KÜRSCHÁK JÓZSEF (1864–1933): SZÁZ ÉV A MATEMATIKA TÖRTÉNETÉBŐL MAGYARORSZÁGON[1] (1825–1925)

Digitalizálták a Magyar Tudománytörténeti Intézet munkatársai, Gazda István vezetésével.

Ha a magyar matematikus visszanéz arra az évszázadra, mely a Magyar Tudományos Akadémiának alapításától 1925-ig eltelt, akkor annak elején mint ragyogó kettős csillag lobog fel neki Bolyai Farkasnak és fiának, Jánosnak képe. Két elválaszthatatlan alak. A fiúnak remekműve tette nevüket a matematikában örökre felejthetetlenné; de ha János figyelmét nem tereli mélyen gondolkodó atyja korán a tudomány alapjaira, akkor aligha jön létre annak merész alkotása.

Bolyai Farkas főműve a Marosvásárhelyt 1832–33-ban két kötetben névtelenül megjelent ’Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos … introducendi’. A szerzőnek alaposságra és önállóságra irányuló törekvését a nagy Gauss is elismerte. Nem egy alapvető kérdésnek férkőzött közelébe; fontosságukat és megoldásuk nehézségeit felismerte, bár kielégítő megoldásuk nem sikerült neki. Különösen kiemelkedők a halmazelméletre és a geometria alapjaira vonatkozó kísérletei: az előbbiekkel Cantor-nak, az utóbbiakkal saját halhatatlan fiának volt előfutárja. Említendők továbbá a végszerűen egyenlő területekre vonatkozó vizsgálatai, melyek később többeket indítottak e tárggyal való foglalkozásra.

Azon problémák közül, melyekkel Bolyai Farkas foglalkozott, a parallelák elmélete érdekelte őt legjobban.

A tapasztalat azt látszik mutatni, hogy egy adott egyeneshez bármely kívüle felvett ponton keresztül egy és csak egy vele párhuzamos egyenest vonhatunk. Euklides ezt, bár más fogalmazásban, mint axiomát vagy posztulátumot fogadta el. De a matematikusok mindig érezték, hogy e kijelentés más természetű, mint Euklidesnek többi axiomája és posztulátuma, különösen azt, hogy nem olyan egyszerű. Azért huszonkét századon keresztül számos fényes elme azon fáradozott, hogy a parallelák axiómáját Euklides többi axiómájából és posztulátumából levezesse, s ekként teorémává tegye. E fáradozások sok értékes eredménnyel gazdagították a tudományt, de maga az óhajtott bebizonyítás sohasem sikerült. Valamennyi kutató közül a legnagyobb szenvedéllyel Bolyai Farkas csüggött a problémán. Megoldását az emberi elme legfontosabb feladatai közé sorozta. Fiának egyszer azt mondta, hogy aki a parallelák axiómájára bebizonyítást találna, akkora gyémántot érdemelne, mint a Föld.

A gyermek lelkében az ilyen és hasonló kijelentésekkel elvetett mag fogékony talajra talált, s Bolyai János korán kezdett azon fáradozni, hogy az óriás gyémántot kiérdemelje. Mint valamennyi elődje, úgy ő is Euklides axiomájának indirekt bebizonyítását kereste, vagyis azt iparkodott kimutatni, hogy minden olyan feltevés, mely a parallelák axiomájával ellenkezik, előbb vagy utóbb logikai ellenmondásra vezet. Ezek az első vizsgálatai a síkban folytak és már mások által is járt ösvényeken maradtak.

[1] Forrás: Kürschák József: Az utolsó száz év a matematika történelméből Magyarországon. In: A Magyar Tudományos Akadémia első évszázada. Bp., 1926. pp. 451–459.

Új magaslatokra Bolyai János csak akkor emelkedett, midőn a síkról a térre fordította figyelmét. Itt csakhamar csodálatosan meglepő jelenség bontakozott ki előtte egyre világosabban és egyre gazdagabb részletekben. Nem a kívánt bebizonyításhoz jutott, hanem lépésről-lépésre mindjobban kitűnt ennek ellenkezője. A geometriának ugyanis egy olyan rendszerét sikerült kifejteni, melyben Euklides axiomája nincsen kielégítve. Sok minden másképen alakul ebben a Bolyai-féle térben, mint a közfelfogásnak megfelelő euklidesi térben, de – és ez a matematikai szempontjából a fődolog – logikai ellenmondás nincs benne.

21 éves korában 1823. november 3-án Temesvárott kelt levelében már azt írhatta atyjának: „Semmiből egy újj, más világot teremtettem”. Már akkor elhatározta, hogy mihelyt vizsgálatait befejezi, ezeknek eredményeit kiadja. A munka valóban elkészült és mint a ’Tentamen’ I. kötetének függeléke jelent meg ezzel a címmel: ’Appendix. Scientiam spatii absolute veram exhibens’.

A munka akkor mondhatni teljesen ismeretlen maradt; de ma a világ minden nyelvére lefordítva, a matematikai irodalom gyöngyei közé számíttatik. Bolyai János érdemét és hírnevét nem csökkenti az a tény, hogy vele jóformán egyidejűleg, de tőle függetlenül, az orosz Lobacsevszkij is feltalálta az ő nem-euklidesi geometriáját, valamint Gauss is, aki azonban életében nem nyomtatott ki semmit erre a tárgyra vonatkozó vizsgálataiból.

A két Bolyai alkotásai azonban a magyar matematika történetében magukbanálló jelenség voltak. Másoktól a reprodukáláson túlmenő, önálló és eredményes dolgozatokkal évtizedeken át nem találkozunk.

Csak azért, mert 1837-ben a lipcsei Jablonowsky-társaság egy pályadíj felével jutalmazta, említem Kerekes Ferenc-nek a képzetes számokról írt értekezését. Szerzője a képzetes számokban ellenmondást lát, mégpedig azért, mert természetesen nem felelnek meg kivétel nékül valamennyi követelménynek, melyekhez a valós számoknál hozzászoktunk. Akiben ennyire hiányzik az absztraháló képesség, aki nem sejti, hogy minden általánosítás csak bizonyos követeléseknek elengedésével érhető el, az nincs hivatva új elméletek jogosultsága fölött ítélkezni.

Új, a nyugat tudományos vizsgálataiba belekapcsolódó kor köszöntött be Hunyady Jenő-vel. Az ő működése, mely a múlt század hatvanas éveinek közepén kezdődik és 1880 körül éri el tetőpontját, nem folytatása a Bolyaiak törekvéseinek, hanem egészen más irányú. A 18. században és különösen a 19. század első felében az algebra és az analitikus geometria egy hatalmas segédeszközzel gyarapodott, a determinánsokkal. Hunyady ezeknek volt mesteri kezelője. Irányát legjobban ’A kúpszeleten fekvő hat pont föltételi egyenletének különböző alakjairól’ című értekezése jellemzi, melyet 1883-ban a Magyar Tudományos Akadémia a nagydíjjal tüntetett ki. Ekkor kapott hazánkban első ízben önálló matematikai vizsgálat akadémiai babért. Ha azt keressük, hogy honnan kapta Hunyady e vizsgálathoz az impulzust, akkor elsősorban Hesse-nek az involúció feltételi egyenletének különböző alakjaira vonatkozó és néhány hasonló jellegű vizsgálatára kell gondolnunk. Meglehet, hogy Reiss-nek az az 1870-es ’Mathematische Annalen’-ben megjelent analitikus-geometriai tanulmányai is közreműködtek, melyeknek tárgya és némely eredménye igen közel jár Hunyady vizsgálataihoz. Ami a hatást illeti, Hunyady-nak a mondott feltételi egyenletre vonatkozó vizsgálatai, valamint Scholtz Ágostonnak ezekhez csatlakozó dolgozatai, a külföldön jelentékeny visszhangot keltettek; főbb eredményeik átmentek a kézikönyvekbe, a tudományos folyóiratokban pedig még ma is jelennek meg ilyen irányú dolgozatok.

Kevéssel Hunyady után, a 70-es évek elején kezdte meg Kőnig Gyula négy évtizedre kiterjedő igen sokoldalú tevékenységét. Mindenütt elsősorban az alapok érdekelték. ’Analízis’ című munkájának folytatás nélkül maradt első kötetében (1887) az általános számtant és az elemi függvénytant tárgyalta, a kor színvonalának megfelelően több eredeti részlettel. Számos algebrai dolgozat után 1903-ban az algebrai mennyiségek általános elméletéről megjelent munkájában különösen a modulus-rendszerek elméletét gyarapította alapvető fontosságú vizsgálatokkal. A másodrendű parciális differenciálegyenletekre vonatkozó vizsgálatai átmentek a kézikönyvekbe: különösen Goursat részletesen foglalkozik velük.

Egyszerűségükkel és megkapóan szemléletes voltukkal tűnnek ki a halmazelmélet némely alaptételére adott bebizonyításai. A logika, aritmetika és halmazelmélet alapjairól halála után megjelent könyve lankadatlan szellemi erejének legjellemzőbb megnyilatkozása. Még sokáig fog tartani, míg a benne tárgyalt kérdésekre a tudomány teljesen kielégítő feleletben fog megnyugodni; de Kőnignek a formális logika gondolatkörének ellenmondástól ment voltának problémájára vonatkozó eredméyei ma is minden vitán felül állanak.

Ugyancsak a 70-es években kezdték meg tudományos pályájukat Réthy Mór és Farkas Gyula. Réthy vizsgálatai az abszolút geometriára, a végszerűen egyenlő területekre, a mechanika elveire és a hidrodinamikára vonatkoznak. Farkas tevékenységének súlypontja a mechanikára és elméleti fizikára esik. Matematikai szempontból a lineáris egyenlőtlenségekre vonatkozó fontos vizsgálatait kell kiemelnünk. Csak mély hódolattal hajolhatok meg a köztünk időző, 80. évét élő tudós előtt, ki ismételve ugyanolyan érdeklődéssel tért vissza erre a tárgyra, amilyen odaadással a tudománynak szentelt egész életén át az elméleti fizika átalakulásának minden fázisát figyelemmel kísérte, eredményeit lelkébe fogadta és reájuk dolgozataival reagált.

Azok közül, kik a 80-as években kezdték meg tudományos működésüket, Schlesinger Lajosnak a lineáris differenciálegyenletekre és differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó terjedelmes vizsgálatai a világirodalomban kiváló helyet foglalnak el. Nagyszámú értekezésen kívül egy három kötetből álló monográfiát és két kisebb munkát írt erről a tárgyról, továbbá egy referátumot e tudományágnak 1865–1909. való történetéről. A matematikának több más modern fejezetéről is írt kézikönyveket. Fáradhatatlanul munkálkodik közre Gauss tudományos hagyatékának feldolgozásán és egy tudományos Gauss-életrajzhoz szükséges anyagnak gyűjtésén és közlésén. Kiváló történeti érzéke és kegyelete vezette a Bolyai-akra vonatkozó adatok gyűjtésében, valamint ama magas színvonalú emlékünnep rendezésben is, mellyel a kolozsvári egyetem 1902-ben Bolyai János születésének századik évfordulóját megünnepelte.

Vályi Gyula figyelemreméltó dolgozatokat írt elemi számelméleti és geometriai kérdésekről. Doktori értekezése azokkal a parciális diffrenciálegyenletekkel foglalkozik, melyek

$$V\ (p,\ q)\ dx\ dy$$

alakú integrandusok kettős integráljainak variálásánál fellépnek. Különösen avval a kérdéssel foglalkozik, hogy az ilyen parciális differenciálegyenlet mikor oldható meg a Monge–Ampère-féle módszerrel és e módszer alkalmazásánál általában végzendő lépések az adott esetben mennyiben egyszerűsbödnek.

Rados Gusztáv főbb vizsgálatai a számelmélet és algebra terén mozognak. Az a kritérium, melyet első dolgozatában annak eldöntésére levezetett, hogy egy magasabb fokú kongruenciának hány egymástól különböző gyöke van, csakhamar közismeretessé lett. A bilineráis és quadratikus alakokra vonatkozó vizsgálatai az indukált és az adjungált helyettesítések karakterisztikus egyenleteinek gyökereire nézve vezettek érdekes eredményre. Tovább meg kell még emlékeznünk azokról a vizsgálatokról, melyek Kronecker-nek az olyan algebrai egyenletekről szóló tételeivel állanak kapcsolatban, melyeknek gyökei az egységkörre esnek.

Beke Manó vizsgálatai közül a lineáris differenciálegyenletek irreducibilitására vonatkozó eredményeit Picard felvette ’Traité d'analyse’ című művébe. Figyelemreméltók az analitikai függvényekre vonatkozó vizsgálatai is. Egy sajátságos törekvése, hogy algebrai tételeket a lineráis differenciálegyenletek elméletéből szeret levezetni, a szóbanforgó egyenletet mint karakterisztikus egyenletet fogván fel.

Tötössy Béla a negyedrendű felületek elméletét gyarapította egy speciális felület vizsgálatával.

Klug Lipót a „szintétikus geometria” buzgó művelője. E tudományág nem egy kérdéséhez járul jelentékeny adatokkal.

Suták József sokoldalú működéséből különösen a vektorszámításnak geometriai és mechanikai alkalmazására vonatkozókat említjük meg.

E helyen kell megemlékeznem saját vizsgálataimról is. Ezek részben a variációszámítási parciális differenciálegyenletek formális elméletére vonatkoznak, részben pedig az értékelt tartományokra.

A múlt századnak utolsó éveiben kezdte meg működését Bauer Mihály. Elemi, de fontos algebrai és számelméleti kérdések elemzéséből kiindulva, fokonként a legmodernebb számelméleti problémákig emelkedett. A Hensel-féle alaptételre, általában a diszkriminánsra és a differensre vonatkozó vizsgálatai kiváló helyet foglalnak el a számelmélet irodalmában.

Azoknak a vizsgálatoknak egy részéhez, melyekkel Bauer pályája elején foglalkozott. Gruber Nándornak egy Fermat-féle kongruenciára vonatkozó eredménye adta az impulzust.

Bauernál csak kevéssel fiatalabb volt, de irodalmi működését később kezdte meg Geőcze Zoárd, ki a felszínszámítás problémájába mélyedt. Midőn a harctéren szerzett betegségének áldozatul esett, halálával a magyar matematikát érzékeny veszteség érte.

Éppen az új század beköszöntésének idejére esik Fejér Lipót első dolgozata a Fourier-sorokról. Az a gondolat, hogy e sorokat számtani közepekkel összegezte, rendkívül termékenynek bizonyult. Fejér azóta a hatványsorokra és Fourier-sorokra, a közönséges és a trigonometriai polinomokra, az interpolálásra, a végtelen számsorozatok aszimptotikus előállítására a legváltozatosabb vizsgálatokat végezte.

A trigonometrikus sorok szerint való kifejtésre vonatkozóan egy alapvető tételt talált Riesz Frigyes. A tételt, melyet Riesztől függetlenül E. Fischer német matematikus is felfedezett, ma mint Riesz–Fischer-féle tételt idézik. Nem kevésbé fontosak a lineáris funkcionalékra vonatkozó vizsgálatai. Franciául hézagpótló munkát írt a végtelenül sok ismeretlent tartalmazó elsőfokú egyenletrendszerekről.

Riesz Marcell vizsgálatai leginkább a trigonometriai és Dirichlet-sorokra vonatkoznak. Új és egyszerű bebizonyításokat talált Fatou alapvető tételére. A háború alatt Hardy-val együtt a Dirichlet-sorokról írt angol munkát.

Haar Alfréd vizsgálatai közül a legismertebbek azok, melyek az ortogonális függvények szerinti sorbafejtésekre vonatkoznak. A variációszámítás alapegyenleteinek eddigi levezetését megszabadította több elkerülhető megszorítástól. A Csebisev-féle problémák elméletét előbbre vitte a konvex testek geometriájának felhasználásával. A függvények aszimptotikus kifejtésére igen általános eseteken használható módszereket talált.

Pólya György problámái rendkívül változatosak. Vizsgálatainak főbb tárgyai: bizonyos polinom-sorok összetartása, Laguerre egyik algebrai tétele, a tagok egy részének előjelének megváltoztatásával keletkezett hatványsorok, egész számú együtthatókkal alkotott hatványsorok, melyeknek együtthatói közül csak végesszámmal vannak egymástól különbözők, valószínűség-számítási feladatok. Minden dolgozata meglepő leleményességről és éles kritikáról tanúskodik.

Rokontermészetű kutató Szegő Gábor. Vizsgálatainak főbb tárgyai: ortogonális függvénysorozatok szerinti kifejtések, polinomsorozatok zérushelyei, kerületi értékek. Pályája többször találkozik Pólyáéval. Pólyának a pusztán végesszámú egymástól különböző együtthatót tartalmazó hatványsorokra vonatkozó vizsgálatait folytatva ő jutott az ezekre nézve felvetett kérdés általános megoldására. Egy Pólyával együtt készített munkája a legnagyobb gondossággal és körültekintéssel összeállított példák során át vezeti be az olvasót a modern analizis számos fontos módszerébe és eredményébe.

Kerékjártó Béla a topológia számos tételének bebizonyításánál talált lényeges egyszerűsítéseket és e tárgyról becses monográfiát írt.

Még sokan vannak, kik hosszabb, sikeres tudományos pályára tekinthetek vissza, vagy egyes jelentékenyebb eredményekkel tűntek fel. Nem bocsátkozom tevékenységük súlyának összehasonlítására; csak nevüket és főbb működési körüket említem: Bálint Elemér (algebra), Csillag Pál (sorok összetartása, Fourier-féle állandók), Dienes Pál (analitikus függvények, funkciónálok, tensor geometria), Dávid Pál (iterálás), Egerváry Jenő (multilineáris alakok), Fekete Mihály (algebrai egyenletek, polinomok, summabilitás, analitikus függvények 0 és 1 helyei), Grosschmid Lajos (számelmélet), Jordán Károly (valószínűség-számítás), Kőnig Dénes (halmazelmélet és analysis situs), Lukács Ferenc (Laplace-sorok), Sz. Nagy Pál (gyökök helyzete, görbék), Neumann János (halmazelmélet, ideális számok), Pál Gyula (Jordan-görbék), Radó Tibor (konform leképezés, parciális differenciálegyenletek), Rhédey László (számelmélet), Sárközy Pál (felületelmélet), Sidon Simon (Fourier-sorok), Stachó Tibor (integrálszámítás és függvénytan), Szász Ottó (végtelen lánctörtek, analitikus függvények, Fourier-sorok), Szász Pál (diffrencia-számítás), Szücs Adolf (variációszámítás), Valkó István (halmazok többértelmű leképezése), Veress Pál (függvénytan és halmazelmélet), Vörös Cyrill (Bolyai-féle geometria).

Csodálattal tekintünk vissza a száz év előtti fényes kezdetre, midőn Bolyai János olyan gondolatokkal lepte meg a világot, melyek megértésére Gauss még nem tartotta érettnek a kort. De büszkeséggel tölhet el jelenünk is, midőn annyian serényen művelik a matematikát és eredményeik az egész világon elismerést találnak. Csüggedetlenül előre!