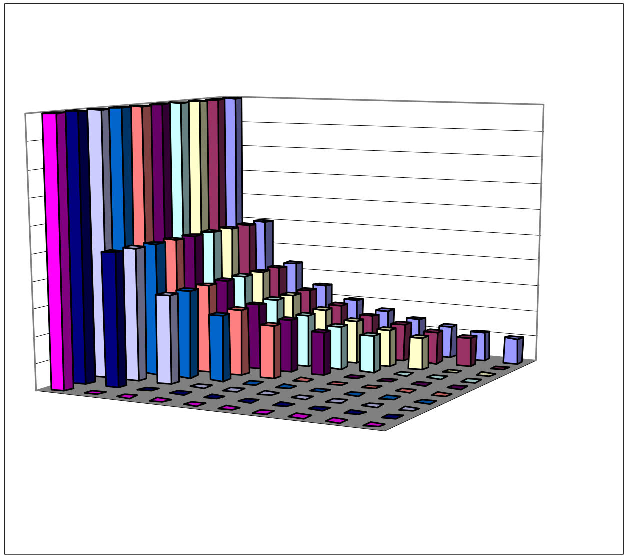
Speciális mátrixok és mátrixsorozatok inverze, gazdasági alkalmazási lehetőségek

Dr. Tóth József



Debrecen
2009

Tartalomjegyzék

Előszó

1. Mátrixok, mátrixsorozatok inverze, jellegzetessége és szerepe a gyakorlati modellezés során

2. Speciális mátrixok és mátrixsorozatok inverze

3. Egyszerűsített gyakorlati alkalmazási példa

Előszó

Az 1970-es évek elején egy száz egynéhány egyenlőtlenségből és száz valahány ismeretlenből álló mező-gazdasági alkalmazási, lineáris programozási modellt vittem el Debrecenből Budapestre, mert akkor még csak ott volt olyan számítógép, amely ilyen, „nagyméretűnek számító” modell, megoldására képes volt.

Több mint kétórai gépi munka után sem sikerült a megoldás. Mint később kiderült, egy adat elírása miatt. A gépóráért fizetni kellett, s erre nem volt további pénzkeretem, tehát nem tudtam az adat kijavítása után újra gépre vinni a modellt. A feladat megoldása is sürgős volt, tekintve, hogy határidős, gyakorlati problémát kellett megoldani.

Gondoltam egy merészet!

Tekintve, hogy a modell speciális felépítésű és viszonylag üres volt, azaz viszonylag kevés nullától különböző adata volt, s az adatok nagyobb része is egyes és mínusz egyes, úgy véltem, hogy megpróbálom megoldani a modellt számítógép nélkül.

Az akkori szokások és lehetőségek szerint a modell kockás papíron (kockás papírtekercsből levágott darabon) volt megszerkesztve. A modellt kifüggesztettem a szoba falára. Egy munkatársam az íróasztalhoz ültettem, s diktáltam, hogy milyen műveleteket végezzen, (az akkor még kézi tekerős eszközzel), milyen számokkal, s azokat milyen rendben írja le. Alig több mint egy óra alatt sikerült a modellt megoldani!

Nem a gyors számolóképességünk tette ezt lehetővé, hanem az, hogy a modell – mint említettem – egy speciális mátrixot foglalt magába, ami lehetőséget adott, egy új megoldási mód alkalmazására.

Már akkor gondoltam arra, hogy talán érdemes lenne részletesebben megvizsgálni bizonyos speciális modelleket, illetve e modelleket reprezentáló speciális mátrixokat, mátrixsorozatokat különösen azok inverzének előállítási lehetőségét.

Ezt annál inkább szükségesnek tartottam, mert később még nagyobb méretű modelleket is meg kellett oldanom számítógép nélkül, amelyek mérete megközelítette az 1000 ismeretlent és 1000 egyenlőtlenséget.

Felvetetődött tehát bennem annak a lehetősége, hogy az inverzek természetének ismeretében, esetleg mód lenne olyan számítógép program megírására is, amely az adatok beolvasásával egyidejűleg előállítaná a modellben meghatározott mátrix inverzét, vagy a mátrix particionálásával előállított minormátrixok inverzét, stb. Másként, arra is volna lehetőség, hogy adott lineáris programozási feladatot, vagy lineáris programozásra visszavezethető nemlineáris, egészértékű, vagy vegyes egészértékű feladatot, eleve úgy fogalmazzunk meg, hogy a modellben meghatározott mátrix particionálásával előállított minormátrix inverzét eleve megadjuk.

Aztán ismét vissza-visszatértem a kérdésre, s 1978-ban jutottam el oda, hogy egy cikket írtam „Egy speciális elrendezésű modell költségmegtakarító megoldása” címmel, amely megjelent a Statisztikai Szemle 1978. évi 10. számában. Később, a Statisztikai Szemle 1987. évi 2-3. számában megjelent „Egy speciális mátrix és néhány tulajdonsága.” című cikkem, s végül ugyancsak foglalkoztam a témával a „Mezőgazdasági vállalatok automatizált tervezése” Mezőgazdasági Kiadó, 1981. az interneten a Magyar Elektronikus Könyvtárban is megtalálható (http://mek.oszk.hu/05200/05296) könyvemben.

Fenti munkáimban csak részben fejtettem ki a problémát, egyrészt a terjedelmi korlátok miatt, másrészt azért, mert például könyvemben ez a kérdés csupán apró motívumként szerepelt egy tágabb, komplexebb témakörben.

A továbbiakban részletesebben kívánok a problémával foglalkozni. A kérdés sokrétűsége miatt a teljességre most sem törekedhetek, de az eddigiektől részletesebb, sokoldalúbb kifejtésre mindenképpen.

A téma véleményem szerint önmagában is érdekes, de mint fentebb említett cikkeimből és könyvemből, valamint egyetemi jegyzeteimből is kitűnik, a mátrixok invertálása részletesebb megismerésének gyakorlati haszna is lehetséges. Igaz, könyvemben csak két speciális mátrixalkalmazás lehetőségét vettetem fel, de egyáltalán nem kizárt, sőt – véleményem szerint – bizonyos, hogy más speciális mátrixok is előfordulhatnak, vagy képezhetők a gyakorlatban, amelyeknél hasznos lehet, ha minden számítás nélkül is ismerjük, vagy fel tudjuk írni egy speciális mátrix inverzét. De a gyakorlati alkalmazás lehetőségétől függetlenül is érdekes lehet számunkra, hogy milyen eredményhez jutunk a különböző speciális mátrixok és mátrixsorozatok invertálása során.

Könyvem elején kénytelen vagyok olyan matematikai apparátust is felvonultatni, amely a matematikában nem járatos olvasó számára nehezen emészthető, vagy érdektelen. A későbbiekben azonban megkísérelem a problémát egyszerű, hétköznapi nyelven leírni, amelynek megértéséhez nem szükséges magasabb matematikai ismeret, annál inkább, mert a leírtakat egyszerű számpéldákkal illusztrálom.

1. Mátrixok, mátrixsorozatok inverze, jellegzetessége és szerepe a gyakorlati modellezés során

Ismeretes, hogy az

1. $y=ax$

egyenletből az x kifejezhető az

2. $x=y/a$

formában, ami viszont egyenértékű az

3. $x=y*1/a$

szorzattal, vagyis mindegy, hogy az a-val osztunk, vagy annak reciprok értékével szorzunk.

Ismeretes az is, hogy ha valamely számot reciprok értékével megszorzunk, eredményül 1-et kapunk, azaz

4. $a*1/a=1$

Az 1/a számot az a inverzének is nevezzük és jelölésére az a^{-1} szimbólumot is használjuk.

Kvadratikus mátrixok esetén is beszélhetünk inverzről, és azt, (ha létezik) az

5. $\mathbf{A}^{-1}$

szimbólummal jelöljük.

Ha az **A** mátrixot inverzével szorozzuk, (s tekintve, hogy a szorzat kommutatív, jobbról, vagy balról szorozhatunk), egységmátrixot kapunk eredményül, azaz

6. $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}$

Vagyis a kvadratikus **A** mátrix inverzén olyan n-ed-rendű mátrixot értünk, amelynek az **A**-val alkotott szorzata n-ed rendű egységmátrixot ad eredményül.

Ha az **A** kvadratikus mátrix és van inverze, akkor az

7. $\mathbf{Ax=b}$

egyenlet az inverz mátrix ismeretében az

8. $\mathbf{x=A^{-1}b}$

Formában is felírható. Az inverz mátrix tehát felhasználható lineáris egyenletrendszerek (és egyenlőtlenségrendszerek) megoldására.

Ha az

9. $\mathbf{Ax=b}$

lineáris inhomogén reguláris egyenletrendszerben az **A** mátrix kvadratikus és nem szinguláris, akkor az egyenletrendszert megoldani annyit jelent, mint meghatározni azt az **x** vektort, amely az adott egyenletrendszert kielégíti.

A megoldás szükséges és elégséges feltétele, hogy a **b** vektor benne feküdjék az **A** mátrix oszlopvektor terében, azaz, hogy a **b** vektor kifejezhető legyen az **A** mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, vagyis

10. $\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}$

A **b** vektornak az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, … $\mathbf{a}_l$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátái éppen a keresett ismeretleneket adják.

Tekintve, hogy célom a mátrixok és mátrixsorozatok inverzének a vizsgálata nem térek ki az inhomogén irreguláris, a homogén reguláris, homogén irreguláris lineáris egyenletrendszerek és a lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálatára, sem pedig a mátrixok egyéb területének (rang, rend, faktorizáció, dimenzió és bázis, stb.) vizsgálatára, s nem térek ki az inverz numerikus meghatározására sem, ezek ismeretét feltételezem.

Számunkra most a speciális mátrixok inverzének vizsgálata, valamint mátrixsorozatok inverzében található törvényszerűségek vizsgálata lényeges, azaz főleg olyan mátrixok és mátrixsorozatok inverzének a vizsgálata érdekes, amilyeneket, – tudomásom szerint, – eddig még nem vizsgáltak, s rendszerbe nem foglaltak.

A már hivatkozott könyvem 5. pontjában a mezőgazdasági vállalatok termelési szerkezetének, termelési technológiáinak és a termelési forrásainak egyidejű optimalizálása, a 6. pontjában pedig a termelési szerkezet, az átlaghozamok, a termelési technológiák és a termelési források egyidejű optimalizálása modelljét ismertettem, a mezőgazdasági vállalatok komplex döntésmegalapozása és tervezése témakörében.

Fontosnak tartom annak a megjegyzését, hogy hasonló modellek, illetve a későbbiekben ismertetésre kerülő speciális mátrixok, nem csak a mezőgazdaságban, hanem általában a közgazdasági modellezésben, valamint az élet sok más területein is előfordulhatnak, illetve előfordulnak.

E modellek jellemzője, hogy általában nagyméretűek, megoldásuk idő- és költségigényes. Nem érdektelen tehát olyan megoldási lehetőségek keresése, amelyek gyorsabban, kevesebb költséggel vezetnek eredményhez, illetve lehetővé teszik, hogy betekintsünk az ilyen jellegű feladatok belső összefüggéseibe.

Jellemzőjük még e modelleknek a speciális elrendezés is. Ezt vizsgálva olyan eljáráshoz jutunk, amely a modell megoldásához szükséges gépidőt is csökkentheti. E jelzett modellek is lehetnek különböző elrendezésűek, célszerű azonban azokat a következőkben tárgyalt blokkos elrendezésben szerkeszteni, vagy ennek megfelelően rendezni, nemcsak azért, mert ez az elrendezési mód teszi legegyszerűbben lehetővé a modellszerkesztés és az inverz meghatározásának az automatizálását, hanem szakmai megfontolások miatt is. Ez a felépítés biztosítja például, az egyes termékek optimális technológiai folyamatának rendszerbe foglalt leírását, a modell megoldásának eredményeként.

Az alapmodell a következő:

	x^*	y^*		
u_1	**A**	**0**	=	**0**
u_2	**B**	**F**	$\leqq$	**0**
u_3	**D**	**G**	$\leqq$	**b**
	p^*	c^*		**0**

1. Táblázat. Alapmodell

Ahol:

A – a termelési tevékenységek és a munkaműveletek összefüggését előíró mátrix;

B – a termelési tevékenységek és munkaműveletek fajlagos erőforrásigényeinek mátrixa ($\mathbf{B} \geq \mathbf{0}$);

D, G – egyéb feltételekre (munkaerő, eszköz, takarmány, termelési korlátok, anyagkorlátok, beruházási korlátok, stb.) vonatkozó fajlagos tényezők mátrixa;

F – a forrásváltozók fajlagos kapacitására vonatkozó mátrix ($\mathbf{F} \leq \mathbf{0}$) ;

b – az egyéb feltételekre vonatkozó korlátok ($\mathbf{b} \geq \mathbf{o}$)

p* – a termelési tevékenységek hozamait (pozitív előjelű elemek) és a munkaműveletek költségeit (negatív előjelű elemek) tartalmazó vektor;

c* – a forrásváltozók fix költségeinek vektora ($\mathbf{c}^* \leq \mathbf{o}^*$);

x – a termelési és műveleti változók vektora;

y – a forrásváltozók vektora.

Méretét tekintve legnagyobb az **A** hipermátrix, minthogy a mezőgazdasági vállalatoknál sokféle termék termelése jöhet szóba, sokféle munkaműveletet kell elvégezni, s ezek megoldási módja és ideje is változatos. Általában az **A** hipermátrixhoz kapcsolódik a modellváltozóknak és a feltételeknek körülbelül kétharmada – háromnegyede, a modellben a változók száma 800–1500 között van, s e körül található a szükséges feltételek száma is.

Az **A** mátrix jellemzője, hogy kvázi-diagonálisan elhelyezkedő blokkokból épül fel:

$\mathbf{A}_{11}$			
	$\mathbf{A}_{22}$		
		. . .	
			$\mathbf{A}_{nn}$

2. Táblázat. Kvázi – diagonálisan elhelyezkedő blokkokból álló hipermátrix.

Az **A** mátrix blokkjaiban az elemek elrendeződése speciális. E modellblokkban azt írjuk elő, hogy amennyiben például adott terméket meghatározott mennyiségben termelünk (x_{ij1}), ennek megfelelő mennyiségben el kell végezni a termék termeléséhez szükséges első műveletet (x_{ij2}), illetve az első művelet elvégzése maga után vonja a második művelet elvégzését, és így tovább a k-adik művelet elvégzését.

A gyakorlati tervezés során a modellblokkok nem mindig ilyen egyszerűek. A munka műveletek különböző módokon (pl. különböző eszközök felhasználásával, különböző erő – és munkagépkapcsolatokkal) és különböző időszakokban (dekádokban vagy hónapokban) végezhetők, valamint egymáshoz viszonyított arányaikban is változóak lehetnek. Ebből adódóan adott művelet több változóval képviseltethető, és ezek között minden esetben meghatározott (azonos, vagy eltérő arányú) kapcsolatot kell teremteni a feltételekben.

Fontos még megjegyezni, hogy a modell oszlopainak és sorainak sorrendje tetszőlegesen átrendezhető, ami nem befolyásolja a modell megoldásának az eredményét. Így például ha egy mezőgazdasági vállalat búzát, kukoricát, napraforgót, burgonyát, stb. termel, e termelési változók sorrendje bármikor tetszés szerint megváltoztatható, ami az eredményt nem befolyásolja. Ugyancsak nem befolyásolja az eredményt, hogy a munkaerő (szak- és segédmunkás), az erő és a munkagépek stb. milyen sorrendben szerepelnek a modellben, vagyis ezek (a modell feltételeinek) sorrendje is tetszés szerint átrendezhetők.

A problémát itt leegyszerűsítve tárgyaljuk, az ismertetésre kerülő eljárás azonban – erre utalni fogunk – bonyolultabb esetekben is alkalmazható. Az $\mathbf{A}_{ij}$ blokk fontos jellemzője, hogy k számú változót és k-1 számú feltételt tartalmazó irreguláris mátrix. Az $\mathbf{A}_{ij}$ mátrix utolsó oszlopának elhagyásával képzett $\mathbf{A}_{ij}$ mátrix viszont kvadratikus, nem szinguláris mátrix, s vektorai egymástól függetlenek, tehát lehetséges az inverzük. (3. Táblázat)

x_{ij1}	x_{ij2}	x_{ij3}	x_{ij4}	...	x_{ijk-1}	x_{ijk}
1	-1					
	1	-1				
		1	-1			
				.		
				.		
				.		
					1	-1

3. Táblázat. Kvadratikus, nem szinguláris mátrixblokk

ahol a könyvemben kifejtett mezőgazdasági modellt tekintve

x_{ij1} az ij-edik blokk, termelési változója, (*j*-edik termelési tevékenység mérete);

x_{ij2}, x_{ij3},…,x_{ijk} a j-edik termelési változóhoz szükséges munkaműveletek változói.

Egyszerűen megállapítható, hogy az $\mathbf{A}_{ij}$ mátrix utolsó oszlopának elhagyásával képzett szűkített $\mathbf{A'}_{ij}$ mátrix diagonális elemei egységek, a diagonális feletti (illetve a diagonálistól jobbra lévő) elemei mínusz előjelű egységek, s a többi elemei, így a diagonális alatti elemei is mind zérusok. (A zérus elemeket nem jelöltem, ezeket a cellákat üresen hagytam.) E mátrix inverze olyan felső trianguláris mátrix, amelynek diagonális elemei és a diagonális feletti elemei egységek, a diagonális alatti elemei nullák. Ezek szerint tehát az $\mathbf{A'}_{ij}$ mátrix inverze, az $\mathbf{A'}_{ij}^{-1}$ minden számolás nélkül felírható. Ha például az $\mathbf{A'}_{ij}$ az alábbi szűkített mátrix,

x_{ij1}	x_{ij2}	x_{ij3}	x_{ij4}	…	x_{ijk-1}	x_{ijk}
1	-1					
	1	-1				
		1	-1			
				.		
				.		
				.		
					-1	
					1	-1

4. Táblázat. Szűkített A'_{ij} mátrix

akkor ennek az inverze $\mathbf{A'}_{ij}^{-1}$

x_{ij1}	x_{ij2}	x_{ij3}	…	x_{ijk-1}
1	1	1	…	1
	1	1	…	1
		1	…	1
			.	.
			.	.
			.	.
			…	1

5. Táblázat. A'^{-1}_{ij} inverzmátrix

Térjünk vissza az eredetileg megfogalmazott alapmodellre, amikor a termelési szerkezet, a termelési technológiák, a fajlagos hozamok és a termelési erőforrások, (munkaerő, termelési eszközök) egyidejű, egymással kölcsönhatásban történő optimalizálására alkalmazható lineáris programozási modellt vizsgál-juk. Particionáljuk modellünket a következőképpen:

	x'*	x''*	y*		
U_1	**A'**	**A''**	**0**	=	**0**
U_2	**B'**	**B''**	**F**	≤	**0**
U_3	**D'**	**D''**	**G**	≤ = ≥	**b**
	p'*	**p''***	**c***		**0**

6. Táblázat. Matematikai modell

Ahol:

x– a termelési és a műveleti változók vektora, mely vektort az **x**' és az **x**'' vektorokra particionáltuk, ahol **x**' vektorhoz rendeltük a termelési változókat és minden műveletből a legkedvezőbbnek tűnő műveleti változókat. (Itt a legkedvezőbb jelző még csupán műveleti szintű és a műveleteket össze-függéseiből kiragadó megítélés alapján adható meg, azaz a modellbeli célfüggvény koefficiensek alapján, mely megítélést a **c*** költségvektor módosíthatja). Az **x**'' vektorhoz rendeljük valamennyi más, a legolcsóbbnál drágábbnak tűnő műveletet.

A – a termelési tevékenységek és a munkaműveletek kapcsolatait előíró mátrix, az előző értelemben **A**' és **A**'' mátrixokra particionálva.

B – a termelési tevékenységek és a munkaműveletek fajlagos erőforrásigényeinek (szintén particionált **B**', **B**'') mátrixa

D,G – az egyéb feltételekre (munkaerő, takarmánymérleg, termelési, anyagi, pénzügyi és beruházási korlátok, stb.) vonatkozó tényezők particionált mátrixa. (**D’**, **D’’**, **G**)
F – a forrásváltozók fajlagos kapacitására vonatkozó mátrix
b – az egyéb feltételekre vonatkozó korlátok
p* – a termelési és a műveleti változók célfüggvény értékei (**p’***, **p’’***)
y* – forrásváltozók vektora
c* – forrásváltozók célfüggvény értékeinek vektora

Végrehajtva a bázis-transzformációt az **A’** generáló blokkal a következőket kapjuk:

	u*	x’’*	y*		
x’	$\mathbf{A'^{-1}}$	$\mathbf{A'^{-1}A''}$	**0**	=	**0**
u_2	$\mathbf{-B'A'^{-1}}$	$\mathbf{B''-B'A'^{-1}A''}$	**F**	$\leq$	**0**
u_3	$\mathbf{-D'A'^{-1}}$	$\mathbf{D''-D'A'^{-1}A''}$	**G**	$\leq$ $>$	**b**
	$\mathbf{-p'^{*}A'^{-1}}$	$\mathbf{p''^{*}-p'^{*}A'^{-1}A''}$	**c***		**0**

7. Táblázat. A bázis-transzformáció után kapott eredmény

A fentiekből látjuk, hogy a bázis-transzformáció csak az **x**’* és az **x**’’* – hoz tartozó blokkokat változtatta meg, ami természetes, tekintve, hogy a feladat első blokksorában **A** mátrix kivételével zérus-blokkok szerepelnek.

Láttuk, hogy az **A’** mátrix inverze ($\mathbf{A'^{-1}}$) olyan kvázi-diagonálisan elhelyezkedő felső trianguláris mátrixblokkokból áll (5 Táblázat), amelyeknek zérustól különböző elemei egységek. Ha például egy **B** mátrixot ilyen mátrixblokkal szorzunk, a **B** mátrixoszlop vektorainak kommúlációját kapjuk. Például ha a **B** mátrixot

x_{ij1}	x_{ij2}	. . .	x_{ijk-1}
b_{11}	b_{12}	. . .	b_{1k-1}
b_{21}	b_{22}	. . .	b_{2k-1}
		. . .	
b_{k-11}	b_{k-12}	. . .	$b_{(k-1)(k-1)}$

8. Táblázat. B mátrix

szorozzuk jobbról olyan felső trianguláris mátrixszal, amelynek a diagonális és a feletti elemei egységek, azaz

x_{ij1}	x_{ij2}	…	x_{ijk-1}
1	1	…	1
	1	…	1
		. . .	
			1

9. Táblázat. Felsőtrianguláris eredménymátrix

akkor tehát a **B** mátrix oszlopvektorainak kommúlációját kapjuk, azaz

x_{ij1}	x_{ij2}	…	x_{ijk-1}
b_{11}	$b_{11}+b_{12}$	…	$b_{11}+ b_{12+…+}b_{1k-1}$
b_{21}	$b_{21}+b_{22}$	…	$b_{21}+ b_{22+…+}b_{2k-1}$
. . .	. . .	. . . .	. . .
b_{k-11}	$b_{k-11}+b_{k-12}$	. . .	$b_{k-11}+ b_{k-12+…+}b_{(k-1)(k-1)}$

10. Táblázat. Kommúlált mátrix

Hasonlóképpen nyerjük a – **B'A'$^{-1,}$ -D'A'$^{-1}$**, **-p'* A'$^{-1}$** szorzatokat, utóbbi esetben természetesen a sor-vektor elemeinek halmozásaként.

Egyszerű példa segítségével könnyen ellenőrizhető, hogy az 7. Táblázat szerinti **A'$^{-1}$A''** olyan mátrixot eredményez, amelynek diagonálisan elhelyezkedő mátrixai olyan oszlopvektorok, amelyek az eredeti $\mathbf{A}_{ij}$ mátrix sorainak számával megegyező elemet tartalmaznak.

Az elemek mindegyike -1**AB''- B'(A'$^{-1}$A")** és **D''-D'(A'$^{-1}$A'')** a **B** mátrix $\mathbf{A_{ij}}$ mátrixhoz kapcsolódó elemeinek soronkénti összege. Ugyanez vonatkozik értelemszerűen a célfüggvényekre is.

Az előbbiekből következik, hogy a 7. Táblázat szerinti helyzet minden különösebb számítás nélkül felírható, illetve csupán a vektorok elemeinek halmozott összeadására szorítkozik (ez a számítógépbe történő beolvasás folyamán elvégezhető); természetesen az előjeleket ellenkezőre változtatjuk.

Ezáltal viszont előállítottunk egy olyan közbenső bázismegoldást, amikor a modellváltozók nagyobb részét, bevontuk a bázisba. Igaz, hogy a bázisba vont változók értéke egyelőre nulla, de eljutottunk a feladat jelentős átrendezéséhez.

A –p''**A'$^{-1}$** elemei általában negatív, viszont a **p''*-p'*(A'$^{-1}$A'')** elemei általában pozitív előjelűek. (Ellenkező esetben olyan tevékenység szerepel a modellben, amely biztosan nem jövedelmező, hiszen a termék termelési értéke a közvetlen műveleti költségeket sem fedezi, nem is beszélve a gépek fix költségeiről.

Ha a modellben ilyen tevékenység van, az természetesen akkor szerepelhet a megoldásban, ha azt egyenlettel, vagy alsó korláttal előírjuk. A megoldás tehát a **p''*-p'*** $(\mathbf{A}'^{-1}\mathbf{A}'')$ szerint folytatható, az **x''** valamely eleme a bázisba bevonható. (Érdekesség viszont, hogy a bázisba vont változók egy ideig még továbbra is nulla értéket vehetnek fel. Közben azonban **c*** elemei előjelet váltanak és **y*** elemei is a bázisba kerülnek, majd az **x'***, **x''** és **y*** több bázisba vont eleme vesz fel egyszerre nullától különböző pozitív értéket.)

Összefoglalva tehát egy nagyméretű modell megoldását egy olyan közbenső bázismegoldásból kiindulva kezdhetjük el, amikor a változóknak körülbelül 60-75 %-át már bevontuk a bázisba, tehát a számításoknál igen jelentős gépidőt takaríthatunk meg.

Az eddigiek során a problémát lényegesen leegyszerűsítettük. A gyakorlati tervezés ilyen egyszerűsítéseket nem tesz lehetővé, azonban az ismertetett eljárás, bonyolultabb esetekben is jól alkalmazható és jelentős segítséget nyújthat.

Nem célom e helyütt a szakmai alkalmazásokba mélyedni, s ennek során a megalkotandó matematikai modellt részletesen taglalni, ezt az olvasó a MEK-ben megjelent könyvemben részben megtalálhatja. Jelenleg csak egy igen leegyszerűsített gyakorlati feladat megoldását fogom a 3. fejezetben bemutatni. Most csak annyit jegyzek meg, hogy a gyakorlatban előforduló bonyolult modellek esetében is megvan a lehetősége annak, hogy a modell megfelelő rendezésével és particionálásával az $\mathbf{A}_{ij}$, mátrixblokkal és az **x*** vektorral előállítsunk olyan modellblokkot, amely invertálható, s az előbbiekben kifejtettek alkalmazhatók, tehát a számítások ilyenkor is célszerűen elvégezhetők. A továbbiakban foglalkozzunk a speciális mátrixok és mátrixsorozatok inverzének megismerésével.

2. Speciális mátrixok és mátrixsorozatok inverze

Tegyük tehát vizsgálat tárgyává az említett speciális mátrixokat és mátrixsorozatokat és azok inverzeit. Az egységesség kedvéért a szemléltetés céljából mindvégig 10x10-es diagonális mátrixokat használok.

A speciális mátrixokat **S**-el fogom jelölni, az egységmátrixot is, kifejezve ezzel, hogy az egységmátrix is egy speciális mátrix, s ismerjük, hogy kitüntetett jelentősége miatt azt külön jelöléssel (**E**) szoktuk megkülönböztetni, de ettől jelen esetben eltekintek.

Annak érdekében, hogy az egyes speciális mátrixokat egymástól egyszerűen meg tudjuk különböztetni, alsó indexként jelölni fogom jellemzőjüket.

Vegyük tehát először az egységmátrixot, mint speciális mátrixot, azaz

11. $\mathbf{S_1}=\mathbf{E}$

Az $\mathbf{S_1}$ olyan mátrix, amelynek diagonális elemei egységek, a többi eleme nulla. Ennek a speciális mátrixnak az inverze

12. $\mathbf{S_1}=\mathbf{E}=\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{E}^{-1}$

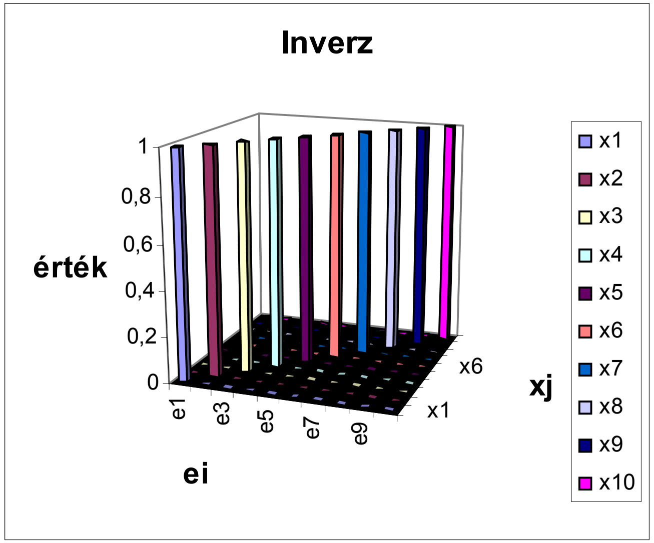
Vagyis

1. Tétel: Az egységmátrix és inverze megegyezik, vagyis $\mathbf{S_1}$, (azaz **E)** egységmátrix inverze maga az egységmátrix, mint ahogyan az 1 reciprok értéke, azaz inverze is 1, azaz 1/1=1. Tehát $\mathbf{S_1}=\mathbf{S}^{-1}$ az alábbiak szerint:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

11. Táblázat. S_1 mátrix és annak inverze

Ábrázolva a mátrixot a következőket kapjuk:



1. Ábra. S_1 mátrixnak és inverzének ábrája

Az ábrából is jól érzékelhető, hogy a diagonális elemek 1, a diagonálistól különböző elemek 0 értéket vesznek fel.

Azonnal felvethető a kérdés, hogy mi történik akkor, ha az egységmátrixban a diagonális elemeket kicseréljük, s egy sorozatot képezünk, vagyis a diagonális elemekként 1 helyett 2, 3, stb., azaz h értékeket szerepeltetünk, s a diagonálistól eltérő elemek továbbra is nullák?

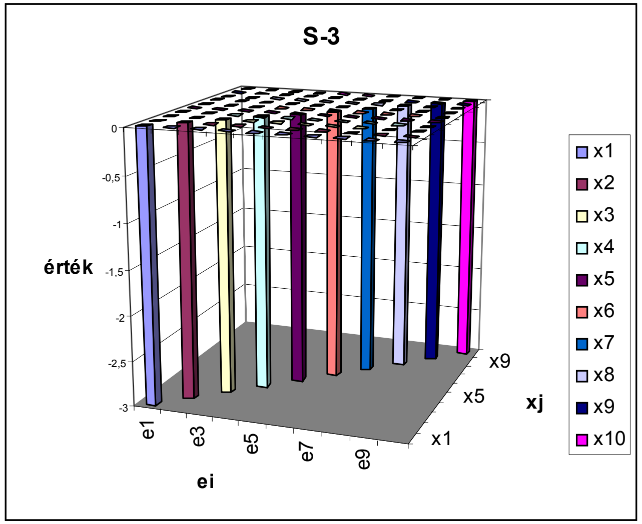
Vegyük tehát az $\mathbf{S_h}$ mátrixot, azaz olyan mátrixot, amelynek diagonális elemei különböző h értékeket vehetnek fel, (a számegyenes bármely értékét felvehetik, tehát végtelen számú mátrixból álló sorozatot képezhetünk), a többi eleme nulla és határozzuk meg annak inverzét. Tegyük fel, hogy h=-3.

Az $\mathbf{S_{-3}}$ tehát a következő:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	-3	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	-3	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	-3	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-3

12. Táblázat. $\mathbf{S_{-3}}$ mátrix

Ennek ábrája:



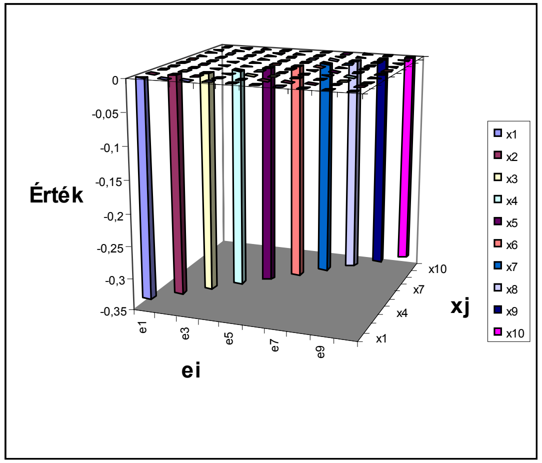
2. Ábra. S_{-3} mátrix ábrája

és inverze $(\mathbf{S}_{-3})^{-1}$

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	-0,3333	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x2	0	-0,3333	0	0	0	0	0	0	0	0
x3	0	0	-0,3333	0	0	0	0	0	0	0
x4	0	0	0	-0,3333	0	0	0	0	0	0
x5	0	0	0	0	-0,3333	0	0	0	0	0
x6	0	0	0	0	0	-0,3333	0	0	0	0
x7	0	0	0	0	0	0	-0,3333	0	0	0
x8	0	0	0	0	0	0	0	-0,3333	0	0
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,3333	0
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,3333

13. Táblázat. $(S_{-3})^{-1}$ mátrix

Az inverz ábrája:



3. Ábra. $(S_{-3})^{-1}$ mátrix ábrája

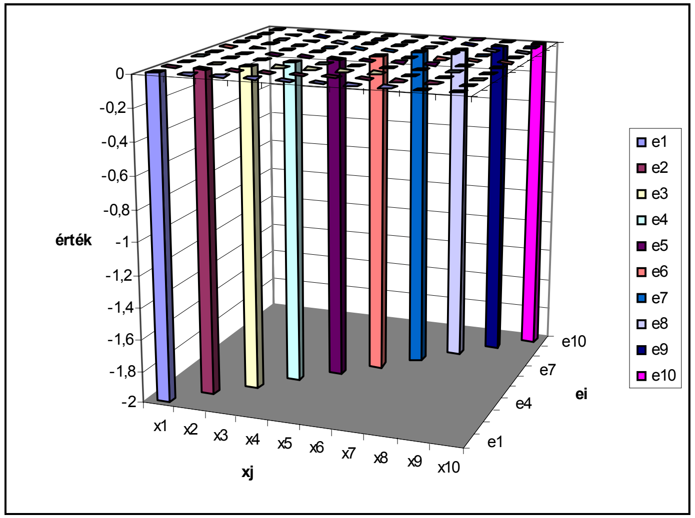
Látjuk tehát, hogy ha h=-3, akkor az inverz mátrix diagonális elemei 1/3, azaz 0,33333‥ azaz egyharmad, s mint tudjuk a diagonálistól különböző elemek nullák.

Tegyük fel, hogy h=-2 Az $\mathbf{S}_{-2}$ tehát a következő:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-2

16. Táblázat. (S_2) mátrix

Ennek ábrája:



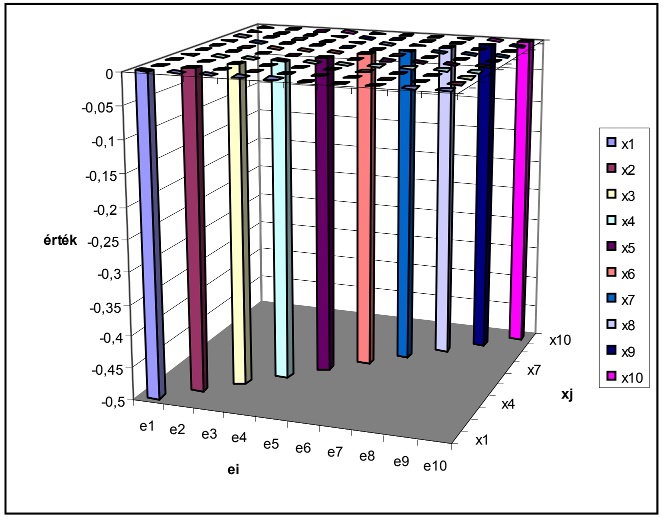
4. Ábra. (S_2) mátrix ábrája

és inverze

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	-0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x2	0	-0,5	0	0	0	0	0	0	0	0
x3	0	0	-0,5	0	0	0	0	0	0	0
x4	0	0	0	-0,5	0	0	0	0	0	0
x5	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	0	0
x6	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	0
x7	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0	0
x8	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0	0
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5	0
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,5

17. Táblázat. $(S_2)^{-1}$ mátrix

Az inverz ábrája:



5. Ábra. $(S_2)^{-1}$ mátrix ábrája

E szerint tehát $\mathbf{(S_2)^{-1}}$ olyan mátrix, amelynek diagonális elemei 1/2, azaz 0,5 értéket vesznek fel, vagyis az eredeti értékeknek a reciprok értékei.

2. Tétel: Ha az egységmátrix diagonális értékeit 1 helyett bármely értékre cseréljük, s egy sorozatot képezünk, a mátrix inverze azoknak az értékeknek a reciprok értékeit (inverzeit) fogják tartalmazni.

Ezt az eddigiek alapján könnyű belátni, ezért nem tartom szükségesnek további számszerű példával történő szemléltetését.

Ha a diagonális értékek negatív előjelűek, akkor természetesen az inverz mátrix elemei is negatív előjelűek lesznek.

Az viszont természetes, hogy a zérus mátrixnak nincs inverze, mint ahogyan a nulla értéknek sincs reciprok értéke.

Érdekes lehet, hogy milyen módon lehet adott mátrixokat több mátrixként szétbontani azok inverzét előállítani, majd az így előállított mátrixból lehetséges-e az eredeti mátrix inverzét megkapni.

Legyen a vizsgált mátrixunk ismét $\mathbf{S_3}$, azaz

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

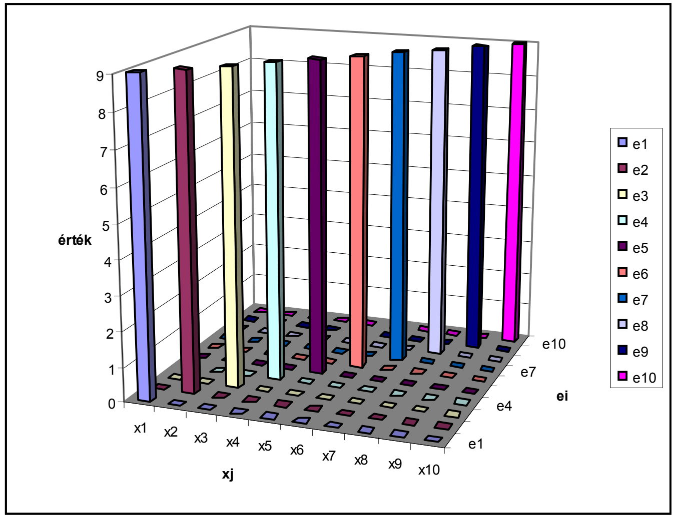
18. Táblázat. (S_3) mátrix

Bontsuk ezt három S_9 mátrixra, azaz három darab alábbi mátrixra

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	9	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	9	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9

19. Táblázat. (S_9) mátrix

Ennek ábrája



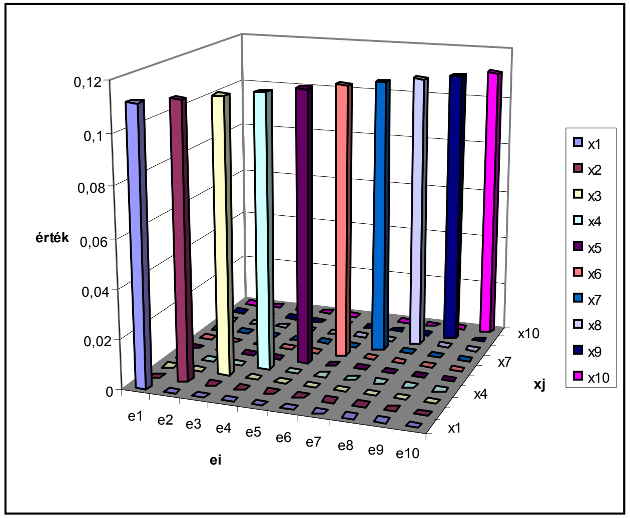
6. Ábra. (S_9) mátrix ábrája

És inverze $(\mathbf{S_9})^{-1}$

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,111	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x2	0	0,111	0	0	0	0	0	0	0	0
x3	0	0	0,111	0	0	0	0	0	0	0
x4	0	0	0	0,111	0	0	0	0	0	0
x5	0	0	0	0	0,111	0	0	0	0	0
x6	0	0	0	0	0	0,111	0	0	0	0
x7	0	0	0	0	0	0	0,111	0	0	0
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,111	0	0
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,111	0
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,111

20. Táblázat. $(\mathbf{S_9})^{-1}$ inverz mátrix

Az inverz ábrája



7. Ábra. $(\mathbf{S_9})^{-1}$ mátrix ábrája

Képezzük az $\mathbf{S_9}$*1/3 szorzatot. Eredményül az $\mathbf{S_9}$ mátrixot kapjuk.
Képezzük most az inverz mátrixból az alábbi szorzatot $3*\mathbf{(S_9)^{-1}}$. Megkapjuk az $\mathbf{(S_3)^{-1}}$ inverz mátrixot.

3. Tétel: Ha valamely mátrix minden elemét egy általunk választott számmal osztunk, (vagy ami ugyanaz, az adott szám reciprok értékével szorzunk), majd meghatározzuk az így nyert mátrix inverzét, az inverz mátrixnak az adott számmal képzett szorzata az eredeti mátrix inverzét adja.

Hasonlóképpen lehet bontani mátrixokat természetesen nem csak azonos, de egymástól különböző mátrixokra is. Ennek vizsgálatát az olvasóra bízom.

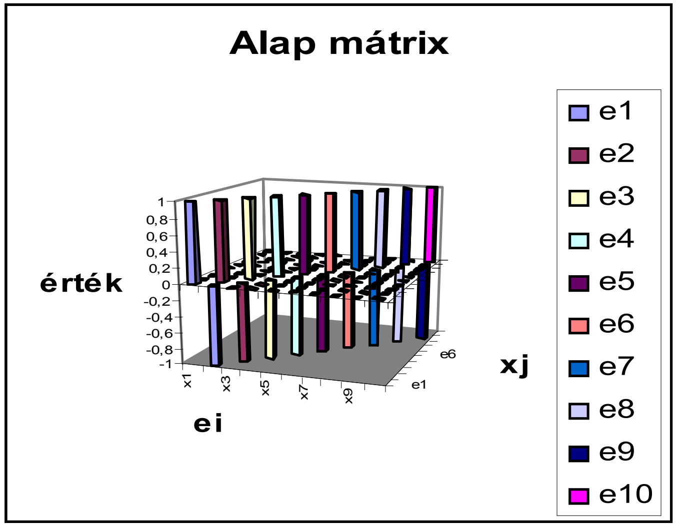
Ezek az egyszerűbb esetek, de lépjünk tovább a speciális mátrixok vizsgálatában.

Jelöljük $\mathbf{S_{1\text{-}1}}$ – el az olyan mátrixot, amelynek diagonális elemei egységek, a diagonálistól jobbra lévő elemek pedig -1 értékűek, kivéve természetesen a mátrix utolsó oszlopvektorát, amely után már nincs más elem. (Ez a speciális mátrix szerepelt kiindulásként hivatkozott könyvemben és cikkeimben)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

21. táblázat. $\mathbf{S_{1\text{-}1}}$ mátrix

Az ábra jól jellemzi a mátrixot pozitív és negatív értékeivel



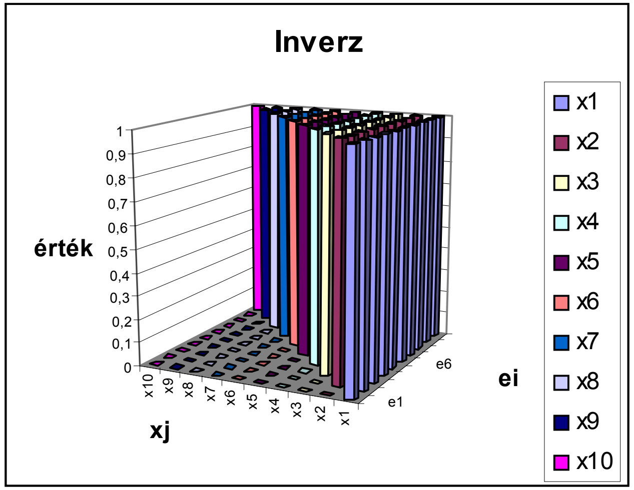
10. Ábra. $S_{1\text{-}1}$ mátrix ábrája

Ennek inverze $(\mathbf{S_{1\text{-}1}})^{-1}$

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
x5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
x6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
x7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

22. Táblázat. $(S_{1\text{-}1})^{-1}$ inverz mátrix

Az inverz ábrája mutatja, hogy felső trianguláris mátrixról van szó, nem zérus elemei 1 értéket vesznek fel.



11. Ábra. $(\mathbf{S_{1\text{-}1}})^{-1}$ inverz mátrix ábrája.

4. Tétel: Ha egy mátrix diagonális elemei pozitív előjelű egységek, a tőlük jobbra lévő elemek negatív előjelű egységek, a többi eleme nulla, annak inverze olyan felső trianguláris mátrix, amelynek diagonális elemei és a felett lévő elemei egységek, a diagonális alatti elemek zérusok.

Könnyű belátni, hogy ennek a mátrixnak az inverze, azaz $((\mathbf{S_{1\text{-}1}})^{-1})^{-1} = \mathbf{S_{1\text{-}1}}$**,** azaz az eredeti mátrix.

Felmerül rögtön az a kérdés, hogy milyen lehet annak a mátrixnak az inverze, amelynek diagonális elemei egységek, a tőlük jobbra lévő elemek pedig -2 értéket vesznek fel? Legyen tehát $\mathbf{S_{1\text{-}2}}$ mátrix a következő:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

23. Táblázat. $S_{1\text{-}2}$ mátrix.

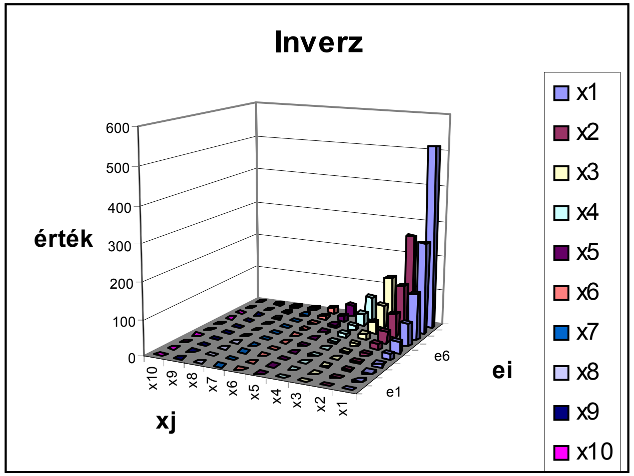
Ábrázolásától eltekinthetünk, hiszen ugyanazt kapnánk, mint az $\mathbf{S_{1\text{-}1}}$ láttuk, annyi különbséggel, hogy a negatív irányú oszlopok kétszer akkorák, mint a pozitív irányúaké.

Ennek inverze azaz $(\mathbf{S_{1\text{-}2}})^{-1}$

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
x2	0	1	2	4	8	16	32	64	128	256
x3	0	0	1	2	4	8	16	32	64	128
x4	0	0	0	1	2	4	8	16	32	64
x5	0	0	0	0	1	2	4	8	16	32
x6	0	0	0	0	0	1	2	4	8	16
x7	0	0	0	0	0	0	1	2	4	8
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

24. Táblázat. $(S_{1\text{-}2})^{-1}$ inverz mátrix.

Az inverz ábrája érdekes trianguláris mátrixot szemléltet, amelynél az inverz mátrix elemei az x_j csökkenése, és az e_i növekedése nyomán exponenciálisan növekvő értékeket mutat.



12. Ábra. $(S_{1\text{-}2})^{-1}$ inverz mátrix ábrája.

5. Tétel: Ha egy mátrix diagonális elemei pozitív előjelű egységek, a tőlük jobbra lévő elemek pedig negatív előjelűek és értékük 2, akkor a mátrix inverzének elemei soronként balról jobbra haladva és egy-egy elemmel (első elemmel) rövidítve, az első eleme 1, majd az elemek exponenciálisan növekednek. Ugyanezt tapasztaljuk, ha alulról felfelé haladunk, s az utolsó oszlopból indulunk ki. Ez esetben a legalsó elem 1, s az oszlopok hosszának az utolsó elem elhagyásával történő rövidítése és minden oszlopot 1-el kezdve az elemek exponenciálisan növekednek.

Vagyis most egy olyan felső trianguláris mátrixot kaptunk, amelynek elemei sorok szerint tekintve 1-el kezdődnek és minden lépésben megkétszereződnek, illetve ugyanezt tapasztaljuk, ha a mátrixot oszloponként szemléljük, alulról felfelé. Természetesen az ellenkező irányból szemlélve az adatokat, azok lépésenként feleződnek.

Fentiekből az következik, hogy az ilyen mátrix inverze, bármilyen nagyméretű legyen is, minden számítás nélkül felírható.

Ha viszont a diagonálistól jobbra lévő elemeket -2-ről -3-ra váltjuk át, azaz a $\mathbf{S_{1\text{-}3}}$ mátrixot vizsgáljuk, tehát

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-3	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-3	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-3	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-3	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-3	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	-3	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-3
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

25. Táblázat. $\mathbf{S_{1\text{-}3}}$ mátrix

majd meghatározzuk ennek inverzét, az alábbi mátrixhoz jutunk:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
x2	0	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
x3	0	0	1	3	9	27	81	243	729	2187
x4	0	0	0	1	3	9	27	81	243	729
x5	0	0	0	0	1	3	9	27	81	243
x6	0	0	0	0	0	1	3	9	27	81
x7	0	0	0	0	0	0	1	3	9	27
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	3	9
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

26. Táblázat. $\mathbf{(S_{1\text{-}3})^{-1}}$ mátrix

Most tehát az előbbi kétszereződés helyett az adatok megháromszorozódását tapasztaljuk. Könnyű belátni, hogy sorozatot képezve -4 esetén négyszereződnek, -5 esetén ötszöröződnek az adatok, stb. Ábrázolásától eltekinthetünk, az előbbiekhez hasonló ábraképet kapunk, de a diagramok még meredekebb emelkedést mutatnak.

6. Tétel: Ha adott mátrix diagonális elemei pozitív előjelű egységek, a tőlük jobbra lévő elemek pedig negatív előjelűek és értékük h=2,…,n, akkor az adott mátrix inverzének diagonális elemei egységek, a diagonálistól jobbra lévő elemek pedig, soronként balról egy elemmel rövidebbek, és 1-el kezdődnek, s az elemek az őket megelőző elemek h szorosai. Ugyanezt tapasztaljuk, ha az oszlopokat alulról felfelé vizsgáljuk, az utolsó oszloppal kezdve.

Természetesen a vizsgálatot meg is fordíthatjuk, s jobbról, balra, vagy felülről lefelé haladhatunk, stb.

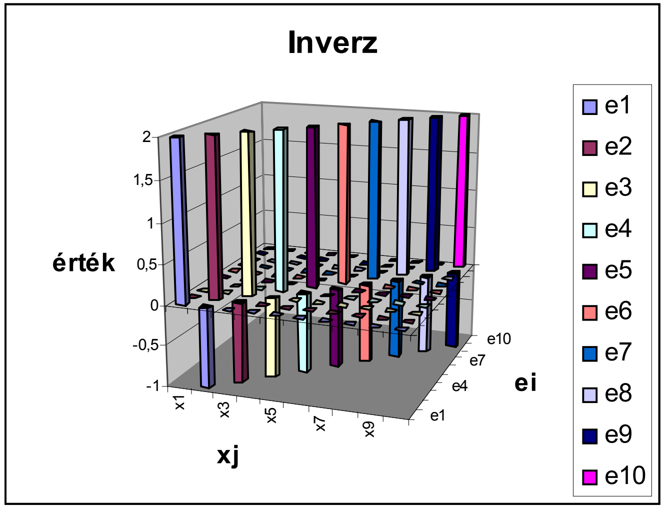
Az így megfogalmazott tétel, illetve törvényszerűség alapján az olyan mátrixok inverzét, amelyek diagonális elemei pozitív előjelű egységek, s a tőlük jobbra lévő elemek negatív előjelűek és értékük h, minden számítás nélkül felírhatjuk.

Most fordítsuk meg a problémát, úgy, hogy a diagonális elemek értéke legyen 2, a tőlük jobbra lévő elemek értéke pedig -1, azaz vizsgáljuk a $\mathbf{S_{2\text{-}1}}$ mátrixot, tehát:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	2	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2

27. Táblázat. $S_{2\text{-}1}$ mátrix

Ábrázolva a mátrixot a következő képet kapjuk:



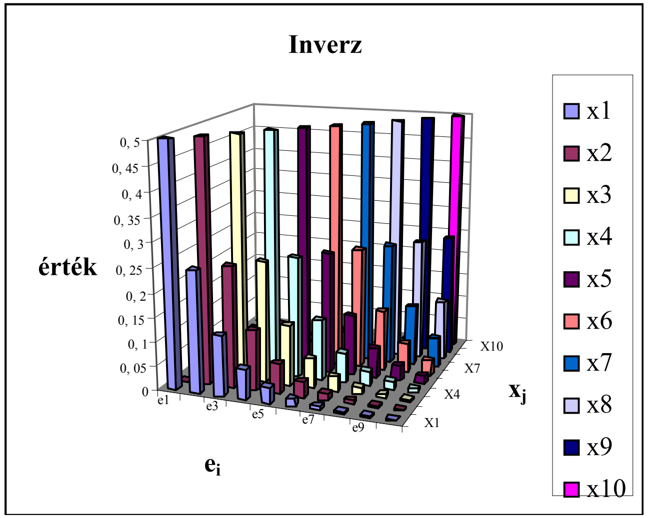
13. Ábra. S_{2-1} mátrix

Most tehát a negatív irányú oszlopok rövidebbek.
Ennek inverze $(\mathbf{S_{2-1}})^{-1}$:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0313	0,0156	0,0078	0,0039	0,0020	0,0010
x2	0	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0313	0,0156	0,0078	0,0039	0,0020
x3	0	0	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0313	0,0156	0,0078	0,0039
x4	0	0	0	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0313	0,0156	0,0078
x5	0	0	0	0	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0313	0,0156
x6	0	0	0	0	0	0,5	0,25	0,1250	0,0625	0,0313
x7	0	0	0	0	0	0	0,5	0,2500	0,1250	0,0625
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,5000	0,2500	0,1250
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5000	0,2500
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5000

28. Táblázat. $(S_{2-1})^{-1}$ inverz

Az inverz ábrája:



14. Ábra. $(S_{2-1})^{-1}$ inverz mátrix ábrája

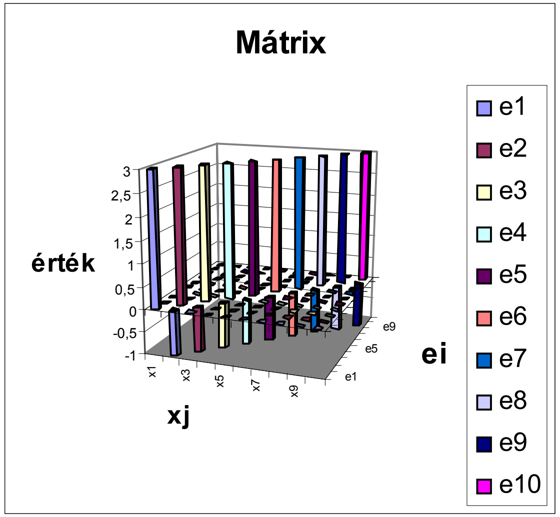
Az ábra szemlélteti, hogy a diagonális elemek értéke a legmagasabb (0,5), s az e_i értékek növekedésével, s az x_j értékek csökkenésével az inverz elemeinek értéke lassuló ütemben csökken, vagy másként az x_j elemek növekedésével, s az e_i értékek csökkenésével az inverz értékek gyorsuló ütemben növekednek.

7. Tétel: Ha olyan mátrixszal van dolgunk, amelynek diagonális elemei pozitív előjelűek és értékük 2, a diagonálistól jobbra lévő elemek negatív előjelű egységek, akkor ennek invertálása olyan mátrixot eredményez, amelynek soraiban, balról jobbra, vagy oszlopaiban alulról felfelé haladva az elemek 0,5-el kiindulva, lépésenként feleződnek. Az ilyen mátrix inverze tehát – bármilyen méretű mátrix legyen is az – minden számítás nélkül felírható.

Legyen most mátrixunk olyan, hogy a diagonális elemei pozitív értékűek és értékül 3, a tőlük jobbra lévő elemek pedig negatív előjelű egységek, azaz $\mathbf{S_{3-1}}$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	3	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	3	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	3	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	3	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	3	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	3	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

29. Táblázat. $S_{3\text{-}1}$ mátrix

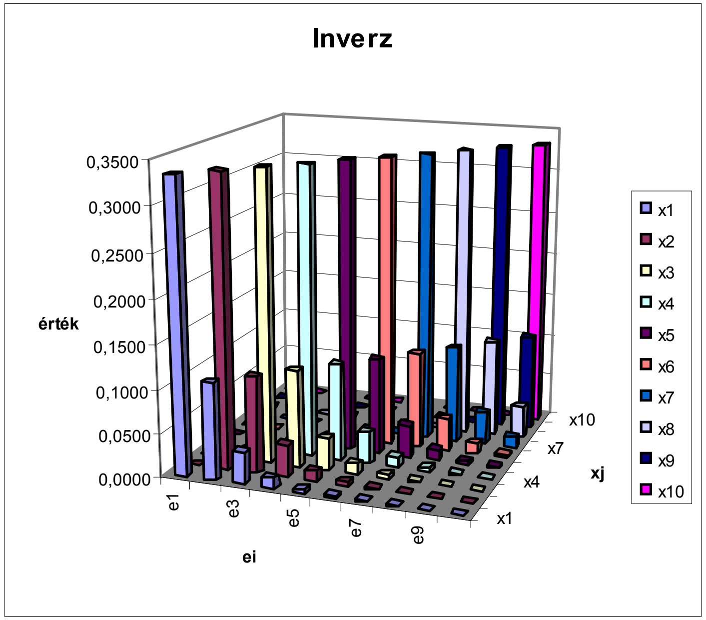


15. Ábra. $S_{3\text{-}1}$ mátrix

A mátrix inverze:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014	0,0005	0,0002	0,0001	0,00002
x2	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014	0,0005	0,0002	0,00005
x3	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014	0,0005	0,00015
x4	0	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014	0,00046
x5	0	0	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,00137
x6	0	0	0	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,00411
x7	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,01233
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,1110	0,03700
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3330	0,11100
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,33333

30. Táblázat. S_{3-1} mátrix inverze



16. Az inverz ábrája.

Könnyű belátni, (ezért a továbbiak számszerű bemutatástól eltekinthetünk), hogy ha a 2 helyett 3, 4, stb. számokat szerepeltetünk egy sorozatban, akkor az elemek harmadolódnak, negyedelődnek, stb. Ennek alapján az előbbi tételt általánosíthatjuk az alábbiak szerint:

8. Tétel. Ha olyan mátrixszal van dolgunk, amelynek diagonális elemei pozitív előjelűek és értékük h, a diagonálistól jobbra lévő elemek negatív előjelű egységek, akkor ennek invertálása olyan mátrixot eredményez, amelynek soraiban, balról jobbra, vagy oszlopaiban alulról felfelé haladva az elemek 1/h-val kiindulva, lépésenként h-val osztódnak. Az ilyen mátrix inverze tehát – bármilyen méretű mátrix legyen is az – minden számítás nélkül felírható.

Vizsgáljuk most meg az **($S_{2\text{-}2}$)** mátrixot, azaz amikor a diagonális elemek értéke 2, az attól jobbra lévő elemek értéke -2, azaz:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	2	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	2	-2	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2

31. Táblázat. $S_{2\text{-}2}$ mátrix

Ennek $(\mathbf{S_{2\text{-}2}})^{-1}$ inverze olyan felső trianguláris mátrix, amelynek minden zérustól különböző eleme egyketted, azaz 0,5, tehát:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
x2	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
x3	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
x4	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
x5	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
x6	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
x7	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5

32. Táblázat. $(S_{2\text{-}2})^{-1}$ inverzmátrix

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbf{S_{3\text{-}3}}$ inverze esetén 1/3, illetve $\mathbf{S_{4\text{-}4}}$ inverze esetén 1/4 értékeket kapunk. Ábrázolásától eltekinthetünk.

9. Tétel: Ha egy mátrix diagonális elemei pozitívek és értékük h, a tőlük jobbra lévő elemek előjele negatív és értékük szintén h, akkor ennek inverze olyan felső trianguláris mátrix, amelynek diagonális elemei és attól jobbra lévő elemei pozitív előjelűek és értékük 1/h a diagonális alatti elemeik, természetesen zérusok.

Vegyük most a $\mathbf{S_{3\text{-}1}}$ mátrixot, amikor a diagonális elemek értéke 3, az attól jobbra eső elemek értéke -1, azaz

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	3	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	3	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	3	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	3	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	3	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	3	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

33. Táblázat. $S_{3\text{-}1}$ mátrix

A mátrix inverze $(\mathbf{S_{3\text{-}1}})^{-1}$

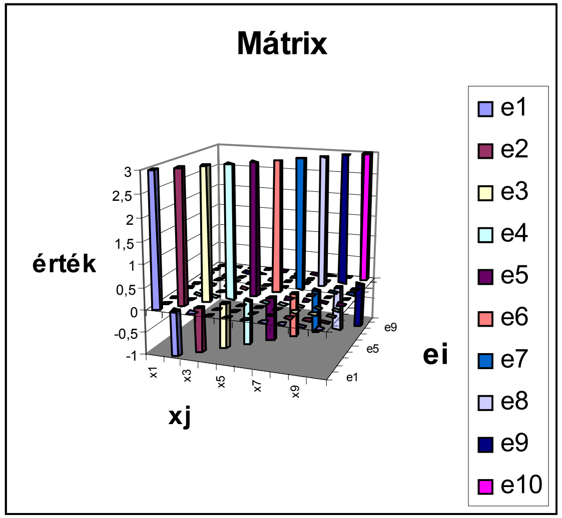
	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014	0,0005	0,0002	0,0001	0,00002
x2	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014	0,0005	0,0002	0,00005
x3	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014	0,0005	0,00015
x4	0	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,0014	0,00046
x5	0	0	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,0041	0,00137
x6	0	0	0	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,0123	0,00411
x7	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,1111	0,0370	0,01233
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,1110	0,03700
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3330	0,11100
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,33333

34. Táblázat. $(S_{3\text{-}1})^{-1}$ **inverzmátrix**

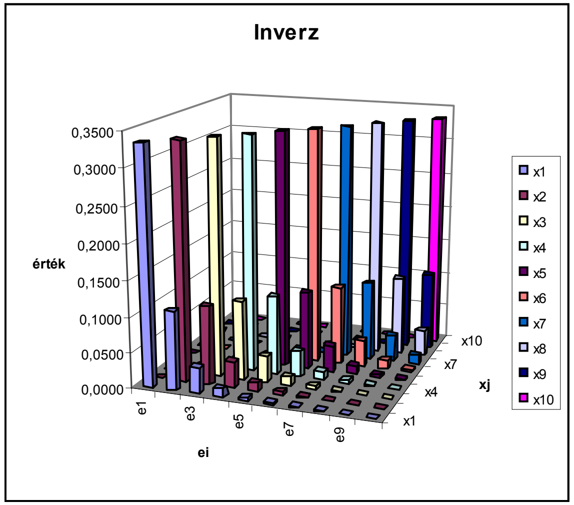
Eredményül olyan mátrixot kapunk, ahol a soronként jobbra lévő és oszloponként felfelé lévő elemek az őket megelőző elemek 1/3 értékét veszik fel.

10. Tétel. Ha egy mátrix diagonális elemei pozitívok és értékük 3, az attól jobbra eső elemek értéke -1, akkor ennek inverze olyan mátrix, amelyben a soronként jobbra lévő, illetve oszloponként felfelé lévő elemek az előző elemek 1/3 értékét veszik fel.

Ábrázoljuk ezeket a mátrixokat:



17. Ábra. $S_{3\text{-}1}$ mátrix ábrája



18. Ábra. $(S_{3-1})^{-1}$ inverzmátrix ábrája

Az előbbihez hasonló képet kapunk

Legyen most mátrixunk $\mathbf{S_{3-2}}$, azaz olyan mátrix, amelyben a diagonális elemek értéke 3, s a tőlük jobbra lévő elemek értéke -2.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	3	-2	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	3	-2	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	3	-2	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	3	-2	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	3	-2	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	3	-2	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	3	-2	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-2	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

35. Táblázat. S_{3-2} mátrix

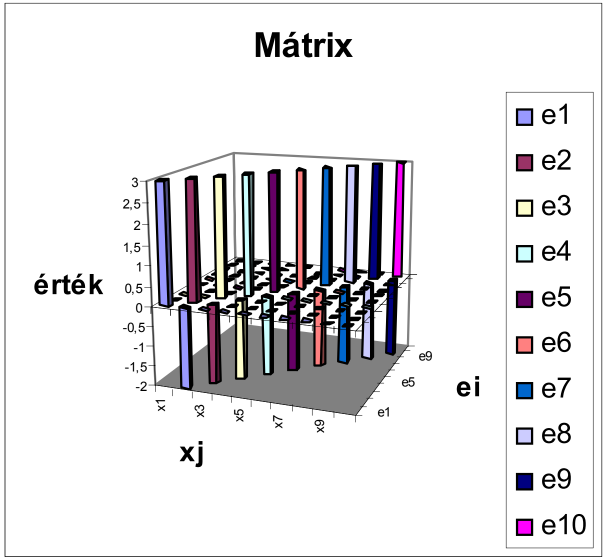
A mátrix inverze $(\mathbf{S_{3\text{-}2}})^{-1}$

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,3333	0,2222	0,1481	0,0988	0,0658	0,0439	0,0293	0,0195	0,0130	0,0087
x2	0	0,3333	0,2222	0,1481	0,0988	0,0658	0,0439	0,0293	0,0195	0,0130
x3	0	0	0,3333	0,2222	0,1481	0,0988	0,0658	0,0439	0,0293	0,0195
x4	0	0	0	0,3333	0,2222	0,1481	0,0988	0,0658	0,0439	0,0293
x5	0	0	0	0	0,3333	0,2222	0,1481	0,0988	0,0658	0,0439
x6	0	0	0	0	0	0,3333	0,2222	0,1481	0,0988	0,0658
x7	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,2222	0,1481	0,0988
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,2222	0,1481
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,2222
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3333

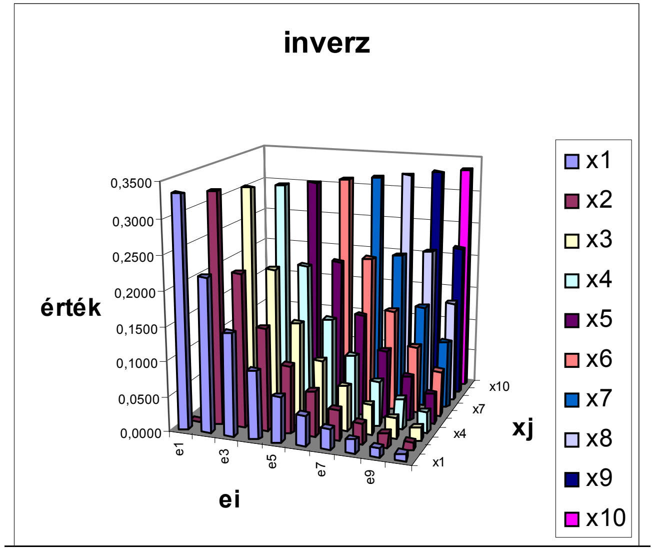
36. Táblázat. $(S_{3\text{-}2})^{-1}$ mátrix inverze

11. Tétel. Ha egy mátrix diagonális elemei pozitív előjelűek és értékük 3, míg a tőlük jobbra lévő elemek értéke -2, ennek inverze olyan mátrix, ahol a sorok tekintetében balról jobbra, illetve az oszlopok tekintetében alulról felfelé haladva az elemek az őket megelőző elem 2/3-ad értékének felelnek meg. Hasonlóképpen amennyiben 3 helyett 4 értéket írunk a diagonálisba, akkor az egymást követő elemek az őket megelőző elem 2/4 értékét adják, ha 5 értéket írunk, akkor 2/5 értéket, ha 6-ot írunk akkor 2/6 értéket kapunk és így tovább, vagyis a hányados megfelel a diagonálisba írt értéktől jobbra lévő elem és a diagonális elem hányadosának.

Ábrázoljuk a mátrixot és inverzét



19. Ábra. (S_{3-2}) mátrix



20. Ábra. $(S_{3\text{-}2})^{-1}$ inverz ábrája

Legyen mátrixunk $\mathbf{S_{3\text{-}3}}$, azaz

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	3	-3	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	3	-3	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	3	-3	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	3	-3	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	3	-3	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-3
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

37. Táblázat. $S_{3\text{-}3}$ mátrix

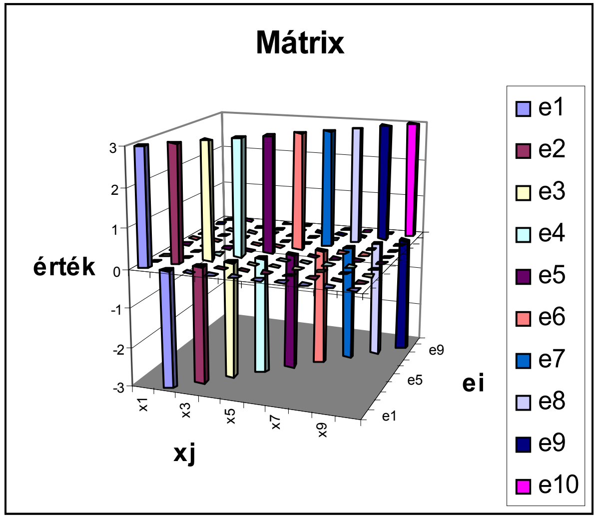
Ennek inverze $(\mathbf{S_{3\text{-}3}})^{-1}$

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
x2	0	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
x3	0	0	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
x4	0	0	0	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
x5	0	0	0	0	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
x6	0	0	0	0	0	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
x7	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,3333	0,3333
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,3333
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,3333

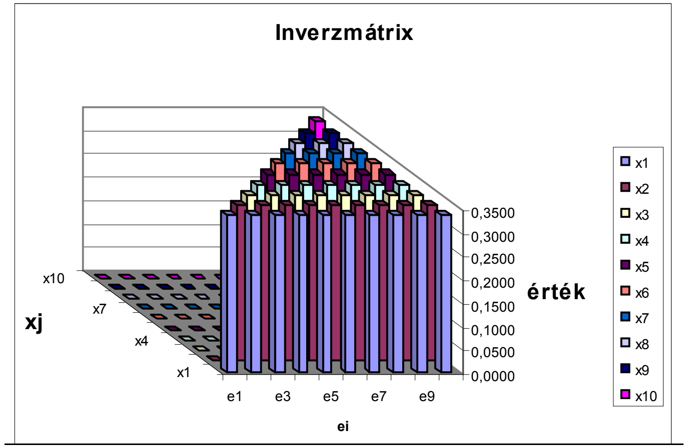
38. Táblázat. $(S_{3\text{-}3})^{-1}$ inverzmátrix

13. Tétel. Ha adott mátrix diagonális elemei pozitívak és értékük 3, a tőlük jobbra lévő elemek negatívak és értékük szintén 3, akkor a mátrix inverze olyan felső trianguláris mátrix, amelynek diagonális elemei és a fölött lévő elemei 1/3 értéket vesznek fel.

Ábrázoljuk a mátrixot és inverzét:



21. Ábra. $S_{3\text{-}3}$ mátrix ábrája



22. Ábra. $(S_{3\text{-}3})^{-1}$ inverzmátrix ábrája

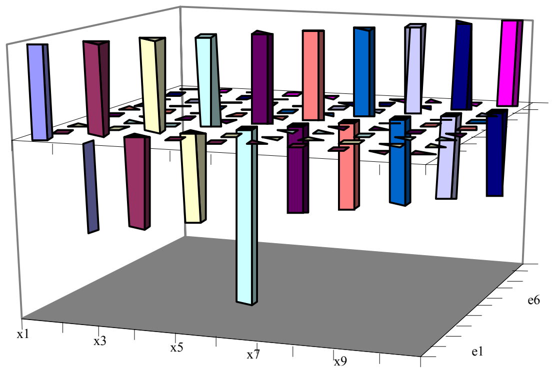
Az eddigiek során 13 tételt fogalmaztunk meg. Hasonlóan járhatnánk el a továbbiakban is, bár esetenként bonyolultabb helyzettel állunk szembe. A terjedelmességet kerülve a továbbiakban az eredmények tételként történő megfogalmazását az olvasóra bízzuk.

Most vizsgáljunk meg egy olyan $\mathbf{S_{1\text{-}1}}$ típusú mátrixot, amely azonban egyes elemeiben renitensen eltér az eddig tárgyalttól.

Tegyük fel, hogy az **S** mátrix első 4 vektora az $\mathbf{S_{1\text{-}1}}$, szerint alakul, a negyedik és az ötödik vektora viszont 1:2 arányban viszonyul egymáshoz, tehát $\mathbf{S_{1\text{-}2}}$ és a továbbiakban szintén az $\mathbf{S_{1\text{-}1}}$ arány adódik, azaz

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

39. Táblázat. $S_{1\text{-}1}$, $S_{1\text{-}2}$, $S_{1\text{-}1}$, mátrix



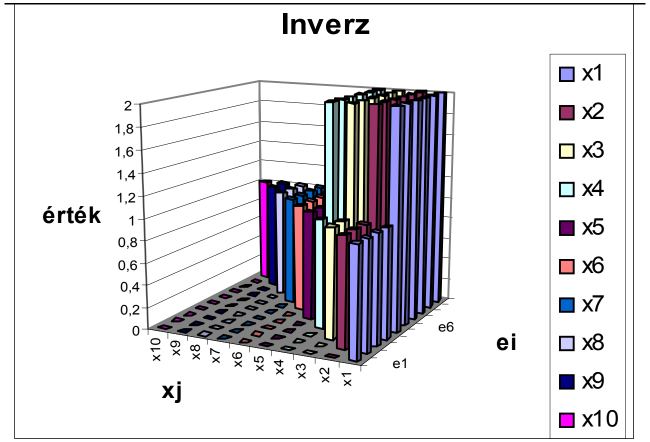
23. Ábra. S_{1-1}, S_{1-2}, S_{1-1}, mátrix ábrája

Az ábra jól mutatja a kiugró értéket.

Ennek inverze:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
x2	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
x3	0	0	1	1	2	2	2	2	2	2
x4	0	0	0	1	2	2	2	2	2	2
x5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
x6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
x7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

40. Táblázat. S_{1-1}, S_{1-2}, S_{1-1}, mátrix inverze



24. Ábra. S_{1-1}, S_{1-2}, S_{1-1}, mátrix inverz ábrája

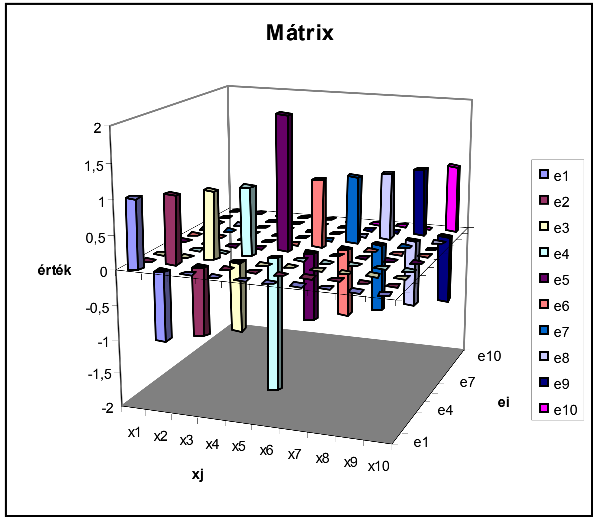
Látjuk, hogy a mátrixot három blokk ábrázolja. Ebből két blokk olyan felső trianguláris mátrixblokk, amely elemeinek értékei egységek, egy blokk pedig olyan téglalap alakú, amely elemeinek értékei kettesek. Természetesen valamennyi elem pozitív.

Most tegyük fel, hogy az ötödik vektor után visszaáll az azt megelőző vektorokhoz való 1:1 arány, tehát csak az 5 vektor renitens, azaz mátrixunk a következő:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

41. Táblázat. Visszaállított arányú S_{1-1}, S_{1-2}, S_{2-1}, S_{1-1}, mátrix

Ennek ábrája:



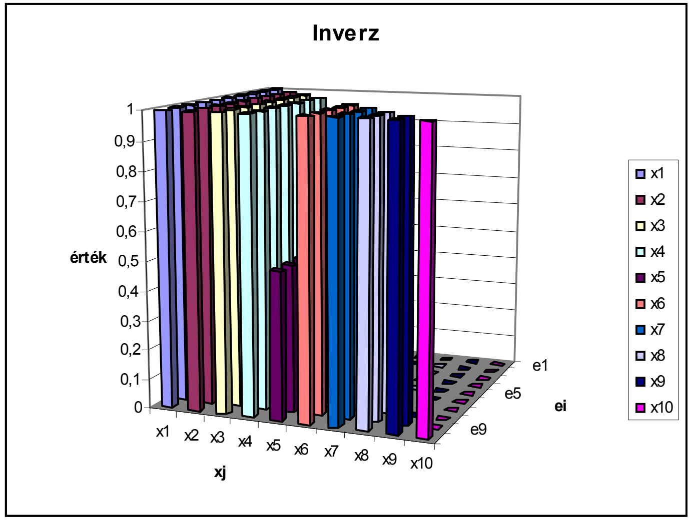
25. Ábra. Visszaállított arányú mátrix ábrája

A mátrix inverze:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
x4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
x5	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
x6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
x7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

42. Táblázat. Az $(S_{1\text{-}1}, S_{1\text{-}2}, S_{2\text{-}1}, S_{1\text{-}1})^{-1}$ inverz mátrix

Az inverz ábrája:



26. Ábra. Az $(S_{1-1}, S_{1-2}, S_{2-1}, S_{1-1})^{-1}$ inverz mátrix ábrája

Most azt észleljük, hogy az oszlopok magassága, egy oszlopsor kivételével azonos. Egy oszlop magassága a többi magasságának a fele.

Ez utóbbi két mátrix típusa biztosan előfordul a gyakorlatban, például a már hivatkozott könyvemben az 56 oldal, valamint a 64 oldal után következő táblázatokban.

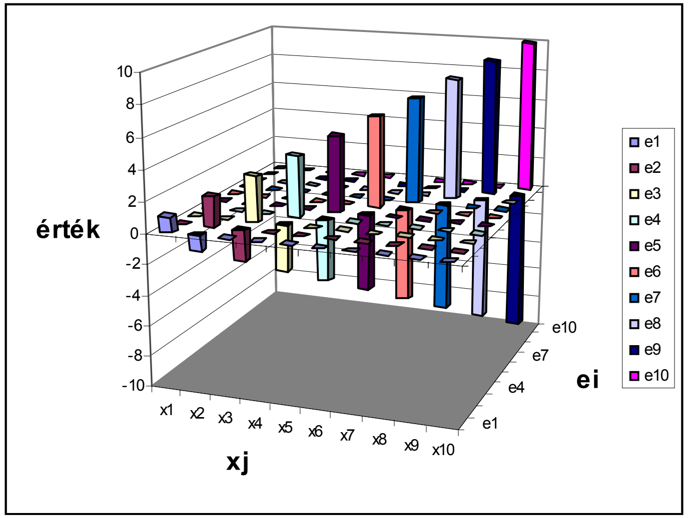
Vegyünk most egy olyan mátrixot, amelynek diagonális elemei a bal felső cellától jobb alsó celláig változó pozitív számok, a tőlük jobbra lévő elemek pedig változó negatív számok. Jelöljük ezt $\mathbf{S_{h-k}}$ szimbólummal, arra utalva, hogy az első érték pozitív, a második negatív, s ezek különböző értéket vehetnek fel.

Vizsgáljunk meg elsőként egy olyan mátrixot, amelynek diagonális elemei a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig 1-től 10-ig, a tőlük jobbra lévő elemek pedig -1-től -9-ig változnak, a következő táblázatban foglaltak szerint:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	2	-2	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	3	-3	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	4	-4	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	5	-5	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	6	-6	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	7	-7	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	8	-8	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	9	-9
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

43. Táblázat. $S_{h\text{-}k}$ mátrix (h=1,2,…,10, k=-1,-2,…,-9)

Ennek ábrája:



27. Ábra. $S_{h\text{-}k}$ mátrix (h=1,2,…,10, k=-1,-2,…,-9) ábrája

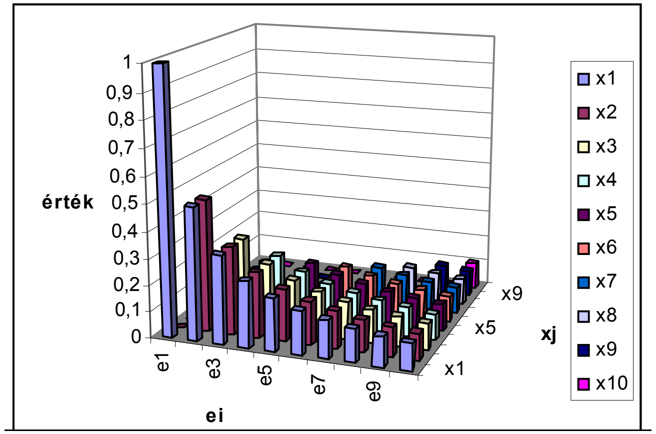
A mátrix inverze:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	1	0,5	0,333333	0,25	0,2	0,166667	0,142857	0,125	0,111111	0,1
x2	0	0,5	0,333333	0,25	0,2	0,166667	0,142857	0,125	0,111111	0,1
x3	0	0	0,333333	0,25	0,2	0,166667	0,142857	0,125	0,111111	0,1
x4	0	0	0	0,25	0,2	0,166667	0,142857	0,125	0,111111	0,1
x5	0	0	0	0	0,2	0,166667	0,142857	0,125	0,111111	0,1
x6	0	0	0	0	0	0,166667	0,142857	0,125	0,111111	0,1
x7	0	0	0	0	0	0	0,142857	0,125	0,111111	0,1
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,125	0,111111	0,1
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,111111	0,1
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1

44. Táblázat. $S_{h\text{-}k}$ mátrix (h=1,2,…,10, k=-1,-2,…,-9) inverze

Látjuk, hogy az inverz mátrixsorai balról jobbra haladva az adott oszlopban lévő diagonális elem reciprok értékét veszi fel. Az inverz mátrix oszlopainak értéke végig azonos, megegyezik a diagonális elem reciprok értékével.

Az inverz ábrája:



28. Ábra. $S_{h\text{-}k}$ mátrix (h=1,2,…,10, k=-1,-2,…,-9) inverzének ábrája

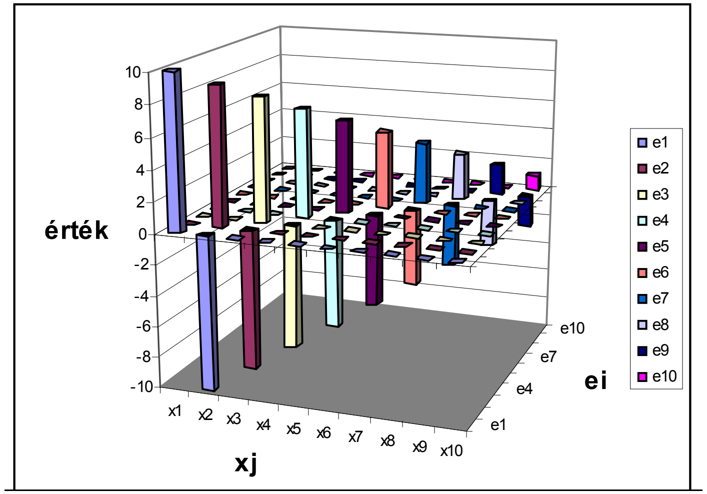
Fordítsuk meg most az elemek sorrendjét, s legyen mátrixunk olyan, hogy a diagonális elemek a bal felső saroktól a jobb alsó sarokig 10-től 1-ig, a tőlük balra lévő elemek pedig -10-től -2-ig változnak.

Mátrixunk tehát:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	10	-10	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	9	-9	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	8	-8	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	7	-7	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	6	-6	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

45. Táblázat. S_{h-k} mátrix (h=10, 9,…,1, k=-9,-8,…,-2)

Ennek ábrája:



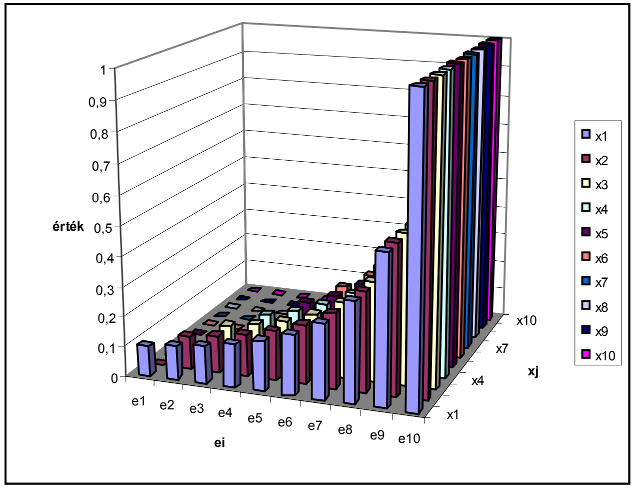
29. Ábra. S_{h-k} mátrix (h=10, 9,…,1, k=-9,-8,…,-2) ábrája

A mátrix inverze:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,1	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	1
x2	0	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	1
x3	0	0	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	1
x4	0	0	0	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	1
x5	0	0	0	0	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	1
x6	0	0	0	0	0	0,2	0,25	0,333333	0,5	1
x7	0	0	0	0	0	0	0,25	0,333333	0,5	1
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,333333	0,5	1
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

46. Táblázat. $S_{h\text{-}k}$ mátrix inverze (h=10, 9,…,1, k=-9,-8,…,-2)

Most tulajdonképpen az előbbi inverzmátrix fordítottját kapjuk.
Az inverz ábrája:



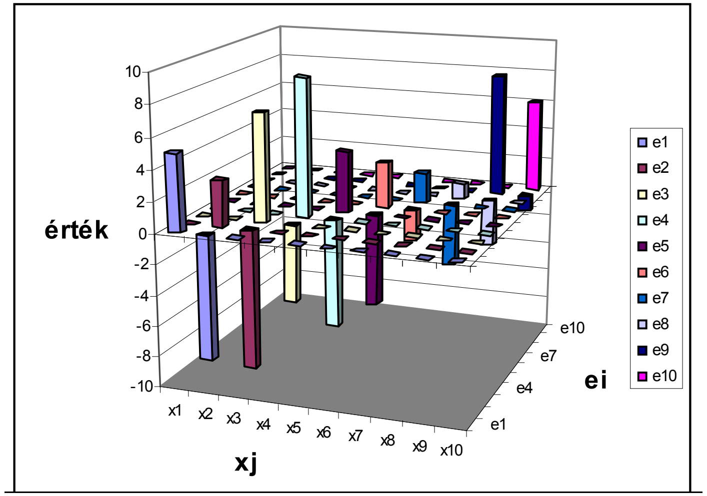
30. Ábra. $S_{h\text{-}k}$ mátrix (h=10, 9,…,1, k=-9,-8,…,-2) inverzének ábrája

Érdekes képet kapunk, ha a diagonális elemeket és a tőlük jobbra lévő elemeket véletlenszerűen választjuk meg. Egy ilyen mátrixot látunk a következőkben:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	5	-8	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	3	-9	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	7	-5	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	9	-7	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	4	-6	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	3	-2	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	2	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	8	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6

47. Táblázat. $S_{h\text{-}k}$ mátrix (h és k véletlenszerű megválasztásával)

Ennek ábrája:



31. Ábra. $S_{h\text{-}k}$ mátrix ábrája (h és k véletlenszerű megválasztásával)

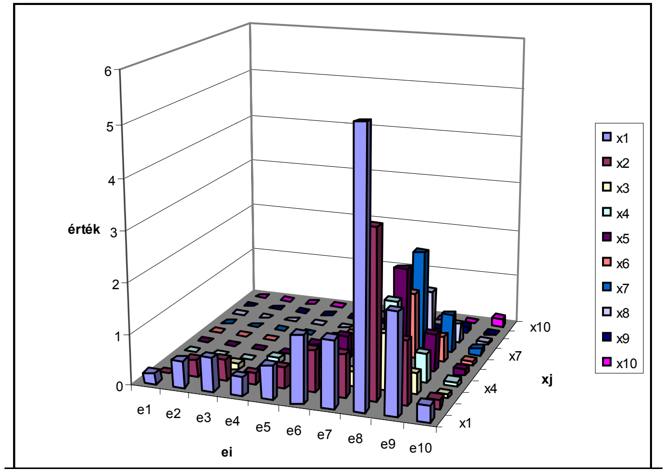
A mátrix inverze:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,2	0,5333	0,6857	0,3809	0,6666	1,3333	1,3333	5,3333	2	0,3333
x2	0	0,3333	0,4285	0,2380	0,4166	0,8333	0,8333	3,3333	1,25	0,2083
x3	0	0	0,1428	0,0793	0,1388	0,2777	0,2777	1,1111	0,4166	0,0694
x4	0	0	0	0,1111	0,1944	0,3888	0,3888	1,5555	0,5833	0,0972
x5	0	0	0	0	0,25	0,5	0,5	2	0,75	0,125
x6	0	0	0	0	0	0,3333	0,3333	1,3333	0,5	0,0833
x7	0	0	0	0	0	0	0,5	2	0,75	0,125
x8	0	0	0	0	0	0	0	1	0,375	0,0625
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,125	0,0208
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,1666

48. Táblázat. $S_{h\text{-}k}$ mátrix inverze (h és k véletlenszerű megválasztásával)

Célszerűnek tartom felhívni a figyelmet, hogy az inverz mátrixok elemei között nem találunk negatív előjelű elemet, bár a kiinduló mátrix elemei között (a diagonálistól eltérő elemek) negatív előjelű elemek voltak.

Az inverz ábrája:



32. Ábra. $S_{h\text{-}k}$ mátrix inverzének ábrája (h és k véletlenszerű megválasztásával)

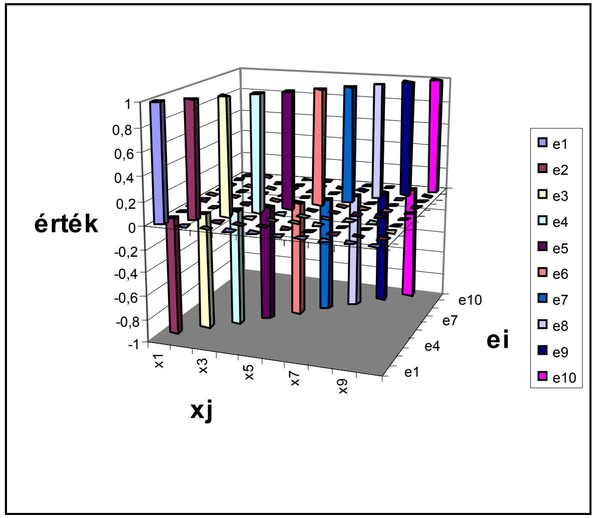
Az eddigiek során olyan mátrixokat vizsgáltunk, amelyekben a diagonális elemek pozitív, a tőlük jobbra (illetve felettük) lévő elemek negatív előjelűek voltak. Most fordítsuk meg a problémát, s tegyük fel, hogy a diagonális elemek továbbra is pozitív előjelűek, a tőlük balra, illetve alattuk lévő elemek negatív előjelűek, s természetesen a többi elemek most is zérus elemek.

Vegyünk először egy olyan mátrixot, amelynek diagonális elemei pozitív előjelű egységek, a diagonálistól balra, illetve alattuk lévő elemek negatív előjelű egységek, azaz $\mathbf{S}_{-1+1}$.

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1

49. Táblázat. $\mathbf{S}_{-1+1}$ mátrix

Ennek ábrája:

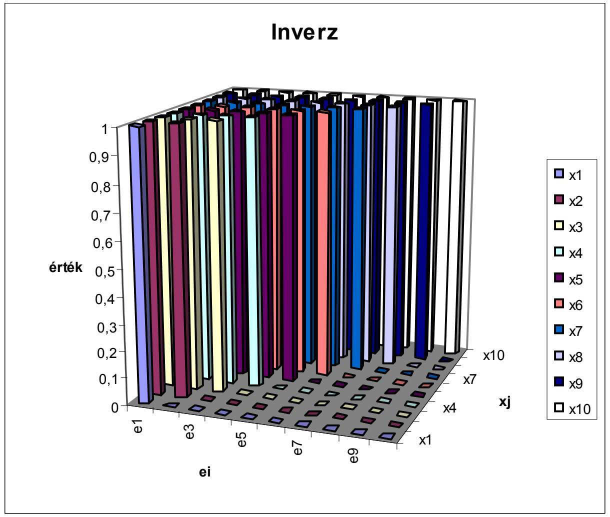


33. Ábra. S_{-1+1} mátrix ábrája

és inverze:

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
x3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
x4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
x5	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
x6	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
x7	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
x8	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
x9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
x10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

50. Táblázat. S_{-1+1} mátrix inverze



34. Ábra. S_{-1+1} mátrix inverzének ábrája

Ha ezt összehasonlítjuk a 21. és a 22. táblázatokkal és az azokat szemléltető ábrákkal, akkor azt látjuk, hogy most a 21. és 22. táblák és a hozzátartozó ábrák tükörképét kaptuk. Amíg ott az inverzmátrix felső trianguláris, most alsó trianguláris mátrixot kaptunk.

Úgy vélem nem kell példákkal illusztrálnom, hogy a fentiek értelemszerűen alkalmazhatók az összes eddig tárgyalt mátrixra.

Ismert az is, hogy az **A** mátrix inverzének inverze, azaz $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$ maga az **A** mátrix, azaz $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$

Egyes esetekben egyébként érdekes nyomon követni az inverz meghatározásának lépéseit is.

Lássunk még egy érdekes esetet. Itt a bázis transzformáció egyes lépései során keletkezett táblázatokat is célszerűnek látom közölni.

Az első lépésben tehát vegyük a 45. táblázatban már megismert mátrixot és határozzuk meg ennek inverzét, közölve lépésről lépésre a bázis transzformáció során keletkezett táblázatokat, azaz

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	10	-10	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	9	-9	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	8	-8	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	7	-7	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	6	-6	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
x1	0,1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	9	-9	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	8	-8	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	7	-7	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	6	-6	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
x1	0,1	0,111111	-1	0	0	0	0	0	0	0
x2	0	0,111111	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	8	-8	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	7	-7	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	6	-6	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	e3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
x1	0,1	0,111111	0,125	-1	0	0	0	0	0	0
x2	0	0,111111	0,125	-1	0	0	0	0	0	0
x3	0	0	0,125	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	7	-7	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	6	-6	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	e3	e4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
x1	0,1	0,111111	0,125	0,142857	-1	0	0	0	0	0
x2	0	0,111111	0,125	0,142857	-1	0	0	0	0	0
x3	0	0	0,125	0,142857	-1	0	0	0	0	0
x4	0	0	0	0,142857	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	6	-6	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	e3	e4	e5	x6	x7	x8	x9	x10
x1	0,1	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	-1	0	0	0	0
x2	0	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	-1	0	0	0	0
x3	0	0	0,125	0,142857	0,166667	-1	0	0	0	0
x4	0	0	0	0,142857	0,166667	-1	0	0	0	0
x5	0	0	0	0	0,166667	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	x7	x8	x9	x10
x1	0,1	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	-1	0	0	0
x2	0	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	-1	0	0	0
x3	0	0	0,125	0,142857	0,166667	0,2	-1	0	0	0
x4	0	0	0	0,142857	0,166667	0,2	-1	0	0	0
x5	0	0	0	0	0,166667	0,2	-1	0	0	0
x6	0	0	0	0	0	0,2	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	x8	x9	x10
x1	0,1	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	-1	0	0
x2	0	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	-1	0	0
x3	0	0	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	-1	0	0
x4	0	0	0	0,142857	0,166667	0,2	0,25	-1	0	0
x5	0	0	0	0	0,166667	0,2	0,25	-1	0	0
x6	0	0	0	0	0	0,2	0,25	-1	0	0
x7	0	0	0	0	0	0	0,25	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	x9	x10
x1	0,1	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	-1	0
x2	0	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	-1	0
x3	0	0	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	-1	0
x4	0	0	0	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	-1	0
x5	0	0	0	0	0,166667	0,2	0,25	0,333333	-1	0
x6	0	0	0	0	0	0,2	0,25	0,333333	-1	0
x7	0	0	0	0	0	0	0,25	0,333333	-1	0
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,333333	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	x10
x1	0,1	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	-1
x2	0	0,111111	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	-1
x3	0	0	0,125	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	-1
x4	0	0	0	0,142857	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	-1
x5	0	0	0	0	0,166667	0,2	0,25	0,333333	0,5	-1
x6	0	0	0	0	0	0,2	0,25	0,333333	0,5	-1
x7	0	0	0	0	0	0	0,25	0,333333	0,5	-1
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,333333	0,5	-1
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10
x1	0,1	0,1111	0,125	0,1429	0,1667	0,2	0,25	0,3333	0,5	1
x2	0	0,1111	0,125	0,1429	0,1667	0,2	0,25	0,3333	0,5	1
x3	0	0	0,125	0,1429	0,1667	0,2	0,25	0,3333	0,5	1
x4	0	0	0	0,1429	0,1667	0,2	0,25	0,3333	0,5	1
x5	0	0	0	0	0,1667	0,2	0,25	0,3333	0,5	1
x6	0	0	0	0	0	0,2	0,25	0,3333	0,5	1
x7	0	0	0	0	0	0	0,25	0,3333	0,5	1
x8	0	0	0	0	0	0	0	0,3333	0,5	1
x9	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1
x10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

51. Táblázat. S_{h-k} mátrix (h=10, 9,…,1, k=-9,-8,…,-2) és invertálása

Mint már előbb is láttuk most tehát egy felső trianguláris mátrixot kaptunk, amelynek oszlopai azonosak, s az inverz mátrix sorai balról jobbra haladva az adott oszlopban lévő diagonális elem reciprok értékét veszik fel. Az inverz mátrix oszlopainak értéke végig azonos, megegyezik a diagonális elem reciprok értékével.

Most tekintsük újra a kiinduló mátrixot:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	10	-10	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	9	-9	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	8	-8	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	7	-7	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	6	-6	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	5	-5	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	4	-4	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	-3	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

52. Táblázat. Kiinduló S_{h-k} mátrix (h=10, 9,…,1, k=-9,-8,…,-2)

Most képezzünk ebből egy olyan mátrixot, amelyben a mátrix elemei a kiinduló mátrix elemeit eggyel csökkentik, azaz $\mathbf{S_{h\text{-}k} – S_{h\text{-}1\text{-}k\text{-}1}}$

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	9	-9	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	8	-8	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	7	-7	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	6	-6	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	5	-5	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	4	-4	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	3	-3	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

53. Táblázat. $\mathbf{S_{h\text{-}k} – S_{h\text{-}1\text{-}k\text{-}1}}$ mátrix

Most vonjuk ki a kiinduló mátrixból az előbbi mátrixot, s az eredmény, (amelyet nevezzünk redukált$_1$ mátrixnak és szimbolizáljuk $\mathbf{R}_1$-el, illetve a továbbiakban $\mathbf{R}_j$-vel /j=1,2,…n/) a következő lesz:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

54. Táblázat. $\mathbf{R_1}$ mátrix

Most ismételjük meg az előbbi folyamatot az előbbi $\mathbf{S_{h\text{-}k} - S_{h\text{-}1}{}_{\text{-}k\text{-}1}}$ mátrixszal, és ezt folytassuk lépésről-lépésre mindaddig, amíg zérus-mátrixhoz nem jutunk. Nevezzük az így nyert mátrixokat továbbra is redukált mátrixoknak, indexben jelezve, hogy hányadik lépést hajtottuk végre, azaz hányadik redukált mátrixnál tartunk:

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

55. Táblázat. R_2 mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

56. Táblázat. R_3 mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

57. Táblázat. R_4 mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

58. Táblázat. R_5 mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

59. Táblázat. R_6 mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

60. Táblázat. R_7 mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

61. Táblázat. R_8 mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

62. Táblázat. R_9 mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

63. Táblázat. R_{10} mátrix

A következő táblázat a zérus-mátrix lenne, tehát a számolást befejezettnek tekinthetjük.

Ha most a redukált mátrixokat összeadjuk, eredményül természetesen a kiinduló mátrixot kapjuk.

Képezzük most az $\mathbf{R_j}$ mátrixok inverzét. Az előbbiekből már tudjuk, hogy az ilyen $\mathbf{A_{1\text{-}1}}$ jellegű mátrixok inverzét nem kell számítással meghatározni, hanem azt egyszerűen fel tudjuk írni, hiszen ezek inverze olyan felső trianguláris mátrix, amelynek elemei egységek, azaz

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
e2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
e3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
e4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
e5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
e6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
e7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

64. Táblázat. $(R_1)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
e2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
e3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
e4	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
e5	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
e6	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

65. Táblázat. $(R_2)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
e2	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
e3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
e4	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
e5	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

66. Táblázat. $(R_3)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
e2	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
e3	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
e4	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

67. Táblázat. $(R_4)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
e2	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
e3	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

68. Táblázat. $(R_5)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
e2	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

69. Táblázat. $(R_6)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

70. Táblázat. $(R_7)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

71. Táblázat. $(R_8)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

72. Táblázat. $(R_9)^{-1}$ mátrix

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
e1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

73. Táblázat. $(R_{10})^{-1}$ mátrix

Ha most az inverz mátrixokat összeadjuk a következő mátrixhoz jutunk.

e1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
e2	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1
e3	0	0	8	7	6	5	4	3	2	1
e4	0	0	0	7	6	5	4	3	2	1
e5	0	0	0	0	6	5	4	3	2	1
e6	0	0	0	0	0	5	4	3	2	1
e7	0	0	0	0	0	0	4	3	2	1
e8	0	0	0	0	0	0	0	3	2	1
e9	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
e10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

74. Táblázat. Az inverz mátrixok összegzése

Olyan mátrixot kaptunk tehát, amelynek elemei az oszlopokban azonosak, megegyeznek a kiinduló mátrix diagonális elemeivel.

Érdekes, hogy **ezeknek az elemeknek a reciprok értéke a kiinduló mátrix inverze elemeivel egyezik meg. Vajon miért?**

3. Egyszerűsített gyakorlati alkalmazási példa

A továbbiakban egyszerűsített lineáris programozási, gyakorlati példát mutatok be, ezen keresztül szemléltetve a fentiekben kifejtetteket. Az egyszerűsítésre az kényszerít, hogy a gyakorlatban előforduló lineáris programozási modellek bemutatására, azok nagy mérete miatt e könyvben nincs lehetőség.

Legyen tehát feladatunk a következő:

	Term	Műv1	Műv2	Műv3	Műv4	Műv5	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
M1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
M2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
M3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
M4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
M5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
M6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
E1	0	0,3	0	0,5	0	0,1	0	-8	0	0
E2	0	0	0,4	0	0,2	0	0,4	0	-9	0
Ter	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1000
Cf	5000	-4	-5	-3	-4	-2	-1	-25	-30	0

75. Táblázat. Egyszerűsített lineáris programozási modell

A modell a következőket fejezi ki:

Egy terméket termelünk (Term), amelynek előállításához 6-féle műveletet kell elvégezni (Műv1, Műv2, … , Műv6). A műveletek elvégzéséhez kétféle eszközt használunk (Esz1, Esz2)

Az adott munkadarabon (a teljes munkadarabon), minden műveletet el kell végezni, tehát a munka-darab és a műveletek méretüket (mennyiségüket) tekintve megegyeznek.

Az első eszközt (Esz1) az első műveletnél 0,3 a harmadiknál 0,5 az ötödiknél 0,1 óráig használjuk, hogy a szükséges munkafolyamatot, megmunkálást elvégezzük.

A második eszközt (Esz2) a második munkaműveletnél 0,4 a negyedik műveletnél 0,2 a hatodik műveletnél 0,4 óráig használjuk, hogy a szükséges munkafolyamatot, megmunkálást elvégezzük.

Az első gép napi 8 óra kapacitással, a második napi 9 óra kapacitással dolgozhat, a napi gépköltség (pl. gépbérlet, vagy amortizáció) az első gépnél 25, a másodiknál 30 pénzegység.

Ismerjük még a műveleteknél felmerülő egyéb költségeket, pl. üzemanyag, kenőanyag, munkabér, stb.) Ezt találjuk a műveleteknél az utolsó sorban.

Természetesen a költségek negatív előjellel szerepelnek.

Ismerjük még, hogy a terméket darabonként 5000 Ft-ért tudjuk értékesíteni, azonban ezekből legfeljebb 1000 darab adható el.

A relációkat helykímélés miatt nem jelöltem, nem képeztem e célból külön oszlopot, vegyük úgy, hogy a relációk kisebb-egyenlő, vagy egyenlő (esetünkben mindegy) formában vannak megadva.

A modell egyes részeit szándékosan színeztem ki, annak megfelelően, ahogyan az 1. fejezetben a modellt a 6. Táblázatban blokkokra bontottam és a 7. kijelöltem az elvégzendő műveleteket, tehát

	u^*	x''^*	y^*		
x’	$\mathbf{A'^{-1}}$	$\mathbf{A'^{-1}A''}$	**0**	=	**0**
$\mathbf{u_2}$	$\mathbf{-B'A'^{-1}}$	$\mathbf{B''-B'\,A'^{-1}\,A''}$	**F**	$\leq$	**0**
$\mathbf{u_3}$	$\mathbf{-D'A'^{-1}}$	$\mathbf{D''-D'\,A'^{-1}\,A''}$	**G**	$\leq$ $>$	**B**
	$\mathbf{-p'^*A'^{-1}}$	$\mathbf{p''^*-p'^*A'^{-1}\,A''}$	**C***		**0**

7. Táblázat. A bázis-transzformáció után kapott eredmény

Kényelmi okokból a műveletek elvégzését két mátrix szorzataként fogom végezni, tehát a vektorral való szorzásokat, sőt s skalárral való szorzást is mátrixként fogom fel.

Az első lépésben vegyük a piros színnel jelölt 6 sorból és 6 oszlopból álló **A’** mátrixot és határozzuk meg annak inverzét, azaz $\mathbf{A'^{-1}}$ inverz mátrixot. Mint tudjuk, ennek inverze olyan felső trianguláris mátrix, amelynek diagonális elemei és a diagonális feletti elemek egységek, a diagonális alatti elemek nullák, ezért ennek az inverzét minden számítás nélkül felírhatjuk, azaz:

1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

76. Táblázat. Az A' mátrix inverze

A következő lépésben határozzuk meg a **-B'A'$^{-1}$** mátrixszorzatot, azaz:

B

0	-0,3	0	-0,5	0	-0,1
0	0	-0,4	0	-0,2	0
-1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

x

A^{-1}

1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

=

$-B'A'^{-1}$

0	-0,3	-0,3	-0,8	-0,8	-0,9
0	0	-0,4	-0,4	-0,6	-0,6
-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Az u_3 sorban lévő **$-D'A'^{-1}$** és **$D''-D'\ A'^{-1}\ A''$** értékek meghatározásával nem kell foglalkoznunk, mivel egyszerűsített modellünkben azok nem szerepelnek.

Határozzuk meg most a **A'** mátrixhoz tartozó célfüggvény együtthatók értékét, azaz **$-p'*A'^{-1}$** értékeit. Mátrixszorzatként ezt a következőképpen írhatjuk fel:

-p'

5000	-4	-5	-3	-4	-2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

x

-p'

1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

=

-p'*A'$^{-1}$

5000	4996	4991	4988	4984	4982
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Határozzuk meg most a **A'$^{-1}$A''** értékét

A'$^{-1}$

1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

x

A''

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0

=

A'$^{-1}$A''

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-1	-1	-1	-1	-1	-1

A következő feladat a **B''-B' A'$^{-1}$ A''** meghatározása

B''

0	0	0	0	0	0
0,4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

A **-B’ A’$^{-1}$** már az előbbiekből ismert, azaz

0	-0,3	-0,3	-0,8	-0,8	-0,9
0	0	-0,4	-0,4	-0,6	-0,6
-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Ugyancsak ismert a **A’’**

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0

A műveletek elvégzésének eredménye

B’’-B’ A’$^{-1}$ A’’

0,9
1
1

Végül még a $\mathbf{p''^*\text{-}p'^*A'^{-1}\ A''}$ kiszámítása maradt. Tekintve, hogy már a számítások nagy részét elvégeztük, ez nem jelent problémát, így ismertetésétől eltekinthetünk.

Ha most az így kiszámított mátrixokat a modellbe behelyettesítjük a következőket kapjuk:

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
Term	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	0
Műv1	0	1	1	1	1	1	-1	0	0	0
Műv2	0	0	1	1	1	1	-1	0	0	0
Műv3	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0
Műv4	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0
Műv5	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
E1	0	-0,3	-0,3	-0,8	-0,8	-0,9	0,9	-8	0	0
E2	0	0	-0,4	-0,4	-0,6	-0,6	1	0	-9	0
Ter	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	1000
Cf	-5000	-4996	-4991	-4988	-4984	-4982	4981	-25	-30	0

Most tehát egy olyan közbenső bázismegoldáshoz jutottunk, amely képletesen szólva, azaz vulgárisan fogalmazva azt mutatja, hogy amennyiben az adott termékből 1000 egységet kívánnánk előállítani, de még nem végeznénk el műveletet és nem használnánk fel eszközt, akkor a jövedelmünk nulla pénzegység lenne, s felmerülne egy sor elvégzendő művelet és eszközigény, ami jelenleg, mint várható költség jelentkezik. Látjuk azonban, hogy van olyan modellváltozó, a Műv6, amelynek célfüggvény értéke pozitív, tehát a bázis-transzformáció folytatható, a Műv6 bevonható a bázisba. (Megjegyezném, hogy – mint tudjuk – a piros színnel jelölt adatok – mint ismerjük – minden számolás nélkül felírhatók voltak.)

A továbbiakban tehát folytathatnánk a bázis-transzformációt. E helyett azonban végezzük el a modell megoldását az elemi bázis-transzformáció alkalmazásával. Most a teljes táblázatsorozatot közreadom, s látni fogjuk, hogy a fenti táblázat – mint természetes – itt is szerepelni fog, s ott folytatjuk tovább a számolást.

Nézzük tehát a modell megoldását elemi bázis-transzformációval, lépésről lépésre: (A generáló elemeket piros színnel jelöltem.)

	Term	Műv1	Műv2	Műv3	Műv4	Műv5	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
M1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
M2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
M3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
M4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
M5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
M6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
E1	0	0,3	0	0,5	0	0,1	0	-8	0	0
E2	0	0	0,4	0	0,2	0	0,4	0	-9	0
Ter	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1000
Cf	5000	-4	-5	-3	-4	-2	-1	-25	-30	0
	M1	Műv1	Műv2	Műv3	Műv4	Műv5	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
Term	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
M2	0	**1**	-1	0	0	0	0	0	0	0
M3	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
M4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
M5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
M6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
E1	0	0,3	0	0,5	0	0,1	0	-8	0	0
E2	0	0	0,4	0	0,2	0	0,4	0	-9	0
Ter	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1000
Cf	-5000	4996	-5	-3	-4	-2	-1	-25	-30	0

	M1	M2	Műv2	Műv3	Műv4	Műv5	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
Term	1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
Műv1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
M3	0	0	**1**	-1	0	0	0	0	0	0
M4	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
M5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
M6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
E1	0	-0,3	0,3	0,5	0	0,1	0	-8	0	0
E2	0	0	0,4	0	0,2	0	0,4	0	-9	0
Ter	-1	-1	1	0	0	0	0	0	0	1000
Cf	-5000	-4996	4991	-3	-4	-2	-1	-25	-30	0
	M1	M2	M3	Műv3	Műv4	Műv5	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
Term	1	1	1	-1	0	0	0	0	0	0
Műv1	0	1	1	-1	0	0	0	0	0	0
Műv2	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
M4	0	0	0	**1**	-1	0	0	0	0	0
M5	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
M6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
E1	0	-0,3	-0,3	0,8	0	0,1	0	-8	0	0
E2	0	0	-0,4	0,4	0,2	0	0,4	0	-9	0
Ter	-1	-1	-1	1	0	0	0	0	0	1000
Cf	-5000	-4996	-4991	4988	-4	-2	-1	-25	-30	0

	M1	M2	M3	M4	Műv4	Műv5	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
Term	1	1	1	1	-1	0	0	0	0	0
Műv1	0	1	1	1	-1	0	0	0	0	0
Műv2	0	0	1	1	-1	0	0	0	0	0
Műv3	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
M5	0	0	0	0	**1**	-1	0	0	0	0
M6	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
E1	0	-0,3	-0,3	-0,8	0,8	0,1	0	-8	0	0
E2	0	0	-0,4	-0,4	0,6	0	0,4	0	-9	0
Ter	-1	-1	-1	-1	1	0	0	0	0	1000
Cf	-5000	-4996	-4991	-4988	4984	-2	-1	-25	-30	0
	M1	M2	M3	M4	M5	Műv5	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
Term	1	1	1	1	1	-1	0	0	0	0
Műv1	0	1	1	1	1	-1	0	0	0	0
Műv2	0	0	1	1	1	-1	0	0	0	0
Műv3	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	0
Műv4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0
M6	0	0	0	0	0	**1**	-1	0	0	0
E1	0	-0,3	-0,3	-0,8	-0,8	0,9	0	-8	0	0
E2	0	0	-0,4	-0,4	-0,6	0,6	0,4	0	-9	0
Ter	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	0	1000
Cf	-5000	-4996	-4991	-4988	-4984	4982	-1	-25	-30	0

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	Műv6	Esz1	Esz2	**b**
Term	1	1	1	1	1	1	-1	0	0	0
Műv1	0	1	1	1	1	1	-1	0	0	0
Műv2	0	0	1	1	1	1	-1	0	0	0
Műv3	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0
Műv4	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0
Műv5	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
E1	0	-0,3	-0,3	-0,8	-0,8	-0,9	0,9	-8	0	0
E2	0	0	-0,4	-0,4	-0,6	-0,6	1	0	-9	0
Ter	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	1000
Cf	-5000	-4996	-4991	-4988	-4984	-4982	4981	-25	-30	0

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	E1	Esz1	Esz2	**b**
Term	1,0	0,7	0,7	0,1	0,1	0,0	1,1	-8,9	0,0	0
Műv1	0,0	0,7	0,7	0,1	0,1	0,0	1,1	-8,9	0,0	0
Műv2	0,0	-0,3	0,7	0,1	0,1	0,0	1,1	-8,9	0,0	0
Műv3	0,0	-0,3	-0,3	0,1	0,1	0,0	1,1	-8,9	0,0	0
Műv4	0,0	-0,3	-0,3	-0,9	0,1	0,0	1,1	-8,9	0,0	0
Műv5	0,0	-0,3	-0,3	-0,9	-0,9	0,0	1,1	-8,9	0,0	0
Műv6	0,0	-0,3	-0,3	-0,9	-0,9	-1,0	1,1	-8,9	0,0	0
E2	0,0	0,3	-0,1	0,5	0,3	0,4	-1,1	**8,9**	-9,0	0
Ter	-1,0	-0,7	-0,7	-0,1	-0,1	0,0	-1,1	8,9	0,0	1000
Cf	-5000,0	-3335,7	-3330,7	-560,4	-556,4	-1,0	-5534,4	44250,6	-30,0	0

	M1	M2	M3	M4	M5	M6	E1	Esz1	Esz2	**b**
Term	1	1	0,6	0,6	0,4	0,4	0	1	-9	0
Műv1	0	1	0,6	0,6	0,4	0,4	0	1	-9	0
Műv2	0	0	0,6	0,6	0,4	0,4	0	1	-9	0
Műv3	0	0	-0,4	0,6	0,4	0,4	0	1	-9	0
Műv4	0	0	-0,4	-0,4	0,4	0,4	0	1	-9	0
Műv5	0	0	-0,4	-0,4	-0,6	0,4	0	1	-9	0
Műv6	0	0	-0,4	-0,4	-0,6	-0,6	0	1	-9	0
E2	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	-0,1	0,1	-1,0	0
Ter	-1	-1	-0,6	-0,6	-0,4	-0,4	0	-1	**9**	1000
Cf	-5000,0	-4995,1	-2998,8	-2994,2	-1994,6	-1992,3	-3,1	-4978,2	44773,7	0
	M1	M2	M3	M4	M5	M6	E1	E2	Ter	**b**
Term	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1000
Műv1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1000
Műv2	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	1000
Műv3	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1000
Műv4	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1000
Műv5	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1	1000
Műv6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	1	1000
E1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	0,0	0,1	112,5
E2	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,0	0,0	-0,1	0,1	111,1
Cf	-25,1	-20,2	-13,9	-9,3	-4,6	-2,3	-3,1	-3,3	-4974,9	-4974854

Láthatjuk, hogy a hetedik táblázatnál jutottunk el az előbbi bázismegoldáshoz, s innen folytatva a bázis-transzformációt, a tizedik táblázat adta az optimális megoldást.

Az optimális megoldás szerint 1000 egységnyi terméket állítunk elő, minden műveletből elvégezzük (megmunkáljuk) az 1000 egységet, az első eszközből 112,5 órát, a másodikból 111,1 órát fordítunk a termék előállítására, s összesen 4 974 854 Ft jövedelmet érünk el. A táblázat utolsó sora tartalmazza a duális megoldást, vagy árnyékárakat, megmutatva, hogy további egységnyi termelés, illetve egységnyi műveletek, vagy eszközfelhasználás esetén mennyivel lehetne növelni a jövedelmet.

***

Az eddigiek során csak néhány lehetőséget villantottam fel a mátrixok inverzével kapcsolatban.

Láttuk, hogy **speciális mátrixok inverze minden számítás nélkül felírható, s ez független a mátrix méretétől**. Az vizsgált 10x10-es mátrixok eredménye tehát kiterjeszthető tetszőleges méretű mátrixokra, illetve adott mátrixból olyan méretet használhatunk fel, amilyenre szükségünk van.

Láttuk azt is, hogy **az elemek értékeinek változtatásával mátrix sorozatokat képezhetünk, s ezek inverzét is felírhatjuk, minden számítás nélkül**.

Megállapítottunk ennek során **néhány tételt is, s további tételek megállapítását az olvasókra bízom**.

Megismerhettük azt is, hogy **speciális mátrixok**, többek között a bemutatott mátrixok közül egyik-másik a **gyakorlati feladatok vizsgálatánál is szóba jöhet**. Erre a 3. pontban egyszerűsített gyakorlati példát is láttunk.

Az, hogy a vizsgált, valamint általunk képezhető végtelen sok lehetőség közül **bármely mátrixnak és inverzének lehet-e gyakorlati haszna, az további vizsgálatok tárgya lehet**. Véleményem szerint e tekintetben **igen sok lehetőség van arra, hogy fiatal szakemberek új eredményekhez jussanak.**

Kérdés, hogy milyen módon lehet, vagy **lehet-e általában mátrixokat, s milyen mátrixokat, olyan speciális mátrixokká alakítani, amelyek inverze számolás nélkül felírható?**

A speciális mátrixoknak és inverzüknek a vizsgálata lehet érdekes és lehet hasznos is. Az is lehet, hogy csak érdekes, hasznosság nélkül, vagy nem érdekes ugyan, de hasznos. Hogy melyik vizsgálatra milyen megállapítást tehetünk, ahhoz el kellene végezni ezeket a vizsgálatokat, illetve azokat, amelyek az olvasóban a végtelen sok lehetőség közül felvetődnek. Azt hiszem **ezek a vizsgálatok a tudományok iránt érdeklődő fiatalokra várnak.**

Nosza rajta!

Akit érdekel, a végtelen sok lehetőség, vizsgálódjon tovább!

Én most csak ennyire jutottam.