VEKERDI LÁSZLÓ: BOLYAI FARKAS (1775–1856) ÉS BOLYAI JÁNOS (1802–1860)[1]

Digitalizálták a Magyar Tudománytörténeti Intézet munkatársai, Gazda István vezetésével.

Az Akadémiai Könyvtár féltett kézirataihoz tartozik Bolyai Farkas néhány egészben vagy töredékként megőrződött levele. Tisztán irodalmi szempontból is csupa kis remek: Bolyai Farkas érzi és érezteti a korabeli társadalmi és tudományos élet rejtett összefüggéseit; finom, tartózkodó, okos, ironikus eleganciával ír örömök, s gondok apró hullámzásairól és mély rejtelmeiről. Bőségesen megérdemelnék ezek a levelek ennyiért is, hogy múlt századi irodalmunk java alkotásai közt tartsuk számon, s végre kiadjuk őket, ám igazi jelentőségük mégis másutt keresendő. Vonzások és vonatkozások megelevenítő légkörét varázsolják a nem-euklidészi geometria – a gondolkozás sorsdöntő nagy forradalmi sorából is kiemelkedő óriási fölfedezéscsúcs – genezise köré.

Különösen ötvöződnek ezek a levelek. Magyarázó és megható személyi adatok –, amik poézisükkel Németh László Bolyai-drámáit és tanulmányait inspirálták – fűzik bennük ezer szállal a honi élethez Bolyai János fölfedezését; ugyanakkor szakmai hivatkozások, s utalások özöne képeszt el: hogyan kerülhetett sor a honi parlagon ilyen szakszerű, s ennyire korszerű matematikai diskurzusra?

Bolyai Jánost – ez a levelekből nyilvánvaló – az apja tanította meg a matematikai gondolkozás és fölfedezés művészetére, de hol tanulta meg ő maga? Göttingai tanulóéve legföljebb ha tájékozódásra lehetett elég, s arra is csak akkor, ha már meglehetős tudással indult. Tudása javát pedig később, itthon, marosvásárhelyi tanárkodása alatt, könyvekből szerezte. Itthon képezte ki magát szakavatott, elsőrendű tudóssá, aki azután útjára indíthatott olyan matematikai géniuszt, amilyen a fia volt. Bolyai Farkas úgyszólván egymaga teremtette meg azt a kulturális légkört, amelyben lángra lobbanhatott a nagy fölfedezés szikrája. Ennyit tehetett: Többhöz már a tudomány fejlődésére alkalmas szocio-kulturális háttér kellett volna. De Bolyai János egész munkássága mögül hiányzott a befogadásához és folytatásához szükséges szakmai keret; a nagyszerű indítás így messze kihajította magányossága űrjébe. Tragédiája – mint indítása, s géniusza is – egyedülálló, de a képlet, ami sorsában megvalósult sokáig – lényegében a felszabadulásig – érvényes a honi matematikai és természettudományos kutatásokra: a tehetség, s tudás elindító posztulátumait úgyszólván sohasem követte a folytatáshoz szükséges követelmények sora. De tán ezért is kényszerültek a megismerés nehéz, szokatlan, „nem-euklidészi" útjain, s tán ez is magyarázza, hogy a kicsi Magyarországról annyi sok új és fontos nyitást találó nagy tudós származott.

A 18. századvég egész Hungáriát megrázó gazdasági és szellemi váltzásainak hullámai Erdély védettebb tájaira érkezve csillapodtak. Lassúbb volt itt a nyocvanas–kora-kilencvenes évek fölvilágosító lendülete, viszont a vérmezői tragédiát követő országos bénulás sem hatolt olyan mélyre, mint Magyarországon. Az élet a megszokott keretek között folydogált. Még az a kicsi, s Magyarországon hirtelen bezáródott kapu is nyitva maradt, amin keresztül

[1] Forrás: Vekerdi László: Bolyai Farkas és Bolyai János. In: Kállai Gyula – Pozsgay Imre (szerk.): Ezer év. Arcképek a magyar történelemből. Bp., 1985. pp. 169–175.

évszázadok óta, rendíthetetlenül hordták honukba a műveltség terhét nyugati egyetemekről a tehetségesebb vagy egyszerűen csak törekvőbb diákok. Ezen a sok-sok évszázados diákúton indult el 1796 tavaszán az ifjú Bolyai Farkas is nyugatra, a kolozsvári református kollégium elvégzése után, báró Kemény Simon nevelőjeként, ami a feudális úri világban afféle magasabb rangú szolgát jelentett. Viszotagságos utazás után Jénában csatlakozott az úrfihoz, ahonnét néhány hónapi mulatás, s tanulás után mentek tovább, a mifelénk már az idő tájt is híres-neves göttingai egytemre.

Göttingában eléggé otthonosan érezhették magukat a hazánkból odakerülő ifjak. Nemcsak azért, mert Göttinga sem volt nagyobb lényegesen élénkebb város, mint Debrecen, Kolozsvár vagy akár Enyed; hanem elsősorban azért, mert az egytem ott is ugyanolyan fejedelmi-nagyúri-egyházi kegyek és szeszélyek függvénye volt, akár a honi felsőbb iskolák. Különlegességét, s viszonylagos kiválóságát is ennek köszönhette: a hannoveri-braunschweigi hercegek az előkelő brit királyi rokonság miatt tetszeleghettek maguknak azzal, hogy meghonosítsák a kontinensen az ősi angol kollégiumi rendszer németesített formáját. Göttingában a tanárok nem csupán előadtak és vizsgáztattak; a jelesebb hallgatókat otthonukba is meghívták, s elbeszélgettek vélük szakmájuk és a tudomány legfrissebb, legérdekesebb kérdéseiről. Így értesült a csillagászat professzorának, Carl Felix Seyffernek (1762–1822) a „szemináriumain” Bolyai Farkas (1775–1856) és jó barátja, Carl Fridrich Gauss (1777–1855) a paralellák problémájáról, ami akkoriban a szűkebb értelemben vett matematikusok körén túl is erősen izgatta a gondolkodók képzeletét.

A 18. század végén a matematika iránti érdeklődést ugyanis nem csupán fokozta, hanem egészen új irányba terelte a kanti filozófia rohamosan növekvő divatja. A gondolkozás hálójával elménk tér- és időszemléletéből kihalászott, s így bár „ismeretszerző”, mégis „föltétlen” („szintetikus a priori”) ítéletek tárházának képzelték el a matematikát, s valósággal az Emberi Ész mintaképének rangjára emelték; ugyanakkor azonban elvették tőle azt a hetyke magabiztosságát, amit a d'Alembert-i „Allez et la foi vous viendra” – „csak előre, s a többit majd meglátjuk” – jelszó fejezett ki. A 18. század végén a matematika filozófiai méltóságot nyert, ám elbizonytalanodott. S az elbizonytalanodás egyik góca, a dicső építmény egyik botrányköve a párhuzamosok axiómája volt.

A párhuzamosság euklidészi axiómája – a híres XI. axióma – nem hirtelenjében vált gyanússá. Már az ókorban tudták, hogy valamiképpen különbözik a többi axiómától, s később meg is próbálták belőlül levezetni, azaz ki akarták deríteni róla, hogy ugyanolyan bebizonyítható tétel, mint az Elemek többi jól ismert teorémája: például az, hogy egy háromszögben a szögek összege mindig két derékszöggel, 180 fokkal egyenlő. Az efféle próbálkozások makacs sikertelensége keltette azután századok során a párhuzamosság rossz hírét. A kanti filozófia szemszögéből nézve azonban másról, többről volt szó. Az Emberi Ész, az Ítélőtehetség méltóságát veszélyeztette volna, ha kiderül, hogy az euklidészi párhuzamosság nem tér- és időszemléletünk szükségképpeni következménye. A régi kísérletezése, hogy a párhuzamosságot levezessék az axióma elhagyása után megmaradó geometriai rendszerből, így új, filozófiai értelmet kapott. S közben a probléma, szinte észrevétlenül, elveszítette ősrégi kapcsolatát a logikával.

A 17. század – még inkább a 18. század – szédítő fejlődésében a matematika nemcsak megnőtt, s megerősödött, hanem teljesen el is szakadt korábbi nagy inspirálójától és támaszától, a logikától. Az elválásra ösztökélt az új természettudomány skolasztika- és Arisztotelész-ellensége is, s a matematika, ha kellett, akár le is tagadta a formális logika gyanúsnak érzett rokonságát. Csak néhány nagy, s a maga korában alig észrevett gondolkozó sejtette, hogy a matematika megalapozási gondjai lényegében logikaiak. Az egyik legelső, s legfontosabb közülük egy olasz jezsuita, Gerolamo Saccheri (1667–1733) volt.

Saccheri a reneszánsz kori skolasztikusok spekulációinak folytatásaképpen kidolgozott egy új indirekt érvelési formát, amit azután a párhuzamosság problémájára alkalmazott. Saccheri módszere szerint egy állítás igazságát úgy kell bizonyítani, hogy önellentmondást kell keresni az állítás tagadására fölépíthető rendszerben. Az euklidészi párhuzamossági posztulátum mármost kétféleképpen is tagadható. Az egyikféle tagadás szerint a geometriában egymást nem metsző egyenesek, s így párhuzamosok egyáltalán nincsenek. A másik tagadás azt állítja, hogy egymáshoz hajló és egymást nem metsző egyenesek közül ezután az egymást először nem metszőket kell „párhuzamosoknak" tekinteni. Saccheri egy egész sor tételt levezetett ezen új, nem-euklidészi párhuzamossági feltétel alapján, míg végre az egyikről – tévesen – azt hitte, hogy önellentmondást tartalmaz.

Saccheri eredményeit a 18. században alig ismerték. Csak közvetve értesült róla a század második felének legeredetibb logikusa, Johann Heinrich Lambert (1728–1777), akinek azonban ennyi elég volt ahhoz, hogy a később nem-euklidészinek nevezett geometria valóságos rendszerét dolgozza ki, azt hivén persze ő is, hogy önellentmondásra sikerült bukkannia benne. Így is óriási jelentőségű azonban Saccheri és Lambert vizsgálódásában az, hogy a vélt cáfolás kedvéért egy egész új rendszer körvonalait, sőt (Lambert) alapjait kidolgozták; egy lehetetlennek vélt világ alternatíváját kínálták tehát az egyedül lehetségesnek vélt mellé. Ez a mindenféle értelemben „megtagadott" kerülőút a bizonyítási kísérletben az ő nagy fölfedezésük; ez váltotta ki azt a krízist, ami a logikai-matematikai fejlődés „normál" kanti útjának elhagyására késztette a gondolkozást.

Így állott a helyzet, amikor a század végén Seyffer professzor szemináriumán a két jó barát, Gauss és Bolyai hallott róla. Az ő töprengéseikben is, mint akkoriban majdnem mindenkiében, az euklidészi párhuzamossági axióma közvetlen bizonyítására való törekvés uralkodott. De Gauss inkább a matematikai módszerekben, Bolyai Farkas a logikában volt erős. Matematikából a fiatal Bolyai vajmi keveset tudott, a logikát ellenben – mégpedig az akkoriban éppen elmaradottnak, „skolasztikusnak" számító arisztotelészi formális logikát – jól beléjük sulykolták Kolozsvárott. Kora többi nagy matematikusával ellentétben Bolyai később is mindig logikai alapokból kiindulva kívánta fölépíteni a matematikát, akárcsak előtte Saccheri és Lambert, s utána – jó fél évszázaddal – Georg Cantor (1845–1918), Gottlob Frege (1848–1925) és David Hilbert (1862–1943). Valamiféle nagy és gyönyörűséges jelrendszernek tekintette a matematikát, s a jelekre érvényes szabályokat kereste. De túlságosan kora gyermeke volt, s a szabályokat tér- és időszemléletünk szükségképpeni és egyedül lehetséges megnyilvánulásaiként értelmezte; tán épp ezért is éppen ő minden elődje, s kortársa közül legintenzívebben a párhuzamosság krízisét. Mindenesetre matematikai tudásával párhuzamosan, hosszú marosvásárhelyi tanárkodása alatt mélyült benne fokozódott olykor alig elviselhetőségig a parallelák titkának meg nem érthetése miatti elkeseredés. Élete nagy örömei, s nagy bánatai mind a parallellákkal függöttek valamiképpen össze. Nincs reá még egy példa, hogy egyetlen, évezredekig érlelt probléma így hatalmába kerítsen embert, mint a két Bolyait.

A boldog göttingai évek után Farkas 1799-ben – megint csak nagyúri patrónusai „jóvoltából" – hazatért, megnősült, 1802. december 15-én felesége szüleinek kolozsvári házában fia született, akit János névre kereszteltek. Farkas apja, az öreg Bolyai Gáspár az ifjú párnak adta domáldi tanyáját, s itt élt a kis család valami két esztendeig távol a világtól, ritka boldogságban. Azután Farkast 1804-ben megválasztották a marosvásárhelyi református kollégiumban a matematika, fizika és kémia tanárának, s beköltöztek a kisvárosba. A fiatal tanár nyugodt domáldi évei alatt kerek kis egésszé dolgozta ki a párhuzamosok Göttingában elkezdett elméletét, s ezt most letisztázva elküldötte Gaussnak. A nagy matematikus azonnal észrevette a szellemes elméletben a hibás pontot, de a válaszából kitűnik, hogy az idő tájt még ő is az euklidészi párhuzamossági posztulátum egyedülvalóságában és bizonyíthatóságában hitt. Farkas négy év múlva, 1808-ban egy kiegészítésben még megpróbálta – persze sikertelenül – kiküszöbölni a hibát, de aztán más gondok és múzsák kötötték le a figyelmét. Sok időt fordított a három tárgyára: nemigen volt akkor Európában középiskola, de egyetem se sok, ahol olyan magas szinten, s olyan korszerűen tanítottak volna matematikát, fizikát s kémiát, mint Bolyai Farkas Marosvásárhelyen. Bizonyosan a maga kedvéért is ragaszkodott a szokatlanul magas színvonalhoz, de amint Benkő Samu gondos kutatásai megmutatták, a tanítványai fölött sem múlottak el híresen nehéz órái olyan nyomtalanul, mint korábbi életrajzírói állították. Különben sem volt gyakorlati érzéktől mentes, elméleti ember; ellenkezőleg, valóságos ezermester volt, mezőgazdasági és technikai géniusz. Fúrt-faragott, fákat ültetett, épített. Részt vett a városka ébredező szellemi életében, dolgozott, s tervezett az Aranka György-féle Nyelvmivelő Társaságban. Még arra is jutott ideje, hogy öt szomorújátékot írjon, s beküldje az Erdélyi Muzeum drámapályázatára; arra a híres pályázatra, amelyiken Katona József nyeretlen maradt Bánk bán-jával. Nem nyert Bolyai sem, pedig már jó előre szegények étkeztetésére szolgáló alapítványt tett a nyereségre. Iszonyatos éhínséges, éhhalásos esztendők jártak akkoriban arrafelé, s Farkas sokfelé ágazó érdeklődése és gondjai között mindig fontos helyet foglalt el az emberiség. De minden foglalatosságánál fontosabbnak, élete központi feladatának, elhivatásának tartotta, hogy János fia kivételes matematikai géniuszát ápolja.

Sokan megírták, legszebben Németh László és Benkő Samu, milyen féltő szeretettel, hozzáértéssel, apai büszkeséggel irányította, kísérte és kommentálta Bolyai Farkas a lángeszű gyermek fejlődését; elbeszélték, miként ápolta-dédelgette magában, s fiában is a reményt, hogy annak idején a nagy Gauss, akit akkor már „princeps mathematicorum" –ként tiszteltek Európa-szerte, fogja folytatni a matematikai géniusz kibontakoztatását ott, ahol Farkas, Gauss ifjúkori jó barátja abbahagyta. Sokan találgatták azt is, miért hiúsult meg a ragyogó terv: nem sikerült a göttingai úthoz szükséges pénzt előteremteni, Farkas természetes közvetlenségével megsértette a nagy matematikus önérzetét, vagy éppen a göttingai óriás maga tartotta időszerűnek, hogy elhatárolja tündöklő pályáját egy vidéki kisszerűségbe süllyedő tanár bizalmaskodásaitól? Akármiért is történt, János sohasem került Göttingába. Pedig a tanuláshoz szükséges pénz – hála az apa fiúhitének, fáradozásainak, hajlongásainak – mégiscsak előteremtődött, s János 1818 augusztusában elindulhatott a bécsi hadmérnök akadémiára. A körülményekhez képest a legjobb helyre került – sóhajtanak föl ennél a pontnál megnyugodva az életrajzírók.

S részben tán igazuk lehet: a hadmérnök akadémia nem volt rossz hely nyílt eszű, s matematikai érdeklődéssel megáldott ifjak számára. Az olyan formátumú géniusza azonban, mint a Bolyai Jánosé, az égvilágon semmit sem profitálhatott a hadmérnök akadémia alkalmazások körére szorítkozó és idejétmúlt tankönyvek börtönébe zárt matematikájából. Bolyai János matematikai fejlődését Bécsben is egyes-egyedül apja levelei irányították, Marosvásárhelyről.

A hadmérnök akadémia kiváló növendékét, aki még az iskola legfőbb patrónusának és elöljárójának, János főhercegnek a dicséretét is kiérdemelte, 1823 őszén a temesvári helyőrségbe nevezték ki alhadnagynak. Szeptember 30-án érkezett meg állomáshelyére. Jól megépített, erős, s mindenekfelett igen ravaszul álcázott erődítés volt az osztrák ármádia; Bolyai Jánosnál sokkal kevésbé érzékeny ember is összetörte magát, ha óvatlanul beléütközött a falaiba. S a fiatal Bolyai méghozzá fejjel rohant a falnak. Szó se róla, nem bántották. Áthelyezgették, előléptetgették, meg-megdicsérték, meg-megrótták. Munkával se terhelték nagyon, kis rutinföladatokat bíztak rá, étkezdék ellenőrzését, latrinák építését, s elnézték, ha nem csinálta meg. Főnöke, a derék Zitta őrnagy még azt is megpedzette, hogy valamilyen fölsőbb tanintézet matematikaprofesszoraként lehetne a katonai szolgálat iránt szemmel láthatólag nem sok rokonszenvet mutató, s a Bánság mocsaraiban egyébként is súlyosan megbetegedett tisztet leghasznosabban alkalmazni. A jó szándékú javaslatból persze semmi sem lett, az osztrák birodalomnak nem Bolyai-szerű matematikusokra volt szüksége professzorként. Mentségükre szolgáljon különben, hogy valószínűleg senkinek nem kellettek Bolyai-szerű matematikusok, kivéve az Emberiséget. Az pedig igencsak megfoghatatlan és roppant hálátlan gazda. Azért ha nem is igaz, iszonyatosan találó a nagy vasszöget egyetlen kardcsapással kettévágó fiatal Bolyai legendája; hisz egy nagyratermettségét tudván-tudó ifjú matematikus pazar erejét és erőpazarlását példázza. Szeptember 30-án érkezett meg Temesvárra, s már november 3-án értesíti apját híres levelében: „…semmiből egy újj, más világot teremtettem".

Bolyai Farkas fölismerte, s kifejezte fia munkájának összefüggését a sajátjával, hiszen Appendixként bevette a maga matematikai töprengéseit, s fölfedezéseit összegező 'Tentamen'-ébe. A 'Tentamen' ugyanis egyáltalában nem az a sok későbbi fölfedezését előlegező, nem kis pedagógiai érzékkel, bár excentriusan elrendezett tankönyv, aminek későbbi kommentátorai hiszik. A 'Tentamen' tankönyv formában kísérli meg a matematikának logikai alapokból kiinduló felépítését. A matematika alapjainak modern vizsgálata és a görög gondolkozók eszméi között teremt kapcsolatot. S nem csupán képletesen, hiszen előkészítette a matematikának azt az új fölfogását, ami éppen a hozzája csatolt Appendixben valósult meg először.

Addig a matematikában eleve föltétlenül „igaznak" vélt, kész fogalmak és összefüggések rövidítésére használták a jeleket; fogalmuk sem volt igazi jelentésükről és szerepükről. Bolyai János jött rá – néhány lángeszű kortársával, a francia Galois-val, a norvég Abellel, a cseh Bolzanoval, az ír Hamiltonnal, az angol Boole-lal egy időben, hogy a jelekkel csínján kell bánni: óvatosan, lépésről lépésre kell őket tulajdonságokkal fölruházni, s az így értelmezett jelekből kell felépíteni a matematikai összefüggéseket, helyesebben a matematikai relációk (viszonyulások) rendszerét. Az Appendix egy csomó jel és reláció fölsorolásával és értelmezésével kezdődik, s ezután azt mondja el Bolyai János, hogy mit akar érteni azon a két különböző reláción, hogy két egyenes „párhuzamos", illetve „nem metszi egymást". A helyesen értelmezett jelentésekből azonnal kiderül, hogy a két reláció csak határesetben, az euklidészi geometria esetében esik egybe, egyébként széjjelválik, és „párhuzamosnak" ez utóbbi esetben csupán az egymást először nem metsző egyenesek nevezhetők; a párhuzamos mintegy választóvonal az egymást metsző és az egymást nem metsző egyenesek között. Az új párhuzamossági definícióból tehát kétféle párhuzamosság lehetősége adódik, s ez a kétféle megvalósulás széjjelválasztja egymástól – éspedig teljesen, mindenféle keveredés lehetősége nélkül – az euklidészi és a nem-euklidészi geometriát. Két-, illetve háromféle geometriai rendszer keletkezik így, magyarázza páratlanul világosan Bolyai csodálatos művének 15. §-ában, az egyik „azon a feltevésen alapul, hogy Euklides XI. axiómája igaz", a másik pedig „az ellenkező feltevésre támaszkodik". Az elsőt Bolyai ∑-rendszerének, a másodikat – a nem-euklidészi geometriát – S-rendszernek nevezi. A két különböző rendszert tehát a párhuzamosság két különféle megvalósulása teremti meg. Mindazok a tételek pedig, amelyekben a párhuzamosság relációja sem közvetlenül, sem közvetve nem fordul elő, egyformán érvényesek mind a két rendszerben, úgy ahogyan Bolyai János írta: „abszolute, vagyis feltétlen igaznak tekintendők". Ezeknek a tételeknek az összessége egy harmadik rendszert alkot, az abszolút geometria rendszerét. Két testvérrendszer keletkezik tehát, amelyek a párhuzamosság meghatározásánál ágaznak le egy harmadikról, örökre elválván egymástól. Ez az „elválás" azonban nem azt jelenti, hogy többé semmi „közük" se lenne egymáshoz. Ellenkezőleg, a két „testvér" szinte lépésről lépésre összehasonlítható utakat követ, mintha a párhuzamosság átúszhatatlan folyamának két partjáról figyelné egymást. Mesteri levezetések sorával Bolyai János még azt is megmutatja, miként kell megszerkeszteni az S-rendszerben a ∑-rendszer „képét", vagy ahogyan ma neveznénk: „modelljét".

Azaz nem létezik többé matematika a szemléletünk kategóriái által eleve meghatározott, egyedül lehetséges rendszerként. A matematika ilyen felfogása ezentúl teljességgel értelmetlen. Maga a matematika „igaz" értelme változott meg ugyanis azzal, hogy kritériumaként egy relációrendszer ellentmodástalansága fogadtatott el. A folyamat, amely Saccherivel a régi matematika megtisztítására és megmentésére irányuló törekvésként indult, homlokegyenest ellenkező irányba fordulva teljesedett be: Bolyai János művében új, minden eddigitől különböző matematika született. A matematikai fogalmak igazi, teljes jelentése ezentúl csak különböző, önmagukban konzisztens rendszerek összehasonlításával deríthető ki. Az Appendix következő paragrafusaiban Bolyai János néhány alapvető geometriai fogalmat, s tételt vázol a három rendszerben, s összehasonlításukkal a matematikai fogalomalkotás mélyére világít, mégpedig kétféleképpen: a klasszikus görög szerkesztési eljárásokkal, s az újkori matematika büszke fegyverével, az analízissel. Analitikus formában az új párhuzamossági követelmény következményei különösen szépen, s egyszerűen tárgyalhatók: egy viszonylag egyszerű folytonos függvény fejezi ki azokat a fundamentális változásokat, amelyek a három rendszert egymástól elválasztják. „Ha ehhez még hozzájárul annak lehetetlenségének bebizonyítása – írta A tér tudományá-nak német fogalmazványához Bolyai János –, hogy valaha ∑ és S között dönthessünk (ami a szerzőnek szintén sikerült): akkor ezzel a XI. axióma lényegének egészen a mélyére hatoltunk, és a párhuzamosok bonyolult matériáján teljesen keresztülhatoltunk, a teljes napfogyatkozás pedig, mely a jelen óráig (az igazság után szomjazó lelkek felett) oly szerencsétlenül uralkodott, a tudomány iránti kedvet lelohasztotta, és annyi ember idejét és erejét elrabolta, örökre eltűnt. És a szerzőben él az a (teljesen tisztult) meggyőződés (amelyet minden értelmes olvasónál is feltételez), hogy e tárgy tisztázásával a tudomány igazi gyarapításának, az ész művelésének, és így az emberi sors lendítésének egyik legfontosabb és legfényesebb lépése megtörtént.”

A nyomtatásban megjelent Appendix-ből ez a néhány sor hiányzik, a német nyelvű fogalmazvány azonban nem szakembereknek készült: az osztrák hadi- és matematikai tudományok legfőbb urának, s patrónusának, János főhercegnek küldötte el Bolyai kapitány. Remélte, hogy megszabadulhat a garnizonélet terhétől, ami ugyan nehéznek az akkori osztrák birodalomban nem volt nevezhető, de az alkotókedvet a fegyelem iszonyatos unalmával bénította. Meg aztán Gauss kimért dicsérő sorai is valamilyen kiegészítésfélére szorultak. Mert dicsérte Gauss a lángeszű művet – amit Bolyai Farkas még a ’Tentamen’ megjelenése (1832) előtt, 1831 júniusában elküldött néki –, hogyne dicsérte volna. De úgy, ahogyan az a szakma csúcsára (maga erejéből s nagyúri támogatással) följutott hatalmasságtól egy régesrég elmaradt, vidéki tanárságba és ismeretlenségbe süllyedt ifjúkori barát fiának kijár. Szemére szokás vetni, hogy néhány év múlva Lobacsevszkij dolgozatát sokkal lelkesebben, s nyilvánosan dicsérte; de hát Lobacsevszkij professzor volt, a kazanyi egyetem rektora, s Gauss pontosan úgy dicsérte őt is, ahogyan társadalmi és tudományos pozízicójának kijárt. Mert a nagy Gauss szívvel-lélekkel a feudális életszemléletet (jórészt épp a modern tudományos-technikai haladás segítségével) konzerváló világ híve volt; azé a német birodalmi fejlődésé, ami elől néhány év múlva Marx Károly Angliába menekül. A harmincas évek elején még nem dőlt el a küzdelem, de Gauss mindig rendíthetetlenül – s hálásan – állott urai odalán. Éppen ez különböztette meg elsősorban az Emberiség üdvéért fáradozó, s érte életét áldozni kész – s végül érte áldozó – Bolyai Jánostól, Két világ állott szemben egymással, kiengesztelhetetlenül: a hatalom őrületébe rohanó német birodalomé, s a polgári haladásé, s ez választotta el egymástól a két nagy matematikust. Nem esze nyíltságában vagy szerencséjében különbözött Bolyai János a göttingai óriástól, hanem emberségében. Gauss lehetett a matematikusok fejedelme, Bolyai ellenben, az új matematika megteremtője, csak Bolzano, Beethoven, Hölderlin, Galois, Saint-Simon, Shelley, Blake kor- s szellemtársa lehetett. Azoké, akik a tudást és az észt nem a Hatalom, hanem az ember szolgálatába kívánták állítani, sorsa könnyítésére, üdve érdekében. Ha János főherceg és tanácsosai történetesen megértették volna az Appendix üzenetét, úgy lehet nemcsak nyugdíjazzák, de be is csukatták volna a kapitányt.

Annál nagyobb büntetés azonban, mint ami a nyugdíjazása után következett, a legszigorúbb börtön is aligha lehetett volna Bolyainak. Marosvásárhelyre azzal a reménnyel tért haza, hogy apjával – az egyetlen emberrel, aki a nagy Gausson kívül értette a fölfedezés jelentőségét – közösen fáradozzanak a tan tökéletes kidolgozásán. De a kezdődő nemzeti konjunktúra hullámain felfelé evickélő kisváros minden lehetett, csak éppen ilyen vállakozásra alkalmas keret nem: a két szellemóriás szövetség helyett furcsa vetélkedésbe keveredett, s csakhamar távolabb kerültek egymástól, mintha országrészek vagy országok választották volna el őket. János kiköltözött a domáldi tanyára, s feneketlen, kínzó magányosságban küszködött nagy eszméivel, rótta papírra fáradhatatlanul gyötrődése gyümölcseit. A töredékek tömegétől megijedt életírók sokáig azt hitték, hogy ezeket a sorokat (olykor a sietség miatt alig olvashatóan, de mindig kristálytiszta, töretlen vonalvezetéssel!) egy egyensúlyát veszített vagy éppen magányba beléhibbant elme vetette papírra; Benkő Samu érdeme, hogy az összekuszált cédulatengerből kihalászta Bolyai János vallomásait. S most egyszeriben megváltozott a kép: kiderült, hogy a magányos elme vívódásai szervesen illeszkednek a kor gondolkozásának fő irányába, logikus folytatásként „az emberi sors lendítésének”, melynek „egyik legfontosabb és legfényesebb lépése” az új matematika megteremtésével megtörtént. (Bolyai János számelméleti és algebrai kutatásairól Kiss Elemér tett közzé fontos kutatásokat – *szerk. megj.*)[2] Annál égetőbb azonban a kérdés, hogy miért

---

[2] Győry Kálmán ezt írja Kiss Elemér ’Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából’ (Bp., 1999. Akadémiai–Typotex. 214 p.) című könyvéről: „Bolyai János az abszolút geometria megalkotásával korszakalkotó felfedezést tett a matematikában. A zseniális geométer nevét az egész világ ismeri és becsüli. Könyvtárnyi Bolyai-írás, -méltatás, köztük számos rangos monográfia jelent meg életéről és munkásságáról. A korábbi Bolyai-kutatók véleménye szerint Bolyai János híres művének, az Appendixnek publikálása után végzett ugyan más, nem geometriai tárgyú kutatásokat is, ezekkel azonban nem ért el érdemleges eredményeket.

Kiss Elemér marosvásárhelyi matematikaprofesszor Bolyai-kutatásaival és -könyvével tudománytörténeti szenzációval szolgál. A szerző a marosvásárhelyi Teleki–Bolyai Könyvtárban található publikálatlan Bolyai-hagyaték többéves kitartó, aprólékos tanulmányozása, a több ezer oldalt kitevő feljegyzések szakértő elemzése után arra a meglepő eredményre jutott, hogy Bolyai János a saját korában jelentősnek számító algebrai és számelméleti problémákkal is foglalkozott, s mai szemmel is igen figyelemre méltó tudományos eredményeket ért el ezeken a területeken. Bár ezen eredmények jelentősége nem mérhető össze Bolyai geometriai felfedezésével, megszületésük idején – ha ismertté válnak – fontos hatást gyakorolhattak volna az algebra és a számelmélet bizonyos ágainak fejlődésére. Bolyai említett, mindeddig nem ismert eredményeit mostanáig más matematikusoknak tulajdonították, mivel azokat Bolyaival lényegében egyidejűleg vagy későbbi időkben mások is felfedezték és publikálták. Mostoha sorsa miatt Bolyai saját írásaiból csupán a 26 oldalas Appendixet láthatta nyomtatásban.

Felvetődik a kérdés, hogy mi mindennel gazdagíthatta volna még a matematika tudományát ez a géniusz, ha kedvező körülmények között folytathatta volna kutatásait és publikálta volna felfedezéseit.

Kiss Elemér nemes feladatot teljesít, amikor szakavatott módon tárja elénk és adja közre Bolyai eddig nem ismert algebrai és számelméleti vizsgálatait és azok eredményeit. Ezzel nagy mértékben járul hozzá a Bolyai-hagyatékban még mindig létező fehér foltok eltüntetéséhez, valamint az eddig ismertnél árnyaltabb, teljesebb, színesebb Bolyai-kép kialakításához. (...)

Az Appendix 1831-es megjelenése nem hozta meg Bolyai János számára a megérdemelt elismerést. Bolyai élete második felét a világtól elzárva, csalódottan, erdélyi magányában

töltötte. Szinte élete végéig folytatta matematikai kutatásait, s mint írja, élvezte a kutatás örömét. Matematikai feljegyzéseit saját maga számára készítette, gondolatait egyedül apjával, Bolyai Farkassal, a neves matematikaprofesszorral osztotta meg levelezés formájában. Feljegyzéseit magyar, német és latin nyelven írta különféle papírokra, borítékokra, hivatalos dokumentumokra, szinte mindenre, ami keze ügyébe került. A feljegyzéseken sok a betoldás, áthúzás, a félbeszakadt szöveg. Mondanivalóját sokszor más lapokon folytatja, vagy csak következtetni lehet arra, hogy a folytatás a hagyaték egy

részével együtt elveszett.

Mint Kiss Elemér könyvében rámutat, a feljegyzések olvasását az is nehezíti, hogy Bolyai János gyakran sajátos, az elfogadottól eltérő jelöléseket és terminológiát használt. Ezzel is magyarázható, hogy bár a Bolyai-hagyatékot ezt megelőzően többen végigolvasták, a korábbi Bolyai-kutatóknak nem sikerült az algebrai és számelméleti eredményekre rábukkanniuk. A hagyaték ilyen vonatkozású megszólaltatásához az kellett, hogy egy lelkes algebrista Bolyai-kutató, Kiss Elemér több évet eltöltsön a Teleki Tékában, felismerje a különböző papírlapokon található feljegyzések közötti matematikai összefüggéseket, s feltárja azok igazi matematikai mondanivalóját. (...)

Bolyai János fontos eredményekre jutott a prímszámok tanulmányozásakor. Ha p prímszám és a p-vel nem osztható egész szám, úgy a kis Fermat-tétel szerint $p \mid a^{p-1} - 1$. Apja ösztönzésére János megkísérelte maradtak ki teljesen a Bolyaiak – nemcsak a lobbanékony és szókimondó János, hanem a tisztelettudó és bölcsen megalkuvó Farkas is – a harmincas-negyvenes évek megpezsdülő honi tudományos- és közéletéből?

Bolyai Farkast a Magyar Tudós Társaság – az Erdélyi Muzéum egykori szerkesztőjének, Döbrentei Gábor „titoknoknak” az ajánlatára – levelező tagjai sorába választotta, de nem a matematikai, hanem a természettudományi osztályban. Az új és nagy reményekkel induló Akadémia tekintélyes vezető matematikusai nem sokra becsülték Bolyai Farkas munkásságát. Vállas Antal a magyar matematikai termést recenzeálva Bolyai Farkas kis remekét, ’Az arithmetica elejé’-t (M. Vásárhely, 1830) épp csak említi – a szerző neve nélkül –, miközben egekig magasztalja Nagy Károly akadémiai nagyjutalommal is kitüntetett munkáját, aminek – ahogyan Bolyai Farkas kesernyés, humorral írta Gaussnak Göttingába – „egyéb érdeme nincsen, mint az, hogy Bécsben szépen és pontosan kinyomtatták.” Nem az Akadémia 200

---

bebizonyítani a tétel fordítottját, ami azt eredményezte volna, hogy a tétel prímkritérium. Hamarosan rájött azonban, hogy ez nem lehetséges, mivel $341 \mid 2^{340} - 1$, holott $341 = 11 \cdot 31$ összetett szám. Ezzel az első ún. pszeudoprímszámot találta meg.

Matematikatörténeti kutatások alapján ma már tudjuk, hogy ezt egy ismeretlen szerző valamivel korábban, Bolyaitól eltérő módon bebizonyította és publikálta, erről azonban Bolyainak nem volt tudomása. Általánosabban, Bolyai módszeres eljárást dolgozott ki az olyan különböző p, q prímszámok keresésére, melyekre $pq \mid 2^{pq-1} - 1$ teljesül, azaz amelyekre $p \cdot q$ pszeudoprím. Több mint 40 évvel később ezt egy Jeans nevű matematikus újra felfedezte, azóta a tételt Jeans-tételként ismeri a matematikai szakirodalom. Bolyai azt is megmutatta, hogy a nevezetes $F_5 = 2^{25}$ Fermat-féle szám pszeudoprím. Érdemes megjegyezni, hogy a pszeudoprímek kutatása csak jóval Bolyai János halála után, 1876-ban indult meg. Bolyai kezdeményezője lehetett volna ennek a problémakörnek.

Gauss egyik nagy matematikai felfedezése a később róla elnevezett Gauss-egészek (a + bi alakú számok, ahol a, b egészek és $i=\sqrt{-1}$) aritmetikájának kidolgozása volt. Bár Gauss és Bolyai Farkas időnként leveleztek, Gauss ezen eredményei nem jutottak el a Bolyaiakhoz. Mint Kiss Elemér a hagyaték alapján könyvében kimutatja, Bolyai János Gausstól függetlenül és lényegében vele egyidejűleg szintén kidolgozta ezen számok, az általa komplex egészeknek nevezett számok oszthatósági elméletét, és feltárta az összes komplex prímeket. Ez tekinthető Bolyai János legértékesebb számelméleti eredményének. Mint Bolyai feljegyzéseiből kiderül, az általa prímtannak vagy imaginárius számelméletnek

nevezett elméletét publikálni is akarta, sajnos azonban erre nem került sor. Bolyai elméletét nem csupán kidolgozta, annak alkalmazásait is adta. Egyebek között több szép és új bizonyítást adott Fermat azon híres tételére, mely szerint bármely 4k + 1 alakú prímszám előáll két négyzetszám összegeként. Bolyai ún. 4. bizonyítása minden idők egyik legszebb és legrövidebb bizonyítása a tételnek.

Mindezek után joggal állapítja meg Kiss Elemér könyvében, hogy az eddigi vélekedéssel ellentétben a magyarországi számelméleti kutatások valójában a Bolyaiakkal kezdődtek.

Bolyai János korában több évszázados nyitott kérdés volt az algebrai egyenletek gyökképlettel való megoldhatóságának problémája. $n \geq 5$ esetén hosszú ideig hiába keresték az n-edfokú algebrai egyenlet általános gyökképletét. Ruffini 1799-ben publikált egy bizonyítást, mely szerint ilyen gyökképlet nem is létezik. Bolyai János ismerte ezt a bizonyítást, és felfedezte, hogy az hiányos. Ezért először ő maga is a gyökképlet keresésén fáradozott. Feljegyzései szerint a kérdés már 1826 óta foglalkoztatta. Később azt írja, hogy Ruffini bizonyításának hibáit kijavította, ilyen gyökképlet valóban nincs. Sőt, mint írja, ezen tételre talált egy másik bizonyítást is. Ezek a bizonyítások sajnos nem találhatók meg a feljegyzések között, valószínűleg elvesztek. Bolyai nem tudott arról, hogy 1826-ban Abel a tételre teljes bizonyítást közölt, s nem ismerte Galois eredményeit sem. Mindenesetre Bolyai feljegyzéseiből világosan kitűnik, hogy kortársaitól függetlenül ő is eljutott a Ruffini–Abel-tételig és annak bizonyításáig, ami mai szemmel mérve is igen jelentős matematikai teljesítménynek tekinthető.

A két Bolyai, János és Farkas levelezéséből a napjainkig feltárt levelek csak elvétve tartalmaznak matematikai szövegrészeket. A könyv VII. fejezete a Bolyaiak levelezéséből 18 matematikai tárgyú levelet tesz közzé, melyek – három levél egyes részleteinek kivételével – eddig kiadatlanok voltak. A levelek közül négyet Farkas küldött Jánoshoz, a többit pedig János írta apjának. A legtöbb levél számelméleti kérdésekkel foglalkozik.

Mint már említettük, Bolyai János gyakran eltért az ő korában már elfogadott és alkalmazott elnevezések és jelölések használatától. Ezzel sajnos nagyon megnehezítette kéziratos hagyatékának olvasását. A VIII. fejezet a Bolyai által használt sajátos műszavak és jelölések jegyzékét és magyarázatát tartalmazza. Ezáltal a szerző azok munkáját kívánja megkönnyíteni, akik a jövőben is tanulmányozni szeretnék Bolyai írásait.” (Győry Kálmán: Bolyai János számelméleti és algebrai kutatásairól. Kiss Elemér: Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából. = Természet Világa, 1999. pp. 469–470.)

aranyát, hanem ezt a szép és pontos nyomtatást „irigyelte” a marosvásárhelyi tanár, aki keservesen kellett küzdjün könyve kiadásáért, magának kellett előre összegyűjtenie az előfizetőket, s még a matematikai jeleket is magának kellett metszenie, s ólomba öntenie diákjaival. Ha nem egyébért, a sok lelkes vesződségért megérdemelt volna egy kis elismerést; de az Akadémia még Farkas recenzióját se közölte, amiben szelíden, s szőrmentén megemlítette Nagy Károly könyvének némely tévedéseit. Láthatóan nem kellett az Akadémiának Bolyai. Míg Döbrentei volt a titoknok, küldött egy-egy hóbortos találmányt bírálatra – elárasztották a derék hazafiak akkoriban ilyesmivel a hon első komoly tudományos fórumát –, amiből aztán Bolyai Farkas technológiai géniusza ki is hámozta a szerző által még csak nem is sejtett műszaki magot, de amikor Döbrenteit Toldy váltotta föl, abbamaradt ez is. S ezzel végleg megszakadt minden kapocs az Akadémia – azaz az öntudatára ébredő honi tudományos élet legfőbb képviselője – s Bolyai Farkas között. Bolyai János a hadseregnél elszenvedett kudarca után az Akadémiával már nem is próbálkozott. De a Magyar Orvosok és Természetvizsgálók kolozsvári nagygyűlésére jelentkezett, biztatást azonban aligha nyerhetett, mert a tervezett előadásból végül is semmi sem lett. A reformkor sokféle, s részben nem is jelentéktelen tudományos mozgalmaiban, s szerveződéseiben a két Bolyai sehol sem kapott helyet. Ámde 1848–49 lelkesedéseit és megrázkódtatásait kívülállóként is teljes felelősséggel és aggodalommal élték és szenvedték meg. „A forradalom ügye – írja Bolyai Jánosról a dokumentumok alapos elemzése után Benkő Samu – személyes ügyévé vált. Olyan lírai hevülettel magasztalja a hősi vállalkozást, máskor meg olyan racionális okfejtéssel próbálja feltárni a kudarc okait, hogy lehetetlen fel nem figyelni a személyes érdekeltség hangzataira.” Mégis, a Bolyaiak számára az 1848-as év legnagyobb személyes élménye Lobacsevszkij művével való megismerkedésük lehetett.

A kolozsvári Nemzet Társalkodó 1844. augusztus 30-i számában Mentovich Ferenc folytatásokban közölt útirajzaiban beszámolt Gaussnál tett látogatásáról. Elmondotta, hogy a nagy matematikus, amikor megtudta, honnét jött, szívesen érdeklődött a Bolyaiak iránt, dicsérte János munkáját, s megemlítette, hogy nemrégiben kapott egy könyvet „egy orosz matematikustól, s előtte azért érdekes, mert nézeteiben merőben egyezik a Bolyaiak mathesis körüli önállóbb nézeteikkel; … s magyarnak a csodálatos nézetazonosságért kétszeresen érdekes, s könnyen hozzájutható lehet, mert orosz nyelven van írva.” Bolyai Farkas azonnal írt a dologról fiának, de három év kellett hozzá, hogy elszánja magát Gaussnak írni, s 1848 januárjában érdeklődjék az orosz matematikus netán németül is megjelent munkái iránt. Gauss – Farkas örömteli meglepetésére – gyorsan és pontosan válaszolt, s 1848 októberében Bolyai János kezében volt Lobacsevszkij ’Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből’ című 1840-ben Berlinben megjelent munkája.

Az orosz tudós rokonszellemű műve szakmai, s emberi reakciók sodró áradatát váltotta ki Bolyaiból, A megdöbbentő azonosság miatti meglepődés, a kívülről jött igazolás kételyoszlató hatása, a gyanú, amely óhatatlanul ébred a szívben az Appendix-et kurtán-furcsán elismerő, Lobacsevszkij művét pedig lelkesen dicsérő Gauss ellen: végül is mind-mind egyetlen hatalmas érzéssé olvad, s tisztul a mű olvasásába mélyedő Bolyaiban. Az igazság diadalmaskodása fölötti önzetlen örömmé. „Én – írja a társakat s beszédet pótló papírra – örömest megosztom a találói érdemet. Bár minden orosz és más államtanácsnok hasonló szeretettel bírna a tiszta mathesisi s tehát – mert az természeti és szükséges következmény – az erkölcsi igazhoz is.”

A tudományos prioritás-harcokkal teli történetében egyedülálló szavak kötetnyi tanulmánynál élesebben világítják meg az 1860-ban elhunyt Bolyait, az embert, akinek egész életét, minden törekvését, a közüdvért való olthatatlan lángolását, a tudományok rendszeres előadására való igyekezetét a tiszta mathesisi és az erkölcsi igazság föltétlen tisztelete, s szolgálta határozta meg. Gondolkodást forradalmasító, az értelmet az egysíkúság évezredes rabságából kiszabadító fölfedezése mögött ez az eggyéolvadó kettő szenvedély lobog, s emeli a nagy magányos matematikust az emberiség héroszainak sorába.

Babits Mihály:

BOLYAI

"Semmiből egy új, más világot teremtettem."
Bolyai János levele atyjához

Isten elménket bezárta a térbe.
Szegény elménk e térben rab maradt:
a kapzsi villámölyv, a gondolat,
gyémántkorlátját még csak el sem érte.

Én, boldogolván azt a madarat
ki kalitjából legalább kilátott,
a semmiből alkottam új világot,
mint pókhálóból sző kötélt a rab.

Új törvényekkel, túl a szűk egen,
új végtelent nyitottam én eszemnek;
király gyanánt, túl minden képzeten

kirabolván kincsét a képtelennek
nevetlek, mint Istennel osztozó,
vén Euklides, rab törvényhozó.