, vagyis keresett részecskénk egy pillanatban pl. egy $\mathbb{R}$ egyenessel, vagy egy S^1 körvonallal, stb. legyen homeomorf. Technikai okokból, melyek mindjárt kiderülnek alább, a legcélszerűbb azt feltennünk, hogy a monopólus egy $\mathbb{R}^+$ félegyenessel homeomorf, ahogy ezt *Dirac* is tette 1931-ben [3]. Ekkor egy sztatikus monopólus K világlepedője az $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ félsíkkal egyezik meg, ennélfogva $H^2(\mathbb{R}^4 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})) = H^2(\mathbb{R}^4) = 0$ vagyis a topologikus feltételek kedvezőek.

Egy sztatikus monopólus fekszik lelki szemeink előtt, mely fonálszerű egy adott pillanatban. Tegyük fel a világosság kedvéért, hogy a monopólus az origóban fekszik és belőle a szál egy félegyenes mentén távozik a végtelenbe. E rendszer ($\mathbf{B} \neq 0, \mathbf{E} = 0$) terére $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ kell teljesüljön. Azt szertnénk elérni, hogy az észlelt mező mégiscsak (IV.3.12) alakú legyen, vagyis az félegyenest ne lehessen „látni", csak a végét, ami egy pont. Képzeljük el, hogy a $\mathbf{B}$ tér ilyen alakú:

$$\mathbf{B} = g\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \mathbf{B}',$$

ahol a $\mathbf{B}'$ mágneses mező a szál járuláka, melyre $\operatorname{div} \mathbf{B}' \neq 0$. Szeretnénk, ha a $\mathbf{B}'$ tér nem volna mérhető, vagyis be volna zárva a szál „belsejébe". Erre van mód, ha a szálat egy nagyon vékony, áramjárta szolenoidnak képzeljük, melynek egyik vége a monopólust realizálja, a másik vége pedig a végtelenben van. Tudjuk elemi tanulmányainkból, ha a szolenoid nagyon vékony és nagyon hosszú, akkor a tekercs keltette mező egyre inkább annak belsejébe koncentrálódik, s ennélfogva a vége egy „igazi" mágneses monopólust reprezentál. Tehát megoldottuk az eredeti problémát, előállítottuk a (IV.3.12) mezőt, van vektorpotenciál is, s amit ezért fizettünk, az egy (klasszikusan) nem megfigyelhető szál, mely a monopólust a végtelennel köti össze.

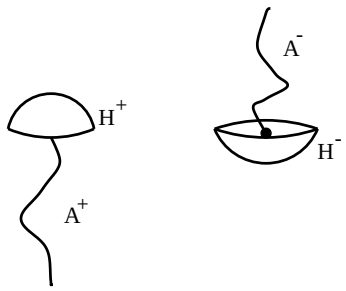
A szolenoid-modell csupán azt teljesíti, hogy a szál klasszikusan nem megfigyelhető (vagyis mágneses térerőssége zérus). Mi azonban azt szertnénk, ha a szál tényleg nem lenne a monopólus része, vagyis kvantummechanikailag is megfigyelhetetlen lenne (vagyis még a szál vektorpotenciálja sem gyakorolna hatást a környezetére pl. *Aharonov–Bohm-mechanizmus*sal). E célból megengedjük, hogy a szál *mérték-variáns* legyen, vagyis helyzete függjön a választott mértéktől (innentől a monopólust nem jól modellezi a vékony szolenoid), s kérdésünk az, milyen feltételeket ró ki a monopólusra, hogy a hozzá tartozó szál megfigyelhetetlen legyen. Kiderül, hogy ez éppen a *Dirac-féle kvantálási föltétel.*

A hátralevő részben levezetjük a Dirac-feltételt, s megmutatjuk, hogy emiatt mágneses monopólusok jelenlétében az elektromos töltés is kvantált. Helyezzünk egy nyugvó mág-

neses monopólust az $\mathbb{R}^3$ origójába és vegyük körül egy nyugvó S^2 gömbbel! Célunk a következő integrál meghatározása, mely a monopólus g mágneses töltését adja:

$$g = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \mathbf{F}.$$

Tegyük föl, hogy az elektromos tér forrásait egy $\psi \in \Gamma(S)$ spinormező reprezentálja. Azt, hogy a ψ mezőnek elektromos töltése van, az mutatja, hogy az elektrodinamika $U(1)$ csoportja szerint nem triviálisan transzformálódik. Vizsgáljuk az S nyaláb $S|_{S^2}$ megszorítását. Mivel a monopólusból szinguláris szál távozik a végtelenbe, ezért lesz egy pont a gömbfelszínen, ahol az $\mathbf{A}$ vektorpotenciál szinguláris, ami azt jelenti, hogy nincs egy teljes S^2-n jóldefiniált vektorpotenciál. Tehát a fentebbi integrál kiszámolásához legalább két mértéket kell választanunk. Vágjuk szét az S^2-t az egyenlítője mentén $H^\pm$ északi ill. déli féltekékre. Válsszunk először egy olyan $\mathbf{A}^+$ mértéket, amikor a szál a H^- déli féltekén megy át, s egy másik $\mathbf{A}^-$-t, amikor az H^+ északin (ld. 1. ábra!).



IV.1. ábra: Dirac-szál az $\mathbf{A}^\pm$ mértékekben

A két mértéket kösse össze egy $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mérték-transzformáció (a sztatikusság miatt feltehetjük, hogy χ független az időtől):

$$\mathbf{A}^- = \mathbf{A}^+ + i\mathrm{d}\chi.$$

Ekkor a spinorok transzformációja, mint láttuk:

$$\psi^- = \psi^+ \mathrm{e}^{-i\chi}.$$

A metszeten, $H^+ \cap H^- \cong S^1$-en, egy $\varphi = 0$ pontot kiválasztva kapjuk, hogy $\psi^-(0) = \psi^+(0)\mathrm{e}^{-i\chi(0)}$. Viszont körbehaladva egyszer az egyenlítő irányításával megegyező irányban s visszatérve ugyanabba a pontba adódik, hogy $\psi^-(2\pi) = \psi^+(2\pi)\mathrm{e}^{-i\chi(2\pi)}$. Tehát a konzisztencia miatt fenn kell álljon, hogy

$$\chi(0) - \chi(2\pi) = 2\pi n$$

valamilyen n egész számra. Ezt az eredményt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy bár az S nyaláb triviális $\mathbb{R}^4$ felett, $S|_{S^2}$ már nem lesz az, ha a gömb tartalmaz egy monopólust. A fentebbi integrál ekképpen számolható a Stokes-tétel felhasználásával:

$$g = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H^+} \mathrm{d}\mathbf{A}^+ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H^-} \mathrm{d}\mathbf{A}^- = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{H^+\cap H^-} (\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1} \mathrm{d}\chi = -\frac{\chi(2\pi)-\chi(0)}{2\pi} = n.$$

Megjegyezzük, az integrál az $\mathrm{e}^{i\chi}|_{H^+\cap H^-} : S^1 \to S^1$ leképezés *fokát* számolja, ami $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ egy elemével azonosítható; vagy ami ugyanaz, az $S|_{S^2}$ nyaláb *első Chern-osztályát*, ami $H^2(S^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ egy elemeként tekinthető (ld. még a „Karakterisztikus osztályok—dióhéjban" c. fejezetet alább). Tehát elektromosan töltött spinormező jelenlétében a g mágneses töltés kvantált.

Tekintsünk most egy origóban nyugvó elektromos töltést (mely valahogyan a ψ spinormezővel adott, ezt nem firtatjuk). Ekkor

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = q\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

teljesül. Ha körülvesszük a töltést egy nyugvó gömbbel, akkor elektromos töltése az alábbi integrállal adható meg:

$$q = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S^2} *\mathbf{F}.$$

Ezt az integrált visszavezethetjük a fentebbi mágneses integrálra, ha tekintjük az elektromos töltés teréből képzett komplex értékű

$$\mathbf{F}_{\mathbb{C}} = -c(E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z) \wedge \mathrm{d}t + iE_z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - iE_y\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + iE_x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

2-formát. Ez kielégíti az $*\mathbf{F}_{\mathbb{C}} = i\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ egyenletet és $*\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ integrálja továbbra is az elektromos töltést adja, míg $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}$ integrálja fölfogható, mint egy képzetes mágneses terű monopólus mágneses töltését számoló integrál. Ezért írhatjuk, hogy

$$q = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{S^2} \mathbf{F}_{\mathbb{C}} = \frac{k}{2}$$

valamilyen k egész számra.

Az eddigiek összeillesztésével adódik egy univerzális elektromos töltés létezése. Csakugyan, vegyük észre, fentebbi észrevételeink alapján elmondhatjuk, hogy *bármely* (q_k, g_l) elektromosan ill. mágnesesen töltött párra fönnáll, hogy létezik egy $n_{kl} \in \mathbb{Z}$, amelyre

$$\frac{2q_k g_l}{\hbar c} = n_{kl}.$$

Ez a *Dirac-féle kvantálási föltétel* (fermionokra, vagyis a mi esetünkben kulcs szerepet játszó spinorokra). A teljesség kedvéért a fizikai állandókat is pontosan feltüntettük. Legyen g_l

rögzített; ekkor a q_k töltés többszöröse az $\hbar c/(2g_l)$ töltésnek. Vegyük az így adódó n_{kl}-ek legnagyobb közös osztóját: n_{0l}. Ekkor fönnáll, hogy *minden* elektromos töltés az

$$\mathrm{e} := \mathrm{q}_0 = \frac{\hbar c}{2g_l} n_{0l}$$

elemi töltés egész számú többszöröse. Másként fogalmazva, *ha létezik legalább egy mágneses monopólus a természetben, akkor az elektromos töltés kvantált!* Teljesen hasonlóan adódik egy elemi g mágneses töltés létezése is. Az imént felvázolt elmélet szépsége ellenére napjainkig semmilyen kísérleti tény nem támasztja alá a mágneses monopólusok létezését [11].

Sajnos elhagyjuk az elektrodinamika meglepően érdekes világát, de csak azért, hogy még jobban a mélyére lássunk geometriai eredetének: megismerkedünk az elektrodinamika természetes általánosításaival, az ún. *Yang – Mills-elméletekkel.*

4 A Yang – Mills-elméletek matematikai alapjai

Térjünk rá a Yang – Mills-elméletek vizsgálatára! Megint csak annak érdekében, hogy gondolatmenetünk amennyire csak lehet, világos legyen, írjuk le pontosan kiváncsiságunk titokzatos tárgyát, az (M, g) pszeudo-Riemann-sokaság fölött megfogalmazott G Lie-csoporton alapuló Yang – Mills-elméletet. Ehhez azonban először mondjuk el, hogy mi is az a pszeudo-Riemann-sokaság.

Egy M differenciálható sokaság $(2,0)$-típusú tenzormezői közül tekinthetjük az $\vee^2 M \subset T^{(2,0)}M$ szimmetrikus tenzorok terét. Egy $g \in \Gamma(\vee^2 M)$ szelés ezek szerint egy $p \in M$ pontban egy szimmetrikus mátrixszal reprezentálható, amit írhatunk egy $(U, x^1, ..., x^m)$ térképen

$$g|_U = \sum_{1 \le i \le j \le m} g_{ij} \mathrm{d}x^i \vee \mathrm{d}x^j,$$

formában, ahol $\vee$ a tenzorok szimmetrizált szorzatát jelöli [8], vagy szokásosabban

$$g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

alakban. Tegyük föl, hogy e mátrix determinánsa minden pontban nemzérus. Ekkor az (M, g) párt *pszeudo-Riemann-sokaság*nak nevezzük, amennyiben a g-t reprezentáló mátrixok pozitív definitek is, akkor *Riemann-sokaság*ról beszélünk. Vegyük észre, hogy g megadásával minden pontban lehetővé tettük, hogy érintővektorok skalárszorzatát kiszámoljuk, s ezáltal *távolságfogalmat* értelmezzünk M-en. Ezért g-t *metrikán*ak nevezzük, s ez nem csak a most következőkben lesz fontos, hanem pl. az általános relativitáselméletnek is központi fogalma [14].

Most pedig bevezetjük a konnexiót, valamint ennek görbületi operátorát [4] segítségével egy principális ill. vektornyalábon, aztán definiáljuk egy általános pszeudo-Riemann-sokaságon a Yang – Mills-elméletet. Megismerkedünk a Yang – Mills-egyenletek véges hatású önduális vagy másnéven insztanton-megoldásaival.

Nyalábok, konnexiók

Legyen G egy Lie-csoport. Egy P principális G-nyaláb egy sima X sokaság fölött nem más, mint egy sokaság, ellátva egy sima (pl. jobboldali) G-hatással, melynek orbittere $P/G = X$. Megköveteljük, hogy a hatás lokális szorzat-struktúrával rendelkezzék, vagyis lokálisan ekvivalens legyen az $U \times G$-n adott természetes hatással, ahol U egy nyílt halmaz X-ben. Ily módon egy $\pi : P \to G$ fibrálást nyerünk, melynek struktúra-csoportja G.

Három lehetőség is kínálkozik a konnexió bevezetésére egy ilyen nyalábon:

(i) Mondhatjuk, hogy egy *konnexió* nem más, mint $H \subset TP$ fibrumokra transzverzális „horizontális alterek" megadása, vagyis minden $p \in P$ esetén adott egy felbontás:

$$TP_p = H_p \oplus T(\pi^{-1}(x)), \quad \pi(p) = x.$$

Megköveteljük, hogy a H altér-sereg invariáns legyen a G hatásával szemben.

(ii) Elképzelhetjük a konnexiót úgy is, mint egy olyan $\mathbf{A}$ 1-forma mezőt, mely értékeit a G csoport $\mathfrak{g}$ Lie-algebrájában veszi föl, vagyis egy szelése a P fölötti $T^*P \otimes \mathfrak{g}$ nyalábnak. Ismét kikötjük, hogy $\mathbf{A}$ invariáns legyen G-vel szemben, vagyis a $\mathfrak{g}$-n adott adjungált hatással és a P-n adott jobboldali hatással szemben.

(iii) Ha adott a G egy lineáris reprezentációja $\mathbb{C}^n$, vagy $\mathbb{R}^n$-en, akkor egy X fölötti n-rangú E vektornyalábot képezhetünk P-ből és az adott reprezentációból. E fibrumai a megfelelő vektorterek. Az eljárás visszefelé is működik, E-ből egy principális nyalábot tudunk rekonstruálni; az így kapott nyaláb struktúra-csoportja attól függ, hogy milyen struktúrákat hordozott az erdeti E vektornyaláb (pl. skalárszorzás, térfogati forma, stb.). Klasszikus Lie-csoportokra a principális- ill. a vektornyaláb-koncepció teljesen ekvivalensek. Példának okáért ha E egy n-rangú komplex vektornyaláb, akkor egy principális $GL(n, \mathbb{C})$-nyalábot nyerünk, ha tekintjük az E összes bázis-mezőjét, vagyis olyan szelés n-eseket, melyek egy adott $x \in X$ pontban páronként lineárisan függetlenek. Ekkor az x pont fölötti fibrum az E_x bázisaival azonosítható, s így nem más, mint a $GL(n, \mathbb{C})$ csoport.

Ha most adott egy E vektornyaláb, akkor egy konnexió definiálható, mint egy *kovariáns deriválás*, melyet a

$$\nabla : \Omega^0(X, E) \to \Omega^1(X, E)$$

lineáris leképezés ad meg. Ezentúl $\Omega^p(X, E)$ jelöli a $\Lambda^p T^* X \otimes E$ nyaláb sima szeléseit (E-értékű p-formák). ∇-ról megköveteljük, hogy teljesítse a *Leibniz-szabályt*:

$$\nabla(f \otimes s) := f\nabla s + \mathrm{d}f \otimes s,$$

az E minden s szelésére, s minden $f : X \to \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ függvényre. Ha adott egy $V \in TX$ érintő vektormező, akkor a

$$\nabla_{V_x} s(x) := \nabla s(x)(V_x) \in E_x, \quad x \in X$$

definícióval ∇ értelmezhető úgy, mint az s szelés V irányú deriváltja az x pontban. Ha netántán E-n további struktúrák is adottak, akkor kikötjük azt is, hogy ∇ legyen ezekkel is kompatiblis; pl. egy E-n adott $\langle\ ,\ \rangle$ skalárszorzás esetén

$$\nabla\langle s, t\rangle := \langle \nabla s, t\rangle + \langle t, \nabla s\rangle$$

teljesüljön (egy f függvényre $\nabla_V f := Vf$). Amennyiben ez teljesül egy, az (X, g) pszeudo-Riemann-sokaság TX érintőnyalábján adott, torziómentes konnexióra, ezt *Levi–Civitá-kovariáns deriválás*nak mondjuk (sőt ez egyértelmű is).

A három definícó ekvivalenciája könnyen látható: (ii)-ből adódik (i), ha a $H_p := \ker \mathbf{A}_p$ meghatározással élünk; (iii)-ból az (i) képre térhetünk át, ha észrevesszük, hogy ∇ egy *lokális* operátor, vagyis ha egy U nyílt halmazon $s_1 = s_2$, akkor $\nabla s_1 = \nabla s_2$ is fönnáll U-n; ez könnyen látható Leibniz-szabályt alkalmazva egy ϕs szelésre, ahol ϕ egy levágófüggvény. Azt mondjuk, hogy az $\{s_1, ..., s_n\}$, páronként lineárisan független szelések *horizontálisak x-ben*, ha $\nabla s_i = 0$ teljesül rájuk x-ben. Vegyük észre, hogy $\{s_1, ..., s_n\}$ egy bázis-szelés, vagyis a megfelelő P principális $GL(n, \mathbb{C})$ nyaláb egy σ szelésével azonosítható. E σ szelés egy $U \subset X$ nyílt halmaz fölötti képének, mint $U \times GL(n, \mathbb{C})$ részsokaságának az érintőnyalábját véve kapjuk a keresett $H|_U \subset T(U \times GL(n, \mathbb{C}))$ konnexiót bármely U környezeten.

Könnyen látható, hogy ezek az azonosítások visszafelé is működnek, bizonyítván a meghatározások ekvivalenciáját.

A továbbiakban mi a vektornyalábos meghatározást fogjuk használni. Mielőtt továbblépnénk, említsük meg a konnexiók néhány tulajdonságát. Először, az $X \times \mathbb{C}^n$ triviális vektornyalábon létezik egy standard szorzat-konnexió, ami nem más mint a vektor értékű függvények közönséges parciális deriválása. Másodszor, a kovariáns deriválás egy kovariáns objektum, vagyis ha $\varphi : X \to Y$ egy sima leképezés, $\mathbf{A}$ egy konnexió az Y fölötti F vektornyalábon, akkor $\varphi^*(\mathbf{A})$ is konnexió az X fölötti $\varphi^*(F)$ nyalábon. Harmadszor, a konnexió felfogható, mint vektorok párhuzamos eltolása a konnexióval ellátott E nyalábon: ha $\gamma : [0, 1] \to X$ egy sima görbe x, y végpontokkal, valamint adott az E_x egy p bázisa, akkor ezt a bázist a P principális nyaláb egy pontjának tekintve a γ görbét egyértelműen föl tudjuk emelni egy p kezdőpontú $\tilde{\gamma}$ *horizontális* görbévé P-n, mely teljesíti, hogy $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ és $t \in [0, 1]$ esetén $\dot{\tilde{\gamma}}(t) \in H_p$, ahol $\pi(p) = \gamma(t)$. E horizontális görbe $\tilde{\gamma}(1)$ végpontja a P y

fölötti fibrumának egy pontja, másnéven az E_y vektortér egy bázisa. Ezzel a konstrukcióval egy Π_γ leképezést adtunk meg, ami E_x egy bázisát E_y egy bázisába viszi, s ezáltal egy

$$\Pi_\gamma : E_x \longrightarrow E_y \tag{IV.4.1}$$

lineáris leképezést definiál. Ezzel a konstrukcióval – csakis a teljesség kedvéért említjük meg – ismét megkaphatjuk a vektornyalábon a H-hoz tartozó ∇ kovariáns deriváltat: a $V := \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}X$ érintővektort bevezetve tekintsük egy $s(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t)}$ vektor $\Pi_\gamma s$ párhuzamos eltoltját, valamint egy tetszőleges s eltoltját a $\gamma(t+\varepsilon)$ helyen; ekkor

$$\nabla_{V_{\gamma(t)}} s(\gamma(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{s(\gamma(t+\varepsilon)) - \Pi_\gamma s(t+\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Végül arra hívjuk fel az Olvasó figyelmét, hogy egy adott nyaláb esetén $\mathcal{A}$, az összes konnexiók tere, ellátható egy végtelen dimenziós, $\Omega^1(X, \mathfrak{g})$ fölötti affin tér struktúrával: $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in \mathcal{A}$, akkor $\mathbf{A} - \mathbf{A}' \in \Omega^1(X, \mathfrak{g})$.

Most vizsgáljuk meg a konnexiókat lokálisan, vagyis egy adott $\tau : E|_U \to U \times \mathbb{C}^n$ trivializáció esetén! Ekkor $\mathbf{A}$ összehasonlítható a $\tau^*(\Theta)$ triviális konnexióval. Ezen a lokális térképen

$$\nabla_{\mathbf{A}} = \mathrm{d} + \mathbf{A}_\tau, \tag{IV.4.2}$$

ahol d a külső deriválás, $\mathbf{A}_\tau$ pedig az adott trivializációhoz tartozó konnexióforma (a τ-t a továbbiakban nem írjuk ki), vagyis egy $\mathrm{End}(E)$ értékű 1-forma (1-formák mátrixa). Világos, ha az E szeléseit lokálisan oszlopvektoroknak fogjuk föl, akkor d parciális deriválásokkal, $\mathbf{A}$ pedig lineáris transzformációkkal hat ezeken. Ily módon pl. az x_i irányba ható kovariáns deriválás

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + A_i \tag{IV.4.3}$$

lesz. Azonnal fölismerjük (IV.3.10) és (IV.4.3) hasonlóságát, egyetlen különbség az, hogy most az A_i-k mátrix értékű függvények, ami annak felel meg, hogy ezúttal egy általános Lie-csoport algebrájával van dolgunk. Bár az lokális $\mathbf{A}$-k kiválóan leírják a konnexiót, fontos hangsúlyozni, hogy konkrét alakjuk függ a válsztott τ trivializációtól. Acélból, hogy ezt megértsük, vegyünk szemügyre egy $g : E \to E$ nyaláb-automorfizmust, mely az X bázissokaságra megszorítva az identitás, vagyis „minden fibrumot önmagába képez". Az ilyen $g : X \to G$ függvényekkel reprezentálható transzformációk összességét $\mathcal{G}$-vel jelöljük és *mértékcsoport*nak hívjuk (ui. belátható, hogy $\mathcal{G}$ ellátható egy végtelen dimenziós Lie-csoport struktúrával), egy efféle g transzformációt pedig *mérték-transzformáció*nak. Jegyezzük meg hát, hogy egy mérték-transzformáció eszerint nem más, mint az E vektornyalábon egy másik bázisra (pontosabban bázis-mezőre) való áttérés.

Lévén, hogy a konnexió egy Lie-algebra értékű 1-forma, s egy Lie-csoport a saját Lie-algebráján adjungálással hat természetes módon, ezért azt követeljük meg, hogy $\mathcal{G}$ a konnexiók $\mathcal{A}$ terén a következő szabállyal hasson (vö. (IV.3.11)):

$$\nabla_{g(\mathbf{A})} s := g^{-1} \nabla_{\mathbf{A}}(gs), \quad s \in \Omega^0(X, E).$$

Ezért egy $(U, x^1, ..., x^m)$ térképen írhatjuk:

$$g^{-1}\nabla_i(gs) = g^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + A_i\right)(gs) = \frac{\partial s}{\partial x^i} + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^i}s + (g^{-1}A_i g)s =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + g^{-1}A_i g + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x^i}\right)s.$$

Tehát, áttérve egy másik $\tau' = g\tau$ lokális trivializációra, azt kapjuk, hogy

$$\nabla_{g(\mathbf{A})} = \mathrm{d} + \mathbf{A}_{g\tau}$$

ahol

$$\mathbf{A}_{g\tau} = g^{-1}\mathbf{A}_\tau g + g^{-1}\mathrm{d}g. \qquad (\text{IV.4.4})$$

Vagyis $\mathbf{A}_\tau$ és $\mathbf{A}_{g\tau}$ különböző konnexió-mátrixok, melyek ugyanazt a kovariáns deriválást reprezentálják lokálisan. Ismét, az analógia (IV.3.7) és (IV.4.4) közt szembeszökő. Egy τ nyaláb-trivializálást fizikus terminológiával *mértékválasztás*nak is neveznek.

A jó mérték megválasztása igen-igen megkönnyíti konkrét feladatok megoldását.

A GÖRBÜLET

Most ismerkedjünk meg a görbület fogalmával, mely szorosan kapcsolódik a konnexióhoz.

Definiáljuk a következő leképezéseket:

$$\Omega^0(X,E) \xrightarrow{\mathrm{d}_\mathbf{A}} \Omega^1(X,E) \xrightarrow{\mathrm{d}_\mathbf{A}} \Omega^2(X,E) \xrightarrow{\mathrm{d}_\mathbf{A}} ...$$

Ezeket egyértelműen megadhatjuk az alábbi két kikötéssel:

(i) $\mathrm{d}_\mathbf{A} := \nabla_\mathbf{A} : \Omega^0(X,E) \longrightarrow \Omega^1(X,E)$, valamint

(ii) $\mathrm{d}_\mathbf{A}(\omega \wedge \theta) := (\mathrm{d}_\mathbf{A}\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge \mathrm{d}\theta, \quad \omega \in \Omega^p(X,E), \ \theta \in \Omega^q(X).$

(A kovariáns deriváltat mind $\mathrm{d}_\mathbf{A}$-val, mind $\nabla_\mathbf{A}$-val szokás jelölni.) Ellentétben a külső deriválással, általában *nem* teljesül, hogy $\mathrm{d}_\mathbf{A} \circ \mathrm{d}_\mathbf{A} = 0$. Ellenkezőleg, a Leibniz-szabály segítségével könnyedén látható, hogy ez a kompozíció kommutál a sima függvényekkel való szorzással. Az $\mathbf{F}_\mathbf{A} := \mathrm{d}_\mathbf{A} \circ \mathrm{d}_\mathbf{A}$ operátort a konnexió *görbületi operátor*ának nevezzük. Hogy néz ki egy lokális térképen a görbületi forma? Az $\mathrm{d}_\mathbf{A} \circ \mathrm{d}_\mathbf{A}$ kifejezést egy s szelésre hattatva azonnal adódik az $\mathbf{F}_\mathbf{A}$ lokális alakja (*Cartan-egyenlet*):

$$\mathbf{F}_{\mathbf{A}_\tau} = \mathrm{d}\mathbf{A}_\tau + \mathbf{A}_\tau \wedge \mathbf{A}_\tau, \qquad (\text{IV.4.5})$$

ahol a $\psi = \omega \otimes B \in \Omega^p(X, \mathfrak{g}) = \Gamma(\Lambda^p T^* X \otimes \mathfrak{g})$ fajtájú formákra $\psi \wedge \psi' := \omega \wedge \omega' \otimes [B, B']$. Tehát lokálisan a görbületi operátor egy 2-formákból álló mátrix. Megmutatható, hogy a görbületi formát két, $V, W \in \Gamma(TX)$ vektormezőn kiértékelve teljesül:

$$\mathbf{F}(V, W) = [\nabla_V, \nabla_W] - \nabla_{[V,W]}.$$

Innen adódik egy komponens lokális alakja valamely bázisban:

$$F_{ij} := \mathbf{F}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = [\nabla_i, \nabla_j] = \left[\frac{\partial}{\partial x^i} + A_i, \frac{\partial}{\partial x^j} + A_j\right] =$$

$$= \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} + [A_i, A_j].$$

Ismét látjuk, hogy ez a formula is az elektrodinamikai térerősség nem kommutatív általánosítása. Hangsúlyozzuk, hogy ezek a formulák, bár a figyelmeztető τ betűcskét nem írtuk ki, csupán egy adott trivializációban érvényesek. Áttérve a $g\tau$ bázisra, (IV.4.4)-öt beírva (IV.4.5)-ba, megkapjuk a görbület mérték-transzformációját:

$$\mathbf{F}_{g(\mathbf{A})} = g\mathbf{F}_{\mathbf{A}} g^{-1}. \qquad (\text{IV.4.6})$$

Nehézség nélkül látjuk, hogy a görbület tenzorként transzformálódik; amennyiben az E nyaláb G struktúracsoportja *kommutatív*, akkor $\mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ mérték-invariáns (ahogy az elektrodinamikában), általában pedig az ún. *lapos* konnexiók görbületei maradnak invariánsan $\mathcal{G}$-vel szemben, vagyis melyekre $\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0$.

Végül fölvetődhet a kérdés, hogy miért is hívják a most bevezetett operátort görbületnek. Tekintsük az $(U, x^1, ..., x^m)$ koordináta-környezetben, melynek $(0, 0, ..., 0)$ közepében az x pont áll, azt a kicsi $(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$ érintővektorok irányába mutató paralelogrammát az x pont körül, melynek sarkai $(0, 0)$, $(\varepsilon, 0)$, $(0, \varepsilon)$, $(\varepsilon, \varepsilon)$ valamilyen kis $\varepsilon > 0$ számra. Jelölje $T_{ij}(\varepsilon)$ annak a párhuzamos eltolásnak az eredményét, melyet e kis négyzet mentén hajtunk végre a $\partial/\partial x^i$ irányba indulva; ez (IV.4.1) értelmében egy $E_x \to E_x$ lineáris leképezés. Néhány oldalnyi papír teleírásával megmutatható, hogy

$$T_{ij}(\varepsilon) = \mathrm{Id} + F_{ij}(x)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4), \quad \text{amint } \varepsilon \to 0.$$

Magyarán szólva, a görbületi operátor kicsi négyzetek mentén párhuzamosan körbevitt vektorok „elfordulását” méri.

Végül jegyezzük meg, hogy a görbületi operátor kielégíti az ún. *Bianchi-azonosság*ot, mint ahogy azt az egy kis számolástól vissza nem rettenő Olvasó könnyen ellenőrizheti:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{A}} \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0. \qquad (\text{IV.4.7})$$

A YANG – MILLS-FUNKCIONÁL

Elérkezett a pillanat, hogy megismerkedjünk a Yang – Mills-elméletek központi fogalmával, amit *Yang – Mills-funkcionál*nak, vagy fizikusan szólva *hatás*nak hívnak az emberek. Egy irányított (X, g) m-dimenziós pszeudo-Riemann sokaságon fontos művelet az ún. *Hodge-operáció.* Emlékezzünk, hogy az X-en adott metrika (skaláris szorzás) kiterjed az X fölötti formák terén értelmezett skalárszorzássá is természetes módon, miáltal a formák indexeit „föl-le húzogathatjuk". $\alpha, \beta \in \Omega^p X$ esetén jelölje ezt (α, β). Legyen

$$* \,:\, \Omega^p X \longrightarrow \Omega^{m-p} X$$

az a leképezés, melyet a

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta)\mathbf{v}$$

formula értelmez, ahol $\mathbf{v} \in \Omega^m X$ az (X, g) sokaságon értelmezett *térfogati forma*, melyet, mint maximális rendű formát úgy értelmezünk, hogy egy g szerinti ortonormált bázison értéke legyen 1. Innen a $\mathbf{v}$ lokális alakjára egy $(U, x^1, ..., x^m)$ térképen

$$\mathbf{v}|_U = \sqrt{|\det\, g|}\, \mathrm{d}x^1 \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^m$$

adódik. Ezt a meghatározást használva látható, hogy amennyiben $\mathbf{1}$ jelöli a konstans 1 értékű függvényt a sokaságon, akkor $*\mathbf{1} = \mathbf{v}$ teljesül. A Hodge-operáció definícióját aprópénzre válthatjuk, ha megjegyezzük, hogy lokálisan $*$ imígyen hat egy p-formán:

$$(*\beta)_{j_{p+1}...j_m} = \frac{1}{p!}\sqrt{|\det\, g|}\, \beta^{j_1...j_p} \varepsilon_{j_1...j_p j_{p+1}...j_m},$$

ahol ε a Levi – Civitá-tenzor, melyre $\varepsilon_{12...m} = 1$ és $\mathbf{v}(\partial/\partial x^1, ..., \partial/\partial x^m) > 0$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$*^2 = (-1)^{\mathbf{sign}(g)}(-1)^{p(m-p)}\mathrm{Id}, \qquad \text{(IV.4.8)}$$

ahol is **sign** jelöli a metrika *szignatúráját*. Tegyük most föl, hogy sokaságunk egy négydimenziós *Riemann*-sokaság. Látható, hogy ekkor $*$ a *valós* 2-formák terét önmagába képezi. Továbbá Ω^2-n $*$ sajátértékei ± 1, melyek szerint adódik egy

$$\Omega^2 X = \Omega^+ X \oplus \Omega^- X$$

sajátaltér-felbontás. Az Ω^+-ba ill. az Ω^--ba tartozó 2-formákat értelemszerűen *önduális* ill. *anti-önduális formák*nak nevezzük. Könnyen látható, hogy ez a dekompozíció konform-invariáns, vagyis csak a $*$ megadásához szükséges metrika konform-osztályától függ, valamint az öndualitás ill. az anti-öndualitás fogalmai fölcserélődnek, ha a sokaság irányítását megfordítjuk. Ellenőrizhető, hogy

$$\alpha \wedge \alpha = \pm|\alpha|^2\mathbf{v}, \quad \alpha \in \Omega^\pm X.$$

Látjuk, hogy egy négydimenziós Lorentz-sokaság esetén $*$ sajátértékei (IV.4.8) alapján $\pm i$, ezért most csupán a *komplex* 2-formák, vagyis $\Omega^2 X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} =: \Omega^2_{\mathbb{C}} X$ invarianciájáról beszélhetünk. Ekkor is értelmezhető a megfelelő

$$\Omega^2_{\mathbb{C}} X = \Omega^+_{\mathbb{C}} X \oplus \Omega^-_{\mathbb{C}} X$$

hasítás, ahol most értelemszerűen a $\pm i$-hez tartozó saját-formákról kell beszélnünk.

Ezek után, ha adott egy négydimenziós (X, g) pszeudo-Riemann-sokaság fölött egy $\mathbf{A}$ konnexióval ellátott E komplex vektornyaláb, akkor képezhetjük az ehhez tartozó $\mathbf{F_A}$ görbületi 2-formát, mely a $\mathfrak{g}$-ben, a nyaláb struktúra-csoportjának Lie-algebrájában veszi föl értékét; ez feljogosít minket arra, hogy képezzük e forma nyomát, s bevezethetjük a Lie-algebra értékű p-formák terén az

$$(\Phi, \Psi) := -\frac{1}{8\pi^2} \int_X \mathrm{tr}(\Phi \wedge *\Psi)$$

skalárszorzást ill. az eszerinti $\| \cdot \|$ normát.

Definíció. Az

$$S(\mathbf{A}) := \|\mathbf{F_A}\|^2 = -\frac{1}{8\pi^2} \int_X \mathrm{tr}(\mathbf{F_A} \wedge *\mathbf{F_A}) \qquad (\text{IV.4.9})$$

$\mathcal{A} \to \mathbb{R}$ leképezést *Yang – Mills-funkcionál*nak nevezzük, az (X, g, G, S) négyest pedig az (X, g) *pszeudo-Riemann sokaság fölött értelmezett G Lie-csoporton alapuló Yang – Mills-elmélet*nek.

Az S tehát nem más, mint egy L^2-norma az $\mathcal{A}$ téren és pozitív definit, ha az E nyaláb struktúra-csoportja egy kompakt Lie-csoport. Bevezetve a $|\mathbf{F_A}|^2 := -\mathrm{tr}(\mathbf{F_A} \wedge *\mathbf{F_A})$ jelölést a Yang – Mills-funkcionál imígyen is írható:

$$S(\mathbf{A}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_X |\mathbf{F_A}|^2.$$

Tartsuk szem előtt, hogy a Yang – Mills-funkcionálban szereplő $*$-operáció miatt a Yang – Mills-funkcionál értéke nem csupán a válsztott A konnexiótól, hanem az X sokaságon adott g metrikától is függ, tehát precízebb lett volna az $S(\mathbf{A}, g)$ jelölés. Pontosabban, négy dimenzióban a következőket mondhatjuk: ha az (X, g) Riemann-sokaság metrikáját átskálázzuk egy f^2 függvénnyel, akkor a d dimenziós Yang – Mills-funkcionál az $\int f^{d-4} |\mathbf{F_A}|^2$ formula szerint transzformálódik, amiből kiolvassuk, hogy a kifejezés négy dimenzióban csakis a választott metrika konform-osztályától függ.

KARAKTERISZTIKUS OSZTÁLYOK — DIÓHÉJBAN

Most pedig fordítsuk figyelmünket a vektornyalábok elméletének egyik szemkápráztató fogalma, a *karakterisztikus osztály*ok felé. E témához klasszikus bevezető mű [9]. Ebben a kis bevezetésben mi csak sima vektornyalábokkal foglalkozunk, ezért a karakterisztikus osztályok ún. *Chern – Weil* reprezentációja érdekel bennünket.

A jobb érthetőség kedvéért először tekintsünk egy L komplex, hermitikus vonalnyalábot egy X kompakt sokaság fölött! Ekkor, mivel az $U(1)$ csoport Lie-algebrája a képzetes számokkal azonosítható, ezért egy L-en adott $\mathbf{A}$ konnexió görbületi formája egy tisztán képzetes 2-forma, melyet irjunk $-2\pi i\phi$ alakban. Ekkor ϕ valós 2-forma, mely a (IV.4.7) Bianchi-azonosság miatt zárt, ennélfogva egy $[\phi] \in H^2(X)$ de Rham kohomológia-elemet határoz meg. Tekintsünk egy másik $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + a$ konnexiót a vektornyalábon: ekkor $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathrm{d}a$, ezért $[\phi'] = [\phi]$, vagyis egy olyan kohomológia-osztályt találtunk, amely független a konnexió válsztásától, csakis az L nyalábra jellemző, ezért is nevezik *karakterisztikus* (kohomológia-) *osztály*nak. Speciálisan ezt a kohomológia-osztályt *első Chern-osztály*nak hívják és $c_1(L)$-lel jelölik (ez pontosan a korábban bevezetett monopólustöltés). Jól ismert, hogy az első Chern-osztály osztályozza egy X sokaság fölött a komplex vonalnyalábokat. Általában, egy n rangú E komplex vektornyaláb első Chern-osztályát reprezentálja az $(i/2\pi)\mathrm{tr}(\mathbf{F_A})$ forma. Vegyük észre, hogy $\mathbf{F_A}$ sajátérték-2-formái segítségével ez $\lambda_1 + ... + \lambda_n$ alakban írható, ami nem más, mint az első n-változós, elemi szimmetrikus polinom, σ_1. Ezért egy n rangú E komplex vektornyaláb magasabb Chern-osztályait a görbületi formából gyártott további σ_i $(i = 1, ..., n)$ elemi szimmetrikus polinomokkkal adjuk meg. Belátható, hogy az így reprezentált formák megint csak olyan osztályokat realizálnak a $H^{2i}(X)$ de Rham kohomológia-csoportokban, melyek függetlenek a konkrét konnexiótól, magára az E vektornyalábra jellemzőek. Ezeket a kohomológia-osztályokat nevezzük Chern-osztályoknak. Vizsgáljuk meg, hogy mi a helyzet ebből a szempontból a $\mathrm{tr}(\mathbf{F_A} \wedge \mathbf{F_A})$ formával! Meggyőződhetünk arról, hogy ez a forma zárt, vagyis egy kohomológia-osztályt reprezentál $H^4(X)$-ben. Továbbá az adott konnexiótól sem függ, vagyis ez egy karakterisztikus osztály. Valóban,

$$\mathrm{tr}(\mathbf{F}_{\mathbf{A}+a} \wedge \mathbf{F}_{\mathbf{A}+a}) - \mathrm{tr}(\mathbf{F_A} \wedge \mathbf{F_A}) = \mathrm{d}\left(\mathrm{tr}(a \wedge \mathrm{d}_{\mathbf{A}} a + \frac{2}{3} a \wedge a \wedge a)\right),$$

vagyis a különbség egy zárt forma csupán, ami de Rham-elmélti szempontból lényegtelen. Felhasználva a

$$\lambda_1^2 + ... + \lambda_n^2 = (\lambda_1 + ... + \lambda_n)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + ... + \lambda_{n-1}\lambda_n) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

azonosságot, azt kapjuk, hogy ez a karakterisztikus osztály a Chern-osztályokkal ekképpen fejezhető ki:

$$\left[\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}(\mathbf{F_A} \wedge \mathbf{F_A})\right] = \frac{1}{2}c_1(E) \wedge c_1(E) - c_2(E) \in H^4(X).$$

Általában a fizikában $SU(n)$-nyalábokkal találkozunk, ekkor – mivel a speciális unitér csoportok Lie-algebráit nyomtalan mátrixok alkotják – $c_1(E) = 0$, vagyis formánk pusztán a második Chern-osztályt jeleníti meg, mely egy kompakt, határok nélküli, irányított négysokaság esetén egy egész szám:

$$C_2(E) = (\mathbf{F_A}, *\mathbf{F_A}) = -\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_X \mathrm{tr}(\mathbf{F_A}\wedge\mathbf{F_A}) \in \mathbb{Z}. \qquad (\text{IV.4.10})$$

Érdemes e kifejezést összevetnünk a (IV.4.9) Yang–Mills-funkcionállal, láthatóan a különbség „csak" egy csillag, viszont ez a (IV.4.10) integrált az E vektornyaláb *topologikus invariánsává* avatja, vagyis értéke nem függ a választott konnexió, az X sokaságon adott metrika, stb. konkrét formájától.

Mielőtt tovább lépnénk, említsük meg a most levezetett formula egy másik alakját az $X = S^4$, $G = SU(2)$ esetben. Tekintsük a négydimenziós gömb $S^4 = H^+ \cup H^-$ fölbontását, ahol $H^\pm$ jelöli az északi ill. a déli féltekéket. Egy kis számolással beláthatjuk, hogy $H^\pm$-on fennáll:

$$\mathrm{tr}(\mathbf{F_A}\wedge\mathbf{F_A}) = \mathrm{d}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{F_A}\wedge\mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathbf{A}\wedge\mathbf{A}\wedge\mathbf{A}\right).$$

Vegyük észre, hogy ez a formula csak lokálisan értelmes, mert benne szerepel az $\mathbf{A}$ konnexióforma, mely csak lokálisan létező kifejezés. Mivel az $\mathbf{A}$ konnexió egy nem triviális vektornyalábon adott, ezért az egyes $H^\pm$ koordináta-környezetekben más-más trivializációkat kell választanunk. Tegyük föl, hogy H^+-on az $\mathbf{A}_\tau$, $\mathbf{F}_{\mathbf{A}_\tau}$, míg H^--on az

$$\mathbf{A}_{g\tau} = g^{-1}\mathbf{A}_\tau g + g^{-1}\mathrm{d}g, \quad \mathbf{F}_{\mathbf{A}_{g\tau}} = g^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{A}_\tau} g$$

trivializációkat választottuk. Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$-8\pi^2 C_2(E) = \int\limits_{S^4}\mathrm{tr}(\mathbf{F_A}\wedge\mathbf{F_A}) = \int\limits_{H^+}\mathrm{tr}(\mathbf{F}_{\mathbf{A}_\tau}\wedge\mathbf{F}_{\mathbf{A}_\tau}) + \int\limits_{H^-}\mathrm{tr}\left(\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{g\tau}}\wedge\mathbf{F}_{\mathbf{A}_{g\tau}}\right) =$$

$$= \int\limits_{S^3}\mathrm{tr}\left(\mathbf{F}_{\mathbf{A}_\tau}\wedge\mathbf{A}_\tau - \frac{1}{3}\mathbf{A}_\tau\wedge\mathbf{A}_\tau\wedge\mathbf{A}_\tau - \mathbf{F}_{\mathbf{A}_{g\tau}}\wedge\mathbf{A}_{g\tau} + \frac{1}{3}\mathbf{A}_{g\tau}\wedge\mathbf{A}_{g\tau}\wedge\mathbf{A}_{g\tau}\right).$$

A *Stokes-tétel*t alkalmaztuk (2. tétel), s kihasználtuk, hogy a két $\partial H^\pm \simeq S^3$ ellentétes irányítással áll elő az S^4 egyenlítő menti szétvágása során. Beírva a trivializációk alakját, ezt kapjuk:

$$-8\pi^2 C_2(E) = -\frac{1}{3}\int\limits_{S^3}\mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g\wedge g^{-1}\mathrm{d}g\wedge g^{-1}\mathrm{d}g) - \int\limits_{S^3}\mathrm{d}\,\mathrm{tr}(g^{-1}\mathbf{A}_\tau\wedge\mathrm{d}g).$$

Mivel az utolsó tag a Stokes-tétel miatt zérus, ezért valójában az áll előttünk, hogy

$$C_2(E) = \frac{1}{24\pi^2}\int\limits_{S^3}\mathrm{tr}(g^{-1}\mathrm{d}g\wedge g^{-1}\mathrm{d}g\wedge g^{-1}\mathrm{d}g).$$

Ezt a kifejezést nagyon szépen interpretálhatjuk. Az integrálban szereplő g függvény fölfogható úgy, mint egy $g : S^3 \to S^3$ leképezés, s az integrál konstrukció szerint csak az E nyalábtól függ, ami nem jelent mást, mint azt, hogy a formula csak a g homotópia-osztályára érzékeny, s ezért értékét azonosíthatjuk e leképezés *fok*ával, mely homotopikus invariáns (a $\pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z}$ egy eleme).

A YANG – MILLS-EGYENLETEK MEGOLDÁSÁRÓL

(IV.4.9) $\mathbf{A}$ szerinti első variációja szolgáltatja a Yang – Mills-funkcionál Euler – Lagrange egyenleteit, ezek alakja négydimenziós pszeudo-Riemann-sokaságon:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{A}} * \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0.$$

Ehhez hozzávéve a (IV.4.7) Bianchi-azonosságot, kapjuk az un. (forrásmentes) *Yang – Mills-egyenletek*et:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{A}} * \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0, \quad \mathrm{d}_{\mathbf{A}} \mathbf{F}_{\mathbf{A}} = 0. \qquad \text{(IV.4.11)}$$

Egy $\mathbf{A}$ konnexiót *Yang – Mills-mező*nek hívunk, ha megoldása a (IV.4.11) egyenleteknek, hasonlóan az elektrodinamikai vektorpotenciálhoz. Most mondjunk néhány szót az ilyen egyenletek megoldásáról, először a Riemann-esetben. Rögtön látjuk, hogy az önduális, ill. anti-önduális konnexiók, vagyis amelyek görbületére $*\mathbf{F}_{\mathbf{A}} = \pm \mathbf{F}_{\mathbf{A}}$ teljesül, megoldásai az egyenleteknek (IV.4.8) miatt. Amennyiben az X sokaságunk nem kompakt, nem triviális követelményt támaszthatunk e megoldásokkal szemben, ha kikötjük, hogy a Yang – Mills-funkcionál e megoldásokhoz tartozó értéke véges legyen.

Definíció. Az (X, g) Riemann-sokaságon értelmezett (IV.4.9), (IV.4.11) Yang – Mills-elmélet *(anti-)insztanton*-megoldásának nevezünk egy olyan $\mathbf{A}$ konnexiót, melynek görbületi 2-formája (anti-)önduális és a Yang – Mills-funkcionál rajta fölvett értéke véges (ha netántán az X sokaság nem kompakt).

E megoldások tulajdonságairól és fizikai interpretácójáról szólunk néhány szót e fejezet végén. Most megmutatjuk, hogy e megoldások kitüntetettek a Yang – Mills-funkcionál szempontjából. Írhatjuk, (IV.4.8) felhasználásával:

$$\|\mathbf{F}_{\mathbf{A}} \pm *\mathbf{F}_{\mathbf{A}}\|^2 = \|\mathbf{F}_{\mathbf{A}}\|^2 + \| * \mathbf{F}_{\mathbf{A}}\|^2 \mp 2\,(\mathbf{F}_{\mathbf{A}}, *\mathbf{F}_{\mathbf{A}}) = 2\|\mathbf{F}_{\mathbf{A}}\|^2 \mp 2\,(\mathbf{F}_{\mathbf{A}}, *\mathbf{F}_{\mathbf{A}})\,.$$

Következésképpen

$$S(\mathbf{A}) = \|\mathbf{F}_{\mathbf{A}}\|^2 = \pm\,(\mathbf{F}_{\mathbf{A}}, *\mathbf{F}_{\mathbf{A}}) + \frac{1}{2}\|\mathbf{F}_{\mathbf{A}} \pm *\mathbf{F}_{\mathbf{A}}\|^2.$$

Ekkor vegyük észre, hogy innen (IV.4.10) miatt azt kapjuk, hogy

$$S(\mathbf{A}) \geq |C_2(E)|.$$

E szerint a Yang – Mills-funkcionál értéke a Riemann-esetben egy adott $SU(n)$ struktúracsoportú nyaláb esetén nem lehet tetszőlegesen kicsi, a nyaláb második Chern-osztályával alulról becsülhető. Látható, hogy ha $\mathbf{A}$ (anti-)önduális, akkor a második tag eltűnik, vagyis pontosan az (anti-)önduális megoldásokhoz tartozik a Yang – Mills-funkcionál *abszolút* minimuma. A $C_2(E) =: k$ egész számot az insztanton *topologikus töltés*ének, vagy *insztanton-szám*ának nevezik.

Magától vetődik föl a kérdés, hogy mi a helyzet a Yang – Mills-egyenletek nem-insztanton megoldásaival, vagyis létezik-e a Yang – Mills-funkcionálnak az abszolút minimumtól különböző kritikus pontja? Ejtsünk néhány szót erről is. Általánosságban szinte semmit nem tudunk mondani, szórványos eredményekkel kell beérnünk.

Amennyiben $G = SO(4)$, akkor az S^4 fölött létezik a Yang – Mills-egyenleteknek egy megoldása, amely se nem önduális, se nem anti-önduális: ez nem más, mint az érintőnyaláb Levi–Civitá-konnexiója [1].

Megkérdezhetjük, hogy vajon léteznek-e *lokális* minimumok, melyek nem önduálisak ill. anti-önduálisak [1]? A kerek S^4 fölött egy $\mathbf{A}$ konnexiót *gyengén stabil*nak mondunk, ha teljesül rá, hogy

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2 S(\mathbf{A}(t))}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} \geq 0$$

minden olyan sima egyparaméteres $t \mapsto \mathbf{A}(t)$ konnexió-seregre, melyre $|t| < \varepsilon$ és $\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}$.

3. Tétel (Bourguignon – Lawson). *Minden gyengén stabil, kerek S^4 fölötti Yangi – Mills-mező, melynek struktúracsoportja $SU(2)$, $U(2)$, ill. $SU(3)$, vagy insztanton, vagy anti-insztanton mező.* $\diamond$

Vagyis nincsenek további lokális minimumok, minden más kritikus pont, vagyis Yang – Mills-mező „nyeregpont”, ami azt jelenti, hogy e megoldások nem stabilak.

Az is belátható, hogy az S^4 fölött tetszőleges struktúracsoport esetén az insztanton megoldások *izoláltak*, vagyis nincs a közelükben más Yang – Mills-mező [10]. Ezek az eredmények is indokolják, hogy – legalábbis az $SU(2)$ esetben – az insztanton-megoldásokra összpontosítsuk maradék erőnket.

Az a kérdés is motoszkálhat bennünk, hogy az insztanton-fogalom mennyire szorosan fonódik össze a Riemann-metrikával, vagy másként mit mondhatunk a (IV.4.11) egyenletek önduális megoldásáról Lorentz-sokaságon?

Mint ahogy korábban láttuk, egy négydimenziós Lorentz-sokaságon (IV.4.8) miatt csak *komplex* 2-formák lehetnek $*$ saját-2-formái. Tehát, ha egy ilyen komplex 2-forma egy konnexió görbülete, akkor a nyaláb struktúra-csoportjának Lie-algebrája is komplex, amiből az következik, hogy a struktúra-csoport is egy komplex Lie-csoport, vagyis olyan Lie-csoport, ami egy komplex sokaságon adott.

De beláthatjuk, hogy egy komplex, kompakt Lie-csoport kommutatív kell legyen: ezt többféleképpen megtehetjük, pl. észrevéve azt, hogy egy komplex Lie-csoporton a nemkommutativitást mérő $\mu_X : G \to \mathbb{C}$, $\mu_X(h) := \langle \mathrm{d}(ghg^{-1}h^{-1})|_{g=e}, X\rangle$ függvény *holomorf* (itt $\langle \cdot, X\rangle$ a Lie-algebra tetszőleges X elemén való kiértékelés). Viszont a *Liouville-tétel* miatt ez konstans kell legyen ha G kompakt, ami azt jelenti a mi esetünkben, hogy csoportunk kommutatív.

Tehát, abban az esetben, ha elméletünknek vannak nem triviális insztanton-megoldásai, akkor két lehetőség áll előttünk:

(i) Az elmélet (komplex) struktúra-csoportja nem kommutatív, de nem is kompakt: ez fizikai szempontból kifogásolható, mert ekkor a Yang – Mills funkcionál nem definit, s így az elmélet alapállapotai nem értelmezhetők, ami az ilyen elméletek fizikai használhatóságát megkérdőjelezi;

(ii) A komplex struktúra-csoport kompakt, de kommutatív is: az efféle elméletekből a Yang – Mills koncepció sava-borsát adó nem-abelitás hiányzik, tehát megint csak nem várhatunk érdekes fizikai elméleteket.

Ezért a továbbiakban mi a Lorentz-sokaságokon megkereshető komplex insztantonokkal sem foglalkozunk, bár kifogásaink „pusztán” fizikai jellegűek.

A YANG – MILLS-ELMÉLETEK FIZIKAI JELENTŐSÉGE

Az elektrodinamikai esethez hasonlóan bevezethetjük a Dirac-mezőket, mint a korábban konstruált S spinornyaláb szeléseit, melyeket az $SL(2,\mathbb{C})$ spincsoport és a Yang – Mills elmélet G struktúra-csoportja transzformál; vagy általánosan vehetünk egy E vektornyalábot is $\mathbb{R}^4$ fölött, melyen adott az $SL(2,\mathbb{C})$ valamint a G csoportoknak valamilyen reprezentációi. Vagyis az E vektornyaláb szelései olyan klasszikus mezőket írnak le, amelyek az $SL(2,\mathbb{C}) \times G$ csoport szerint transzformálódnak, vagyis spinnel, valamint Yang – Mills-töltéssel rendelkeznek. A $\Gamma(E)$ szeléseket *anyagmezőknek* hívjuk. Ezeken a Yang – Mills-elmélet konnexió, görbület, stb. objektumai operátorokként hatnak, teljesen hasonlóan az elektrodinamikában látottakhoz. Egy Yang – Mills-mező konnexió-formájának a Lie-algebra alkalmas bázisához tartozó komponenseit pedig *közvetítő mezőknek* nevezzük, hamarosan látjuk miért. Foglaljuk össze ismét egy táblázatban, hogyan is fest a fizikai mezők geometriai interpretációja.

Válasszuk struktúra-csoportként az $G = SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ félegyszerű Lie-csoportot: az ehhez tartozó Yang – Mills-elméletet *Standard Modell*nek nevezzük. A szereposztás a következő: alkalmas reprezentációkból felépített vektornyalábok szelései felelnek meg a

GEOMETRIAI OBJEKTUMOK	FIZIKAI INTERPRETÁCIÓ
Bázissokaság	Téridő
Vektornyalábok szelései	Anyagmezők (fermionok)
Konnexió vektornyalábokon	Közvetítő mezők (bozonok)
A konnexió görbülete	Yang – Mills-térerősség

IV. 4. 2 Táblázat: Fizikai mezők és geometriai megfelelőik

kvark-, ill. *lepton-mezőknek* (anyagmezők). Az $SU(3)$ nyolcdimenziós Lie-algebrájához tartozó mezőket *gluonmezők*nek mondjuk, ui. e modellhez tartozó kvantumelméletben ezek közvetítik az erős kölcsönhatást. Az $SU(2) \times U(1)$ csoport négy generátorához tartozó mezőket pedig $W^{\pm}, Z^0$, ill. *γ-mezők*nek nevezik, ahol is a γ *foton-mező* közvetíti az elektromágneses kölcsönhatást, a másik három a gyenge kölcsönhatást. Sajnos a további részletek ismertetésére nincs módunk helyszűke miatt; csupán megjegyezzük, hogy a Standard Modell a részecskefizika utolsó, kísérletileg is ellenőrzött elmélete.

Láttuk, hogy a Yang – Mills-elméletek furcsa tulajdonsága, hogy Riemann-metrikájú sokaságok felett téregyenleteinek legtermészetesebb megoldásai az insztantonok. Kérdés, hogy lehetséges-e ezeket fizikailag értelmezni. Az Riemann-$\mathbb{R}^4$ fölfogható úgy is, mint a *képzetes idejű* Lorentz-$\mathbb{R}^4$. A képzetes idő fölbukkanása miatt azonnal a kvantummechanikai alagutazás jut eszünkbe, ahol a potenciálgödör egyik fenekén gubbasztó részecske „átkerül" a másik alapállapotba a klasszikus tiltás ellenére.

A Yang – Mills-elméleti insztantonok is hasonlóan értlmezhetők, az egyetlen különbség az, hogy itt a kvantummechanikai potenciált az elméletben természetesen fölbukkanó topológiai eredetű gátak helyettesítik: az alapállapotok különböző csavarási számú osztályokba sorolhatók, melyek közt a klasszikus átjárás tiltott, azonban insztantonok segítségével mégis megtehető; sajnos ez a kép nagyon kihasználja a lapos $\mathbb{R}^4$ specialitását, ennélfogva nem várható, hogy általánosabb téridőosztály fölött is működik. Példának okáért: stacionárius fekete lyukakat leíró téridőkön az insztantonoknak – ha egyáltalán van – más szerepet kell találni. Minderről bővebben szól [5].

Ha most hozzákezdenénk a kvantum-Yang – Mills-elméletek kiépítéséhez, akkor a legigéretesebb az lenne, ha bevezetnénk az elmélet ún. (euklideszi) *Feynman-integrál*ját, mely az ún. $Z(M)$ állapot-összeget adja meg:

$$Z(M) := \int_{\mathcal{A}_M} \exp(-S(\mathbf{A}))D\mathbf{A}$$

ahol az integrálást az M sokaság konnexióinak $\mathcal{A}_M$ affin terén kell elvégeznünk; ebben megakadályoz minket az a szomorú fölismerés, hogy a $D\mathbf{A}$ mérték teljesen rosszul definiált

és nem úgy tűnik, hogy a közeljövőben ezt a fogalmat sikerül értelmezni. Ennek ellenére a $Z(M)$ állapotösszegnek nagyon izgalmas matematikai tulajdonságai vannak, amire két példa is olvasható Hausel Tamás, ill. Szenes András előadásaiban. Annyit most is észreveszünk, hogy a $Z(M)$ integrálhoz a legnagyobb járulékot éppen az insztanton megoldások adják, hiszen azok minimalizálják az S hatást.

A kvantálás bármely más megközelítésében is hasonló inkorrektségekkel találkozunk, s ez az oka annak, hogy a kvantumelmélet direkt megfogalmazásában fizikai jelentéssel bíró kifejezések végtelennek adódnak; ezek az elméletből az ún. *renormálás*sal tüntethetők el. Ez a technika stílusában emlékeztet a középkori alkímia varázsigéihez, titkos műveleteihez, melyeket csak a beavatottak értettek.

Irodalomjegyzék

[1] J.-P. Bourguignon, H.B. Lawson, Jr.: *Stability and isolation phenomena for Yang–Mills fields*, Commun. Math. Phys. **79** 189-230 (1981);

[2] R. Bott, L.W Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer–Verlag, New York (1982);

[3] P.A.M. Dirac: *Quantised Singularities in the Electromagnetic Field* Proc. Roy. Soc. London, **A 133**, 60-72 (1931);

[4] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer: *The Geometry of Four-Manifolds*, Clarendon Press, Oxford (1990);

[5] Etesi G.: *A Yang–Mills-elméleti vákuum szerkezete stacinárius téridők felett*, ELTE TTK Doktori Értekezés (1998);

[6] D.S. Freed, K.K. Uhlenbeck: *Instantons and Four-Manifolds*, MSRI Lecture Notes, Springer-Verlag, New York (1984);

[7] D. Husemoller: *Fibre Bundles*, McGraw–Hill, New York (1966);

[8] Matolcsi T.: *Analízis II. (Vektorok)* ELTE jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest (1990);

[9] J.W. Milnor, J.D. Stasheff: *Characteristic Classes*, Princeton University Press & University of Tokyo Press (1974);

[10] Min-Oo: *An L^2-isolation theorem for Yang–Mills fields*, Compositio Math. **47**, 153-163 (1982);

[11] Palla L.: *Mágneses monopólusok*: *Fizika 1977*, 137-157, Gondolat, Budapest (1977);

[12] M.M. Postnikov: *Lectures in Geometry III. Smooth manifolds*, Mir, Moszkva (1989);

[13] M.M. Postnikov: *Lectures in Geometry V. Lie Groups, Lie Algebras*, Mir, Moszkva (1983);

[14] R.M. Wald: *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984);

[15] R.O. Wells, Jr.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Springer–Verlag, New York (1980).

V. Geometriai kvantálás és a Jones – Witten-elmélet

Hausel Tamás
School of Mathematics
Institute for Advanced Study
Olden Lane, Princeton
New Jersey 08540, USA

hausel@math-inst.hu

1 Bevezetés

Az előadássorozat[1] célja, hogy betekintést nyerjünk a Jones – Witten-elméletbe, miközben áthajózunk a szimplektus geometria, a geometriai kvantálás és a topologikus kvantummező-elméletek vizein.

Jones 1984-ben definiálta híres láncinvariánsát az úgynevezett Jones-polinomot, amelynek segítségével a csomóelmélet néhány, száz éves sejtését sikerült tisztázni. Atiyah 1988-as Hermann Weyl-előadásában vetette fel a problémát: hogyan konstruáljuk meg a Jones-polinomot – amelyet addig csak a lánc két dimenziós diagramjával tudtak definiálni – tisztán három dimenziós módszerekkel? Witten 1989-ben válaszolta meg a kérdést, amely egyebek mellett hozzájárult ahhoz, hogy 1990-ben, Jones mellett, fizikusként először, Fields-érmet kapott. Witten igen eredeti módon egy 2+1 dimenziós topologikus kvantummező-elméletet (TKME) konstruált, amelynek 3 dimenziós részéből kiolvasható a Jones-polinom. Ez a TKME a fizikus körökben már ismert Chern – Simons-elmélet – mellyel abeli esetben például a szupravezetést lehet modellezni – amelyet a fenti történet miatt Jones – Witten-elméletnek is nevezünk. A topológus Freedman 1998-as ICM előadásában pontosan ezt a Jones – Witten-elméletet javasolta egy újfajta számítógép-technológia alapjának. Javaslata szerint, ha a Chern – Simons-elméletet, valamely fizikai elmélet modelljét, hatékonyan mérni tudnánk, akkor ez az újfajta számítógép igen hatékonyan tudná számolni a Jones-polinomot, ami Witten fenti eredménye szerint, korrelációs függvények formájában „kimérhető” az elméletből. A Jones-polinom számolásárol pedig ismert, hogy egy NP-nehéz feladat, tehát egy számítógép, amely a Jones-polinomot hatékonyan számolja, minden NP-teljes problémát hatékonyan tud megoldani. Ez a lehetőség egyébként annyira megmozgatta egy számítástechnikai cég fantáziáját, hogy a 4 dimenziós sokaságok osztályozásáért 1986-ban Fields-érmet kapott Freedmant szerződtette frissen alakult matematikai kutatócsoportja egyik irányítójának.

Az elkövetkező előadásokban a witteni konstrukció matematikai alapjait fogjuk áttekinteni.

[1] A jegyzet megírása közben az NSF DMS 97-29992 számú ösztöndíjának támogatását élveztem a princetoni Institute for Advanced Study-ban.

Megjegyzés. A téma jellegéből adódik a fizikai és matematikai megközelítés keveredése, ami igen nehézzé teszi a probléma tálalását. Minthogy a célunk csupán a betekintés, ezért nem bizonyítjuk itt a tételeket, ezeket az érdeklődő Olvasó a megadott irodalomban megtalálja. Továbbá motivációnk sokszor fizikai gyökerű, tehát a tárgyalás stílusa nem a matematikában megszokott szigorú logikai lépések egymásutánja. A hangsúly nem is a fizikán van. Hanem egyik oldalról a „tiszta matematikán", amit a fizikai motiváció eredményez, a másik oldalról pedig a legújabb elméleti fizikai ötletek konzisztenciájának – a kísérletek lehetőségének hiányában – a modern geometriában történő tesztelésén.

2 A klasszikus mechanika matematikai modelljei

E fejezetben [1]-et követve a klasszikus mechanika három matematikai modelljét definiáljuk. A newtoni modell a differenciálszámítás, a lagrange-i modell a variációszámítás, a hamiltoni modell pedig a szimplektikus geometria matematikai apparátusára épül.

NEWTON-FÉLE MECHANIKA

Definíció. Az n pontból álló Newton-féle mechanikai rendszer

(i) *konfigurációs tere* egy $N = 3n$ dimenziós euklideszi tér: $M = \mathbb{R}^N = \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3}_{n}$;

(ii) *mozgása* egy olyan $\gamma : I \to M = \mathbb{R}^N$ sima leképezés, ahol $I \subset \mathbb{R}$ zárt intervallum és amelyre teljesül a rendszer

(iii) *mozgásegyenlete*: $\ddot{\gamma} = F(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)$, ahol: $F : TM \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ sima függvény.

(iv) A γ mozgás $t_0 \in \mathrm{int}(I)$-beli *sebességvektora*: $\dot{\gamma}(t_0) = \left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_{t=t_0} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\gamma(t_0+h)-\gamma(t_0)}{h} \in \mathbb{R}^N$;

(v) *gyorsulásvektora*: $\ddot{\gamma}(t_0) = \left(\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2}\right)_{t=t_0}$.

Megjegyzés. Matematikailag egy Newton-féle mechanikai rendszert az F függvénnyel adunk meg.

Példa: A következőkben definiáljuk a konzervatív rendszert. Legyenek $r_i = (x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}) \in \mathbb{R}^3$ az i-edik tömegpont koordinátái, ekkor az $M = \mathbb{R}^N$ euklideszi tér $(r_1, \ldots, r_n)$-nel illetve $(x_1, \ldots, x_N)$-nel van koordinátázva. Továbbá legyen a konfigurációs tér $TM = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ érintőtere $(r_1, \ldots, r_n, \dot{r}_1, \ldots, \dot{r}_n)$-nel illetve $(x_1, \ldots, x_N, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N)$-nel koordinátázva, ahol $\dot{r}_i = (\dot{x}_{3i-2}, \dot{x}_{3i-1}, \dot{x}_{3i}) \in \mathbb{R}^3$. Legyenek továbbá $m_1, \ldots, m_n$ pozitív valós számok, ahol m_i az i-edik pont *tömege*, illetve $U : M = \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sima függvény, melynek neve *potenciál-függvény*. Ekkor legyen

$$\operatorname{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} = \left(\frac{\partial U}{\partial r_1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial r_n}\right)$$

illetve

$$F = -\frac{1}{m} \cdot \operatorname{grad}(U) = \left(-\frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial r_1}, \ldots, -\frac{1}{m_n} \cdot \frac{\partial U}{\partial r_n}\right).$$

Ily módon F egy $M \to \mathbb{R}^N$ függvény. Ezt komponálva a: $TM \times \mathbb{R} \to M$ kanonikus projekcióval, látjuk, hogy F definiál egy Newton-féle mechanikai rendszert, melynek neve *konzervatív rendszer*. Ekkor a newtoni mozgásegyenletek az

$$m_i \ddot{\gamma}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} \circ \gamma_i \tag{V.2.1}$$

alakot öltik, ahol $i = 1, \ldots, n$ és $\gamma_i = r_i \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^3$ az i-edik pont mozgása. Tehát a γ görbe mentén teljesül az

$$m_i \ddot{r}_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i}; \quad i = 1, \ldots, n$$

differenciálegyenlet-rendszer.

A konzervatív rendszer *kinetikus energiá*ja

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^{\,2},$$

ahol $r_i \in \mathbb{R}^3$, $r_i^2 = x_{3i-2}^2 + x_{3i-1}^2 + x_{3i}^2$ az r_i vektor hosszának négyzete. A konzervatív rendszer *teljes energiá*ja az $E = T + U : TM \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ezen definíciók mellett a rendszer totális energiája időben állandó, azaz megmarad, hiszen:

$$\dot{E} = \dot{T} + \dot{U} = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i + \operatorname{grad}(U) = 0.$$

Lagrange-féle mechanika

Variációszámítás

Definíció. Jelölje $\mathcal{G}$ a $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ sima görbék egy halmazát. Ekkor egy $\Phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ leképezést *funkcionál*nak nevezünk. A Φ funkcionál differenciálható a $\gamma \in \mathcal{G}$ -nél, ha teljesül, hogy:

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = \partial\Phi(\gamma, h) + M(\gamma, h),$$

ahol:

(i) h a *variáció*, ahol is $h \in \mathcal{G}$, és $\gamma + h \in \mathcal{G}$ a pontonkénti összeadással definiált,

(ii) $\partial\Phi$ lineáris h-ban, azaz: $\partial\Phi(h) + \partial\Phi(h') = \partial\Phi(h + h')$,

(iii) $M(\gamma, h) = O(h^2)$, azaz $|h| < \varepsilon$ és $\left|\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right| < \varepsilon$ esetén $|M| < c \cdot \varepsilon^2$.

A $\gamma \in \mathcal{G}$ görbe a Φ funkcionál *extremálisa*, ha Φ differenciálható γ-ban, és minden $h \in \mathcal{G}$ esetén teljesül, hogy: $\partial\Phi(\gamma, h) = 0$.

Példák:

(i) Ha $\mathcal{G} := \{\gamma : I \to \mathbb{R}^N \text{sima görbe és } I \subset \mathbb{R}\}$ akkor

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{\gamma}^2}\mathrm{d}t,$$

a „grafikon hossza” funkcionál.

(ii) Legyen $\mathcal{G} := \{\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^N, \text{sima görbe, úgy, hogy: } \gamma(t_0) = x_0, \gamma(t_1) = x_1\}$, továbbá legyen $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima függvény, amelyet *Lagrange-függvénynek* mondunk. Ekkor minden $\gamma \in \mathcal{G}$ mellett értelmes a

$$\Phi_L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)\mathrm{d}t$$

funkcionál, amelyet *hatásintegrál*nak nevezünk.

1. Tétel. *Egy $\gamma \in \mathcal{G}$ görbe akkor és csak akkor extremálisa a fenti Φ_L funkcionálnak, ha γ mentén teljesül a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad (\text{V.2.2})$$

ún. Euler – Lagrange-egyenlet, *ahol:*

(i) $\frac{\partial L}{\partial x} = \mathrm{pr}_1 \circ \mathrm{grad}\,(L)$,

(ii) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \mathrm{pr}_2 \circ \mathrm{grad}\,(L)$,

itt a $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *vetítés az első* $x = (x_1, \ldots, x_N)$*-el,* $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ *a második* $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_N)$*-el koordinátázott* $\mathbb{R}^N$ *faktorra. A* $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ *mennyiséget az i-edik általánosított impulzusnak, míg az* $F_i = \frac{\partial L}{\partial x_i}$ *mennyiséget az i-edik általánosított erőnek nevezzük.* $\diamond$

Példa: Tekintsük az előbb definiált konzervatív rendszert. Legyen $L = T - U \circ pr_1$ Lagrange-függvény a *munka-függvény.* A $\Phi_L(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)\mathrm{d}t$ hatásintegrál pedig a γ mentén végzett munka. Ekkor az Euler-Lagrange-egyenlet

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = m_i \ddot{r}_i + \frac{\partial U}{\partial r_i},$$

ekvivalens a (V.2.1) newtoni mozgásegyenlettel. Tehát egy γ görbe akkor és csak akkor mozgása a konzervatív newtoni rendszernek, ha γ extremálisa a Φ_L hatásintegrálnak. Ez a *Hamilton-féle legkisebb hatás elve.*

A LAGRANGE-FÉLE DINAMIKAI RENDSZER DEFINÍCIÓJA

Definíció. A Lagrange-féle mechanikai rendszer

(i) *konfigurációs tere* egy M sima sokaság;

(ii) *szabadsági fokainak száma* $\dim(M)$, M dimenziója;

(iii) *Lagrange-függvénye* egy $L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima függvény;

(iv) *hatásintegrálja* $\Phi_L(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)\mathrm{d}t$ alakú;

(v) *mozgása* olyan $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ görbe, amelyen Φ_L extremális.

Definíció. A fenti adatokkal adott Lagrange-féle dinamikai rendszert

(i) *autonóm*nak nevezzük, ha az L Lagrange-függvény időfüggetlen;

(ii) *természetes*nek nevezzük, ha a Lagrange-függvény egy M-en adott Riemann-metrikából[2] és $U : M \to \mathbb{R}$ sima potenciálfüggvényből számítható a következőképpen: A kinetikus energiát az $x \in M$ és $v \in T_xM$ pontban a $T(x,v) = \frac{1}{2}g_x(v,v)$ formulával definiáljuk. A Lagrange-függvény pedig $L = T - U$ alakú. Minthogy az így definiált L időfüggetlen, látjuk, hogy egy természetes rendszer autonóm.

Példák:

(i) Tegyük fel, hogy egy $m_1, \ldots, m_n$ tömegű $r_1, \ldots r_n$ helyzetvektorú pontok rendszerét valamely kényszerfeltétel[3] egy $M \subset \mathbb{R}^{3n}$ m-dimenziós részsokaságon tartja úgy, hogy a rendszer dinamikáját az $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{r}_i^2 - U$ Lagrange-függvény írja le, ahol $U : M \to \mathbb{R}$ valamely sima potenciál-függvény. Egy ilyen rendszert $3n - m$ *holonóm kényszerfeltétellel korlátozott n-pontú* rendszernek nevezünk. Ez a „természetben" leggyakrabban előforduló példa természetes Lagrange-féle dinamikai rendszerre. Innen az elnevezés.

(ii) Gömbinga esetében a konfigurációs tér az $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, a 2 dimenziós gömb, síkingánál, a $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ körvonal, míg kettős ingánál egy tórusz, azaz: $S^1 \times S^1 = T^2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ a konfigurációs tér.

Feladat: *Mi egy két végén rögzített,* 3 *csuklóval összekötött* 4 *rúdból álló rendszer konfigurációs tere?*

Megjegyzés. Megmutatható, hogy a természetes Lagrange-féle dinamikai rendszer mozgásai nulla potenciál esetén pontosan az M Riemann-sokaság geodetikusai.

HAMILTON-FÉLE MECHANIKA

LEGENDRE-TRANSZFORMÁCIÓ

Definíció. Ha az $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sima függvény konvex, azaz a függvény *Hessián*ja a $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ mátrix pozitív definit; akkor az f függvény *Legendre-transzformált*jának nevezzük azt a $g : \left(\mathbb{R}^N\right)^* \to \mathbb{R}$ leképezést, amelyre teljesül, hogy minden $\xi \in \left(\mathbb{R}^N\right)^*$ esetén

$$g(\xi) := \max_{x \in \mathbb{R}^N}\{(\xi \mid x) - f(x)\}.$$

[2]Ez egy g_x euklideszi forma T_xM-en, amely x-ben simán változik.
[3]Például rudak a tömegpontok között.

A Legendre-transzformáció tulajdonságai:

(i) Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex függvény $g : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}$ Legendre-transzformáltja szintén konvex és g Legendre-transzformáltja pedig f. Azaz a Legendre-transzformáció *involutív*.

(ii) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ az $A = (a_{ij})$ pozitív definit mátrixú kvadratikus forma, azaz $f = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$. Ekkor f konvex és Legendre-transzformáltja $g = \sum_{i,j} b_{ij} \xi_i \xi_j$ pedig egy $B = (b_{ij})$ mátrixú kvadratikus forma, melyre $B = A^{-1}$, és így pozitív definit.

A Hamilton-egyenletek

Legyen $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a Lagrange-függvény úgy, hogy $x \in \mathbb{R}^N$ és $t \in \mathbb{R}$ mellett legyen $L_{x,t} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ konvex[4], ekkor a $H_{x,t} : \left(\mathbb{R}^N\right)^* \to \mathbb{R}$ jelöli az $L_{x,t}$ függvény Legendre-transzformáltját. Az ily módon nyert $H : \mathbb{R}^N \times \left(\mathbb{R}^N\right)^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *Hamilton-függvény*nek hívjuk. A következő tétel az Euler – Lagrange-egyenlet Legendre-transzformációját írja le:

2. Tétel. *Az Euler – Lagrange-egyenlet ekvivalens az alábbi $2n$ darab elsőrendű differenciálegyenlettel, az úgy nevezett Hamilton-egyenletekkel:*

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \qquad (\text{V.2.3})$$

minden $0 < i \leq n$-re; ahol $q_i = x_i$ a pozicíció, $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ az impulzus koordináták. $\diamond$

1. Következmény. *A Lagrange-féle mechanikai rendszer dinamikája leírható a Hamilton-egyenletekkel.* $\diamond$

Szimplektikus geometria

Eme alfejezetben a szimplektikus geometria alapvető fogalmait ismertetjük, a hamiltoni mechanika matematikai megalapozása végett.

[4]Például ha a rendszer természetes, akkor $L_{x,t}$ egy pozitív definit kvadratikus alak, és így konvex.

Egy szimplektikus sokaság, hasonlóan a későbbiekben definiálandó komplex és Kähler-sokaságokhoz, egy differenciálható sokaság extra struktúrával. Egy extra struktúra definiálása egy differenciálható sokaságon három szinten történik: infinitezimális, lokális és globális szinten. Azaz először infinitezimálisan a $p \in M$-beli T_pM érintőtéren, tehát a lineáris algebra felségvizein, másodjára lokálisan a $p \in M$ pont körül, tehát lényegében $\mathbb{R}^n$-en, és végül globálisan az egész M fölött.

A szimplektikus sokaság infinitezimális modellje a szimplektikus vektortér. Mielőtt tovább megyünk, az Olvasó elevenítse fel a Matolcsi-előadásból, a szimplektikus vektortérről szóló fejezetét!

Most meghatározzuk mit értünk majdnem szimplektikus sokaságon.

Definíció. Az (M, ω) párt *majdnem szimplektikus sokaság*nak nevezzük, ha M differenciálható sokaság és $\omega \in \Omega^2(M) = \Gamma(M, \Lambda^2(T^*M))$ egy differenciálható 2-forma úgy, hogy (ω_p) nem elfajuló bilineáris forma T_pM-en minden $p \in M$-re.

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy a fenti definíció ekvivalens azzal, hogy minden $p \in M$-re adott a (T_pM, ω_p), p-ben simán változó szimplektikus vektortér-struktúra T_pM-en.

Példa: Legyen az $\mathbb{R}^{2n} = (q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n)$ euklideszi téren az ω differenciálható 2-forma az

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$$

formulával adva. Ez nem más, mint a konstans kanonikus szimplektikus vektortér-struktúra $\mathbb{R}^{2n} = T_p\mathbb{R}^{2n}$-en s így az előző definíció értelmében $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ egy majdnem szimplektikus sokaság. Ezt a majdnem szimplektikus sokaságot hívjuk a szimplektikus sokaságok „standard modelljének".

Definíció. Egy (M, ω) majdnem szimplektikus sokaság *integrálható*, ha lokálisan izomorf[5] a standard modellel, azaz minden $p \in M$ pontnak van olyan nyílt $U \subset M$ környezete, hogy $(U, \omega|_U)$ izomorf a standard modell egy nyílt részével.

3. Tétel (Darboux). *Egy (M^{2n}, ω) majdnem szimplektikus sokaság akkor és csak akkor integrálható, ha teljesül a Darboux-féle integrálhatósági feltétel:* $\mathrm{d}\omega = 0$. $\diamond$

Megjegyzés. A tétel egyik iránya könnyen látható, ugyanis, ha (M, ω) egy szimplektikus sokaság, akkor a fenti definíció szerint lokálisan izomorf a standard modellel, amelyre viszont $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i\right) = 0$, hiszen $\mathrm{d}^2 = 0$.

[5] Más szóval majdnem szimplektikus struktúrát tartóan diffeomorf.

Szimplektikus sokaságnak tehát egy integrálható, majdnem szimplektikus sokaságot nevezünk. A Darboux-tétel szerint ezzel a definícióval ekvivalens a következő:

Definíció. Az (M, ω) pár egy *szimplektikus sokaság*, ha M differenciálható sokaság, $\omega \in \Omega^2(M)$ egy differenciálható 2-forma, amely sehol nem elfajuló, és $\mathrm{d}\omega = 0$.

2. Következmény. *Egy (M, ω) szimplektikus sokaság minden $p \in M$ pontja körül léteznek lokális $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ koordináták, melyekkel $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$ alakú.* $\diamond$

Példák:

(i) A $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ standard modell nyilván egy szimplektikus sokaság.

(ii) Legyen Q egy sima sokaság. (Például gondolhatunk Q-ra, mint egy Lagrange-féle mechanikai rendszer konfigurációs terére.) Megmutatjuk, hogy Q duális-érintőnyalábja T^*Q szimplektikus sokaság, egy kanonikus ω szimplektikus formával. Először konstruálunk egy ún. *szimplektikus potenciál*t, azaz egy θ differenciálható 1-formát, melyre $\mathrm{d}\theta = \omega$. A konstruálandó $\theta \in \Omega^1(T^*Q)$ szimplektikus potenciál neve: *Liouville-1-forma*. Egy differenciál 1-forma egy sokaságon valójában csak a duális-érintőnyalábnak a szelése: $\theta \in \Gamma(T^*Q, T^*(T^*Q))$. Ahhoz, hogy ezt definiáljuk, elég, ha megmondjuk, hogy egy tetszőleges $X \in \Gamma(T^*Q, T(T^*Q))$ vektormezőn kiértékelve, mely sima függvényt kapjuk. A következő formula tehát definiálja a Liouville-1-formát:

$$(\theta \mid X)_{q,p} = p(T\pi(X))(q), \qquad (\text{V.2.4})$$

ahol $q \in Q$, $p \in T_q^*Q$ és $T\pi : \Gamma(T^*Q, T(T^*Q)) \to \Gamma(Q, TQ)$ a $\pi : T^*Q \to Q$ vetítés deriváltja.

Legyen $(q_1, \ldots, q_n)$ egy koordináta-rendszer Q-n és legyen $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ a hozzá tartozó koordináta-rendszer T^*Q-n, tehát $p_i(\mathrm{d}q_j) = \delta_{ij}$. Ekkor a fenti (V.2.4) definíció a

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}q_i$$

lokális alakot ölti.

Ha tehát $\omega = \mathrm{d}\theta$ egyenlettel definiáljuk az ω differenciálható 2-formát, akkor ω az

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$$

lokális alakot ölti, és így ω valóban egy szimplektikus forma.

Ha $Q = \mathbb{R}^n$ akkor $\mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$ mellett visszanyerjük a standard modellt.

(iii) Vizsgáljuk meg, mely S^{2n} gömbök lehetnek szimplektikus sokaságok! Tegyük fel, hogy $\omega \in \Omega^2(S^{2n})$ egy szimplektikus forma. Mikor $n \neq 2$, akkor az Etesi-előadás (4) formulájából $H^2_{DR}(S^{2n}) = 0$ és így létezik $\theta \in \Omega^1(S^{2n})$ szimplektikus potenciál, tehát hogy $\mathrm{d}\theta = \omega$. Azonban ω sehol nem elfajuló, ami azt jelenti, hogy $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{n}$ egy sehol nem eltünő maximális fokú-forma, és emiatt S^{2n}-en vett integrálja nem nulla, tehát:

$$0 \neq \int_{S^{2n}} \omega^n = \int_{S^{2n}} (\mathrm{d}\theta)^n = \int_{S^{2n}} \mathrm{d}(\theta \wedge (\mathrm{d}\theta)^{n-1}) = 0$$

Stokes tételéből. Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy $n > 1$ esetén S^{2n} nem szimplektikus sokaság! Érvelésünk általában azt mutatja, hogy egy kompakt szimplektikus sokaság második de Rham kohomológia csoportja nem triviális.

Mikor $n = 1$, akkor viszont rengeteg szimplektikus forma van S^2-n. Ugyanis minden sehol nem eltűnő differenciál 2-forma definiál egyet. Ilyenből pedig rengeteg van, hiszen S^2 irányítható. Ugyanez az argumentum mutatja, hogy minden irányítható felületen rengeteg sok szimplektikus struktúra van.

Definíció. Legyen $f : M^{2n} \to \mathbb{R}$ sima függvény az (M^{2n}, ω) szimplektikus sokaságon. Ekkor $\mathrm{d}f \in \Omega^1(M) = \Gamma(M, T^*M)$ differenciálható 1-forma definiál egy $X_f = (\omega^\#)^{-1}(\mathrm{d}f)$ vektormezőt, az *f függvény Hamilton-féle vektormezőjét*, ahol az $\omega^\# : TM \to T^*(M)$ izomorfizmust az $\omega \in \Omega^2(M) = \Gamma(M, \Lambda^2 T^*M) \subset \Gamma(M, T^*M \otimes T^*M)$ sehol nem elfajuló forma adja meg.

Megjegyzés. Lokálisan egy $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ koordináta-rendszerben

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

formulával adott. Ezért egy $\gamma : I \to M$ sima görbe mentén pontosan akkor teljesülnek a

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial f}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial f}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Hamilton-egyenletek, ha teljesül a koordináta-független $\dot{\gamma}(t) = X_f(\gamma(t))$ egyenlet!

Definíció. Két $f, g \in C^\infty(M)$ sima függvény *Poisson-zárójele* az $\{f, g\} = X_f(g)$ sima függvény.

Megjegyzés. Lokális koordinátákban ez:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

A Poisson-zárójel tulajdonságai:

(i) Antikommutatív: $\{f, g\} = -\{g, f\}$;

(ii) teljesíti a *Jacobi-azonosságot*: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

Tehát a Poisson-zárójel egy Lie-algebra struktúrát definiál $C^\infty(M)$-n. Az

$$X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g] \tag{V.2.5}$$

azonosság pedig azt mutatja, hogy az $f \mapsto X_f$ egy Lie-algebra-homomorfizmus.

A HAMILTON-FÉLE MECHANIKAI RENDSZER DEFINÍCIÓJA

Miután kidolgoztuk a szükséges szimplektikus geometriai fogalmakat, definiálhatjuk a Hamilton-féle mechanikai rendszert:

Definíció. Egy *Hamilton-féle (autonóm) mechanikai rendszer*

(i) *fázistere* egy (M^{2n}, ω) szimplektikus sokaság;

(ii) *Hamilton-függvénye* egy $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$ sima függvény;

(iii) *Hamilton-féle vektormezője* $X_H \in \Gamma(M, TM)$;

(iv) *mozgása* egy olyan $\gamma : \mathbb{R} \to M^{2n}$ sima görbe, amelyre teljesül a rendszer

(v) *Hamilton-egyenlete*: $\dot{\gamma} = X_H$.

Példa: Az 2. fejezetben elmagyaráztuk, hogyan Legendre-transzformálhatjuk az Euler–Lagrange-egyenletet a Hamilton-egyenletbe $\mathbb{R}^n$ konfigurációs téren. Ha ezt a definíciót lokálisan megtartjuk, akkor a Legendre-transzformáció egy M konfigurációs terű $L : TM \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvényű Lagrange-féle mechanikai rendszert egy T^*M fázisterű[6]

[6] A standard szimplektikus struktúrával. Vö (V.2.4).

$H : T^*M \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényű Hamilton-féle mechanikai rendszerbe viszi, amelynek Hamilton-egyenlete lokálisan (V.2.3), globálisan (v) alakú.

A közönséges differenciálegyenletek alaptételéből következik, hogy egy X vektormező lokálisan generál egy egyparaméteres ϕ_X^t diffeomorfizmus-csoportot, – az M diffeomorfizmus-csoportjának egy $t \in I \subset \mathbb{R}$-rel paraméterezett részcsoportját –, amelyre $(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_X^t)_{t=0} = X$. Ha X_H egy H Hamilton-függvényhez tartozó vektormező, akkor $\phi_{X_H}^t$ neve *fázisáram.* Az elnevezést az indokolja, hogy egy Hamilton-féle mechanikai rendszer esetén a fázisáram explicite leírja az egész rendszer dinamikáját, amennyiben az $m \in M$ pontból a rendszer t idő múlva az $\phi_{X_H}^t(m)$ pontba kerül.

Definíció. Egy (M^{2n}, ω) fázisterű $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényű Hamilton-féle mechanikai rendszer egy *első integrálja* (vagy *megmaradó mennyisége*) az $f : M^{2n} \to \mathbb{R}$ sima függvény, amely invariáns az X_H által generált $\phi_{X_H}^t$ fázisárammal szemben, azaz ha $X_H f = 0$.

3. Következmény. *Egy $f : M^{2n} \to \mathbb{R}$ sima függvény akkor és csak akkor a rendszer egy első integrálja, ha $\{f, H\} = X_H f = 0$.* $\diamond$

Példák:

(i) A Poisson-zárójel antikommutativitásából következik, hogy $\{H, H\} = 0$, azaz H a rendszer első integrálja, az energia megmarad. Ez az *energiamegmaradás elve.*

(ii) A Jacobi-azonosságból következik, hogy az első integrálok $(C^\infty(M), \{,\})$ egy rész-Lie-algebráját alkotják, azaz ha f és g első integrál, akkor $\{f, g\}$ is első integrál.

4. Tétel (Liouville). *Tekintsünk egy $H : M^{2n} \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényű hamiltoni rendszert. Legyen $F_1 = H$. Ha $F_1, \ldots, F_n \in C^\infty(M)$ n független*[7] *első integrál és $\{F_i, F_j\} = 0$ minden i, j-re, akkor a rendszer teljesen integrálható, azaz a Hamilton-egyenlet „explicite" megoldható*[8].

Megjegyzés. E tétel jelentőségét mutatja, hogy a dinamika lényegében minden megoldott rendszere valójában teljesen integrálható hamiltoni rendszer.

[7] Azaz $(\mathrm{d}F_1)_x, \ldots, (\mathrm{d}F_n)_x \in T_x^*M$ lineárisan független minden $x \in M$ pontban.
[8] A pontos megfogalmázást ld. [1] 259-260. oldalán.

3 Szimplektikus sokaságok geometriai kvantálása

Az előző alfejezetekben láttuk, hogy a klasszikus mechanika hamiltoni modelljét a szimplektikus geometria matematikai apparátusa alapozza meg. A geometriai kvantálás feladata, hogy a klasszikus mechanikáról kvantummechanikára való áttérést szimplektikus geometriai módszerekkel valósítsa meg. A következő táblázat a hamiltoni, klasszikus illetve kvantummechanika matematikai modelljét hasonlítja össze.

Hamiltoni mechanika	Klasszikus mechanika	Kvantummechanika
fázis- ill. állapottér	(M, ω) szimplektikus sokaság	$P(\mathcal{H})$ projektivizált Hilbert-tér
megfigyelhető mennyiség	$f : M \to \mathbb{R}$ sima függvény	$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ szimmetrikus operátor
Hamilton-függvény ill. operátor	$H \in M \to \mathbb{R}$ sima függvény	$H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ szimmetrikus operátor
mozgás	X_H hamiltoni vektormező generálta fázisáram	e^{itH} időfejlesztő operátor generálta időfejlődés

V. 3. 1. Táblázat: A mechanikai modellek összehasonlítása

Dirac általános kvantálási szabályai: A kvantálás egy egységelemes valós Lie-algebra-homomorfizmus a klasszikus megfigyelhető mennyiségek $(C^\infty(M), \{,\})$ Lie-algebrájáról a kvantumos megfigyelhető mennyiségek $(\mathcal{O}, i\,[,])$ Lie-algebrájába. Más szóval minden $f : M \to \mathbb{R}$ sima függvényhez, azaz klasszikus megfigyelhető mennyiséghez egy $\hat{f} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ szimmetrikus operátort, azaz kvantumos megfigyelhető mennyiséget rendelünk úgy, hogy teljesül a következő három axióma:

(Q1) $f \mapsto \hat{f}$ leképezés $\mathbb{R}$-lineáris

(Q2) ha $f = c$ konstans függvény, akkor $\hat{f} = c1_{\mathcal{H}}$

(Q3) ha $\{f_1, f_2\} = f_3$ akkor $\left[\hat{f}_1, \hat{f}_2\right] = i\hat{f}_3$

Megjegyzések.

(i) Minthogy a pozició és impulzus koordinátákra teljesül, hogy $\{q_i, p_i\} = 1$ a (Q2) és (Q3) axióma azonnali következménye a $[\hat{q}_i, \hat{p}_i] = i1_{\mathcal{H}}$ Heisenberg-féle határozatlansági reláció.

(ii) Nem minden (Q1), (Q2) ill. (Q3) axiómát teljesítő ábrázolás tekinthető fizikiailag ésszerű kvantummechanikai rendszernek. Baj, ha a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér „túl nagy" illetve ha bizonyos esetekben az ábrázolás reducibilis.

ELŐKVANTÁLÁS

Egy (M^{2n}, ω) szimplektikus sokaság *Liouville-féle térfogati formá*ja az $\mathbf{v} = \frac{\omega^n}{n!}$ differenciál csúcs-forma, azaz $2n$-forma. Minthogy ω sehol nem elfajuló, $\mathbf{v}$ sehol nem tűnik el. Lokálisan egy kanonikus koordináta-rendszerben $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$, tehát

$$\mathbf{v} = \mathrm{d}q_1 \wedge \ldots \mathrm{d}q_n \wedge \mathrm{d}p_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}p_n.$$

Az előkvantalás Hilbert-tere

$$\mathcal{H} := L^2(M) = \left\{ \psi : M \to \mathbb{C}; \int_M |\psi|^2 < +\infty \right\},$$

ahol a skalárszorzat a

$$\langle \psi, \psi' \rangle = \int_M \psi \overline{\psi'} \mathbf{v}$$

definícióval adott. Az (V.2.5) azonosságból látjuk, hogy az

$$\hat{f}(\psi) := iX_f \psi$$

meghatározás teljesíti (Q3)-at és triviálisan teljesíti (Q1)-et. Azonban nyilván $\hat{f}(c) = 0$, tehát (Q2) nem teljesül. Hogy (Q2) teljesüljön módosítsuk az előző probálkozást:

$$\hat{f}(\psi) := iX_f(\psi) + f\psi.$$

Ez most már teljesíti (Q2)-t és persze (Q1)-et. Most viszont (Q3) romlott el. Hogy (Q3)-at újra igazzá tegyük, s közben (Q1) és (Q2) se romoljon el, becsempészünk egy újabb tagot a képletbe:

$$\hat{f}(\psi) := i\left[X_f(\psi) + 2\pi i(\theta(X_f))\psi\right] + f\psi = i(\mathrm{d}\psi + 2\pi i\psi\theta)(X_f) + f\psi \qquad (\text{ V.3.1 })$$

ahol $\mathrm{d}\theta = \omega$ szimplektikus potenciál.

Ezzel a definícióval több probléma is van. Először is nem mindig létezik globálisan definiált szimplektikus potenciál M-en. Valóban, ha M kompakt, ω nem nulla kohomológia-osztályt reprezentál, azaz nem létezik szimplektikus potenciál. Ha viszont létezik szimplektikus potenciál, akkor meg nem egyértelmű. Mindkét problémát megoldhatjuk, ha észrevesszük, hogy a fenti hozzárendelésben megjelenő $\mathrm{d} + 2\pi i\theta$ operátor pontosan egy komplex vonalnyalábon adott, $2\pi i\theta$ konnexió mátrixú, ∇ konnexió lokális alakjával egyezik meg[9], míg a $\mathrm{d}\theta = \omega$ feltétel e konnexió görbületére a $F_\nabla = 2\pi i \mathrm{d}\theta = 2\pi i\omega$ feltétellel ekvivalens. A fenti észrevételek a következő tétellel foglalhatók össze:

5. Tétel (Az előkvantálás alaptétele). *Tegyük fel, hogy az (M, ω) szimplektikus sokaságon adva van egy $L \to M$ hermitikus*[10] *vonalnyaláb és egy ∇ konnexió L-en úgy, hogy $F_\nabla = 2\pi i\omega$. Ekkor a*

$$\mathcal{H}_L = \left\{ L \text{ négyzetesen integrálható szelései a } (s, s') = \int_M \langle s, s' \rangle \mathbf{v} \text{ skalárszorzattal} \right\}$$

Hilbert-tér illetve a

$$\begin{array}{rcl} C^\infty(M) \ni f \mapsto \hat{f} : \ \mathcal{H}_L & \to & \mathcal{H}_L \\ s & \mapsto & i\nabla_{X_f} s + fs \end{array}$$

definícióval adott hozzárendelés kielégíti Dirac (Q1), (Q2), (Q3) kvantálási szabályait. $\diamond$

Definíció. Az (M, ω) szimplektikus sokaság *kvantálható*, ha létezik az előző tételbeli (L, ∇) pár, melynek neve: *előkvantáló nyaláb.*

Megjegyzés. A Chern – Weil-elméletből következik[11], hogy

$$\left[\frac{1}{2\pi i} F_\nabla\right] = c_1(L) \in \operatorname{im}\left(H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{R})\right).$$

Azaz, ha egy (M, ω) szimplektikus sokaság kvantálható, akkor

$$[\omega] \in \operatorname{im}\left(H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{R})\right)$$

egy egész kohomológia-osztályt reprezentál. Megmutatható, hogy ez az állítás egyszeresen összefüggő sokaságra visszafelé is igaz, azaz:

6. Tétel. *Egy (M, ω) egyszeresen összefügő szimplektikus sokaság akkor és csak akkor kvantálható, ha ω egész kohomológia-osztályt reprezentál, azaz*

$$[\omega] \in \operatorname{im}\left(H^2(M, \mathbb{Z}) \to H^2(M, \mathbb{R})\right). \ \diamond$$

[9] Ld. Etesi-előadás (IV.4.2).

[10] Azaz egy komplex vonalnyaláb egy a fibrumokon simán változó hermitikus formával.

[11] Ld. Etesi-előadás 78-79. oldal.

Példa: Legyen Q sima sokaság, tekintsük a (T^*Q, ω) szimplektikus sokaságot (V.2.4). Ekkor létezik egy kanonikus globális szimplektikus potenciál, mégpedig a θ Liouville-1-forma. Ezért választhatjuk a triviális $L = M \times \mathbb{C}$ komplex vonalnyalábot és $\nabla = \mathrm{d} + 2\pi i\theta$. Ekkor $F_\nabla = 2\pi i \mathrm{d}\theta = 2\pi i\omega$, tehát (M, ω) kvantálható és (L, ∇) egy előkvantáló nyaláb. Ha most $Q = \mathbb{R}^n = (q_1, \ldots, q_n)$ akkor $\mathcal{H}_L = L^2(\mathbb{R}^{2n})$ és $\hat{p}_i = -i\frac{\partial}{\partial q_i}$ illetve $\hat{q}_i = -i\frac{\partial}{\partial p_i} + q_i$. Látjuk, hogy a Hilbert-tér „túl nagy", azaz a hullámfüggvények nem csak a pozíciótól, hanem az impulzustól is függnek.

A következőkben a fenti (illetve más, itt nem részletezett) problémák megoldásaképpen csak olyan hullámfüggvényeket fogunk tekinteni, amelyek nem függenek az impulzus koordinátáktól, azaz konstansok a kotangens tér irányában. Minthogy koordinátáktól függetlenül szeretnénk dolgozni, be kell vezetnünk a polarizáció fogalmát.

POLARIZÁCIÓK

Definíció. Egy $D \subset TM$ k rangú résznyaláb neve: *k-altér-disztribúció*. Egy $D \subset TM$ altér-disztribúció *integrálható*, ha $X, Y \in \Gamma(M, D)$ esetén $[X, Y] \in \Gamma(M, D)$.

Példák:

(i) Egy 1-altér disztribúció mindig integrálható, hiszen $[,]$ antikommutatív.

(ii) Egy M sokaság k-dimenziós diszjunkt részsokaságokkal történő lefedése egy *rétegezés*, ha lokálisan ez az előállítás $\mathbb{R}^n$ párhuzamos k dimenziós affin altereivel történő fedéssel ekvivalens. A rétegezésben résztvevő részsokaság neve: *levél*. A levelek érintő terei egy k-altér-disztribúciót határoznak meg. Sőt könnyen látható, hogy ez a disztribúció integrálható. Megmutatható, hogy ez fordítva is igaz, tehát egy disztribúció akkor és csak akkor integrálható, ha egy rétegezéshez tartozik.

(iii) Egy fibrált nyaláb teljes terét a fibrumok rétegzik. Így például a T^*M duális-érintő nyaláb teljes terét a duális-érintő terek rétegzik és így a levelek érintőterei egy D n-altér-disztribúciót definiálnak. Vegyük észre, hogy ω, a kanonikus szimplektikus forma, teljesíti az $\omega_x|_{D_x} = 0$ feltételt, más szóval $D_x \subset T_x(T^*M)$ egy Lagrange-altér[12].

A következő definíció ezt a rétegezést általánosítja koordináta-független módon tetszőleges szimplektikus sokaságra.

Definíció. Egy (M^{2n}, ω) szimplektikus sokaság egy $P \subset TM$ n-altér-disztribúciója egy *polarizálás*, ha P integrálható és minden $x \in M$ pontra $\omega_x|_{P_x} = 0$, vagyis $P_x \subset T_xM$ Lagrange-altér.

[12] Vö. Matolcsi-előadás.

Egy polarizációt *teljesen integrálhatónak* mondunk egy $H : M \to \mathbb{R}$ Hamilton-fügvényre nézve, ha $X_H \in P$.

Megjegyzés. Ha a P polarizáció teljesen integrálható a H Hamilton-fügvényre nézve, akkor a Hamilton-egyenletet elméletileg meg tudjuk oldani. Ugyanis ez esetben a mozgás a polarizáció generálta rétegezés levelein történik. Egy levélen pedig megmutatható, hogy a mozgás „lineáris" egy kanonikusan definiálható lapos torziómentes konnexióra nézve [11].

Példák:

(i) A fent definiált disztribúció T^*M-en tehát nyilván egy polarizálás. Ha azonban a $H : T^*M \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvény egy természetes Lagrange-féle mechanikai rendszer Lagrange-fügvényének Legendre-transzformáltja, akkor H mindig függeni fog az impulzus-koordinátáktól, és így X_H sohasem csak duális-érintő irányú[13], azaz a polarizáció nem teljesen integrálható. Előfordul azonban, hogy egy másik polarizáció teljesen integrálható lesz H-ra nézve, és akkor a dinamikai probléma elméletileg megoldható.

(ii) Legyenek $\{H = F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ egy teljesen integrálható hamiltoni rendszer lineárisan független páronként involucióban álló első integráljai (ld. 4. Tétel). Ekkor könnyen láthatóan az $F = (F_1, \ldots, F_n) : M \to \mathbb{R}^n$ leképezés szintfelületei egy H-ra nézve teljesen integrálható polarizációt definiálnak. Tehát a 4. Liouville-tétel speciális esete a fenti megjegyzésnek.

Definíció. Legyen $P \subset TM$ egy polarizáció, (L, ∇) egy előkvantáló-nyaláb az (M, ω) szimplektikus sokaságon. Ekkor egy $s \in \Gamma(M, L)$ *szelés polarizált*, ha $\nabla_X s = 0$ minden $X \in \Gamma(M, P) \subset \Gamma(M, TM)$.

Megjegyzés. Lokálisan léteznek polarizált szelések, lévén $F_\nabla = 2\pi i\omega$ és $\omega|_{P_x} = 0$ tehát a ∇ konnexió görbülete nulla a levelek irányában.

A kvantálás terve: Legyen $\mathcal{H}_P$ az L előkvantáló-nyaláb

polarizált L^2-szeléseinek Hilbert-tere. Ezt a teret tekintjük a kvantálás Hilbert-terének. Megmutatható, hogy ez esetben $\hat{f}(\mathcal{H}_P) \subset \mathcal{H}_P$ akkor és csak akkor, ha f megőrzi P-t, azaz $X_f \in \Gamma(M, P)$. Sajnos $\mathcal{H}_P$ triviális valós P polarizálás esetén. Ahelyett, hogy ezt a problémát megoldanánk valós polarizációkra[14] , bevezetjük a *Kähler-polarizáció* fogalmát és megmutatjuk, hogy ez esetben a fenti terv nagyon szépen működik.

[13] Más szóval a pozíció sohasem megmaradó menyiség.
[14] A probléma megoldását lásd [11]-ben.

KOMPLEX SOKASÁGOK

Definíció. Legyen V n dimenziós valós vektortér.

(i) A $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, azaz $V_{\mathbb{C}} = \{X + iY | X, Y \in V\}$ komplex vektortér a V *komplexifikált vektortere.*

(ii) Ha $Z = X + iY \in V_{\mathbb{C}}$, akkor a *konjugált vektor* a $\overline{Z} = X - iY$.

(iii) Ha $W \subset V_{\mathbb{C}}$ komplex altér, akkor $\overline{W} = \{\overline{Z} | Z \in V_{\mathbb{C}}\}$ a konjugált altér.

Megjegyzés. Ha J egy komplex struktúra V-n, akkor tekinthetjük $V_{\mathbb{C}}$

$$P_J = \{J(X) + iJ(Y) = iX - Y\}$$

komplex alterét. Egyszerűen látható, hogy $P_J \times \overline{P_J} = V_{\mathbb{C}}$ (azaz $P \subset \overline{P} = 0$ és P_J n-dimenziós). Könnyen megmutatható, hogy ez igaz fordítva is:

Lemma. *Létezik egy egy-egyértelmű megfeleltetés a V-n adott J komplex struktúrák és a $P \times \overline{P} = V_{\mathbb{C}}$ tulajdonságú $P \subset V_{\mathbb{C}}$ komplex alterek között.* $\diamond$

Definíció. Egy (T_xM, J_x) x-ben simán változó komplex struktúra M-en egy *majdnem komplex struktúrát* definiál.

Példa: Az $\mathbb{R}^{2n}$-en adott konstans J komplex struktúrát, amely minden érintőtéren a kanonikus komplex struktúrát adja, a komplex sokaságok *standard modell*jének nevezzük.

Definíció. Egy (M, J) majdnem komplex struktúra *integrálható*, ha minden pont valamely környezete izomorf[15] a standard modell egy nyílt résszével.

Megjegyzés. Tekintsünk két környezetet, amelyek izomorfok a standard modell egy nyílt részével. Ekkor az ezekhez a térképekhez tartozó $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ áttérési függvény teljesíti, hogy

$$T_\phi(JX) = JT_\phi(X) \tag{V.3.2}$$

minden $X \in T\mathbb{R}^{2n}$ érintővektor-mezőre. Legyen $\mathbb{R}^{2n}$ standard koordinátái $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ és így $J\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$. Legyen ebben a koordináta-rendszerben $\phi = (\phi_{x_1}, \ldots, \phi_{x_n}, \phi_{y_1}, \ldots, \phi_{y_n})$.

[15] Más szóval: majdnem komplex struktúrát tartóan diffeomorf.

Ily módon látható, hogy (V.3.2) a $\frac{\partial}{\partial x_i}$ érintővektor-mezőre alkalmazva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{x_j}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \phi_{y_j}}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \phi_{x_j}}{\partial y_i} &= -\frac{\partial \phi_{y_j}}{\partial x_i} \end{aligned} \qquad (\text{V.3.3})$$

úgynevezett *Cauchy – Riemann-egyenletek*be megy át.

Könnyen látható, hogy ez a gondolatmenet igaz visszafelé is, tehát, ha egy sokaságon adva van egy atlasz, ahol az áttérési fügvényekre teljesülnek a fenti (V.3.3) Cauchy – Riemann-egyenletek, akkor az egyértelműen definiál egy integrálható komplex struktúrát M-en.

Definíció. Egy M $2n$ dimenziós differenciálható sokaság egy n dimenziós komplex sokaság, ha lokálisan homeomorf $\mathbb{C}^n$ egy nyílt részhalmazával, és adott egy atlasz, melyben a $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ áttérési függvények holomorfak.

Megjegyzés. Minthogy egy függvény pontosan akkor holomorf, ha teljesíti a Cauchy – Riemann-egyenleteket, látjuk, hogy az n dimenziós komplex sokaság nem más mint egy $2n$ dimenziós sima sokaság integrálható komplex struktúrával.

Példák:

(i) $\mathbb{C}^n$ nyilvánvalóan egy n dimenziós komplex sokaság.

(ii) Legyen $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ ahol az $\sim$ ekvivalencia reláció a

$$(x_0, x_1, \ldots, z_n) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1, \ldots \lambda z_n)$$

minden $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definícióval adott. A $\mathbb{C}P^n$ tér neve: *komplex projektív tér.* Könnyen láthatóan $\mathbb{C}P^n$ egy n dimenziós kompakt komplex sokaság.

Például $n = 1$ esetén $\mathbb{C}P^1$ az ún. *Riemann-gömb*, ami egyébként az egyetlen komplex struktúra S^2-n.

Definíció. Egy $f : M \to N$ leképezés komplex sokaságok között holomorf, ha tetszőleges terképekre áttérve holomorf (azaz a Cauchy – Riemann-egyenleteket kielégítő) függvényt kapunk.

Egy $M^k \subset N^n$ részhalmaz egy komplex részsokaság, ha M^k egy komplex sokaság, az $i : M^k \to N^n$ beágyazás egy holomorf beágyazás, azaz, ha $M^k \subset N^n$ lokálisan $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$-ként térképezhető.

A következő tétel azt mutatja, hogy $\mathbb{C}P^n$ komplex geometriája igazából algebrai geometria.

7. Tétel (Chow). *$\mathbb{C}P^n$ egy M kompakt komplex részsokasága* algebrai *sokaság is, tehát polinomiális egyenletekkel írható le. Ez esetben M neve:* projektív varietás. $\diamond$

Definíció. Legyen E és M komplex sokaság és $\pi : E \to M$ holomorf. Ha π minden $p \in M$ pont körül $p \in U \subset M$ lokálisan $U \times \mathbb{C}^n \to U$ alakú, és a trivializációkat holomorf áttérési függvények kötik össze, akkor π egy *holomorf vektornyaláb.*

Egy $\pi : E \to M$ holomorf vektornyaláb szelése egy olyan $s : M \to E$ holomorf leképezés, amelyre $\mathrm{pr}_M \circ s = \mathrm{id}_M$. A holomorf szelések egy komplex vektorteret alkotnak, amit $H^0(M, E)$-vel jelölünk.

Példák:

(i) Triviális vektornyaláb: $\mathrm{pr}_M : M \times \mathbb{C}^n \to M$, ahol $M \times \mathbb{C}^n$ a szorzat komplex sokaság, míg pr_M a holomorf projekció M-re.

A triviális nyaláb szelését azonosíthatjuk egy $s : M \to \mathbb{C}^n$ holomorf leképezessel. Mikor $r = 1$ ez épp egy holomorf függvény M-en. Kompakt komplex sokaságok alapvető tulajdonsága, hogy rajtuk csak a konstans fügvények holomorfak. Ez a komplex analízis maximum-elvéből vezethető le. Ez a tulajdonság lényegesen különbözik a sima fügvényeknél megszokottól, hiszen egy kompakt differenciálható sokaságon temérdek sok sima fügvény definiálható.

(ii) Legyen $H = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}/\sim$, ahol az $\sim$ ekvivalencia reláció a

$$((z_0, z_1, \ldots, z_n), z) \sim ((\lambda z_0, \lambda z_1, \ldots, \lambda z_n), \lambda z)$$

formulával adott minden $\lambda \in \mathbb{C}^*$ esetén. Megmutatható, hogy ez egy komplex sokaság és, hogy a projekció az első faktorra ad egy $H \to \mathbb{C}P^n$ holomorf vonalnyalábot. Ezt a vonalnyalábot *hipersík-nyaláb*nak nevezzük.

Meggondolható, hogy a hipersík-nyaláb szelései azonosíthatóak $f : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorf leképezésekkel, melyekre $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}^*$ esetén, amiből pedig következik, hogy f egy lineáris függvény. Emiatt $H^0(\mathbb{C}P^n, H) = (\mathbb{C}^{n+1})^*$, egy $n+1$ dimenziós vektortér.

A CAUCHY – RIEMANN-OPERÁTOR

Legyen adva az M sima sokaságon egy integrálható komplex struktúra, J. Ekkor J definiálja a komplexifikált érintőnyaláb egy $P_J \subset T_{\mathbb{C}}M = TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ résznyalábját úgy, hogy $P_J \oplus \overline{P_J} = T_{\mathbb{C}}M$. Szokás $T^{1,0}_{\mathbb{C}}M$-el jelölni P_J-t és $T^{0,1}_{\mathbb{C}}M$-vel jelölni ennek $\overline{P_J}$ konjugáltját. Azaz a komplex struktúra definiál egy

$$T_C M = T^{1,0}_{\mathbb{C}}M \oplus T^{0,1}_{\mathbb{C}}M$$

felbontást. Továbbá jelöljük $\Lambda^{1,0}(M)$-el $T^{1,0}_{\mathbb{C}}M$ duálisát illetve $\Lambda^{0,1}(M)$-el $T^{0,1}_{\mathbb{C}}M$ duális vektornyalábját. Ily módon nyerjük

$$T^*_{\mathbb{C}}M = \Lambda^1(M) = \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{0,1}(M)$$

felbontását. Szelésekre attérve a

$$\Omega^1_{\mathbb{C}}(M) = \Omega^{1,0}(M) \oplus \Omega^{0,1}(M) \tag{V.3.4}$$

felbontást kapjuk.

Most pedig tekintjük a $\mathrm{d}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^\infty_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^1_{\mathbb{C}}(M)$ leképezést, a d külső differenciál-operátor komplexifikáltját. A (V.3.4) felbontást használva a $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}$ operátort előállíthatjuk, mint két operátor, $\partial : \mathbb{C}^\infty_{\mathbb{C}}(M) \to \Omega^{1,0}(M)$ és $\overline{\partial} : \mathbb{C}^\infty_{\mathbb{C}}(M) \to \Lambda\Omega^{0,1}(M)$ összegét. Tehát

$$\mathrm{d}_{\mathbb{C}} = \partial + \overline{\partial}.$$

A $\overline{\partial}$ operátor neve *Cauchy – Riemann-operátor.* Az elnevezés onnan származik, hogy az $\overline{\partial} f = 0$ egyenlet a Cauchy – Riemann-egyenlet függvényekre. Hogy ezt lokális koordinátákban is lássuk, legyenek $(z_1, \ldots, z_n)$ holomorf koordináták[16] M-en. Ekkor $\Lambda^{1,0}(M)$ bázisa $(\mathrm{d}z_1, \ldots, \mathrm{d}z_n)$, míg $\Lambda^{0,1}$ bázisa $(\mathrm{d}\overline{z_1}, \ldots \mathrm{d}\overline{z_n})$ lesz. Ily módon látjuk, hogy

$$\mathrm{d}f = (\partial + \overline{\partial})f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z_i}}\mathrm{d}\overline{z_i}.$$

Azaz

$$\overline{\partial} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}\mathrm{d}\overline{z_i}$$

a Cauchy – Riemann-operátor lokális alakja, a Cauchy – Riemann-egyenlet pedig az ismerős,

$$\overline{\partial} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z_i}}\mathrm{d}\overline{z_i} = 0$$

[16] A korábbi jelölésben $z_j = x_j + iy_j$

alakot nyeri lokálisan. A Cauchy – Riemann-operátor jelentősége pedig abban rejlik, hogy $\overline{\partial} f = 0$ akkor és csak akkor, ha f holomorf.

KÄHLER-SOKASÁGOK

Definíció. Legyen M sima sokaság, ekkor egy x-ben simán változó $(T_xM, J_x, \omega_x, g_x)$ kalibrált komplex struktúra[17] egy *majdnem Kähler-struktúra* M-en.

Ha továbbá mind a majdnem szimplektikus, mind a majdnem komplex struktúra integrálható, akkor a Kähler-struktúra is integrálható. Ez esetben M neve *Kähler-sokaság* és ω a *Kähler-forma.*

Megjegyzés. Mondhattuk volna egyszerűbben, hogy a Kähler-sokaság egy szimplektikus és komplex sokaság együtt úgy, hogy a $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ bilineáris forma pozitív definit, azaz egy Riemann-metrika.

Példák:

(i) A legegyszerűbb Kähler-sokaság a $\mathbb{C}^n$ a kanonikus komplex struktúrával, a $\sum_{i=1}^{n} i\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}\overline{z_i}$ szimplektikus formával és a $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}\overline{z_i}$ Riemann-metrikával.

(ii) Az előző Kähler-struktúrából redukcióval nyerhetjük $\mathbb{C}P^n$-en az ún. *Fubini – Study–* Kähler-struktúrát. Az ebből a Kähler-struktúrából származó szimplektikus formára nézve pedig $\mathbb{C}P^n$ kvantálható, és az előkvantáló nyaláb pontosan a hipersík-nyaláb.

(iii) Kähler-sokaság komplex részsokasága szintén Kähler, hiszen örökli a komplex struktúrát és a Riemann-metrikát, amiből látjuk, hogy a szimplektikus forma megszorítása a komplex részsokaságra nem degenerált.

Ebből és a fenti példából következik, hogy minden sima projektív varietás Kähler és hogy a szimplektikus formája kvantálható. *Kodaira beágyazási tétel*e ennek a fordítottját mondja:

8. Tétel (Kodaira beágyazási tétele). *Ha egy kompakt Kähler-sokaság, mint szimplektikus sokaság, kvantálható, akkor beágyazható* $\mathbb{C}P^n$*-be, tehát projektív varietás.* $\diamond$

[17] Lásd Matolcsi-előadást.

KÄHLER-POLARIZÁCIÓ

Definíció. Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság és jelölje $\underline{\mathbb{C}} = M \times \mathbb{C}$ a triviális komplex vonalnyalábot. Tekintsük a $T_{\mathbb{C}}M = T_M \otimes_{\mathbb{R}} \underline{\mathbb{C}}$ komplexifikált vektornyalábot, amely egy komplex vektornyaláb, fibruma a $(T_{\mathbb{C}}M)_p = T_pM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ komplexifikált vektortér.

Ekkor a komplexifikált érintőnyaláb egy $P \subset T_{\mathbb{C}}M$ komplex résznyalábját hívjuk *komplex disztribúció*nak.

Továbbá a $P \subset T_{\mathbb{C}}M$ komplex disztribúció egy *komplex polarizáció*, ha teljesül a következő három feltétel:

(i) $P_m \subset (T_{\mathbb{C}}M)_m$ Lagrange-altér,

(ii) $D_m = P_m \cap \overline{P}_m \cap T_{\mathbb{C}}M$ konstans dimenziós vektortér, azaz $D = P \cap \overline{P} \cap T_{\mathbb{C}}M$ egy komplex disztribúció,

(iii) P *integrálható*, azaz minden $m \in M$ pont körül léteznek $z_1, \dots z_n \in C^\infty_{\mathbb{C}}(M)$ sima komplex fügvények, hogy $\overline{X_{z_i}}$ feszítik P-t.

Példák:

(i) Tekintsünk egy valós polarizálást: $P \subset TM$. Ekkor a komplexifikált disztribúció $P_{\mathbb{C}} \subset T_{\mathbb{C}}M$ könnyen láthatóan egy komplex polarizálást ad. Ez esetben $P_{\mathbb{C}} = \overline{P_{\mathbb{C}}}$, azaz $D = P_{\mathbb{C}} \cap \overline{P_{\mathbb{C}}} = P_{\mathbb{C}}$. Ez visszafelé is igaz, tehát ha egy P' komplex polarizációra $P' = \overline{P'}$, akkor $P' = P_{\mathbb{C}}$ valamely valós polarizáció komplexifikáltja.

(ii) Egy $P \subset T_{\mathbb{C}}M$ komplex polarizációt, melyre $P \cap \overline{P} = 0$, *pszeudo-Kähler-polarizáció*nak nevezünk. Ez esetben ugyanis $P \oplus \overline{P} = T_{\mathbb{C}}M$, azaz kapunk egy J majdnem komplex struktúrát. A komplex polarizáció definíciójának (iii) feltételéből következik, hogy ez egy integrálható komplex struktúra. Így ha a $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ bilineáris forma pozitív definit, akkor egy Kähler-sokaságot kapunk. Ezeket a polarizációkat *Kähler-polarizáció*nak nevezzük. Ez visszafelé is igaz, tehát egy Kähler-sokaság mindig meghatároz egy Kähler-polarizációt. Azaz a Kähler-struktúra ekvivalens a Kähler-polarizációval!

KVANTÁLÁS KÄHLER-POLARIZÁCIÓBAN

Legyen (M, ω) egy kvantálható szimplektikus sokaság, (L, ∇) az előkvantáló-nyaláb és legyen $P \subset T_{\mathbb{C}}M$ egy Kähler-polarizáció. Ekkor L egy s sima szelését *polarizált*nak nevezzük, ha $\nabla_{\overline{X}} s = 0$ minden $X \in \Gamma(M, P)$-re. Továbbá L polarizált L^2-szeléséit $\mathcal{H}_P \subset \mathcal{H}_L$-vel jelöljük és ebben a polarizálásban a kvantált rendszer Hilbert-terének gondoljuk.

Minthogy a ∇ görbülete a levelek irányában nulla, belátható, hogy lokálisan léteznek nem triviális polarizált szelések, azaz az $\nabla s = 0$ egyenlet lokálisan megoldható nemtriviális módon. Továbbá, ha s és $s' = \Psi \cdot s$ mindketten polarizáltak, ahol $\Psi \in \mathbb{C}^\infty_{\mathbb{C}}(M)$, akkor minden $\frac{\partial}{\partial z_i}$ P-beli vektormezőre

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}} s' = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}} \Psi s = \Psi \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}} s + \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z_i}} \cdot s = \frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z_i}} \cdot s,$$

azaz $\frac{\partial \Psi}{\partial \overline{z_i}} = 0$ minden i-re, ami pedig pontosan azt jelenti, hogy Ψ egy holomorf függvény. Ily módon a Kähler-polarizáció indukál egy holomorf struktúrát L-en úgy, hogy L polarizált és holomorf szelései megegyeznek. Így kapjuk meg a geometriai kvantálás végeredményét Kähler-esetben:

$$\mathcal{H}_P = H^0(M, L).$$

ÖSSZEGZÉS

Legyen (M, ω) Kähler-sokaság, azaz egy szimplektikus sokaság egy Kähler-polarizációval. Ha mint szimplektikus sokaság kvantálható, akkor tekintjük az (L, ∇) előkvantáló-nyalábot, azaz $F_\nabla = 2\pi i \omega$ és az ebből nyert $\mathcal{H}_L$ előkvantált Hilbert-teret. Ezek után tekintjük a Kähler-polarizációt és az általa indukált holomorf struktúrát L-en. Majd a kvantálás második lépésében előállítjuk a $\mathcal{H}_P = H^0(M, L)$ Hilbert-teret.

Példa: A $\mathbb{C}P^n$ a Fubini – Study – Kähler-polarizációban előkvantálható a H hipersík-nyalábbal, mint előkvantáló-nyalábbal. A végső Hilbert-tér pedig a $H^0(M, H) \cong (\mathbb{C}^{n+1})^*$ tehát egy $(n+1)$ dimenziós vektortér lesz.

4 Jones – Witten-elmélet

AXIOMATIKUS TOPOLOGIKUS KVANTUMMEZŐ-ELMÉLET

Egy $d+1$ dimenziós topologikus kvantummező-elméletet egy Z hozzárendelés definiál, ami egy nem feltétlenül összefüggő Σ zárt, kompakt, irányított d dimenziós sokasághoz egy $Z(\Sigma)$ véges dimenziós hermitikus komplex vektorteret rendel, továbbá egy Y kompakt peremes irányított $d+1$ dimenziós sima sokasághoz, amelynek pereme Σ, egy $Z(Y) \in Z(\Sigma)$ vektort rendel a $Z(\Sigma)$ vektortérben, úgy hogy teljesülnek a következő axiómák

(A1) involutív: $Z(\Sigma^*) = Z(\Sigma)^*$, azaz a megfordított irányítású sokasághoz a duális vektorteret rendeli;

(A2) multiplikatív: $Z(\Sigma_1 \dot\cup \Sigma_2) = Z(\Sigma_1) \otimes Z(\Sigma_2)$, azaz két sokaság diszjunkt uniójához a vektorterek tenzorszorzatát rendeli;

(A3) asszociatív: $Y = Y_1 \cup_{\Sigma_2} Y_2$ esetén $Z(Y) = Z(Y_2)Z(Y_1) \in \mathrm{Hom}(Z(\Sigma_1), Z(\Sigma_2))$;

(A4) $Z(\emptyset) = \mathbb{C}$, azaz az üres d sokaságot egy 1 dimenziós vektortérbe viszi;

(A5) $Z(\Sigma \times I) = \mathrm{id}_{Z(\Sigma)} \in \mathrm{End}(Z(\Sigma))$, tehát a hengerhez az identitás-operátort rendeli.

Példa:

(i) Első példaként megmutatjuk, hogy hogyan értelmezhetjük a hamiltoni kvantummechanikát egy $0+1$ dimenziós kvantummező-elméletnek, amely kielégíti a fenti (A1)–(A4) axiómákat, azzal a módosítással, hogy az elmélet 1 dimenziós részében Y-on egy metrikát is megadunk, azaz megmondjuk a szakasz hosszát.

Legyen $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$ a rendszer Hamilton-operátora és $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ a rendszer hullámfüggvényeinek Hilbert-tere. Az elmélet 0 dimenziós része a fentiek szerint egy nulla dimenziós sokasághoz, azaz pontok diszjunkt halmazához kell Hilbert-tereket rendeljen. (A2) szerint azonban elegendő megmondanunk, hogy mi legyen a $Z(\cdot)$. Válasszuk $Z(\cdot) = \mathcal{H}$-t egy hamiltoni kvantummechanikai rendszer Hilbert-terének. Tekintsünk egy $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ zárt intervallumot. Ekkor a kvantummező-elméletnek ehhez egy $\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}$-beli elemet, azaz egy $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ homomorfizmust kell rendelnie. Legyen ez a homomorfizmus a $e^{i(t_1-t_0)H}$.

Tehát a hamiltoni kvantummechanika eme modellje kielégíti a fenti (metrikával módosított) (A1)–(A4) axiómákat. Látjuk azt is, hogy (A5) ekvilens a $H = 0$ feltétellel. Azaz egy *topologikus* kvantummező-elméletben triviális a dinamika. Fizikus szemmel ez az eset érdektelennek és triviálisnak tűnhet, azonban, ahogy a későbbiekben is

látni fogjuk, egy topologikus kvantummező-elmélet nagyon nem triviális topológiai tulajdonságokkal rendelkezhet. A legújabb elméleti fizikai kutatások eme topológiai tulajdonságok alapvető fizikai jelentőségét hangsúlyozzák.

(ii) Könnyen megmutatható, hogy $1+1$ dimenziós TKME-ek egy-egy értelműn megfelelnek véges dimenziós úgynevezett *Frobenius-algebrá*knak és így könnyen osztályozhatók (érdemes ezen a nem triviális problémán elgondolkodni). Az $1+1$ dimenziós elméletek leggyakrabban a Gromov – Witten-invariánsok, és a kapcsolódó kvantum-kohomológia matematikai elméletében bukkanak fel szuperszimmetrikus σ-modellek formájában (ld. Szenes-előadás).

(iii) $2+1$ dimenziós elméletre példa a megkonstruálandó Jones – Witten-elmélet, amelyet Witten 1989-ben dolgozott ki.

(iv) Witten 1989-ben megmutatta, hogy a 4-sokaságok híres Donaldson-elmélete megérthető egy $3+1$ dimenziós TKME keretében. Kiderül, hogy ennek 3 dimenziós része pontosan a szintén az érdeklődés középpontjában lévő úgynevezett Floer-homológia! Seiberg és Witten 1994-ben továbbment és tekintette a fenti Donaldson – Witten fizikai elmélet duálisát, amelyet Seiberg – Witten-elméletnek nevezünk. A Seiberg – Witten-elmélet technikailag könyebben kezelhető, mint a Donaldson-elmélet, ennek tudható be, hogy a Seiberg – Witten-elmélet a 4 illetve 3 dimenziós sima sokaságok osztályozásában új fejezetet nyitott. A sok új eredmény közül talán legérdekesebb a Thom-sejtés megoldása, melynek legáltalánosabb formáját Ozsváth Péter és Szabó Zoltán [8] bizonyította 1998-ban.

Az alábbiakban a Jones – Witten $2+1$ dimenziós TKME-et fogjuk megkonstruálni. Ez az elmélet a fizikus körökben már ismert, ún. $SU(2)$ Chern – Simons-elmélet:

Definíció. Az $SU(2)$ Chern – Simons-elmélet

(i) *szintje*: egy rögzített k pozitív egész szám;

(ii) *térideje*: egy M kompakt irányított (peremes) 3-sokaság;

(iii) *mezői*: A konnexió az M feletti triviális $SU(2)$ principális nyalábon;

(iv) egy *mércéje*: a P triviális $SU(2)$ principális nyaláb trivializációja;

(v) *mérce-csoportja*: $\mathcal{G}$, a fenti triviális $SU(2)$ nyaláb összes szelésének, azaz az összes $M \to SU(2)$ sima leképezésnek a csoportja;

(vi) *Lagrange-függvénye* egy rögzített mércében: $S(A) = \frac{k}{4\pi} \int\limits_M \mathrm{tr}(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)$.

Megjegyzések.

(i) A Chern – Simons-forma $A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A$ egy $\mathfrak{su}(2)$ Lie-algebra értékű 3-forma, ennek nyoma pedig egy közönséges 3-forma, aminek integrálja egy valós szám. Minthogy a Chern – Simons-hatás definíciójában az A konnexió valamely rögzített mércében szerepel, meg kell vizsgáljuk S mérce-invarianciáját.

Először is tekintsük $\mathcal{A}$-t, az összes konnexió terét az M feletti P triviális $SU(2)$ principális nyalábon. Két konnexió $A_1 - A_2$ különbségét egy $g : M \to SU(2)$ mérce transzformáció $(g^{-1}A_1 g + g^{-1}\mathrm{d}g) - (g^{-1}A_2 + g^{-1}\mathrm{d}g) = g^{-1}(A_1 - A_2)g$ alakba viszi, és így $A_1 - A_2 \in \Omega^1(M, \mathrm{ad}P)$ egy $\mathfrak{su}(2)$ Lie-algebra értékű 1-forma. Ezért $\mathcal{A}$ egy a $\Omega^1(M, \mathrm{ad}P)$ vektortéren modellezett affin tér. Ezen a téren hat a mérce csoport az $A \mapsto g^{-1}A_1 g + g^{-1}\mathrm{d}g$ szabállyal[18].

Most megvizsgáljuk, hogy $g \in \mathcal{G}$ hogyan változtatja meg a Chern – Simons-funkcionált:

$$
\begin{aligned}
& S(A) - S(g^{-1}Ag + g^{-1}\mathrm{d}g) = \\
&= \frac{k}{4\pi} \int_M \mathrm{tr}\left(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A - g^{-1}(A \wedge \mathrm{d}A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A)g \right) - \\
&- \frac{k}{4\pi} \int_M \frac{1}{3} \mathrm{tr}\left\{ (g^{-1}\mathrm{d}g) \wedge (g^{-1}\mathrm{d}g) \wedge (g^{-1}\mathrm{d}g) \right\}\} - \frac{k}{4\pi} \int_M \mathrm{tr}\, \mathrm{d}(g^{-1}A \wedge \mathrm{d}g),
\end{aligned}
$$

az első tag nulla, hiszen konjugált mátrixok nyoma megegyezik, a harmadik szintén eltűnik Stokes tétele miatt és így

$$
S(A) - S(g^{-1}Ag + g^{-1}\mathrm{d}g) = \frac{-k}{12\pi} \int_M \mathrm{tr}\{(g^{-1}\mathrm{d}g) \wedge (g^{-1}\mathrm{d}g) \wedge (g^{-1}\mathrm{d}g)\},
$$

másrészt megmutatható, hogy a

$$
\frac{1}{24\pi^2} \int_M \mathrm{tr}\{(g^{-1}\mathrm{d}g) \wedge (g^{-1}\mathrm{d}g) \wedge (g^{-1}\mathrm{d}g)\},
$$

megegyezik a $g : M \to SU(2)$ leképezés fokával és így egy egész szám (vö. Etesi-előadás). Ebből következik, hogy $S(A)$ jól definiált mod 2π. Ha tekintjük az $\mathbb{R} \to S^1$; $x \mapsto e^{2\pi i x}$ leképezést, akkor látjuk, hogy $S : \mathbf{A} \to S^1$ jól definiált.

(ii) Ugyanúgy, mint a Lagrange-féle klasszikus mechanikában, csak azok az A mezők lesznek mozgásai a rendszernek, amelyek kritikus pontjai az S Chern – Simons-funkcionálnak. Vizsgáljuk meg tehát az S funkcionál egy A kritikus pontját: Legyen

[18] Ld. Etesi-előadás (IV.4.4)

$A_t = A + at$ egy egyenes $\mathcal{A}$-ban, ahol $a \in \Omega^1(M,\ \mathrm{ad}P)$. Ekkor

$$\begin{aligned} S(A_t) &= \frac{k}{4\pi}\int\limits_M \mathrm{tr}\left(A_t \wedge \mathrm{d}A_t + \frac{2}{3}A_t \wedge A_t \wedge A_t\right) \\ &= S(A) + \frac{tk}{4\pi}\left\{\int\limits_M \mathrm{tr}(F_A \wedge a) + \int\limits_M \mathrm{d}\,\mathrm{tr}(A \wedge A)\right\} + O(t^2) \\ &= S(A) + \frac{tk}{4\pi}\int\limits_M \mathrm{tr}(F_A \wedge a) + O(t^2). \end{aligned}$$

Minthogy A kritikus pontja S-nek $\int\limits_M \mathrm{tr}(F_A \wedge a) = 0$ minden $a \in \Omega^1(M,\ \mathrm{ad}P)$ esetén. Következik, hogy $F_A = 0$. Megmutatható, hogy ez igaz visszefelé is, tehát, A akkor és csak akkor kritikus pontja S-nek, ha lapos, azaz $F_A = 0$.

A következő fejezetben kiszámoljuk a Jones – Witten-elmélet 2 dimenziós részét azaz megkvantáljuk a hamiltoni fázisteret.

AZ ELMÉLET 2 DIMENZIÓS RÉSZE – HAMILTONI FORMALIZMUS

Legyen $M = \Sigma \times I$, ahol Σ egy g génuszú zárt irányítható felület és I az egység-intervallum. Jelölje továbbá P_Σ a Σ triviális $SU(2)$-nyalábot, $\mathcal{A}_\Sigma$ a P_Σ-beli konnexiók affin terét illetve $\mathcal{G}_\Sigma = \mathrm{Map}(\Sigma, SU(2))$ az P_Σ mérce-transzformáció csoportját.

Ekkor egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ M feletti $SU(2)$-konnexió I irányú komponense, egy megfelelő mércében, eltűnik. Emiatt egy M feletti A konnexióra gondolhatunk úgy, mint egy görbére az $\mathcal{A}_\Sigma$ végtelen dimenziós affin térben. Azonban, mint fent láttuk, ezek a görbék közül csak azok lesznek a rendszer valódi mozgásai, amelyek az $\mathcal{A}_\Sigma$ egy bizonyos alterére, a Σ feletti lapos $SU(2)$-konnexiók alterére vannak korlátozva. Ha

$$\mu : \mathcal{A}_\Sigma \to \Omega^2(\Sigma,\ \mathrm{ad}P_\Sigma);\ \ \mu(A) = F_A, \qquad (\text{V.4.1})$$

akkor ez az altér a $\mu^{-1}(0) \subset \mathcal{A}_\Sigma$. Emiatt a hamiltoni formalizmusban a klasszikus fázistér az $\mathcal{M} = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_\Sigma$ tér, azaz a Σ feletti lapos $SU(2)$ konnexiók tere moduló mérce transzformációk.

Minthogy egy lapos konnexió holonómiája minden összehúzható görbén nulla, ezért egy tetszőleges görbén a holonómia csak a görbe homotópia-osztályától függ. Így megmutatha-

tó, hogy egy lapos konnexió egyértelműn leírható egy $\pi_1(M) \to SU(2)$ homomorfizmussal:

9. Tétel. $\mathcal{M} \cong \{\text{lapos konnexiók } P_\Sigma\text{-n}\}/\mathcal{G}_\Sigma \cong \operatorname{Hom}(\pi_1(\Sigma) \to SU(2))/\text{konjugálás}$. $\diamond$

Ez a tétel tehát egy fogalmilag egyszerűbb térrel azonosítja elméletünk fázisterét. Ismeretes, hogy a $\pi_1(\Sigma)$ csoport megadható generátorokkal és relációkkal a

$$\pi_1(\Sigma^g) = \langle A_1, B_1, \dots A_g, B_g | \Pi_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1} = 1 \rangle$$

alakban. Tekintsük az

$$r : (SU(2))^g \times (SU(2))^g \to SU(2)$$

leképezést a

$$r(A_1, B_1, \dots A_g, B_g) = \Pi_{i=1}^g A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1}$$

definícióval. Ekkor nyilván

$$\mathcal{M} \cong r^{-1}(1)/SU(2).$$

Ebből az előállításból látjuk, hogy $\mathcal{M}$ kompakt.

Továbba igaz az is, hogy *irreducibilis* reprezentációkhoz[19] tartozó $\mathcal{M}$-beli pontok körül létezik[20] kanonikus sokaság struktúra. Gondolhatunk $\mathcal{M}$-re mint egy szinguláris sokaságra. Ha $g > 1$, akkor az irreducibilis reprezentációk egy sűrű nyílt halmazt alkotnak. A sokaság dimenzióját pedig könnyen kiszámolhatjuk a definíciójából, ugyanis $(SU(2))^g \times (SU(2))^g$ $6g$ dimenziós, így $r^{-1}(1)$ $(6g-3)$ dimenziós és így $\dim(\mathcal{M}) = 6g - 3 - 3 = 6g - 6$.

SZIMPLEKTIKUS STRUKTÚRA $\mathcal{M}$-EN

Tekintsük a végtelen dimenziós $\mathcal{A}$ affin tér érintőterét: $T\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_\Sigma \times \Omega^1(\Sigma, \operatorname{ad}P_\Sigma)$. Legyen $a, b \in \Omega^1(\Sigma, \operatorname{ad}P_\Sigma)$ két érintővektor az $A \in \mathbf{A}_\Sigma$ pontban. Ekkor definiáljuk az $\tilde{\omega}$ differenciál 2-formát

$$\tilde{\omega}(a, b) = -\frac{k}{4\pi} \int_\Sigma \operatorname{tr}(a \wedge b)$$

képlettel. Minthogy a definíció független A-tól így a 2-forma konstans és így $\mathrm{d}\tilde{\omega} = 0$, továbbá az is látható, hogy $\tilde{\omega}$ nem degenerált. Ily módon nyerünk egy $(\mathcal{A}, \tilde{\omega})$ végtelen dimenziós szimplektikus teret. Továbbá a $\mathcal{G}_\Sigma$-hatás $\mathcal{A}_\Sigma$-n megőrzi ezt a szimplektikus formát, és megmutatható, hogy $\mathcal{M} = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_\Sigma$ (sima pontjaiban) örököl egy $\omega \in \Omega^2(M)$ szimplektikus formát.

Van tehát egy $(\mathcal{M}, \omega)$ szimplektikus sokaságunk és ezt szeretnénk megkvantálni. Ehhez geometria kvantálást használunk. Kiderül ugyanis, hogy $(\mathcal{M}, \omega)$ kvantálható, azaz létezik

[19] Egy $f : \pi(\Sigma) \to SU(2)$ reprezentáció reducibilis, ha f képe $SU(2)$ egy $U(1)$ részcsoportjába esik, egyébként irreducibilis.

[20] Ennek oka, hogy irreducibilis pontokban r szubmerzió, azaz deriváltja szürjektív.

rajta (L, ∇) előkvantáló nyaláb, tehát $F_\nabla = 2\pi i\omega$. Ahhoz, hogy a kvantálás második felét végre tudjuk hajtani, szükségünk van egy polarizációra $\mathcal{M}$-en. Ehhez felruházzuk Σ-t valamely τ komplex struktúrával, és tekintjük az $\mathcal{A}_\Sigma$ komplexifikált érintőnyalábján adódó

$$T_{\mathbb{C}}\mathcal{A}_\Sigma = \Omega^1_{\mathbb{C}}(\Sigma_\tau,\ \mathrm{ad}P_\Sigma) = \Omega^{1,0}(\Sigma,\ \mathrm{ad}P_\Sigma) \oplus \Omega^{0,1}(\Sigma_\tau) \qquad (\text{V.4.2})$$

felbontást. Kiderül, hogy ez egy Kähler-polarizáció és, hogy $\mathcal{G}_\Sigma$ ezt megtartja. Így kapunk egy Kähler-polarizációt $(\mathcal{M}, \omega)$-en. A 3. fejezetben leírtak szerint nyerünk egy holomorf struktúrát L-en. Továbbá a geometriai kvantálás Hilbert-tere a $\mathcal{H}_P = H^0(\mathcal{M}, L)$ vektortér lesz. A k-adik szintű elméletben $\mathcal{M}$-en a $k\omega$ szimplektikus formát, illetve az (L^k, ∇) előkvantáló nyalábot tekintve, a fenti (V.4.2) komplex struktúra egy P_k Kähler-polarizációt eredményez a $(\mathcal{M}, k\omega)$ szimplektikus sokaságon. A 3. fejezet szerint ebben a polarizációban a geometriai kvantálás Hilbert-tere a $\mathcal{H}_{P_k} = H^0(\mathcal{M}, L^k)$ komplex vektortér. A továbbiakban rögzítjük k-t.

A fenti konstrukció tehát megad egy véges dimenziós vektorteret minden τ komplex struktúrára Σ-n. Ily módon kapunk egy vektornyalábot a Σ komplex struktúráinak T_Σ terén. T_Σ egy $(3g-3)$ dimenziós komplex sokaság, neve *Teichmüller-tér*. Megmutatható, hogy létezik egy kanonikus (projektíven) lapos konnexió ezen a vektornyalábon és így $H^0(\mathcal{M}_\tau, L^k)$ kanonikusan azonosítható[21] minden τ-ra.

Ezt a vektorteret rendeli Witten [10]-ben a Σ irányítható felülethez. Azaz a k-adik szintű elméletben $Z(\Sigma) = H^0(\mathcal{M}_\tau, L^k)$. Witten arra is rámutat, hogy ez a vektortér megegyezik bizonyos konform mező-elméletbeli úgynevezett *konform blokkokkal*. Ezek dimenzióját pedig a *Verlinde-formula* adja meg[22] :

$$\dim\left(Z(\Sigma^g)\right) = \sum_{j=1}^{k+1} \left[\frac{k+2}{2\sin^2\left(\frac{j\pi}{k+2}\right)}\right]^{g-1}. \qquad (\text{V.4.3})$$

Végezetül megemlítjük, hogy ezt a formulát a lapos konnexiók modulusterének geometriájából először Aaron Bertram-nak és Szenes Andrásnak sikerült bizonyítania [9] 1993-as cikkükben.

AZ ELMÉLET 3 DIMENZIÓS RÉSZE – LAGRANGE-FORMALIZMUS

Ahhoz, hogy kiderüljön mi köze a Jones-polinomnak a Chern – Simons-elmélethez relativizálnunk kell a TKME axiómáit. Ahelyett tehát, hogy Σ irányított felületekhez rendelnénk vektortereket, pontjaiban megjelölt felületeket tekintünk. Egy Σ irányított felületet

[21] Pontosabban csak $P(H^0(\mathcal{M}_\tau, L^k))$ azonosítható ily módon, lévén az előbb említett konnexió csak projektíven lapos.

[22] Minthogy a baloldalon egy egész szám áll, így a formulából következik, hogy a jobb oldal is egész. Ez önmagában is egy nem triviális állítás.

véges sok pontjában egy G kompakt Lie-csoport irreducibilis reprezentációjával megjelőlve pontjaiban megjelölt felülethez jutunk; azaz: $(\Sigma, (p_1, R_1) \dots (p_n, R_n))$, ahol $p_i \in \Sigma$ és R_i a G kompakt Lie-csoport egy irreducibilis reprezentációja.

A relativizált elmélet 3 dimenziós részében pedig Y kompakt peremes sokaságokat tekintünk, melyben megjelölünk véges sok irányított diszjunkt szakaszt (1 dimenziós irányított kompakt részsokaságot) a G kompakt Lie-csoport irreducibilis reprezentációjával. A szakaszok lehetnek zártak és diszjunktak Y peremétől, vagy lehetnek végpontjaik a Y peremén, amikor transzverzálisak a peremre. Az új relatív objektumot $(Y; (C_1, R_1), \dots, (C_n, R_n))$-el jelöljük, ahol C_i fenti típusú szakasz ill. $R_i \in \mathrm{Irr}(G)$. Ennek határa egy pontjaiban megjelölt irányított felület lesz. Ily módon természetes módon kiterjeszthetjük a TKME axiómáit a relatív esetre.

A relatív esetben célunk a módosított TKME axiómákat kielégítő $Z(\Sigma, (p_1, R_1) \dots (p_n, R_n))$ vektortér rendelése, egy pontjaiban megjelölt felülethez illetve egy

$$Z((Y; (C_1, R_1), \dots, (C_n, R_n)))$$

vektor a pereméhez tartozó vektortérben.

A relatív elmélet 2 dimenziós részét a fenti abszolút esethez teljesen analóg módon konstruálhatjuk meg úgy, hogy a Σ feletti lapos konnexiók $\mathcal{M}$ tere helyett a $\Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$ felett tekintünk lapos konnexiókat.

Mikor Y zárt, akkor minden C_i zárt görbe és $Z((Y; (C_1, R_1), \dots, (C_n, R_n)))$ az üres halmazhoz tartozó 1 dimenziós vektortérben ad egy vektort, azaz egy komplex számot. A továbbiakban ezt a komplex számot szeretnénk kiszámolni a Chern – Simons-elméletben.

Definíció. Legyen M zárt irányított 3-sokaság, G egy kompakt Lie-csoport. Továbbá legyen $C \subset M$ egy zárt, irányított, összefüggő 1 dimenziós részsokaság, irányított M-beli zárt görbe. Végezetül legyen $R : G \to GL(n, \mathbb{R})$ egy n dimenziós irreducibilis reprezentáció. Ekkor az úgynevezett *Wilson-hurok* definíciója:

$$\begin{array}{rccl} W(C,R): & \mathbf{A} & \to & \mathbb{C} \\ & A & \mapsto & \mathrm{tr}_R(\mathrm{Hol}_C(A)), \end{array}$$

azaz tekintjük az A konnexió C görbe menti holonómiáját és vesszük ennek az R reprezentációban adódó nyomát.

Megjegyzés. Gondolhatunk a $W(C, R)$ Wilson-hurokra, mint egy klasszikus mező-elméletbeli megfigyelhető mennyiségre. Fizikus terminológiával a Wilson-hurkot „statikus nem abeli töltésnek” is nevezik.

A Wilson-hurkok és egy Feynman-integrál segítségével könnyen felírhatjuk Witten mindent megvilágító képletét:

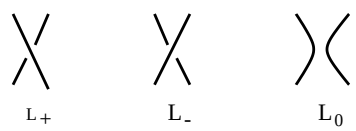
$$Z\left(Y;(C_1,R_1),\ldots,(C_n,R_n)\right)=\int\limits_{\mathbf{A}} W(C_1,R_1)\cdot\ldots\cdot W(C_n,R_n)e^{-iS(A)}DA. \qquad (\text{V.4.4})$$

A jelölés azt érzékelteti, hogy kiintegráljuk **A**-n valamely DA mérték szerint az integrandusban megjelenő $\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ függvényt. Bár ez a definíció igen elegáns, fő problémája, hogy matematikailag a fenti Feynman-integrál nincsen definiálva. Mindazonáltal a fizikusok heurisztikusan tudnak vele számolni, és így konzisztens eredményekhez vezet. Ez a jelenség emlékeztethet minket a Dirac-delta fügvényre, mellyel sokáig a fizikusok úgy számoltak, hogy nem volt precízen definiálva. Később a Dirac-deltát precízen értelmezték disztribúcióként. A Feynman-integrállal, a kvantummező-elméletek napjainkra talán legfontosabb eszközével is hasonló lehet a helyzet, bár az, hogy Feynman már az 1940-es években ezzel számolt és azóta senkinek sem sikerült precíz matematikai alapokra helyeznie arra mutat, hogy a probléma igen nehéz. Az Atiyah-féle axiómatikus TKME egy igen speciális esetben próbálja megkerülni a problémát, a fizikusok által a Feynman-integrálra használt manipulációkat axiomatizálva.

Mielőtt a Jones – Witten-elmélet főtételéhez érünk, emlékeztetünk arra, hogy a Jones-polinomot[23] a következőképpen definiálhatjuk. A triviális irányított csomóra legyen 1 és egy tetszőleges irányított láncra

$$t^{-1}J_{L_+}-tJ_{L_-}-(t^{1/2}-t^{-1/2})J_{L_0}$$

teljesüljön, ahol L_+ egy rögzített L irányított láncdiagram esetén egy rögzített metszéspont pozitív irányítású metszéspontra való kicseréléséhez tartozó irányított láncdiagram. L_- ugyanennek a metszéspontnak a negatív irányítású metszéspontra való kicseréléséhez tartozó láncdiagram, míg L_0 a metszéspont megszüntetésével előálló láncdiagram.



V.1. ábra: A bogozási reláció

Végezetül kimondjuk az előadássorozat fő eredményét[24]:

[23] Részletesebb magyarázatért lásd az izgalmas [6]-t.

[24] Minthogy ez az eredmény matematikailag nem jól definiált „Tétel” megnevezés helyett „Állításként” hivatkozunk rá.

1. Állítás (Witten). *Legyen $L = C_1 \dot\cup \ldots \dot\cup C_n$ egy lánc S^3-ban. Ekkor a k-adik szintű $SU(2)$ Chern – Simons-elméletben a* (V.4.4) *integrál az L lánc J_L Jones-polinomját számolja a következő értelemben:*

$$Z\left(S^3; (C_1, R), \ldots, (C_n, R)\right) = J_L(e^{\frac{2\pi i}{k+2}}),$$

ahol: $R : SU(2) \to GL(2, \mathbb{C})$ az $SU(2)$ definiáló reprezentációja. $\diamond$

Megjegyzések.

(i) Witten érvelése azállítás megfogalmazása során a TKME axiómáin kivül támaszkodik a konform mező-elméletek több eredményére, ezeket itt nem tudjuk ismertetni.

(ii) Matematikailag precíz formában a Jones – Witten TKME Z funktorát Reshetikhin és Turaev [7] konstruálta meg 1991-ben reprezentáció-elméleti módszerekkel. Ily módon kapunk többek között egy zárt 3-sokaság-invariánst az úgy nevezett Reshetikhin – Turaev – Witten-invariánst.

(iii) Már a Reshetikhin – Turaev – Witten-invariánsból is ráismerhetünk a fentiekben vázolt Chern – Simons-elméletre. Például a k-adik szinten $Z(\Sigma \times S^1)$ megegyezik $Z(\Sigma)$ dimenziójával, azaz pontosan a (V.4.3) Verlinde-formulát számolja ki, ami, mint fent láttuk előkerül, mint konform blokkok dimenziója, illetve a Σ-n élő lapos konnexiók modulusterének Kähler-polarizációban történő geometriai kvantálás végeredményeként adódó Hilbert-tér dimenziója.

TOVÁBBI OLVASNIVALÓK

A fent vázolt Jones – Witten-elmélet 2 dimenziós részéről [2]-ban olvashatunk részletesebben, bár ez nem egy nagyon könnyű könyv, lévén nincsenek benne részletesen definiálva a fogalmak, de eligazításra jól használható.

Kicsit fizikusabb szemszögből, de még mindig közel matematikai precizitással ír a Jones – Witten-elméletről Nash [5] könyvében, ahol a kvantummező-elméletek számos más differenciáltopológiai alkalmazását is megtalálhatjuk.

Természetesen a legjobb, bár legnehezebb forrás az eredeti [10] cikk, ahol megtalálhatjuk a Jones – Witten-elmélet fizikai hátterét is.

A Reshetikhin – Turaev munkáról és egyéb érdekes csomó- és 3-sokaság-invariánsokról magyarul olvashatunk Rimányi Richárd jól használható [6] művében.

Geometriai kvantálásról, amely a szimplektikus geometria napjainkban is élénk területe, olvashatunk a matematikiai fizikus Woodhouse matematikusi igényességű [11] könyvében.

Végezetül ne felejtsük ki a magyarul olvasható [1]-ot sem, amely a szimplektikus geometriához nyújt kézzelfogható motivációt a klasszikus mechanikán keresztül.

Irodalomjegyzék

[1] V.I. Arnold: *A mechanika matematikai módszerei*, Műszaki könyvkiadó, Budapest (1985);

[2] M. Atiyah: *Geometry and Physics of Knots*, Cambridge University Press (1990);

[3] S.F. Donaldson, P.B. Kronheimer: *The Geometry of Four-manifolds*, Oxford University Press, (1991);

[4] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, New York, Wiley (1978);

[5] C. Nash: *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press, London, (1991);

[6] R. Rimányi: *Csomók és 3-sokaságok*, MAFIHE, (1995);

[7] N. Reshetikhin, V. Turaev: *Invariants of three dimensional manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **102** (1991) 547-597;

[8] P. Ozsváth, Z. Szabó: *The symplectic Thom conjecture*, Ann. of Math.,megjelenés alatt, math.DG/9811087;

[9] A. Bertram, A. Szenes: *Hilbert polynomials of moduli spaces of rank 2 vector bundles. II.*, Topology **32** (1993), no. 3, 599–609;

[10] E. Witten: *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121**, 351-400 (1989);

[11] N.M.J. Woodhouse: *Geometric Quantization*, Oxford University Press, 2. ed., (1994).

VI. A kvantummező-elméletek szerkezete

Etesi Gábor
MTA Rényi Alfréd
Matematikai Kutatóintézet
Reáltanoda utca 13-15.
Budapest, 1053

etesi@math-inst.hu

1 Bevezetés

A most következő néhány oldal anyaga a Nyári Iskolán nem hangzott el. Célja az, hogy érthetőbbé tegye az érdeklődő olvasó számára Szenes András most következő rendkívül érdekes előadását; pontosabban, az *Atiyah-féle axiomatikus kvantummező-elmélet*ek fogalomalkotásait szertnénk kicsit megvilágítani. Ez egy igen mély és lényegretörő megfogalmazása egy kvantummező-elmélet alapvető fogalmainak, s magva az a fölismerés, hogy fundamentális párhuzamot ismertek föl a matematikusok és a fizikusok a *differenciáltopológia*, ill. a *kvantummező-elméletek* (a továbbiakban KME) bizonyos fogalmai között. Ezek a párhuzamok ekképpen foglalhatók össze:

DIFFERENCIÁLTOPOLÓGIA	KVANTUMMEZŐ-ELMÉLET
n dimenziós sokaság (tér)	Hilbert-tér (kvantumállapotok)
kobordizmus n dimenziós Riemann-sokaságok között (téridő)	operátor (folyamat)
identitás-kobordizmus	identitás-operátor
kobordizmusok kompozíciója	operátorok kompozíciója

VI. 1. 1. Táblázat: A differenciáltopológia és a KME kapcsolata

A két nyelv (kategória) között az áttérést a Z-vel jelölt funktor adja meg, melyet *Feynman-integrál*nak nevezünk (l. Hausel Tamás előadását). A fontos fölismerés itt az, hogy a téridő n dimenziója nem egy tetszőleges szám, hanem tényleg az a dimenzió, amit a kvantummező egy pillanatban „érez". Így például, a kvantummechanika tere nulla dimenziós kell legyen, hiszen, ez az elmélet a nulla dimenziós tömegpont kvantumos dinamikáját írja le; ez a tény a szokásos kvantummechanikai fölépítésben nem látszik, csak később, a pályaintegrálos megfogalmazásból domborodott ki.

Most nagyon röviden megmutatjuk, hogy a kvantummechanika fogalmainak egyszerű átértelmezésével hogyan interpretálható az, mint $0+1$ dimenziós KME; ezátal az ugyanolyan kvantummező-elmélet lesz, mint bármelyik másik, s a bizonytalan „másodkvantálás" fogalmát is elkerülhetjük a mezőelméletek felé tett bátor továbblépéskor. További hasznos olvasmányok [1][2].

2 Átfogalmazás

Először tekintsük át gyorsan az iskolai kvantummechanika megfogalmazását!

AZ ISKOLAI KVANTUMMECHANIKA

A hagyományos fölépítés alapfogalma a $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ *hullámfüggvény.* Azt mondjuk, hogy egy kavntumos dinamikának alávetett idealizált tömegpontot ez jellemez. Fönnáll, hogy minden rögzített $t \in \mathbb{R}$ esetén $\psi(t, \cdot\,) \in L^2(\mathbb{R}^3) =: \mathcal{H}_t$, sőt, azt követeljük meg, hogy $\|\psi(t, \cdot\,)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$. A $\mathcal{H}_t$ teret *állapottérnek* nevezzük. Ha $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy *potenciál*, akkor a tömegpont időbeli fejlődését a

$$\frac{i}{\hbar}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle\psi + V(x,t)\psi$$

Schrödinger-egyenlet írja le. Láthatóan a potenciált egyszerre csak a tér egyetlen x pontjában kell kiértékelni, ami azt mutatja, hogy valóban egy „pont" dinamikájáról van szó.

Ha A egy kvantumos megfigyelő, vagyis egy szimmetrikus operátor a $\mathcal{H}$ téren, valamint egy teljes rendszert alkotnak a $\{u_n | n \in \mathbb{N}\}$ sajátvektorok λ_n sajátértékekkel, akkor annak a valószínűsége, hogy a ψ állapotú rendszeren végzett mérés λ_n-t ad

$$|\langle \psi, u_n \rangle|^2.$$

Mivel valamilyen értelemben pont mozgásáról van szó, értelmes kérdés az, mi a valószínűsége, hogy a részecske az (x,t) helyen van; ennek valószínűség-sűrűségét $|\psi(x,t)|^2$ adja.

Láthatóan végigvonul ezen a fölépítésen a „szétkent oszthatatlan pont" dilemmája. Egy rendkívüli mélységeket nyitó megközelítést *Feynman* dolgozott ki *Dirac* ötlete nyomán. Azt a kettősséget, hogy egy *pont* mozog a térben, de valahogy „szétkenten" (amire az a tény utal, hogy a ψ hullámfüggvénye az egész téren értelmezett), tegyük kicsit megragadhatóbbá oly módon, hogy a tömegpont maradjon tömegpont, vagyis egy közönséges görbén mozogjon, de *egyszerre a lehetséges összes* (mondjuk folytonos) *görbén*, melyek pl. két pont, (x,t) és (x',t') közt haladnak. Ebben a képben tehát a közönséges tömegpont kvantumos mozgását leírjuk, ha olyan leírást találunk, mely az összes görbén való végighaladást figyelembe veszi. Ez a formalizmus az ún. *Feynman-* vagy *pályaintegrál*os megközelítés, melyet itt nem részletezünk, minden „standard" kvantummechanikai könyvben megtalálahtó. Csak az áttérés lényeges mozzanatait emeljük ki.

A KVANTUMMECHANIKA, MINT $0+1$ DIMENZIÓS KME

Tehát egy szótár néhány címszavát közöljük most. Szeretnénk a „mező kiterjedtségét" és a „tér dimenzióját" valahogy összekapcsolni. Ez természetes elvárás, hiszen azt érezzük, hogy valahogy a tér tulajdonságai (pl. a dimenziója) a rajta értelmezhető fundamentális fizikai objektumok tulajdonságaival kapcsolatosak és viszont.

Mivel a kvantummechanika Feynman-féle megfogalmazásában radikálisan eldöntöttük, hogy a kvantumrészecske egy egyszerű pont, s kvantumos viselkedését nem a részecskének magának, hanem az időfejlődésének tudtuk be, ezért azt akarjuk, hogy a kvantummechanika teret és mezőt természetesen összekapcsoló leírásában a tér is legyen nulla dimenziós. Ezáltal téridőnk $0+1=1$ dimenziós lesz, amit a $(0,\beta)$ intervallummal realizálhatunk (tehát az állapot–tér, folyamat–téridő koncepció lebeg szemeink előtt).

Ezt úgy váltjuk aprópénzre, hogy egyszerűen a

$$\{\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}\} \longmapsto \{\Phi : (0,\beta) \to \mathbb{R}^3)\} \qquad (\text{VI.2.1})$$

ún. *klasszikus mező*vel helyettesítjük a hullámfüggvényt; ekkor az $(0,\beta)\times\mathbb{R}^3$ triviális nyaláb szeléseit kapjuk, vagyis $\Phi \in \Gamma((0,\beta)\times\mathbb{R}^3)$. Ennélfogva egy $((0,\beta),g) =: (M,g)$ Riemann-sokaság a téridő (a g metrika most triviális), mely a mező „kiterjedtségét", míg a $(\mathbb{R}^3,h) =: (N,h)$ egy „belső tér", amely valahogy a mező „dinamikájának bonyolultságát" méri. Egy mező pedig egy $\Phi : M \to N$ leképezés, vagyis egy pálya $\mathbb{R}^3$-ban.

Most szertnénk egy $\mathcal{H}_t$ „állapotteret" rendelni minden $\{t\}$ pillanatbeli térhez, vagyis $\{t\}$-hez. Erre nincs kanonikus eljárás, pl. a kvantummechanikában a

$$Z : \{t\} \mapsto \mathcal{H}_t := L^2(\{t\}\times\mathbb{R}^3) \qquad (\text{VI.2.2})$$

meghatározással élhetünk. Láthatóan ennek a térnek a bevezetése önkényes, nem indokloja semmi az eddigiek alapján a komplex értékű függvények fölbukkanását. Az igazi KME tanulmányozásakor az állapotterek konstruálására természetes *geometriai* lehetőség nyílik, ahogy majd látjuk.

A következő lépés annak megértése, hogy mi felel meg ebben a leírásban a dinamikának. Értelemszerűen bevezetve a $V : \Gamma(M,N) \to F(M)$ potenciált, tekintsük a potenciálban mozgó tömegpont Lagrange-függvényét (ld. Hausel-előadás):

$$L(\Phi) := h_{ij}\dot{\Phi}^i\dot{\Phi}^j + V(\Phi) \qquad (\text{VI.2.3})$$

Az ehhez tartozó hatás

$$S(\Phi) = \int_M L(\Phi)\mathbf{v} = \int_0^\beta L(\Phi(t))\mathrm{d}t.$$

A továbblépéshez egy technikai megjegyzést kell tennünk. A $\mathcal{H}_t$ állapottér, a négyzetesen integrálható függvények tere nem más, mint a $W^0(\mathbb{R}^3)$ Szoboljev-tér. Ezt cseréljük ki a $W^{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ Szoboljev-térre, mely tartalmazza a Dirac-delta disztriúciókat is, ennélfogva létezik egy $\mathbb{R}^3 \subset W^{-1/2}(\mathbb{R}^3)$, $x \mapsto \delta_x$ beágyazás (ilyenkor a határozatlansági relációkkal lesz baj, de ezt most felejtsük el). Ily módon az $\mathbb{R}^3$ pontjait állapotokként foghatjuk föl.

Képzetes idő esetén precíz számolással megmutatható, hogy annak kvantummechanikai valószínűségét, hogy a részecske az (x,t) pontból, vagyis állapotból az (x',t') pontba jut, az

$$\langle (x,t)|S|(x',t')\rangle = K_s(x,x') = \int\limits_{T(x,t,x',t')} e^{-S(\Phi)}\mathrm{D}\Phi$$

ún. *Feynman–Kac-formula* (abszolút értéke) adja meg, ahol $T(x,t,x',t') := \{\Phi|\Phi(t) = x, \Phi(t') = x'\}$, S az ún. „szórásmátrix" ($s = t'-t$); az integrál a görbék végtelen dimenziós terén értelmezett (Wiener-integrál). Vegyük észre, hogy az integrál függ a $(0,\beta)$ intervallum paraméterezésétől, vagyis a $\{t\}$, $\{t'\}$ sokaságok közti $C_{t,t'}$ kobordizmustól. Azt is írhatjuk, hogy egy $Z : \mathcal{C} \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{C}$ a két pont közti paraméterezett, irányítható kobordizmusok csoportja)

$$Z:\ (0,\beta) \longmapsto \int\limits_{\{\Phi|\cdot\}} e^{-S(\Phi)}\mathrm{D}\Phi \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_0) \qquad (\text{VI.2.4})$$

hozzárendelést adtunk meg (kihasználva, hogy $\mathcal{H}_t \simeq \mathcal{H}_u$). E végtelen dimenziós „mátrix" egy komponense éppen $K_u(x,y)$ és a föntebbi módon kell kiszámolni.

Összefoglalásképpen azt állapíthatjuk meg, hogy a Hausel-előadásban definiált axiomatikus KME keretében sikerült (legalábbis formálisan) megragadni a kvantummechanikát (ellenőrizhető, hogy a többi axióma is kielégül). A (VI.2.2) hozzárendelés azt mondja, hogy a térhez kvantumállapotokat tartalmazó vektortereket, míg (VI.2.4) alapján a *paraméterezett* téridőhöz pedig egy e vektrotéren ható lineáris operátort rendel a Z funktor, aminek realizációja a titokzatos Feynman-integrál.

3 Az $n+1$ dimenziós KME szerkezete

Az imént a kvantummechanika egy egyszerű KME-té nőtte ki magamagát; ezen megedződve már bepillanthatunk egy általános KME szerkezetébe.

Legyen (S,g') egy n dimenziós *kompakt* Riemann-sokaság, mely a teret reprezentálja. Legyen (N,h) egy tetszőleges másik Riemann-sokaság (pl. egy euklideszi vektortér, vagy bármi), mely a mezők „belső szbadsági fokait" reprezentálja. (Esetleg több ilyen N sokaság is van, attól függően, mennyire bonyolult az elmélet.) Legyen adott továbbá egy (M,g) Riemann-sokaság, melyre $(\partial M, g|_{\partial M}) \simeq (S,g')$. Ez a sokaság reprezentálja a téridőt. Tekintsünk egy sima (esetleg triviális) F fibrált nyalábot M fölött, melynek fibrumai diffeo-

morfak N-nel (pl. az Etesi-előadásban egy spinorokat és Yang–Mills-mezőket tartlamazó klasszikus mezőelméletben $F = E \otimes S$, vagyis egy vektornyaláb; de ez nem szükségszerű az ún. nemlineáris elméletekben, ld. Szenes-előadás).

Klasszikus relativisztikus mezőnek nevezzük a $\Phi \in \Gamma(F)$ (sima) szeléseket (anyagmezők). Az n térdimenzió megint a mező kiterjedtségével kapcsolatos, pl. az elektrodinamikában az E, H elektromos- ill. mágneses mezők igazi háromdimenziós mezők, tehát itt az $n = 3$ választásra valódi okunk van). Adjuk meg a Z KME-i funktort valahogyan, vagyis minden ∂M_i peremkomponensre adott a

$$Z : \partial M_i \longmapsto \mathcal{H}_{\partial M_i} \qquad (\text{VI.3.1})$$

hozzárendelés. Pl., ha F fibrumai komplex vektorterek, élhetünk a

$$\mathcal{H}_{\partial M_i} := W^s(F|_{\partial M_i}) = \overline{\Gamma(F|_{\partial M_i})}$$

választással (a fölülhúzás pl. az $s = -1/2$ Szoboljev-norma szerinti lezárást jelöl), miáltal $\mathcal{H}_{\partial M}$ egy komplex Hilbert-tér lesz. A kvantummechanikában az ilyen „geometriai eredetű" állapottér konstruálására nem nyílt mód, ui. ott a perem nulla dimenziós volt.

Ekkor $\Gamma(F|_{\partial M_i}) \subset \mathcal{H}_{\partial M_i}$, vagyis a klasszikus mezők peremen fölvett értékei állapotokként foghatók föl. Tegyük föl, hogy téridőnk $M = S \times \mathbb{R}$ alakú, vagyis van egy kitűntetett időparaméter (ez sajnos nem túl elegáns föltevés). Vezessük be a $\phi_\pm := \Phi|_{\partial M_{\pm\infty}}$ jelölést. Szeretnénk a

$$\langle \phi_- | \, S \, | \phi_+ \rangle$$

„szórásmátrix-elemet" meghatározni. Egy KME, (VI.2.3) mintájára, valamilyen $L(\Phi)$ Lagrange-függvénnyel adott, melyhez egy S hatás tartozik. A hatást használva a szórásmátrix elemeit meg lehet határozni formális manipulációkkal [3]. Kiderül, – az ún. *LSZ-redukció* alkalmazásával – hogy az általános mátrixelemek ismeretéhez elegendő azoknak az ismerete, melyek azt mondják meg csupán, hogy a $\partial M_{-\infty}$ sokaság előre megadott $(x_1, ..., x_n)$ pontjaiban Dirac-delta-szerű $\phi_-(x_1), ..., \phi_-(x_n)$ értékekkel jelenlévő mező (az-az állapot; itt használjuk ki, hogy a konstruált W^s térben disztribúciók is vannak, ami megint csak zavaró a határozatlansági relációk szempontjából, de ezt most is felejtsük el) milyen valószínűséggel megy át a ∂M_∞ perem valamely $(y_1, ..., y_m)$ pontjaiban Dirac-delta-szerűen jelenlevő, szintén valamilyen értékekkel adott mezőbe (vagyis állapotba). A Feynman–Kac-formula mintájára erre formálisan az a válasz, hogy

$$\langle \phi_-(x_1)...\phi_-(x_n) | \, S \, | \phi_+(y_1)...\phi_+(y_m) \rangle = \frac{1}{V} \int\limits_{\Gamma(F)} f_\Phi(\Phi(x_1)...\Phi(y_m)) e^{-S(\Phi)} \mathrm{D}\Phi,$$

ahol

$$f_\Phi : \underbrace{N \times ... \times N}_{m+n} \longrightarrow \mathbb{C}$$

alkalmas, a Φ mező „típusa” által meghatározott lineáris függvény. Az V normálási tényező nem más, mint

$$\int\limits_{\Gamma(F)} e^{-S(\Phi)}\mathrm{D}\Phi.$$

Az efféle mátrixelemeket néha egyszerűen

$$\langle \phi_-(x_1)...\phi_-(x_n)\phi_+(y_1)...\phi_+(y_m)\rangle$$

alakban is írják. Vegyük észre azt is, hogy elméletünk *euklideszi*, mert mindenhol Riemann-metrikát használtunk. Ezért tűnt el a kitevőből az i. Tehát ismét azt mondhatjuk, hogy a *paraméterezett* téridőhöz, vagyis egy Riemann-sokasághoz a Z funktor segítségével egy

$$M \longmapsto \int\limits_{\Gamma(F)} f_\Phi(\,\cdot\,)e^{-S(\Phi)}\mathrm{D}\Phi \in \mathcal{H}_{-\infty}\otimes\mathcal{H}^*_{\infty} \qquad (\text{VI.3.2})$$

lineáris operátort rendeltünk. Vegyük észre a hasonlóságot (VI.2.2), (VI.3.1), valamint (VI.2.4), (VI.3.2)közt. Legyen $l := m+n$ és vezessük be a

$$\Gamma(t_1,...,t_l) := \int\limits_{\Gamma(F)} \exp\left(-\int\limits_{\partial M} L(\Phi)\mathbf{v} + (t_1\delta_{\phi_-(x_1)} + ... + t_l\delta_{\phi_+(y_m)})\Phi\right)\mathrm{D}\Phi$$

„generáló funkcionált”. A formulában a Dirac-delták úgy hatnak, hogy pl. az x_1 ponthoz a Φ mező előre megadott $\phi(x_1)$ értékét rendeli, vagyis $\delta_{\phi_-(x_1)}\Phi = \phi_-(x_1)$. Ekkor fomálisan

$$\Gamma_{1...l} := \left.\frac{\partial^l\Gamma}{\partial t_1...\partial t_l}\right|_{t_1=...t_l=0} = \langle \phi_-(x_1)...\phi_-(x_n)\phi_+(y_1)...\phi_+(y_m)\rangle\,. \qquad (\text{VI.3.3})$$

Véleményünk szerint ezek már elegendőek a most következő izgalmas dolgozat megértéséhez.

Irodalomjegyzék

[1] M.F. Atiyah: *The geometry and physics of knots*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990);

[2] J.C. Baez: *Higher-Dimensional Algebra and Planck-Scale Physics*, gr-qc/9902017;

[3] M. Kaku: *Quantum Field Theory*, Oxford University Press (1993).

VII. Kvantumelmélet és algebrai geometria

Szenes András
Department of Mathematics
MIT, 2-169 Cambridge
MA 02139, USA

szenes@math.mit.edu

1 Bevezetés

Az elmúlt évtizedben a matematika és a fizika összefonódása egy fantasztikus új szintre emelkedett. Amíg az évszázad elején Wigner „a matematika váratlan effektivitásáról" beszélt a fizikában, mostanában inkább a fizikai ötletek váratlan effektivitásának lehetünk tanui a matematikában. Szinte egy új tárgyról a „fizikai-matematikáról" beszélhetünk.

Ebben az előadásban a fizikus gondolkodásmód egy ilyen alkalmazására szeretnék mutatni egy példát. A tárgyalás szükségszerűen sematikus lesz, de remélem a legfontosabb ötletek érthetőek lesznek. A matematikai problémakör, amiről szó lesz, az *enumerativ algebrai geometria* és a problémák, amelyekhez végül is fizikai módszerekkel lehetett hozzáférni, több mint száz évesek voltak!!!

Először lássunk egy rövid bevezetést az algebrai geometriába.

2 Algebrai geometria

Alaptestnek általában $\mathbb{C}$-t, a komplex számokat fogjuk venni. $\mathbf{A}^n$ jelöli a $\mathbb{C}$ fölötti n dimenziós lineáris teret[1], amelyen a koordinátákat általában $(x_1, \ldots, x_n)$-nel fogjuk jelölni.

Számunkra az érdekes függvények $\mathbf{A}^n$-en a *polinom*ok lesznek, azaz a

$$P = \sum a_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

alakú kifejezések, ahol $a_{i_1 \ldots i_n}$ komplex együtthatók. A P polinom *foka* a tagjai fokainak maximuma:

$$\deg(P) = \max(i_1 + \ldots + i_n).$$

A P polinom *homogén*, ha minden tagjának foka ugyanaz. Például: $x_1 x_2 + x_3^2$ homogén,

[1] Ezt néha *affin* térnek is nevezik.

míg $x_1 + 1$ nem. Egy függvény *racionális*, ha két polinom hányadosaként reprezentálható.

A SÍK GEOMETRIÁJA

Az algebrai geometria alapja a polinomok és ezek nullhelyei közti dualitás. Például: a (valós) síkon az $p = x_1^2 + x_2^2 - 1$ polinom egy kört határoz meg. Ez persze világos. Amin érdemes elgondolkozni az az, hogy bármely polinom, amely eltűnik ezen a körön, az p-nek egy többszöröse lesz. Az algebrai geometria a polinomok algebrai tulajdonságait próbálja összekapcsolni a nullhelyek geometriai tulajdonságaival.

Az $\mathbf{A}^2$ sík egy olyan részhalmazát, amely egy kétváltozós polinom nullhelyeiként előáll, *algebrai síkgörbé*nek nevezünk.

Példa: A körvonal $\mathbb{R}$ feletti algebrai síkgörbe, mely egyenlete: $P = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Viszont az $x_2 = \sin(x_1)$ nem algebrai síkgörbe.

Persze jól tudjuk, hogy van egy másik módja is érdekes görbéket kreálni a síkon, ez pedig: a parametrizálás. Egy *racionális görbe* a síkon egy $x : \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^2$ racionális leképezés képeként áll elő, azaz $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ahol $x_1(t)$ és $x_2(t)$ racionális függvények. Ilyenkor x képe egy algebrai síkgörbe. Tehát a racionális görbék a síkgörbék egy valódi részhalmazát alkotják. A racionális görbe fogalma természetes módon általánosítható magasabb dimenziókra.

Példa:

(i) Legyen $x_1 = t$ és $x_2 = t^2$, tehát a parabola egy valós racionális görbe.

(ii) Viszont egy úgynevezett elliptikus görbe, például, $x_1^2 - x_2^3 - 1 = 0$ racionálisan nem parametrizálható. Nem racionális görbék létezését egy kicsit később bizonyítjuk.

KITERJESZTÉS

Válasszuk a $\mathbb{K}$ alaptestet a komplex számok $\mathbb{C}$ testének. (Ekkor a kör és a hiperbola azonos lesz.)

Egy fontos variánsa a fentieknek a projektív terek geometriája. Ebben $\mathbf{A}^n$-t, az affin teret, $\mathbb{P}^n$-nel, a *projektív tér*rel helyettesítjük, amely az $\mathbf{A}^{n+1}$-beli origón átmenő egyenesek halmaza. Másképp azt mondhatjuk, hogy faktorizálunk a következő relációval:

$$\mathbb{P}^n := (\mathbf{A}^{n+1} \backslash \{0\})/(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (\lambda x_0, \lambda x_1 \ldots \lambda x_n) \quad (\lambda \neq 0).$$

$\mathbb{P}^n$ azon pontjai, ahol $x_0 \neq 0$, természetes módon egy affin síkot alkotnak: $\mathbf{A}^n \subset \mathbb{P}^n$.

A definícióból könnyen látható, hogy bármely $n+1$ változós homogén polinom nullhelyei egy jóldefiniált részhalmazát adják $\mathbb{P}^n$-nek. Az is könnyen látható, hogy például egy homogén affin térgörbe mindig természetesen kiterjeszthető $\mathbb{P}^2$-re, azaz egy *projektív síkgörbét* határoz meg, amelyet egy háromváltozós homogén polinommal adunk meg. Pl: $x_0^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$ nullhelyei jól definiáltak, mint $\mathbb{P}^2$ pontjai.

Egy *d-fokú projektív racionális görbét* pedig egy $x : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ leképezés definiál, ahol $x(t_0, t_1) = (x_0(t_0, t_1), x_1(t_0, t_1), x_2(t_0, t_1))$ és $x_0(t_0, t_1), x_1(t_0, t_1), x_2(t_0, t_1)$ d-ed fokú homogén polinomok. Pl: $x_0 = t_0^2 + t_1^2, x_1 = t_0t_1, x_2 = t_0^2 - t_1^2$. A fogalom könnyen általánosítható magasabb dimenziókra.

Egy projektív görbe fokát általában egy általános helyzetű hipersíkkal való metszéspontok számaként definiáljuk. A projektív egyenes ez esetben 1 fokú. Magasabb dimenziókban egy görbét persze több egyenlettel kell megadni és a fok kiszámítása nehezebb lehet.

*Lineáris síkgörbé*nek nevezzük az $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ egyenletű görbét.

Ekkor egy racionális síkgörbe d-ed fokú, ha egy általános helyzetű lineáris görbét d pontban metsz.

Kérdés: *Racionális-e minden síkgörbe?*

Válasz: Nem.

Ennek belátásához paraméter-számolást használunk: $d = 1$-re 2 paraméter, $d = 2$-re 5 paraméter, általában $\binom{d+2}{d} - 1$ paraméterrel írható le az összes d-ed fokú síkgörbe. Míg a racionális görbéket $3d-1$ paraméterrel lehet leírni. Következésképpen nem minden síkgörbe racionális:

A görbe foka: (d)	1	2	3
Síkgörbék paramétereinek száma: $\binom{d+2}{d} - 1$	2	5	9
Racionális görbék paramétereinek száma: $3d - 1$	2	5	8

VII. 2. 1. Táblázat: d-ed fokú sík- ill. racionális görbék paramétereinek száma

Probléma. *Adott P polinom racionális görbét határoz-e meg?* Erre a kérdést meglepően nehéz válaszolni.

Tétel. *Létezik algoritmus, ami véges időn belül eldönti, hogy egy adott P polinom racionális-e vagy sem.* $\diamond$

Feladat: *Vegyünk $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{P}^2$ általános helyzetű pontokat. Hány d-ed fokú racionális görbe megy át rajtuk?*

Ahhoz, hogy véges számot kapjunk, n-et $3d-1$-nek kell választanunk. Ha az adott pontokon átmenő d-ed fokú görbék számát N_d-vel jelöljük, akkor a következő táblázatot állíthatjuk össze:

Fok (d)	$3d-1$	Rac. g. száma (N_d)	Megoldás
1	2	1	triviális
2	5	1	könnyű
3	8	12	klasszikus
4	11	620	1873, Zeuthen
5	14	87304	1993, Kontsevich

VII. 2. 2. Táblázat: $3d-1$ ponton átmenő d-ed fokú racionális görbék száma

A problémát végül Kontsevich oldotta meg 1993-ban elméleti fizikai ötletekkel. A megoldást rekurzív alakban adta meg:

$$N_d = \sum_{d_1+d_2=d} N_{d_1} N_{d_2} \left[d_1^2 d_2^2 \frac{(3d-4)!}{(3d_1-2)!(3d_2-2)!} - d_1^3 d_2 \frac{(3d-4)!}{(3d_1-1)!(3d-3)!} \right] \quad \text{(VII.2.1)}$$

A következő fejezetben vázolunk egy „fizikus” bizonyítást erre az állításra.

Előbb azonban vizsgájunk meg egy másik, hasonló leszámlálásos feladatot, ami a híres tükörszimmetriával kapcsolatos.

Feladat: *Hány darab racionális d-ed fokú görbe van egy általános 5-öd fokú hiperfelületen $\mathbb{P}^4$-ben?*

Paraméter-számolással kapjuk, hogy a $\mathbb{P}^4$-beli 5-öd fokú hiperfelületek $5d+1 = 5(d+1)-4$ paraméterrel írhatók le.

Az pedig, hogy egy racionális $x : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^4$ görbe rajta van egy $P \subset \mathbb{P}^4$ hiperfelületen, a $P(x_0(t_0,t_1),\ldots,x_4(t_0,t_1)) = 0$ egyenlet írja le, ami $5d+1$ feltétel.

Tehát várhatóan véges sok d-ed fokú racionális görbe van egy általános 5-öd fokú hiperfelületen. Jelöljük ezek számát n_d-vel.

1991-ben fizikusok a húrelméletben feltételezett tükörszimmetria felhasznalásával meg tudták sejteni n_d értékét minden d-re. Matematikusok aztán matematikai módszerekkel megmutatták, hogy $d = 3$-ra a fizikusok által megadott szám helyes, majd 1996-ban Givental [1] bebizonyította, hogy a fizikusok számolási eljárása a helyes eredményre vezet. A dolgozat Kontsevich munkáján alapul [2]. Ez egy rendkívül érdekes és mély eredmény.

Fok (d)	Rac. g. száma (n_d)	Megoldás
1	2875	1885, Schubert
2	609250	1986, ?
3	317206375	1991, fizikusok

VII. 2. 3 Táblázat: d-ed fokú rac. görbék száma egy általános 5-öd fokú hiperfelületen

Térjunk most vissza az első feladathoz, azaz N_d meghatározásáról lesz szó.

3 Fizikus megoldás

Először is írjuk le a problémát egy kicsit másképp. A racionális görbékre, melyek átmennek $3d-1$ ponton, úgy is lehet gondolni, mint olyan leképzésekre, melyek $\mathbb{P}^1$-et és annak $3d-1$ kijelölt pontját $\mathbb{P}^2$-be és benne $3d-1$ (a sorrend számít!) előre megadott pontba viszik. Mindez persze izomorfia erejéig, azaz ha két ilyen leképezést egy $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tört-lináris leképezés köt össze, akkor ezeket azonosnak tekintjük. Ekkor általánosíthatjuk a problémát oly módon, hogy azon $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ leképezéseket számoljuk, melyek valamely $3d-1+m$ $\mathbb{P}^1$-en adott pontot $3d-1$ előre megadott pontba illetve m egyenesbe viszik $\mathbb{P}^2$-n. Jelöljük az ilyen leképezések számát $N_{d,m}$-mel. Persze a fok definíciója miatt ha már találtunk egy ilyen leképezést, akkor ez d ilyen leképzést ad ha m-et $m+1$-re cseréljük. Tehát ha képezzük a következő hatványsort:

$$\Gamma(y_1, y_2) = \sum_{d\geq 1} N_d e^{y_1 d} \frac{y_2^{3d-1}}{(3d-1)!}. \qquad \text{(VII.3.1)}$$

Ekkor nyilvánvalóan

$$\Gamma_{\underbrace{22\ldots2}_{3d-1}\underbrace{11\ldots1}_{m}}(0,0) = N_{d,m},$$

ahol az indexek parciális deriválást jelentenek. Ez az egész egy kicsit problémás, ha a pontok száma 3-nál kisebb, de ezzel most nem fogunk foglalkozni.

A Γ generátor-függvény segítségével az (VII.2.1) alaprekurziót a következő elegáns formában lehet leírni:

$$\Gamma_{222} + \Gamma_{111} \cdot \Gamma_{122} = \Gamma_{112}^2. \qquad \text{(VII.3.2)}$$

Vegyük észre, hogy a formulában csak azok az esetek játszanak szerepet, amikor legalább 3 pont van $\mathbb{P}^1$-n.

Erre az egyenletre adunk fizikus bizonyítást. A Γ hatványsor egy kvantumfizikai modell korrelációs-függvényét fogja reprezentálni.

NEMLINEÁRIS KVANTUMMECHANIKA, MINT $0+1$ DIMENZIÓS KME

Kezdjük egy egyszerű példával. Legyen M és N két Riemann-sokaság. A mezők ebben az elméletben a $\Phi : M \longrightarrow N$ leképezések lesznek és az elméletet definiáló hatást az

$$S(\Phi) = \int\limits_M L(\Phi)\mathrm{v}$$

integrál adja meg, ahol L az elmélet *Lagrange-függvénye*. Itt tehát M játssza a téridő szerepét és mivel egy Riemann-sokaságot választottunk, elméletünk *euklideszi* lesz. Általában a mezők egy lineáris térben veszik fel lehetséges értékeiket, de a mi esetünkben nem. Ezért hívják a modellt *nemlineáris*nak.

Szokásos módon a megfelelő kvantumelmélet konstrukciójának kiindulási pontja az úgynevezett *pályaintegrál*:

$$Z(\varepsilon) = \int\limits_{\{\Phi:M\to N\}} \exp\left(-\varepsilon S(\Phi)\right) \mathrm{D}\Phi.$$

Az integrál az összes Φ leképezés végtelen dimenziós terén értendő, és persze nincs jól definiálva. Az egyik feltevesünk az lesz, hogy ez az integrál értelmes.

Tekintsük először a $\dim M = 1$ esetet. Egy $0+1$ dimenziós euklideszi KME, ami nem más mint a jól ismert kvantummechanika képzetes idővel (N alkalmas megválasztása esetén). Itt a téridő egy 1 dimenziós $(0,\beta)$ szakasz. Jelölje a $\{h_{ij}\}$ mátrix az N sokaság h metrikus tenzorát az érintőtér $\{\frac{\partial}{\partial\Psi^i}\}$ bázisában.

Egy $\Phi : [0,\beta] \to N$ mező *hatását* a

$$S(\Phi) = \int\limits_0^\beta L(\Phi) = \int\limits_0^\beta h_{ij}\dot{\Phi}^i\dot{\Phi}^j \,\mathrm{d}t$$

formulával van adva, ahol $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = \dot{\Phi}$.

Ez a modell egy diffúziós rendszert ír le. A rendszer lehetséges klasszikus állapotai a $\Phi : M \to N$ leképezések, az összes kvantumállapotok halmaza pedig egy ehhez asszociált Hibert-tér (ld. a könyv előző fejezetét!).

Az időfejlődést ebben a térben egy $\{I_t | t \in (0,\beta)\}$ operátor-félcsoport írja le, mely eleget tesz a

$$I_t I_u = I_{t+u}$$

(kompozíciós) egyenletnek. Ebből következik, hogy $I_t = e^{-tH}$, ahol is H az úgynevezett *Hamilton-operátor*. Az I_t operátort a sokaság pontjai által megadott bázisban egy végtelendimenziós $K_t(x,y)$ $(x,y \in N)$ „mátrix" adja meg. Heurisztikusan $|K_t(x,y)|^2$ az x-ból y-ba t idő alatt eljutásnak a valószínűségét méri. Számunkra fontos lesz a kompozíciós egyenlet következő formában való leírása:

$$K_{t+u}(x,x') = \int\limits_{y\in N} K_t(x,y)K_u(y,x')\mathrm{d}y, \qquad \text{(VII.3.3)}$$

ami egyszerűen a mátrixszorzás folytonos változata. Figyeljük meg mi történt: a téridőt tetszőleges módon kétfelé vágtuk, majd összegeztünk a valószínűségeket az összes lehetséges közbülső klasszikus állapot, vagyis $(0,\beta) \to N$ pálya szerint.

A másik fontos képlet a híres *Feynman – Kac-formula*:

$$K_t(x,x') = \left(e^{-tH}\right)_{xx'} = \langle x|e^{-tH}|x'\rangle = \int\limits_T e^{-S(\Phi)}\mathrm{D}\Phi,$$

ahol $T := \{\Phi|, \Phi(0) = x, \Phi(t) = x'\}$, a hatás $S(\Phi) = \int_0^\beta L(\Phi(t))\mathrm{d}t$ míg a Lagrange-függvény a

$$L(\Phi) = g_{ij}\dot{\Phi}^i\dot{\Phi}^j + V(\Phi)$$

formulákkal adottak. Az integrál egy végtelen dimenziós téren van adva, ahol a mérték önmagában nem definiált, csak a teljes integrandussal együtt, mikor is a neve *Wiener-mérték*.

Mikor $V \equiv 0$, akkor $S(\Phi)$ minimális, ha Φ geodetikus, azaz a legrövidebb út x és x' között.

Világos, hogy $V \equiv 0$ esetén $S(\Phi)$ erősen függ a $(0,\beta)$ intervallum átparaméterezéstől.

A fenti modell az 1 dimenziós *nemlineáris σ-modell*. Ez általánosítható magasabb dimenziókra, úgy, hogy az intervallum helyett magasabb dimenziós (M,g) Riemann-sokaságot tekintünk. A mezők ekkor $\phi : M \to N$ leképezések lesznek, míg a Lagrange-függvénybe pedig belecsempésszük g-t: $L = g_{ij}\dot{\Phi}^i_\alpha\dot{\Phi}^j_\beta h^{\alpha\beta}$ (ez akkor jó Lagrange-függvény, ha $M = W \times \mathbb{R}$ alakú, vagyis van egy természetes „idő", ami szerint deriválni tudunk).

Az általánosított elmélet is, a fentiekben tárgyalt 1 dimenzióshoz hasonlóan függeni fog a g metrikától. Egyetlen esetben azonban, mikor M két dimenziós, az elméletnek extra szimmetriái lesznek: ez a *két dimenziós σ-modell*.

A KÉT DIMENZIÓS SZUPERSZIMMETRIKUS σ-MODELL

Emlékezzünk két dologra az iskola korábbi előadásaiból:

(i) Egy sima sokaságon adott f függvény deriváltja egy $\mathrm{d}f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$ 1-forma.

(ii) Egy n dimenziós sokaságon egy n-formát tudunk (koordináták nélkül) integrálni.

Ezek miatt a Lagrange-függvényben egy 2-formát fogunk kapni, amelyet (majdnem) fogunk tudni integrálni a g metrika felhasználása nélkül. Kicsit kényelmesebb áttérni komplex koordinátákra.

Tekintsük a komplex számokat: $\mathbb{C} = \{x+iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ mint két dimenziós sima sokaságot. Definiáljuk a következő komplexifikált érintővektorokat:

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y),$$

illetve komplexifikált 1-formákat

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y.$$

Ha most definiáljuk a

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$$

differenciál-operátorokat, akkor könnyen látható, hogy $\partial + \bar{\partial} = \mathrm{d}$. A $\bar{\partial}$ operátor neve *Cauchy – Riemann-operátor.*

Tekintsünk egy (Σ, g) két dimenziós irányítható Riemann-sokaságot. Minden pontban az érintőtér egy két dimenziós irányított euklideszi tér, ezért definiálhatunk egy majdnem komplex struktúrát rajta a 90 fokkal való pozitív irányú forgatással. Mi több, minden pont környezetében definiálhatunk lokális komplex koordinátákat, melyek kompatibilisek ezzel a forgatással. (Ez a két dimenzió sajátossága.) Komplex jelöléssel tehát a hatást $S(\Phi) = \int\limits_{\Sigma} L(\Phi)$ alakba írhatjuk, ahol a Lagrange-függvényt a

$$L(\Phi) = h_{ij}\partial_z\Phi^i\partial_{\bar{z}}\Phi^j, \tag{VII.3.4}$$

kifejezéssel adjuk meg, ami független a g metrikától, csak a J komplex struktúrára érzékeny. Másképpen: ha a g mertikát megszorzunk egy valáos értékű sima függvénnyel. akkor a hatás nem változik. Ezért a két dimenziós nemlineáris σ-modellt *konform-invariáns*nak mondjuk.

A kvantumelmélet egy általanos elve, hogy a klasszikus modell szimmetriái reprezentálhatóak a kvantumelmélet Hilbert-terén szimmetria-operátorokként. Például, ha m :

$\Sigma \to \Sigma$ egy komplex struktúrát megőrző leképezés, más szóval: konform leképezés, akkor $L(\Phi \circ m) = L(\Phi)$, és ebből következőleg m hat a KME Hilbert-terén. Egy ilyen mezőelméletet *konform mezőelméletnek* hívjuk.

Konformhoz hasonló téridő-szimmetriák mellett léteznek belső szimmetriák is. Ezek közé tartozik az úgynevezett *szuperszimmetria*. Létezik a fenti két dimenziós nemlineáris σ-modellnek egy szuperszimmetrikus kiterjesztése, ami azt jelenti, hogy megfelelő módon extra mezőket vezetünk be, és új tagok jelennek meg a Lagrange-függvényben, melyek az új mezők kölcsönhatásait írják le. Ezt a modellt most nem fogjuk részletesen leírni; jelöljük az új Lagrange-függvényt L_S-sel.

Az ily módon nyert L_S-nek a konform szimmetrián kívül még van egy szimmetriája is, a szuperszimmetria; ez hat a Hilbert-téren egy $\delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ transzformációval, mégpedig nilpotens módon, azaz $\delta^2 = 0$. Emiatt $\mathrm{im}(\delta) \subset \ker(\delta)$. Ha érdeklődésünket csak a δ kohomológia-terére: a

$$\frac{\ker(\delta)}{\mathrm{im}(\delta)} =: H_\delta$$

térre szorítjuk meg, akkor az így nyert elmélet egy 1+1 *dimenziós topologikus kvantummezőelmélet* (TKME) lesz. Azaz $L_{S,\delta}(\Phi) = L_{S,\delta}(\Phi \circ m)$, ahol $m : \Sigma \to \Sigma$ tetszőleges *homeomorfizmus*.

A mi esetünkben $\Sigma^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{x\}$ *pontozott* Riemann-gömb a téridő, a TKME Hilbert-tere (az axiomatikus formalizmusban $Z(S^1)$) pedig $H^*(\mathbb{P}^2, \mathbb{C})$, $\mathbb{P}^2$ kohomológiája lesz, vagyis

$$H_\delta \cong H^*\left(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}\right).$$

Ezt a teret Poincaré-dualitással azonosíthatjuk $H_*(\mathbb{P}^2, \mathbb{C})$-vel, $\mathbb{P}^2$ homologiájával. Ismeretes, hogy a nem nulla homológia-csoportok: $H_0(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, mely egy pont O_0 fundamentális osztályával, $H_2(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, mely egy egyenes O_1 fundamentális osztályával, és $H_4(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, mely a pedig az egész projektív sík O_2 fundamentális osztályával vannak generálva. Tehát $H\delta \cong \mathbb{C}^3$.

Tegyük föl, hogy $\delta(\phi) = \delta(\Phi|_{\partial\Sigma^1}) = 0$, vagyis $[\phi] \in H_\delta$. Ez az elmélet topologikus jellege miatt azt jelenti, hogy a ϕ alapállapot, vagyis *vákuum*. Klasszikusan tehát a Φ mező az L_S Lagrange-függvényt *minimalizálja*. Ha az L_S függvényt részletesen leírtuk volna, akkor könnyedén megmutathatnánk, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha a $\Phi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ leképezés *holomorf* (emlékezzünk, L tartalmazza a Cauchy – Riemann-operátort); ez viszont a *Chow-tétel*[2] miatt azt jelenti, hogy imΦ algebrai sokaság $\mathbb{P}^2$-ben. Tehát az adott pontokon átmenő racionális görbék problémáját úgy fogalmazzuk át fizikus nyelvre, hogy keressük a szuperszimmetrikus nemlineáris σ-modell azon Φ vákuum-mezőit, melyek előre megadott x_i $\mathbb{P}^1$-beli pontokat előre megadott $\mathbb{P}^2$-beli pontokba képeznek, vagyis ismerjük a mező $\phi(x_i)$ értékeit. Az előző fejezet (VI.3.3) kifejezése pontosan ennek a helyzetnek, mint „szórási feladatnak" a valószínűségét adja meg. Ésszerű *föltételezni*, hogy ez a *valószínűség*

[2] l. a Hausel-előadás 6. tételét!

kapcsolatban van a kivánt tulajdonságú leképezések *számával.* Ennélfogva a (VII.3.1) hatványsort a

$$\Gamma(y_1, y_2) = \int\limits_{\Gamma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2)} \exp\left(- \int\limits_{\mathbb{P}^1} L_{S,\delta}(\Phi)\mathbf{v} + y_1 O_1 + y_2 O_2 \right) \mathrm{D}\Phi$$

Feynman-integrál számolja. Itt O_1-el az O_1 fix egyenes Dirac-delta függvényét jelöljük.

Valójában egy kicsivel többet tudunk. Módosítsuk a Γ hatványsort a következőképpen:

$$\tilde{\Gamma}(y_0, y_1, y_2) := \frac{1}{2}(y_0^2 y_2 + y_0 y_1^2) + \Gamma(y_1, y_2)$$

A módosított hatványsort a következő Feynman-integrál számolja:

$$\tilde{\Gamma}(y_0, y_1, y_2) = \int\limits_{\Gamma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2)} \exp\left(- \int\limits_{\mathbb{P}^1} L_{S,\delta}(\Phi)\mathbf{v} + y_0 O_0 + y_1 O_1 + y_2 O_2 \right) \mathrm{D}\Phi.$$

Ha Σ^n egy 0 génuszú n peremkomponensű felület, akkor a fenti TKME egyszer egy $Z(\partial\Sigma^n) \cong \mathcal{H}^{\otimes n} \cong (H^*(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}))^{\otimes n}$ vektorteret rendel a peremhez, illetve egy $z(\partial\Sigma^n) \in Z(\partial\Sigma^n) \cong (H^*(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}))^{\otimes N}$ vektort rendel a peremhez tartozó vektortérhez. Ez a vektor nem más, mint a mező értékei az n perempontban:

$$z(\partial\Sigma^n) = \phi(x_1) \otimes ... \otimes \phi(x_n).$$

Látható, hogy ekkor

$$\langle z(\partial\Sigma^n), O_0^{\otimes k_0} \otimes O_1^{\otimes k_1} \otimes O_2^{\otimes k_2} \rangle = \tilde{\Gamma}_{\underbrace{0\ldots0}_{k_0}\underbrace{1\ldots1}_{k_1}\underbrace{2\ldots2}_{k_2}}, \qquad \text{(VII.3.5)}$$

ahol a bal oldal a $z(\partial\Sigma^n)$ vektor $O_0^{\otimes k_0} \otimes O_1^{\otimes k_1} \otimes O_2^{\otimes k_2}$-hez tartozó együtthatója (ami viszont azt mondja meg, hogy az x_i pontok k_1 egyenesbe és k_2 pontba képződnek).

Tekintsünk egy 0 génuszú 4 peremkomponensű felületet, Σ^4-et. Ez egy S^2 gömbfelület, melyből 4 diszjunkt pici körlapot kihagytunk. Ekkor a fentiek szerint a TKME ehhez a 2 dimenziós felülethez egy $z(\partial\Sigma^4) \in (H^*(\mathbb{P}^2, \mathbb{C}))^{\otimes 4}$ vektort rendel a peremhez rendelt vektortérben.

Az alábbiakban a (VII.3.3) kompozíciós szabály felhasználásával kétféleképpen is kiszámoljuk a $\langle z(\partial\Sigma^4), O_1 \otimes O_1 \otimes O_2 \otimes O_2 \rangle$ számot, azaz a $z(\partial\Sigma^4)$ vektor $O_1 \otimes O_1 \otimes O_2 \otimes O_2$ bázisvektorhoz tartozó együtthatóját:

Először vágjuk Σ^4-t egy zárt görbe mentén két 3 peremkomponensű Σ_1^3 ill. Σ_2^3 részre, úgy, hogy az eredeti 4 peremkomponens közül az első kettő Σ_1^3-hez , a maradék kettő pedig Σ_2^3-höz tartozzon.

Ekkor (VII.3.3) és (VII.3.5) a

$$\tilde{\Gamma}_{1122} = \tilde{\Gamma}_{110}\tilde{\Gamma}_{222} + \tilde{\Gamma}_{111}\tilde{\Gamma}_{221} + \tilde{\Gamma}_{112}\tilde{\Gamma}_{220} \qquad (\text{VII.3.6})$$

azonosságot eredményezi.

Ha viszont Σ^4-et úgy vágjuk két $\Sigma^4 = \Sigma^3_3 \cup_{S^1} \Sigma^3_4$ részre, hogy Σ^3_3 tartalmazza az első és harmadik, Σ^3_4 pedig a Σ^4 második és negyedik peremkomponensét, akkor a

$$\tilde{\Gamma}_{1122} = \tilde{\Gamma}_{120}\tilde{\Gamma}_{122} + \tilde{\Gamma}_{121}\tilde{\Gamma}_{121} + \tilde{\Gamma}_{122}\tilde{\Gamma}_{120} \qquad (\text{VII.3.7})$$

egyenletet kapjuk.

Végezetül (VII.3.6) és (VII.3.7)-ból könnyű számolással kapjuk (VII.3.2)-t, ami pedig (VII.2.1)-t eredményezi. $\diamond$

Irodalomjegyzék

[1] A.B. Givental: *Equivariant Gromow–Witten invariants*, Internat. Math. Res. Notices **13**, 613-663 (1996);

[2] M. Kontsevich: *Enumeration of rational curves via torus actions*, Progr. Math. **129**, 335-368 (1995).

Tárgymutató

$0+1$ dimenziós KME, 128
$1+1$ dimenziós TKME, 144
$n+1$ dimenziós KME, 129

A
ADHM-konstrukció, 6
Aharonov – Bohm-mechanizmus, 66
algebrai geometria, 136
algebrai síkgörbe, 137
altér-disztribúció, 103
antihermitikus forma, 22
antidifferenciálás, 51
anti-inszanton, 79
anti-öndualitás, 75, 79
antiszimmetrikusság, 19
anyagmezők, 67, 82, 128
Atiyah, 6, 88, 126
Atiyah-féle axiomatikus KME, 126
atlasz, 30
autonóm rendszer, 93
axiomatikus TKME, 112

B
bázis, 13
Betti-szám, 53
Bianchi-azonosság, 74, 79
bilineáris leképezések, 19
Bolyai János, 3
Bourguignon – Lawson-tétel, 80
bozon, 7, 82

C
Calabi – Yau-sokaság, 8
Cartan-egyenlet, 73
Cauchy – Riemann-egyenlet, 106, 109
Cauchy – Riemann-operátor, 108, 143
Chandrasekhar S., 4
első Chern-osztály, 77
második Chern-osztály, 80
Chern – Simons-elmélet, 88, 113, 115, 117, 120
Chern – Weil-elmélet, 77, 102
Chow-tétel, 107, 144
csavart Dirac-operátor, 63

D
Darboux-tétel, 95
de Rham kohomológia-elmélet, 46, 77
de Rham-csoport, 54
de Rham-elmélet, 42
de Rham-kohomológia-csoportok , 52
de Rham-komplexus, 53
de Rham-tétel, 55
deriváció, 48
deriváltleképezés, 33
diffeomorfizmus, 33
Dirac P.A.M., 4, 68, 119, 127
Dirac-féle kvantálasi föltétel, 66, 68
Dirac-mátrixok, 63
Dirac-mező, 62, 81
Dirac-monopólus, 65
divergencia, 52
Donaldson S.K., 6
Donaldson – Witten-elmélet, 113
Drinfeld, 6
duális tér, 17

E
egzakt forma, 54
Einstein A., 4
előkvantálás, 100, 101
előkvantálás alptétele, 102

előkvantáló-nyaláb, 102, 104
elektrodinamika formákkal, 59
elektromágneses térerősségtenzor, 59
elektromos töltés kvantáltsága, 69
elektron-pozitron mező, 62
Ellis G.F.R., 5
energiamegmaradás elve, 99
Etesi G., 42, 45, 97, 102, 114, 125, 130
euklidészi vektortér, 20
Euler L., 3
Euler – Lagrange-egyenlet, 61, 79, 92,94
Euler – Poincaré-karakterisztika, 7
Evans D., 6

É
érintőnyaláb, 32, 33, 47
érintőtér, 32, 47

F
fázistér, 98
faktortér, 16
fermion, 68, 82
Feynman R.P., 3, 119, 127
Feynman-integrál, 82, 119, 126, 127, 145
Feynman – Kac-formula, 129, 130, 142
fibrum, 37, 39
F-fibrumú nyaláb, 39
Floer-homológia, 113
forma, 21, 22, 24, 25, 54, 60, 81, 101, 109
formák integrálása, 57
foton-mező, 82
Freedman M.H., 88
Fubini – Study – Kähler-polarizáció, 111
Fubini – Study – Kähler-stuktúra, 109
fundamentális osztály, 144

G
γ-mezők, 81
Γ hatványsor, 140, 145, 146
gluon-mező, 82
görbe foka, 136
görbület, 73
görbületi operátor, 73
Gauss C.F., 3
Gauss – Osztrogradszkij-tétel, 58
gráfelmélet, 3
gradiens, 52
Grassmann-algebra, 26, 50

Gy
gyenge stabilitás, insztantoné, 80
gyorsulásvektor, 89

H
hányadostér, 16
húrelmélet, 7, 139
Hamilton-egyenlet, 94, 97, 104
Hamilton-féle mechanikai rendszer, 95, 98, 100
Hamilton-féle vektormező, 97, 98
hatásintegrál, 83, 91, 92, 141, 142
Hausel T., 83, 85, 126
Haussdorf-tulajdonság, 31
Hawking S.W., 5
Hermite-skalárszorzás, 64
hermitikus forma, 22
Hessián, 93
Hilbert-tér, 64, 101, 102, 104, 110, 117, 127, 141
hiperbolikus geometria, 3
hipersík-nyaláb, 107
Hitchin N.J., 6
Hodge-operáció, 27, 60, 75
't Hooft G., 5
't Hooft – Poljakov monopólus, 5
holomorf vektornyaláb, 107
homológia, 4, 40
homológia-csoport, 40, 41
homológia-elmélet, 40
homotópiák, 66
homotópia, 4
homotópikus invariáns, 79

I
insztanton, 5, 79, 82
insztanton szám, 79
integrálhatóság, 95, 103, 105, 106, 110

irodalomjegyzék, 9, 43, 44, 85, 123, 133, 147
izomorfizmus, 15

J
Jacobi-azonosság, 36, 98, 99
Jones V.F.R., 6, 88
Jones-polinom, 6, 88, 117, 119
Jones – Witten-elmélet, 88, 112, 115, 119

K
Kähler-forma, 109
Kähler-polarizáció, 104, 110, 117
Kähler-sokaság, 109
Kähler-stuktúra, 109
königsbergi hidak problémája, 3
külső deriválás, 50
külső forma, 25
kalibrált komplex struktúra, 22, 23
kanonikus komplex struktúra, 109
kanonikus szimplektikus forma, 21
karakterisztikus osztályok, 77
Lord Kelvin, 3
kobordizmus, 129
Kodaira beágyazási tétele, 109
kohomológia-csoportok, 55
kohomológia-osztály, 77
kompaktság, 34
komplex disztribúció, 110
komplexifikáció, 105
komplex polarizáció, 21, 110
komplex projektív tér, 106
komplex sokaság, 105
komplex struktúra, 23, 105, 106
komplex vektortér, 21, 105
konfigurációs tér, 87, 92
konform mező-elmélet 144
konform invariancia, 143, 144
konnexió, 70, 72, 79
konnexió-forma, 81
Kontsevich M., 139
konzervatív rendszer, 90
koordinátázás, 15, 18
kovariáns deriválás, 70
közvetítő, mezők, 81
Kronecker-féle szimólum, 18
kvantálás, 102, 104, 110, 111
kvantálható sokaság, 102, 111
kvantummechanika, 127
kvantummező-elmélet, 126
kvark-mezők, 82

L
lánc, 40, 119
láncdiagram, 119
Lagrange-altér, 103, 110
Lagrange-függvény, 61, 91, 92, 113, 128, 130, 141, 142
Lagrange-féle mechanika, 91
Lagrange-féle mechanikai rendszer, 92, 94
Laplace-operátor , 61
Legendre-transzformáció, 93
Leibniz-szabály, 47, 71
leképezés foka, 79
lepton-mezők, 82
levél, 104
Levi–Civitá-tenzor, 27
Levi–Civitá-kovariáns deriválás, 70
Levi–Civitá-konnexió, 80
Lie-algebra, 36
Lie-csoport, 35, 36, 61, 70, 76
Lie-zárójel, 36
lineáris altér, 13
lineáris függetlenség, 13
lineáris leképezés, 14
lineáris síkgörbe, 138
Liouville-féle térfogati forma, 101
Liouville-tétel, 81, 99
Lobacsevszkij, 3
Lorentz-mérték, 61
Lorentz-sokaság, 81
Lorentz-transzformáció, 61
LSZ-redukció, 130

M
Möbius-szalag, 37
mágneses monopólus, 4, 65, 68
mérce/mérték, 74, 113
mérce/mérték-csoport, 72, 113
mérték/mérce-transzformáció, 61, 65, 72, 74
mértékelméletek, 5
majdnem Kähler stuktúra, 109
majdnem komplex srtuktúra, 105
majdnem szimplektikus sokaság, 95
Manin Y.I., 6
Matolcsi T., 11, 50, 60, 95, 103
Maxwell J.C., 3
Maxwell-egyenletek, 4, 59, 60, 65
metrika, 59
Minkowski-forma, 59
Minkowski-metrika, 59
Morse-elmélet, 7
mozgás, 87, 90, 98
mozgásegyenlet, 89
multilineáris leképezés, 23

N
négyespotenciál-1-forma, 60, 63
Newton I., 3, 89
Newton-féle mechanika, 89
Newton – Leibniz-formula, 58

Ny
nyílt halmaz, 31, 34
nyaláb, 32, 37, 39, 47, 70, 77, 107
nyaláb-trivializálas, 73

O
ortogonális altér, 20

Ö
öndualitás, 75, 80

P
pályaintegrál, 126, 127, 141
parakompakt topologikus tér, 56
paralelizÍhatóság, 38
parametrizálás, 137
Penrose R., 5
perem, 58
Poincaré H., 4
Poincaré-dualitás, 144
Poincaré-lemma, 55
Poisson-zárójel, 97, 98
polarizáció, 103
polarizálás, 103
polinom, 136
Poljakov A.M., 5
potenciál-függvény, 90
principális nyaláb, 40, 70
projekció, 37
projektív tér, 137
projektív sígörbe, 138
projektív varietás, 105, 109
pszeudo-euklidészi vektortér, 20
pszeudo-Kähler-polarizáció, 110
pszeudo-Riemann-sokaság, 69

R
racionális görbe, 137
racionális polinom, 138
Reggie-pólusok, 7
relativisztikus téridő, 59
relativitáselmélet, 4
relativizálás, 118
Reshetikhin – Turaev – Witten-invariáns, 120
Riemann-gömb, 144
Riemann-sokaság, 69
Rimányi R., 29, 55, 57
rotáció, 52

S
sündisznótétel, 38
Salam – Weinberg-modell, 5
Schrödringer-egyenlet, 127
Schwarzschild K, 4
sebességvektor, 89
Seiberg – Witten-elmélet, 6, 113
sima leképezés, 32
sima sokaság, 30

skaláris szorzás, 22
sokaság, 30
spinor, 64, 68
spinormező, 62, 67
spinornyaláb, 62
standard modell, sokaságé, 95, 105
Standard Modell, 82
Stokes-tétel, 58, 78

Sz
szabadsági fokok száma, 92
szelés, 37, 48
Szenes A., 83, 113, 117, 126, 103, 135
szeszkilineáris forma, 22
σ-modell, 113, 120, 142, 143
szimmetrikusság, 19
szimplektikus geometria, 94, 1100
szimplektikus potenciál, 102
szimplektikus sokaság, 95
szimplektikus struktúra, 116
szimplektikus vektortér, 20
szimplex, 40
szinguláris szál, 67
szingularitások, 4
Szoboljev-norma, 130
Szoboljev-tér, 129
szolenoid-modell, 66
sztatikus nem abeli töltés, 118
sztereografikus projekció, 31
szuperszimmetria, 113, 144

T
tükörszimmetria, 139
térfogati forma, 75, 101
térképezés, 30
Teichmüller-tér, 117
tenzorszorzat, 24
természetes rendszer, 93
Thom-sejtés, 113
Thomson W.H., 3
TKME, 88, 112, 144
topologikus invariáns, 78
topologikus töltés, 80
teljes energia, 90
totális tér, 37
transzponálás, 17
triviális nyaláb, 37
triviális vektornyaláb, 107

V
valós vektortér irány´ása, 27
variációszámítás, 91
vektormező, 36, 48
vektornyaláb, 37, 38, 47, 70, 72, 77, 107
vektornyaláb rangja, 37
vektortér, 12
Verlinde-formula, 117

W
Weyl H., 88
Wiener-mérték, 142
Wiener-integrál, 129
Wilson-hurok, 118
Witten E., 6, 88, 113, 117, 120

Y
Yang – Mills-egyenletek, 6, 79
Yang – Mills-elméletek, 5, 60, 68, 75, 82
Yang – Mills-funkcionál, 62, 75, 78, 81
Yang – Mills-mező, 8, 79, 80, 130

Z
zárt forma, 54