VEKERDI LÁSZLÓ:
A MATEMATIKA MAGYARORSZÁGON VALÓ MEGHONOSODÁSÁNAK ÉS FEJLŐDÉSÉNEK FŐBB IRÁNYAI A 15. SZÁZAD VÉGÉTŐL[1]

Digitalizálták a Magyar Tudománytörténeti Intézet munkatársai, Gazda István vezetésével.

Az első magyar szerző által írt matematikai munka 1499-ben jelent meg. Hollandiában, talán Deventerben írta bizonyos György mester. A könyv címének – 'Arithmeticae summa tripartita' (Az aritmetika három részből álló foglalata) – megfelelően, három részben tárgyalja anyagát. Az első rész a hindu-arab számjegyekkel való számolás kilenc fajtáját – a számolást, összeadást, kivonást, kétszerezést, felezést, sokszorozást, osztást, haladványokat és a gyökvonást ismerteti. A második rész a vízszintes vonalazású abakuszon való „számvetést" mutatja be, a harmadik rész tizenöt feladatot hoz a hármasszabályra, az arányos osztásra, a pénzek átszámítására, az elsőfokú egyenletekkel megoldható feladatokra és a köbtartalom-számításra.

Az ilyen jellegű számolókönyveket a 15. század második felében fellendülő és új szervezési formákat kereső kereskedelem tette szükségessé, de mivel szerzőik – mint György mester is – sokszor egyházi férfiak voltak, a tárgyalási mód és feladatok többnyire az egyetemek skolasztikus stílusához igazodtak.

György mester Nyugaton írta könyvecskéjét, de a számolás tudománya ez idő tájt már Magyarországon sem volt teljesen ismeretlen. A kor egyik nagy matematikusát, Georg Peuerbachot (1423–1461) V. László 1454-ben asztrológusának hívta meg, s Peuerbach Budán írta Vitéz János esztergomi érseknek ajánlott csillagászati munkáját. Peurbach tanítványa, Regiomontanus (1436–1476) pedig 1467-ben Vitéz János hívására az érsek által 1465-ben alapított, rövid életű pozsonyi egyetemre jön, ahol két évig tanított. Nem lehetetlen, hogy György mester is tőle tanult mielőtt Nyugatra ment.

A hindu-arab számokkal való számolás csak a 15. század elején kezdett terjedni Magyarországon, és már a 15. század végén újból háttérbe szorítja az abakusz-számolás új módja, ami az addigi függőleges vonalazású abakusz helyett vízszintes vonalrendszeren dolgozik. György mester is nagy elismeréssel adózik az abakuszon történő számvetésnek, mint ami „éppen úgy, mint a számjegyekkel való számolás, szinte egyedülűlló, hallatlanul rövid és a számolásnak legjátékosabb módja".

Ugyanilyen nagy fontosságot tulajdonít az abakuszon való számolásnak az első magyar nyelvű matematikai mű, az 1577-ben nyomtatott ún. 'Debreceni Aritmetika' is. Teljes címe: 'Aritmetica, azaz a szamvetesnek tvdomania, mell' az tvdos Gemma Frisivsnac szamvetesbeol Maggar nyelure (ez tudománban gyönörködöknec hasznokra, es hamaráb valo ertelmekre io moddal) forditattot. Debrecenbe, Rodolphus Hoffhalter niomtatta, Anno D: 1577.'

Valójában nem fordítás, Gemma Frisius (1508–1555) híres, először 1536 körül, Antwerpenben megjelent Aritmetikájához nincs több köze, mint a kor többi aritmetikájához, amelyek meglehetősen egyöntetűek, és mind Frisius Aritmetikájából és egymásból merítenek.

---

[1] Forrás: Edward Kofler: Fejezetek a matematika történetéből. Függelék. Bp., 1965. pp. 248–273.

Nem véletlen, hogy az első magyar nyelvű számtankönyv Debrecenben jelent meg. Debrecen a 16. században rohamosan növekedett. Egész falvak, sőt kisebb mezővárosok vándoroltak be az adófizetés ellenében a töröktől autonómiát élvező, ún. khász-városba. Ezenkívül az erdélyi és magyarországi törvények megengedték a jobbágyok Debrecenbe költözését, illetőleg eltiltották, hogy a földesúr szökött jobbágyát Debrecenből visszakövetelje. A török hódoltság, a Habsburg birodalom és Erdély határán elhelyezkedő városban élénk kereskedő-iparos élet alakul ki, a debreceni iparosok céhszabályai mintául szolgálnak a többi hódoltsági városoknak, a termékeik messze a helyi piacon túlra eljutnak.

Ez az élénk kereskedő és iparos élet tette szükségessé az 1577-es magyar nyelvű aritmetika megjelenését, ugyanúgy mint évszázadokkal azelőtt a Leonardo Pisano könyvének a kiadását a fejlett olasz kereskedelem. Ez tükröződik a könyv feladataiban is: „Mass fél sing posztot veszöc ötuen pénzen, vallyon negyed fél singöt hogy vehetöc?…”

A többi példák is mind a kereskedő mindennapos gyakorlatával, pénzváltással, adás-vevéssel állnak kapcsolatban. A különféle szabályok közül csak azokkal foglalkozik részletesen, amelyeknek az akkori debreceni kereskedelmi életben gyakorlati haszna volt. Így igen bőven tárgyalja az oly sok esetben alkalmazható hármasszabályt, de a külföldi aritmetikákban annyira fontos ’regula societatis’-t (társulási szabályt) pár feladattal elintézi, mivel: „Maggar országban ennec a regulanac igön nagy haszna nintsen, mert a Magyaroce igön kemény nyakuac és egyaránt az fizetést (restelik)”.[2]

Ugyanez a gyakorlatiasság szabja meg a kis könyv törtekkel való bánásmódját is: csak olyan törteket használ, amik gyakran fordulnak elő a kereskedői életben, ti. azokat, amelyek nevezői 2 hatványai 32-ig és a 3, 5, 7, 9 és 11. A ’Debreceni Aritmetika’ hű tükre a 16. századi Debrecen lüktető, szerteágazó, de Nyugathoz képest messze elmaradt technikával dolgozó kereskedelmi életének. A könyv hasznos és közkedvelt voltát mutatja, hogy 1582-ben változatlanul kiadták másodszor, és 1591-ben lényegesen bővítve harmadszor is.

Debrecen gazdagsága a 17. században még tovább nőtt. A város iskolája – miután a török elfoglalta Nagyváradot (1660) – magába olvasztotta az akkor a Debrecennél még lényegesen jelentősebb nagyváradi iskolát. Ennek vezetője, Martonfalvi György (1653–1681) átszervezte és komoly szintre emelte az oktatást. Az addig egy, illetve időnként két, gyakran változó tanítóval működő iskolából három állandó professzoros kollégiumot alakít. Kitűnő tanártársai voltak, az Utrechtben és Leydenben tanult Szilágyi Tönkő Márton (1642–1700), aki fizikát és Lisznyai Kováts Pál (1630–1693), aki számtant, történelmet és földrajzot tanított. A kollégium számos környező városban tartott fenn alsóbb tagozatú iskolát, ún. particulát, melyeknek tanítói szoros kapcsolatban állottak az anyaintézettel.

Egy ilyen particulának, a gyöngyösinek a vezetője volt Menyői Tolvaj Ferenc, aki 1674-ben adta ki Debrecenben nagy közkedveltségnek örvendő aritmetikáját. Már régebben is összeállított egy kis könyvecskét a számolás szabályaiból, írja a bevezetőben, ami „valahol Skolai emberséges tudós iffiak eleiben akadott, mindenütt igen nagy kedvességgel látták olvasták, és akinek hol modgya volt benne, pennával is excipiálta. Megtérvén utambul, érkeztem amaz sok szép vitusokkal fénylő ékeskedő Debrecem Skolában, jun. 29. An. 1675. Az holott jo-akaroimmal, Barátim Uraimmal szemben lévén, egynéhányan őkegyelmek igen kértek jóvallották-is, hogy a gyengéknek kedvekért ez munkátskát tennők közönségessé praelum alá botsátván. Mert, a mi itt ez kis Könyvetskében taníttatik, elégségesnek itélem lenni, akibül az tanuló iffiak jövendőben az ők kereskedésekben, vagy Majorságbéli gondviselésekben rendessen számot adhatnak, vagy másoktól számot vehetnek.”[3]

---

[2] Hárs János: A Debreceni Aritmetika. A legrégibb magyar matematikai munka teljes szövege, magyarázata, kritikája. Sárospatak, 1938. p. 130.

[3] Az Aritmetikának: Avagy az Számlálásnak öt Specieseinek rövid Magyar Regulákban foglaltatott mestersége. Taliter disponente Franc Tolvaj Menyői (Lőcse, 1727). – Néhány más, kisebb matematikai publikációról szól Waczulik Margit ’A táguló világ magyarországi hírmondói. XV–XVII. század’ c. munkájában (Bp., 1984),

Tolvaj Ferenc aritmetikája valóban gyenge munka, csak az egész számokkal való számolást tárgyalja, a törtekre még abban a kezdetleges formában sem tér ki, mint a Debreceni Aritmetika. Mindenben áll róla Maróthi György megállapítása, aki szerint „ollyan, hogy a X., vagy XI. Seculumban sem kellett volna alább valót írni. Sőt azt is könnyű volna megmutatni, hogy a szegény Tolvaj maga sem igen értette az Aritmeticát."

Maróthi György (1715–1744) 1743-ban megjelent aritmetikájának a bevezetőjében írja ezeket a szavakat Tolvaj könyvéről. Maróthi aritmetikája kétségkívül csúcsát jelenti a 19. századig magyar nyelven megjelent matematikai könyveknek. Teljes címe: 'Aritmetica, vagy számvetésnek mestersége, Mellyet írtt és Közönséges Haszonra, főképen a' Magyar országon elő-fordulható Dolgokra alkalmaztatván kiadott Maróthi György' (Debrecen, 1743) is mutatja, hogy a könyv, akárcsak elődei, gyakorlati szükségleteket elégít ki, de sokkal alaposabb azoknál. Nem szorítkozik a szabályok egyszerű alkalmazására, hanem pontosan ismerteti és értelmezi azokat. Ezen túlmenően pontos meghatározását adja a bennük szereplő mennyiségeknek is. Sokkal világosabb fogalmat ad pl. a negatív számokról sok korabeli külföldi könyvnél. Bőven és érthetően foglalkozik a törtekkel, de a tizedes törteket éppen csak megemlíti, mert akkor ezeknek még nem volt nagy gyakorlati hasznuk, hiszen a tízes rendszer sem a pénzeknél, sem a mértékeknél nem volt használatban.

Nagyon fontos felhívni a figyelmet Maróthi felvilágosult nevelési elveire. Hosszú évekig külföldön, a bázeli, utrechti, zürichi, groningeni egyetemeken tanult. 1738-ban hazatérve, a Kollégium négy professzori állása közül a természettudomány, mennyiségtan, történelem és latin irodalom tanítására szervezett tanszéket foglalta el. A 18. század első felében a Kollégium mindenképpen nehéz helyzetben volt. A protestáns oktatást elnyomni igyekező kormányzat még abban is akadályozta az egyébként is elszegényedő várost, hogy az eddigi módon, közvetlenül támogassa iskoláját. Maróthi hazaérkezésekor igen alacsony szinten állott a Kollégiumban az oktatás.

Maróthi pár év alatt lényegesen emeli a kollégiumi oktatás színvonalát. Ebben a munkájában legnagyobb segítsége Domokos Márton (kb. 1700–1764), Debrecen nagyműveltségű, Halléban tanult főbírója. Maróthi és Domokos az akkor Európa-szerte diadalra jutó komplex új áramlatot, a felvilágosodást hozzák Debrecenbe. Ők itt első jelentős követei a svájci és holland városokban divatos, Locke-ra és a holland kísérleti fizikusokra támaszkodó empirizmusnak és a Christian Wolffra (1679–1754) hivatkozó, a felvilágosodás mintaállamából, Poroszországból terjedő leibnizi racionalizmusnak. Nagyon jellemző ebből a szempontból Maróthi könyvtára, melyben megtalálhatók: Newton, Galilei, Jacob Bernoulli, Nicolaus Cusanus, L'Hospital, Pieter van Musschenbroek, s'Gravesande és Christian Wolff műve.

Ez a szellem hatja át Hatvani István (1718–1786) 1757-ben megjelent művét, az 'Introductio ad principia philosophiae solidioris'-t is. Ebben a könyvben Hatvani a rábízott fiatal lelkeket akarja beoltani az egyre jobban terjedő „naturalizmus", „szkepticizmus" és „atheizmus" ellen. Az „igazság" keresésének elvi alapjai izgatják, de a felvilágosodásra jellemző racionális, hasznossági szempontokat nem téveszti szem elől. Így az „igazság" keresésének elvi alapjai izgatják, de a felvilágosodásra jellemző racionális, hasznossági szempontokat nem téveszti szem elől. Így az „igazság" egyik megismerési formájaként bevezetett valószínűség-számítást – Hatvani Bázelben a valószínűség-számítás egyik megalapítójának, Daniel Bernoullinak (1700–1782) volt a tanítványa – Debrecen gyermekhalandósági statisztikájának az összeállítására és kiértékelésére használja. Megállapítja, hogy a nyugatihoz képest igen magas debreceni gyermekhalandóság 3/4–4/5 részben a csecsemőkori sorvadás rovására írható, s okát a szülések nem kielégítő levezetésében ismeri fel.

---

köztük Király Istvánnak Franekerben 1695-ben megjelent disszertációjáról is, amelynek címe magyar fordításban így hangzik: Filozófiai disszertáció a matematika tanulmányozásának hasznosságáról.

Hatvani élete vége felé kezd kiveszni a Kollégiumból a régi Debrecen kereskedelme és a felvilágosodás által inspirált gyakorlatias, természettudományok és matematika felé tájékozódó szellem. A Kollégium egyházi vezetői éles ellentétbe kerülnek a felvilágosodás haladó, hasznossági elveit valló városi vezetőséggel. Bár a század végén késhegyig kiélesedő harcban látszatra az utóbbi győz, a Kollégium autonómiájára hivatkozva azonban egyre inkább bezárkózik a maga latin nyelvű, teológiai-filozófiai jellegű, a természettudományoktól és matematikától egyre jobban elzárkózó maradi nevelési rendszerébe. A továbbiakban csak a latin nyelvvel belsőleg összeszövődött botanika virágzik a természettudományok közül a főiskolán. Nagyon jellemző, hogy a 19. század közepe táján Kerekes Ferenc, a matematikát is előadó professzor hasonló spekulációkkal próbálja tisztázni az infinitezimális számítás alapkérdéseit, mint amilyenekkel már a 14. századi párizsi és oxfordi egyetemek skolasztikusai küzdöttek.

A matematikai-természettudományos oktatás ekkorra a nagyszombati, ill. az ennek utódját képező budai, majd pesti egyetemen talál valamiféle otthonra. A nagyszombati egyetemet Pázmány Péter (1570–1637) alapította 1635-ben. Mint a debreceni Kollégium, kezdeti éveiben ez is csaknem kizárólag a hitélet erősítésére szolgált. A matematikának jóformán semmi szerep sem jutott abban a tantervben, ami az egyetemen tanító jezsuita rend nevelési elveit Európa-szerte megszabta. Az egyetem tanárait, mint a jezsuita intézetekben tanító tanárokat általában, gyakran helyezték át, s ezek váltakozva tanítottak Bécs, Nagyszombat, Grác, Kolozsvár, Kassa stb. jezsuita egyetemein, ill. középiskoláiban. Így az anyag, amit előadásaikban és könyveikben nyújtanak, nem a helyi, gyakorlati szükségletekhez alkalmazkodik, mint a debreceni Kollégiumban, hanem kisebb-nagyobb késésekkel a nemzetközi irányokhoz csatlakozik.

Az első, aki rendszeresen adott elő matematikát a nagyszombati egyetemen, Berzevitzi Henrik (1652–1713) volt. 1682-ben vagy 1687-ben egy aritmetikát is kiadott, de ez nem maradt fenn. 1694-ben és 1737-ben egy-egy szigorúan külföldi példák után készült latin nyelvű trigonometria jelenik meg a nagyszombati egyetemi jezsuitától, 1738-ban pedig az első algebra Magyarországon. Az utóbbi szerzője, Lipsicz Mihály (1703–1765) a kolozsvári, kassai, nagyszombati jezsuita intézetekben tanított.

Könyve, az ’Algebra sive analysis speciosa…’ (Kassa, 1738) világos előadásban ismerteti az algebrai műveleteket, az egyenletek megoldását másodfokúig, foglalkozik a számtani és mértani haladványokkal. A könyv a kor egyszerűbb nyugati algebra tankönyveinek anyagát adja. Az is mutatja, mennyire kevéssé ismert ez idő tájt nálunk az algebra, hogy a felhozott példákat a betűkön kívül mindig valamilyen konkrét pénz- vagy mértékegységekben kifejezett számokkal is illusztrálja. Az egyes műveletek tárgyalása után mindegyikből „axiómákat és általános elveket” von le, amik azonban nem egyebek a tárgyalt eljárás pontokba szedett szabályainál.

Lipsicz könyvével azért foglalkoztunk kissé bővebben, mert alaptípusát jelenti az utána elég nagy számban megjelenő, egyre jobbá váló, jezsuiták által írt algebrának. 1753-ban újból megjelent egy Kassán, rá két évre egy másik Kolozsvárott. Az utóbbit, aminek a címe ’Elementa arithmeticae numericae et literalis seu algebrae’ (Kolozsvár, 1755), Hell Miksa (1720–1792) írta kolozsvári akadémiai tanár korában. Hell Miksa nemsokára világhírre tett szert, mint a bécsi csillagvizsgáló igazgatója, s vezetője volt a Vénusznak a Nap előtti átvonulását vizsgáló expedíciónak 1769-ben Vardő szigetén. Könyve a másodfokú egyenletek tárgyalásáig jut el, ismerteti a számtani és mértani arányokat a számtani haladványt és a hármasszabályt. Kevés példát ad, inkább az elvi kidolgozásra, a pontos definíciókra fekteti a hangsúlyt.

Igen nagy haladást jelent ezekhez az elemi algebrakönyvekhez képest Kerekgedei Makó Pál (1724–1793) algebrája, amelyik a Bécsben 1770-ben megjelent ’De artihmeticis et geometricis aequtionum resolutionibus libri duo’ (’Az aritmetikai és geometriai egyeneletek megoldásáról szóló két könyv’) című művének első könyve. Ismerteti az egyenletek megoldását egészen a negyedfokúig, az utóbbi megoldásnál Euler módszerét adja. Részletesen tárgyalja Descartes jelszabályát, a gyökök különféle tulajdonságait, a többszörös gyökök elméletét. Makó könyve nyomán készült – sok helyen szó szerint átvételekkel – Martinovics Ignác (1755–1796) algebrakönyve, a ’Theoria generalis aeqvationvm omivm gradum novis illvstrata formvlis ac ivxta principia svblimioris calculi finitorum…’ (Buda, 1780). (Magasabb fokú egyenletek általános elmélete új formulákkal magyarázva és a felsőbb véges számítások ezzel összefüggő elvei…) és Horváth János (1732–1799) nagyszombati, majd budai matematika-fizika professzor ’Elementa matheseos…’ (Nagyszombat, 1772) c. könyvének algebrai része is.

Ezek az algebrák, különösen Makó és Martinovics könyve mutatják, hogy a Lipsicz algebrája óta eltelt fél évszázad alatt a magyar matematikai műveltség – természetesen csak csúcsaiban – ezen a nagyon fontos területen, amelyik Newton ’Arithmetica universalis’-ával kezdődően az újkori matematika egyik legjelentősebb ágává vált, a 18. század végére felzárkózott Európához. Kerekgedei Makó Pál az első európai értelemben vett magyar matematikus. Ő már főfoglalkozásként űzi a matematikát, tankönyvei és kézikönyvei európai színvonalon állanak. A nagyszombati, majd a bécsi és budai egyetemeken tanított, s nagy szerepe volt a bécsi matematikai élet 18. század végi fellendítésében.

A bécsi egyetemen, akárcsak a mintáját követő nagyszombatin, a 18. század közepén siralmas helyzetben volt a matematika és a természettudományok oktatása. A jezsuita rend tanítói működését még mindig a már réges-régen elavult, 1599-es Ratio Studiorum szabta meg, amelyik mér eleve is ellenséges volt a matematikai oktatással szemben. Mária Terézia udvari orvosa és fő oktatásügyi tanácsosa, a Hollandiából Bécsbe hívott Gerard van Swieten (1700–1772) szívós munkával – 1745 és 1753 között – megreformálta a bécsi egyetemet. Amikor azonban az új tantervet a nagyszombati egyetemre is rá akarta kényszeríteni, a jezsuita rend makacs, évtizedekig tartó ellenállásába ütközött. S mikor a rend 1773-ban bekövetkezett feloszlatása után a nagyszombati egyetem is rákényszerül a felvilágosodás szellemének megfelelő, gyakorlati, természettudományos és matematikai tárgyak intenzívebb oktatására, az ezek tanítására kijelölt tanárok egyetlen használható munkát sem találnak az egyetem könyvtárában előadásaikhoz. Még Newton és Euler alapvető művei is hiányoztak. A felsőbb matézis tanára, Mitterpacher József pf. így ír 1775 végén tett jelentésében: „Matematikai taneszközöknek annyira híjával vagyok, hogy az egész múlt esztendőn keresztül körző és vonalzó nélkül kellett előadásaimat megtartanom.”[4]

A bécsi egyetem színvonala ekkor már jóval magasabb volt. Éppen Makó Pál tankönyvei és kézikönyvei mutatják ezt legszebben. Differenciál- és integrálszámítást tárgyaló kétkötetes kézikönyve, a ’Calculi differentialis et integralis institutio…’ (Bécs, 1768) minden tekintetben a kor színvonalán álló, világos, jól érthető és az alkalmazásokat részletességgel tárgyaló mű. S ha az infinitezimális számítás megalapozásában a legcsekélyebb kritika nélkül bánik a különböző rendű „végtelen kicsiny” mennyiségekkel, ez az eljárás mindenben megfelel a kor elsősorban alkalmazásokra beállított, a módszer alapelveivel nem sokat törődő irányzatának. Így jártak el a kor legnagyobb matematikusai is, Makó csak őket követi, mégpedig lépést tartva a kor legújabb irodalmával.

A jezsuita rend feloszlatása (1773) után Makó tevékeny részt vett a Habsburg-birodalom oktatásügyét a felvilágosodás szellemében szabályozó Ratio Educationis (1777) előkészítésében. És mikor a nagyszombati egyetem 1777-ben Budára költözik, Mária Terézia rábízta a bölcsészeti kar igazgatását.

Az egyetemnek Budára, majd II. József alatt Pestre való költözésével új fázis kezdődött a magyar matematikai élet történetében. Ettől kezdve három tanszék látja el rendszeresen a

[4] Idézi Fináczy Ernő: A magyarországi közoktatás története Mária Terézia korában. 2. köt. Bp., 1902. p. 125.

matematika oktatását. Azt gondolhatnánk, hogy a 18. század alatt átvett alapokon végre Magyarországon is megindulhat az önálló matematikai kutatás. Nem ez történt. Sőt lassan még az oktatás szintje is messze az alá süllyed, amit Makó és Martinovics könyvei a maguk korában fémjeleztek. A századforduló két híres matematikaprofesszorának, a felsőbb matézis tanszékét betöltő Pasquich Jánosnak (1753–1829) és Dugonics Andrásnak (1740–1818), az elemi matézis professzorának a munkásságát összehasonlítva, érthetjük talán meg legjobban, mi történt a 18. és 19. század fordulóján, ami miatt a magyar matematikai élet még közel egy évszázadig nem tudott rendszeressé és önállóvá válni.

Pasquich munkája szorosan kapcsolódik a nagyszombati jezsuita matematikusok nemzetközi és elméleti jellegű munkáihoz. Differenciál- és integrálszámítást tárgyaló műve,[5] a Makó Páléhoz fogható, s a legjobb nyugati művek alapján készült kompiláció. Pasquich könyvén már látszik, hogy az infinitezimális számítás időközben egyre inkább az alapok kritikája felé fordul. Bár még ő is ugyanolyan gondatlanul bánik a különböző „végtelen kicsiny mennyiségekkel", mint Makó és a legtöbb kortárs-matematikus Európa-szerte, mégis az egzakt görög kimeríthetetlenségi módszerhez visszanyúlva megkísérli biztosabb alapokra helyezni az infinitezimális számítást. De ennél a Nyugaton már a 17. század közepén felmerült ötletnél nem jut tovább. Könyvének német változata is megjelent,[6] ami gyakorlatibb jellegű, és kihagyja a „határelmélettel" való próbálkozást. Pasquich európai hírű matematikus és csillagász volt, akinek a működését pl. Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800), Göttingen maga korában híres matematika professzora is ismerte és nagyra becsülte.

Egészen más Dugonics András munkássága, ő piarista szerzetes volt, s könyve a jezsuiták elméleti-nemzetközi jellegű munkáival ellentétben a piarista rend prakticista-nemzeti szemléletű nevelési elveit tükrözi. Már a rend alapítója, kalazanci Szent József különös gondjaiba ajánlotta a rend tagjainak a matematika tanulmányozását. Newton és Wolf tanai hamar elterjednek közöttük, tankönyveikben gyakran hivatkoznak rájuk. Magyarországon a 18. század közepétől kezdve a jezsuiták iránti rokonszenv csökkenésével párhuzamosan nő a felvilágosodás elveit képviselő piaristák befolyása. 1766-ban már 22 intézetük van az országban. Még inkább fokozta népszerűségüket, hogy a 18. század folyamán, szemben a jezsuiták internacionalizmusával, a piarista rend teljesen nemzeti-magyar jelleget ölt.

Ez a szellem hatja át Dugonics könyveit is. 'A tudákosságnak első könyve, mellyben foglaltatik a bető-vetés (algebra)' (Pest, 1784) az első magyar nyelvű algebra tankönyv, 'A tudákosságnak második könyve, mellyben foglaltatik a föld-mérés (geometria)' (Pest, 1784) az első magyar nyelvű geometria tankönyv. 1789-ben másodszor is kiadták a 'Tudákosság'-ot, bővítve egy-egy könyvvel, melyek a trigonometriát, ill a kúpszeleteket tárgyalják.

A 'Tudákosság' semmiképpen sem tükrözi a matematika korabeli állását. Különösen az algebrai részben szembetűnő ez a lemaradás, pl. Makó vagy Martinovics algebrájával összehasonlítva. Dugonics nagyon sok feladatot hoz és old meg, de ezeket nem válogatja meg pl. Maróthi gyakorlati és pedagógiai érzékével. Talán tréfának tűnik, de az éppen akkor egyre inkább „jogász-nemzetté" váló korabeli Magyarországra nincs minden jellemző erő nélkül, ha idézzük egyik feladatát:

„Három ifjakat (x, y, z) fogtak meg tolvajok gyanánt: I-szer: Az elsőnek tolvajságát a második két-annyival öszve-adván, tett 90-aranyat. II-szor: Az elsőjétől el-vévén a harmadiknak három-annyiát, a maradék egyenlő 60 arannyal. III-szor: A másodikéhoz adván a harmadikét, tett 10-aranyat. A legnagyobb tolvajt fel-akaszták; Az utána valót meg-

[5] Elementa analyseos et geometriae sublimioris ex evidentissimis notionibus principiisque deducta. Leipzig, 1799.

[6] Unterricht in der Differential- und Integralrechnung nebst Anwendung auf die gebräuchlichsten krummen Linien. Leipzig, 1791.

botozták, egy közülök szárazon el-mehetett. Kerestetik kit felejtettek-fent a fán? kit botoztak meg? ki ment el szárazon?”[7]

Dugonics könyvének Makó Pál, Martinovics és Pasquich műveivel való összehasonlítása mutatja legszebben, milyen óriási űr tátongott a latin nyelven írt, nemzetközi olvasótáborhoz forduló művek és a magyarul, itthoniak számára szánt könyvek színvonala között. Az előbbiek, ha Budán vagy Pesten éltek is, voltaképpen Bécsben voltak otthon. Az ország egészen vékony, valóban művelt rétege teljesen az osztrák-német civilizáció normái szerint élt és tájékozódott. Az egész Monarchiában Bécs volt az egyetlen hely, ahol komoly szellemi élet volt. „Erőre kap – írja a 18–19. század fordulójáról Fináczy – a német–magyar gondolkozás, mely csekély megszakításokkal a 19. század harmadik évtizedéig uralkodott. E nemzedék neve magyar, hivatalos nyelve latin, köntöse és családi élete, házi nyelve, olvasmánya, észjárása német.”[8]

Ezzel az igen vékony értelmiségi és kereskedő réteggel szemben állottak a köznemesség tömegei. A 18. század vége, a 19. század eleje a magyar köznemesség számbeli és életszínvonalbeli emelkedésének a periódusa. II. József összeírásában kb. 330 ezer nemes szerepel, 1839-ben már 680 ezer. Nyugaton ebben a korban mindenütt gyarapodik a polgárság és átveszi a vezetést, nálunk a nemesség a növekvő osztály. A polgárságnak megfelelő iparos, kereskedő, mérnök, pénzember foglalkozások nem alakulnak ki. A városi ipar kifejlődését akadályozzák a vármegyei rendszabályok és a céhek továbbélése, városaink nagy mezővárosok maradnak. Amikor Magyarországon a városok összlakossága mindössze 400 ezer fő, akkor Bécsnek egymagában 333 ezer lakosa van. Magyarországon a vezetést mindenütt a középnemesség hangadó vármegyei vezetői vették át. Ennek a rétegnek a kiképzését a második, 1806-os Ratio Educationis szabályozta. Ebből kimaradtak a Mária Terézia-féle rendelet felvilágosodásra jellemző természettudományi-matematikai tárgyai, a hangsúly a latin nyelven és a nemzeti öntudat nevelésén volt. A rendi nacionalizmus a nemzeti dicsőség tévképzetébe ringatva magát egyre jobban elszigetelte Magyarországot Nyugat-Európa rohamléptekben haladó tudományos-technikai műveltségétől, s önelégült kultúrálatlanságában azt is lerombolja, amit a nyugati tájékozódású kompilátorok felépítenek.

Ebben az idegen, köznemesi légkörben a pesti egyetem voltaképpen semmi egyéb, mint a bécsi egyetem keletre helyezett fiókintézete. Gyorsan követi mindenben a bécsi egyetem változásait és szabályait. Átveszi a bécsi egyetem 1824-ben kiadott tervét is, amelyik az egyre jobban tért hódító reakció és neoklasszicizmus légkörében a lehető legnagyobb mértékben kikapcsolja az oktatásból a matematikai és természettudományos tárgyakat. A pesti egyetemen az oktatás szintje még elavultabb lesz, mint a nagyszombatin volt a jezsuiták korában. Petzval Ottó (1809–1883) tölti be a felső mennyiségtan tanszékét, Nyugat most bekövetkező nagy matematikai fellendüléséhez képest sokkal nagyobb elmaradást jelentett, mint Kerekgedei Makó Pál a maga korához képest. A Magyar Tudós Társaság (a Magyar Tudományos Akadémia elődje) matematikus tagjait elsősorban a magyar matematikai műnyelv megteremtése érdekli, Dugonics programjának a folytatásaként. 1834-ben valóban kiadtak egy ’Mathematikai Műszótár’-t, ami tartalmaz néhány azóta általánossá vált elnevezést. De a nyelvalkotás nem pótolhatta a művekét, s a helyzetre nagyon jellemzőek Kemény Zsigmond 1853-ban leírt sorai: „…a ki kenyértudományra szánja magát, és szorgalma által remél kényelmet, vagyonosságot, s független létezést, józan ésszel nem csünghet azon csal-álmon, miként vágyait, idegen irodalom segélye nélkül, csak meg is közelíthetné. Kétségtelen: hogy alig van a tudományoknak olyan ága, amely nálunk európai színvonalon állana, s minden haladásaiban, minden foglalásaiban s kifejlődésének minden ösvényein, a magyar irodalom által kísértetnék. Arról pedig szó sincs, hogy indítványozók, út-

[7] Dugonics András: A tudákosságnak első könyve, mellyben foglaltatik a bető-vetés (Algebra). Pest, 1784. pp. 171–172.
[8] Fináczy Ernő id. műve 1. köt. p. 343.

törők lennének valahol, és volna tudomány, mely új korszakát nekünk köszönhetné.”[9] Pedig akkor már harminc év óta volt olyan tudomány, amelyik új korszakát nekünk is köszönhette.

Erdélyben nem alakult ki még annyira zavartalan és többé-kevésbé folyamatos oktatási tradíció sem, mint Nagyszombaton vagy Debrecenben. Török dúlás, elkeseredett felekezeti harcok, Habsburg elnyomás szakította meg minduntalan az erdélyi iskolák működését, s ilyen körülmények között azok sokkal nagyobb mértékben szorultak fejedelmi-főúri támogatásra, mint a nagyszombati egyetem vagy a debreceni kollégium. Jól ismert Apáczai Csere János (1625–1659) tragédiája, akit presbiteriánus és kartéziánus elvei miatt űzött el a gyulafehérvári főiskoláról II. Rákóczi György. Csakhamar az egész főiskola menekülni kényszerül a tatárdúlás elől Nagyenyedre, ahol aztán már csak középiskolai szinten folytatja működését, romos épületébe pedig később a Sárospatakról elűzött Kollégiumot telepíti Apafi Mihály, s az iskola 1716-ig itt működik, amikor Steinville zsoldosai elűzik, s rövid bolyongás után Marosvásárhelyen köt ki.

Ezeknek az erdélyi kollégiumoknak a nevelési rendszeréről nem sok jót lehet mondani. A nagyenyedi elavult pedagógiájáról Bolyai Farkas feljegyzései kellő képet adnak, később marosvásárhelyi küzdelmei pedig leleplezik Erdély, másik „kulturális centrumát”. Az erdélyi főurak fiai nem is itt szerezték műveltségüket: egy-egy szegény diáktársuk kíséretében, aki félig szolga, félig barátként ment velük, bejárták Nyugat nagy egyetemeit. Így jutott el például Teleki Sámuel gróf kísérőjeként Zabolai Kováts József (1732–1795), a nagyenyedi kollégium későbbi tanára, urával Utrecht, Leyden, Párizs egyetemeire, ahol is a Bernoulliaktól, Clairaut-tól, Lalande-tól sajátítja el az új matematikai-fizikai tudomány alapjait. A későbbi koronaőr, Teleki József gróf pedig Daniel Bernoulli magántanítványa volt Bázelban, s párizsi tartózkodása alatt bejáratos volt Clairaut házába. Ennek a két Telekinek a fiait nevelte Sipos Pál (1759–1816), aki a Telekiek könyvtárában kedveli, s tanulja meg a matematikát. Ő az első magyar matematikus, aki önálló felfedezéssel gazdagította tudományát. Sipos egy transzcendens görbe segítségével 1796-ban igen jó közelítő módszert adott az ellipszis ívhosszának a meghatározására. Értekezését a Berlini Akadémia adta ki, német nyelven, de a dolgozat inkább a francia geométerek ötletes szerkesztéseinek a hatását mutatja, akiket Sipos a Telekieknél tanulmányozott.

*

Kemény Simon báró Simon fiának a nevelőjeként került ki a fiatal Bolyai Farkas (1775–1856) Göttingenbe, 1796 őszén. Itt ismerkedett meg a csillagászat professzorának, Karl Felix Seyffernek (1776–1822) a házában Gauss-szal, akivel életre szóló barátságot vél kötni.

Göttingenből hazatérve anyagi gondok és a megfelelő baráti-szakmai környezet teljes hiánya teszik egyre nehezebbé életét. A Gauss-szal váltott levelezés ritkul, évtizedekre, majd végleg megszakad. Az erdélyi magányban zárt professzor óhatatlanul kimarad a nyugati és az orosz egyetemeken egyre pezsgőbbé váló matematikai életből. A sokoldalúan, de felületesen művelt arisztokrata társaságban való forgása – s talán saját hajlama is – polihisztorságra kényszeríti, s matematikai géniuszát ragyogó, de soha teljesen ki nem dolgozott ötletek sorába szórta szét.

Filozófus-érdeklődése a matematika alapjainak nagy kérdései felé vonzotta. Mindenütt, még a középiskolai tankönyvnek szánt ’Az arithmetika elejé’-ben (Marosvásárhely, 1830) is ezekről a problémákról ír, úgyhogy a könyv tankönyv helyett önálló, a folytonos mennyiségek elméletét és az analízis egzakt megalapozását célzó művé válik.

Definícióját adja pl. a határértéknek, vagy ahogy ő nevezi, „véghatárnak”, ami 1830-ban kitűnő teljesítmény. Már a Bolyaiak megismertetése és elismertetése érdekében oly sokat tett

[9] Kemény Zsigmond: „Élet és irodalom” (1853) = Kemény Zsigmond: Történelmi és irodalmi tanulmányok. 2. köt. Bp., 1907. pp. 287–288.

Paul Stäckel megjegyezte, hogy Bolyai Farkas a határérték pontos megfogalmazásában szinte megelőzte korát.[10]

Arra is Stäckel hívta fel a figyelmet, s már Bedőházi is utalt rá máig sokat forgatott Bolyai-monográfiájában,[11] hogy az a mód, ahogyan a Tentamenben merev alakzatok speciális mozgatása alapján építi fel a geometriát, mindenben megfelel annak az eljárásnak, amit később Helmholtz és Überweg alkalmaznak az euklideszi geometria megalapozását tárgyaló munkáikban. Sőt első pillanatra azt lehetne hinni, hogy Bolyai Farkas Hilbert alapvető nagy gondolatát, a geometria valós számtartomány segítségével történő vizsgálatát is anticipálta. Ugyanis több helyen beszél a geometria és aritmetika rokonságáról, s a kölcsönös segítségről, amit egymásnak nyújthatnak.

Ez azonban csak látszat. Bolyai Farkas szigorúan elkülöníti egymástól a számok és a „mennyiségek" világát, s aritmetikán nem a számok, hanem bizonyos sajátos módon meghatározott „mennyiségek" tudományát érti. Bolyait még németországi tartózkodása alatt mélyen áthatotta Kant kritikai dogmatizmusa, amely az időben és az euklideszi térben szemléletünk változhatatlan formáit látta. Bolyai ennek megfelelően az aritmetikát a szemléletünkben egyenletesen folyó idő, a geometriát a minden bennelevőtől elvonatkoztatott űr tudományának tekinti. Ez a két folytonos mennyiség szerinte a két tudomány végső tárgya, s ez a felfogás lehetővé teszi, hogy „ha szükséges, az aritmetikában levezetett igazságokat alkalmazzuk" a geometriára is, „úgy hogy mind a két testvér fia, melyeknek gyökerei össze vannak nőve, egyik a másiknak segítségét nyújtva, a Tér és Idő örökkévaló házasságának fényes pályái között az ég rengeteg magasságában koronájával összeérjen".[12]

Bolyai Farkas sohasem jut el a 19. századi matematika egyik legnagyobb jelentőségű felfedezéséhez, az analízis aritmetizációjához. Hiába kerül a határérték fogalmának a megteremtésében olyan közel a folytonos mennyiségek aritmetizációjának a gondolatához, a diszkontinuus szám és az idő, illetve tér formájára leképezhető mennyiség között az ő szemében is, mint elődei s a valós szám fogalmának a megteremtéséig utódai szemében is, áthidalhatatlan űr tátong.

Részben éppen ezek a nem kellően tisztázott infinitezimális elképzelései teszik lehetővé, s egyben reménytelenné az euklideszi párhuzamossági axióma „bizonyítására" kigondolt, ún. „göttingai párhuzamosok elméletét", amit 1804 őszén küldött meg Gaussnak.

Ezt az utat, mintegy ifjúkori vázlata bizonyítja, Bolyai János is végigjárta. Kezdetben ő is megkísérelte bizonyítani a párhuzamossági axiómát vagy annak valamelyik egyenértékű megfelelőjét. Ez azonban nem vezetett volna el az új geometriákhoz.

„Oda az utat – írja Kürschák József egy könnyen érthető, remek kis tanulmányában – Bolyai János csak akkor találta meg, mikor figyelmét a síkról a térre fordította. Itt mindenekelőtt feltűnt, hogy az euklideszi posztulátum nélkül is szerkeszthetünk olyan felületet, mely rendkívül emlékeztet az euklideszi síkra, csakhogy rajta az egyenes szerepe más vonalaknak jut. Ez a felület az a határgömb, melybe a gömb akkor megy át, ha a sugara minden határon túl növekedik. Rajta az egyeneseket határkörök pótolják. E felület két pontján

---

[10] Stäckel Pál: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai. 1. köt. Bp., 1914. p. 34.
Érdemes figyelmesen átolvasni Bolyai határérték definícióját 'Az aritmetika elejé'-ből: „Ha p bizonyos feltétel alatt származtathatóknak közneve, és K=p+z, s egyik p sem = K, de z-vel egyféle akármely k-ra nézve, van ollyan p, melynek K-ra való pótléka kisebb k-nál vagy – k-nál: akkor K a p véghatárának és pK határra menni mondatik az említett feltétel alatt. Jele lehet p K." (29–30. o.). Mai szavakkal: Ha egy $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sorozatban van olyan p_n, hogy egy rögzített K értékre $K - p_n = k$ tetszőlegesen kicsiny k-ra, akkor K a p_n sorozat határértéke. Vagy ahogy Cauchy körülírta: „Ha egy változónak tulajdonított egymás utáni értékek úgy közelítenek meg vég nélkül egy rögzített értéket, hogy tetszőlegesen kicsiny értékkel különböznek tőle, akkor ezt a rögzített értéket a többi határértékének nevezzük."

[11] Bedőházi János: A két Bolyai. Élet és jellemrajz. Marosvásárhely, 1897. pp. 218–219.

[12] Stäckel Pál: Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai. Második rész. Szemelvények a két Bolyai műveiből. Bp., 1914. Szemelvények a Tentamenből (1832). p. 114.

keresztül egy és csak egy határkör húzható. Ezen a felületen, úgy mint Euklidesnél a síkon, vannak hasonló háromszögek, csakhogy nem egyenesekből, hanem határkörökből vannak alkotva. E felületen a közönséges síktrigonometria minden részletében érvényes, csakhogy egyenes vonalú háromszögek helyett határkörökből alkotott háromszögekre vonatkozik.

Egy másik fontos eredmény az volt, hogy a szférikus trigonometria független az euklideszi posztulátumtól.

A határgömb geometriája és ez a második eredmény többé nem volt bizonytalan tapogatózás a sötétségben. Ezekkel a kháosz már az euklideszi axióma nélkül is metrikus törvényeket követő kozmosszá alakult."[13]

Eddig a felismerésig már sok évvel azelőtt eljutott Gauss is. De Bolyai János nem állott meg itt. Teljes egészében, definitorikus-deduktív módon fel is építette az új, euklideszi párhuzamossági axiómától független geometriát. A párhuzamossági axiómán való spekuláció helyett konstruktív, mondhatnánk empirikus úton igazolta ettől az axiómától független geometriák létezésének a lehetőségét: definiált és felépített két másik geometriát, amelyek éppen olyan ellentmondásmentesek voltak, mint Euklidesé. Egyes bevezető tételek igazolása után ezt írja róluk:

„A 13. és 14.§ eredményeinek birtokában nevezzük a geometriának azt a rendszerét, mely Euklides XI. axiómája igaz voltának feltevésén épül fel, ∑-nak, az ellenkező feltevésre építtetett pedig S-rendszernek.

Mindazok a tételek, amelyeknél nem említjük kifejezetten, hogy vajon a ∑ vagy az S rendszerben érvényesek, abszolút igazak, vagyis állítjuk, hogy érvényesek, akár ∑, akár S teljesül a valóságban."[14]

Már Proklos felhívta rá a figyelmet az Elemek első könyvéhez írt kommentárjában, hogy a XI. axióma megfordítottját is fel lehetne használni posztulátumként. Bolyai azonban nem ezt tette. Legelőször is másként definiálja a párhuzamos egyeneseket, mint Euklides az Elemek 35. definíciójában.[15] Felismeri és kiküszöböli az euklideszi definíciónak a geometria ellentmondásmentes felépítése szempontjából felesleges vonását, azt ti., hogy a párhuzamos egyenesek a „végtelenségig" meghosszabbítva sem metszik egymást. A „végtelenségig" feleslegesen került be ide, csak a nem-metszés a fontos a párhuzamosság definiálásához. (…)

Ennek az új párhuzamosság-definíciónak a létjogosultságát az igazolja, hogy belőle kiindulva fel lehet építeni geometriai tételek ellentmondásmentes rendszerét, az S rendszert. Azon tételek összessége pedig, amelyek mindenféle párhuzamosság-definíciótól függetlenül állanak, mint pl. az 'Appendix' III. fejezetében tárgyalt gömbi trigonometria, adják a XI. axióma igaz vagy nem igaz voltának feltevésétől függetlenül, „abszolúte" igaz tételek geometriáját.

Láttuk már, milyen óriási volt a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geomeria jelentősége nemcsak a matematika, hanem az egész gondolkozás szempontjából. A matematika ezáltal kiszabadult a kanti filozófia szorítógyűrűjéből, s az a priori, szintetikus ítéletek önmagába zárt, steril tömegéből újra azzá a merész és minden új felé nyitott vállalkozássá vált, ami a 17. század nagy itáliai, francia, angol bölcselőinél volt.

Másutt a Bolyaiak körül virágzó matematikai iskolák alakulhattak volna, nálunk sem az egyetemen, sem a Magyar Tudós Társaságban nem volt a matematika haladására kedvező légkör. Az 1830-as évektől kezdve a felvilágosodás korának matematikai és természettudományos tárgyakat pártoló nevelési irányzatát egyre inkább felváltja az újhumanizmus, amely a klasszikus nyelvekre, a nemzeti irodalom és a történelem tanítására

---

[13] Kürschák József: Megemlékezés Bolyai Jánosról, új világa megteremtésének századik évfordulója alkalmából. = Stella csillagászati egyesület almanachja 1926-ra. Bp., 1925. pp. 101–115.

[14] Bolyai János: Appendix. (Kárteszi Ferenc bevezetésével, megjegyzéseivel és kiegészítéseivel.) Bp., 1952. p. 85.

[15] lásd p. 137.

helyezi a hangsúlyt. A magyar irodalom ezekben az években teljesen felzárkózik a nagy nemzetek irodalma mellé, a matematikai műveltség ugyanakkor kétségbeejtően elmarad. Ennek a lemaradásnak az okát a technikai-kereskedelmi fejlődés gyengeségében kell keresni, amit viszont a matematikai-természettudományos oktatás hiányos volta még súlyosbított.

Vállas Antal (1809–1869), az egyetem egyik matematikaprofesszora jellemezte legvilágosabban ezt a helyzetet egy központi műegyetem felállítása érdekében kiadott röpiratában: „Hányadiknak közöttünk, ki egy kis pénzzel bír, van egyszersmind a mechanikáról, a chemiáról is egy kis fogalma? hányadiknak a fonás és szövés mesterségéről, mellyek a műiparban olly nagy szerepet játszanak? hányadiknak az üveg-, bőr-, papiroskészítésről, a festésről (Färberei) stb.? S ily általános fogalmak és alapismeretek nélkül, vajjon ki merne gyár felállításához fogni? Ki merne drága mozdonyokkal élni, ha azoknak hatásáról fogalma sincs, s ha ezt, a hatást t.i., a megszerzési s egyéb költségekkel össze nem hasonlíthatja?”[16]

Példaként a Francia Forradalomban a Monge által létrehozott École Polytechnique-ot hozza fel, amelyik egyaránt serkentőleg hatott a francia ipar és a francia matematika fejlődésére.

Vállas álma csak a kiegyezés után válik valósággá. Az ekkor létesített műszaki egyetem lesz nemcsak a magyar mérnökképzés, hanem a magyar matematikai életnek is legfontosabb centruma. A műegyetemen meginduló matematikai fejlődésre két nagy matematikus egyénisége nyomja rá a bélyegét: Hunyady Jenőé (1838–1889) és Kőnig Gyuláé (1849–1913).

Hunyady matematikai munkásságának a súlya a determinánsok elméletének a területére esik. Ezeknek a lineáris egyenletrendszereknek a megoldására használt számolási formalizmusoknak a segítségével Hunyady sikeresen old meg vagy egyszerűsít sok nehéz geometriai problémát. Ugyanis mindenütt, ahol az analitikus geometria segítségével a probléma megfelelő egyenletrendszerekbe önthető, a megoldásukban jelentős segítséget nyújtanak a determinánsok. Így Hunyady egyik első művelője lett annak a modern geometriai iránynak, amelyik a geometriát az algebrával kapcsolja össze.

Kőnig Gyula műegyetemi tanári működését (1874–1905) nehéz lenne túlbecsülni. Ő a modern, európai színvonalú matematikai oktatás és kutatás megteremtője Magyarországon. Orvosnak készült, disszertációját idegélettani tárgykörökből nyújtja be Helmholtznál, Heidelbergben. Valódi szellemi bölcsője azonban a berlini egyetem volt, amit Weierstrass és L. Kronecker előadásai ebben az időben a világ egyik matematikai centrumává tettek. Kőnigre különösen Kronecker volt nagy hatással. Szorosan Kronecker munkásságához kapcsolódik élete egyik fő műve.[17] A hatalmas, 600 oldalas könyv az absztrakt algebra és az algebrai számelmélet legjobb korabeli összefoglalása, s ezen túlmenően sok helyen megelőz olyan fogalmakat és megformulázásokat, amelyek csak később, a halmazelméleti módszerek általánossá válásával vonultak be erre a területre.[18]

---

[16] Vállas Antal: Egy felállítandó magyar központi műegyetemről. Pest, 1841. p. 12.

[17] Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai. Bp., 1903.

[18] Az algebrai számelmélet lényegét érdemes röviden ismertetni, mert kapcsolódik az ebben a könyvben elég részletesen tárgyalt kérdésekhez (lásd: pp. 92–94.). Már Gauss felvetette 1823-ban – a komplex számok vizsgálatakor – azt a kérdést, hogy vajon ugyanúgy érvényes-e a törzstényezőkre való bontás egyértelműségének a tétele ezekre is, mint a természetes számokra? A század közepén mutatta ki Kummer, hogy ez csak akkor érvényes a komplex számokra, ha megfelelő számokat csatolunk a komplex számok összességéhez. Ezeket az így hozzácsatolt számokat Kummer „ideális számoknak” nevezte, mert nem tulajdonított nekik „tényleges” létezést. A komplex számoknak ezt a „valódi” és „ideális” törzsfaktorokra való felbonthatósági elméletét azután Kronecker és Dedekind messzemenően általánosították az ún. algebrai számokra. Egész számú együtthatókkal rendelkező $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x+a_n = 0$ algebrai egyenlet gyökeiből egész számú együtthatókkal származtatható számokat algebrai számoknak nevezzük. Ezek bizonyos számtartományt alkotnak, amit Dedekind „számtest”-nek nevezett. Ha az egyenlet utolsó tagjának az együtthatója $a_n = +1$, akkor $1/x$ is egész szám, ilyenkor x-et egységnek nevezik, s a számtestben foglalt ilyen egész számokat „Integritástartomány”-nak.

Másik fontos könyve rendszeres egyetemi előadásaiból nőtt ki, az analízis felépítését tárgyalja.[19] Az alapok egzakt megismertetésére helyezi benne a hangsúlyt, s ez a tradíció tanítványain, Kürschák Józsefen és Rados Gusztávon, s az ő tanítványaikon keresztül szinte hagyománnyá lett a műegyetemen, s biztosította a magyar mérnökképzés magas színvonalát.

Kőnig hatása azonban nem korlátozódott a mérnökképzésre, mert a bölcsészkaron, tanárjelölteknek is adott elő. Ezekben az előadásaiban a matematika legkülönbözőbb területeire kalandozott. A számelmélet, az algebra, s az akkoriban születő nagy diszciplínák: a halmazelmélet és Hilbert axiomatikája egyaránt szerepeltek felolvasásain. Az utóbbi kettő magát Kőniget is egyre inkább vonzotta. Az 1904-es heidelbergi matematikus kongresszuson ő maga tapasztalhatta, milyen útvesztőket rejt a halmazelmélet. Egy nagysikerű előadásban bizonyítani vélte, hogy Cantor híres sejtésével ellentétben nem a kontinuum a legkisebb megszámlálhatatlan halmaz. A bizonyítás két tételt használt fel, az egyik annak a véges számok körében triviális tételnek volt az általánosítása végtelen számosságok esetére, hogy ha két számhoz hozzáadunk egy-egy számot, s összeszorozzuk őket, az így körülírt, Kőnig által „Cantor-féle halmazoknak" nevezett halmazok mentesek a halmazelmélet zavaró paradoxonjaitól.

Kőnig munkásságával a matematika fejlődése Magyarországon is elérte végre a tartós, folyamatos haladás lehetőségét. Ebben a műegyetem mellett jelentős szerep jutott az 1872-ben alapított kolozsvári egyetemnek is. Itt a matematika professzorainak, Réthy Mórnak, Vályi Gyulának és az egy ideig szintén Kolozsváron dolgozó Schlesinger Lajosnak nagy szerepe volt Bolyai János munkásságának az elismertetése körül. Egyébként az új egyetem is követte az ország technikai-gazdasági fellendülését. Réthy egy, a legjobb hajócsavar és szélkerék technikai problémájának a megoldása során felmerült mozgásegyenlet vizsgálatát tűzte ki legtehetségesebb tanítványa, Vályi Gyula (1855–1913) disszertációs témájául. Ez volt az első, magyar egyetemen született matematikai doktori értekezés, ami jelentős önálló eredményeket hozott. Vályi később, mint a kolozsvári egyetem matematikaprofesszora, kitűnően felépített, szellemes előadásairól volt híres, amikben állandóan romló látása ellenére is tökéletesen lépést tartott kora szakirodalmával. Az első világháborút közvetlenül megelőző időkben kitűnő matematikusok működtek hosszabb-rövidebb ideig Kolozsvárott. Vályi mellett sokáig itt tanított Schlesiger Lajos (1864–1934), egy ideig Fejér Lipót, Riesz Frigyes és Haar Alfréd.

A kolozsvári matematikai élet virágzásának az első világháború vetett véget. 1920 után pedig országszerte megszűnt az a matematika fejlődése szempontjából kedvező légkör, ami 1914 előtt uralkodott az országban. A háborúban vesztette életét a felszínmérés elméletében úttörő jelentőségű Geőcze Zoárd (1873–1916) és az egyik legtöbbet ígérő matematikus, Zemplén Győző. Az ország vezetését átvevő szűklátókörű, nemesi-középosztálybeli hivatalnok arisztokrácia nevelési elveiben is a száz évvel azelőtti rendi-nemesi Magyarország neoklasszicista, matematika-természettudomány ellenes ideáihoz kapcsolódott.

Érthető, hogy ilyen körülmények között igen sok kitűnő matematikus – közöttük Riesz Marcell, Kármán Tódor, Szász Ottó, Szekeres György, Dienes Pál, Erdős Pál, Fekete Mihály, Neumann János, Pólya György, Szegő Gábor, Radó Tibor, Szilárd Leó – kényszerült külföldre, vagy nem jött haza külföldre tanulmányai után. Közülük sokat ma a világ legnagyobb matematikusai tartanak számon.

Az itthonmaradtakra igen gyakran a legkülönfélébb anyagi és szellemi nélkülözések vártak, majd amikor a Horthy-fasizmus logikus végkifejlődéseként a nyilas terrorba torkollik, üldöztetés és halál. Bauer Mihály (1874–1945) pl. már régen világhírű matematikus volt, s itthon még mindig csak a műegyetemre beosztott középiskolai tanárságig vitte. Kőnig Dénest,

---

Kőnig könyve inkább Kronecker szemléletéhez áll közel, de felhasználja – sokszor egyszerűsítve – Dedekind eredményeit is.

[19] Analízis. Bevezetés a mathematika rendszerébe. I. köt. Bp., 1887.

akinek külföldön kiadott tankönyve máig népszerű, 1944-ben öngyilkosságba kergette a rendszer. Fiatal, sokat ígérő matematikusok egész sorát pusztította el a fasizmus, közöttük olyan tehetségeket, mint Schweitzer Miklós, Grünwald Géza, Lázár Dezső, Csillag Pál.

Hogy ez alatt a nehéz negyedszázad alatt a matematika európai szinten történő művelése nem veszett ki az országból, az leginkább talán Kürschák József (1864–1933), Haar Alfréd (1885–1933), Riesz Frigyes (1880–1956) és Fejér Lipót (1880–1959) munkájának köszönhető.

Kürschák a kor egyik legkitűnőbb matematikai pedagógusa volt. Mint mestere, Kőnig Gyula, ő is az önálló matematikai gondolkozásba való bevezetést tartotta a matematikai oktatás lényegének. Az ő kezdeményezésükre szervezték meg 1894-ben az évenként megrendezendő matematikai versenyeket. A feladatokat és megoldásokat Kürschák részletes jegyzetekkel látta el, amik a sok ötletességet igénylő, de elemi természetű feladatokat bekapcsolták a matematika egészébe. Kürschák az addigi versenyeket 1929-ben 'Matematikai versenytételek' (Szeged, 1929) címen kiadta, s 1963-ban angolra fordítva, Szegő Gábor előszavával, újra kiadták egy, a matematikai oktatás legsikerültebb műveit magába foglaló sorozatban.[20] Ez a könyv a magyar matematika egyik legjobb tradícióját, a sokoldalú és változatos feladatok megoldása iránti készséget képviseli.

Ugyanez a szellem éltette a szintén 1894-ben megindított Középiskolai Matematikai Lapok gazdag feladatrovatát is, ami egyben a versenyek előkészítőjéül szolgált. Verseny és lapok így egy nagy pedagógiai egységet alkottak, ami biztosította a nehéz idők alatt is a fiatal matematikusok kiválogatását, s az önálló, alkotó matematikai munkára való nevelését. A két világháború között felnőtt matematikusgárdánk legkiválóbbjainak a nevei mind gyakran szerepelnek a feladatok díjnyertes megoldói között.

Amilyen fontos volt a szerepe versenynek és lapoknak a matematikai nevelés szempontjából, ugyanolyan nagy jelentősége volt az első európai nívójú, idegen nyelven kiadott magyar matematikai folyóiratnak, a szegedi 'Acta Scientarum Mathematicarum'-nak, a magyar matematikai eredmények világgal való megismertetése tekintetében. A szegedi Actát, amelynek első kötete 1922–23-ban jelent meg, Haar Alfréd és Riesz Frigyes hozták létre. Az Acta tudományos profilját sokáig az ő érdeklődésük és tudományos aktivitásuk szabta meg.

Riesz Frigyes mesterei a valós függvénytan új szakaszát elindító francia iskola nagyjai: Baire, Borel, Lebesgue voltak. Az ő munkájukhoz csatlakozik sokoldalú életművének talán legfontosabb része. Egy általa, s tőle függetlenül Ernst Fischer által 1907-ben felfedezett fontos tétel segítségével felismerte, hogy bizonyos függvények megfelelő metrikával ellátott összessége és bizonyos végtelen sok koordinátával rendelkező vektorok megfelelő metrikával ellátott összessége között összeadást és skaláris szorzást tartó megfelelkezést lehet létesíteni. Így ezeknek a függvényeknek az összessége geometriai sajátságokkal látható el, úgy tekinthető, mint valamilyen különleges tér, egy ún. „függvénytér". Ennek az összefüggésnek a mintájára különféle, még bonyolultabb függvénytereket vezetett be, s mindezekben a függvényterekben megadta az ún. lineáris műveletek (az összegezésnek és szorzásnak megfelelő tulajdonsággal rendelkező műveletek) legáltalánosabb alakját. Ebben az irányban haladt tovább a lengyel matematikai iskola a két világháború között a lineáris operációk általános elméletének, s az ennek megfelelő ún. Banach-féle terek elméletének a megalkotása felé. A függvényterek elmélete, az ún. funkcionálanalízis ma már óriási, egy ember által áttekinthetetlen szakmává nőtt, s ennek a megteremtésében döntő szerepe volt Riesz Frigyesnek.

A két világháború közötti korszakban a magyar matematikai kutatás másik nagy centruma a budapesti tudományegyetemen alakul ki, Fejér Lipót körül. Fejér a berlini matematikai

[20] Hungarian Problem Book based on the Eötvös Competition. I. 1894–1905 – II. 1906–1928. New York, 1963.

iskola neveltje volt, főleg H. A. Schwartz gyakorolt rá erős hatást. Schwartz Weierstrass tanítványa és tanszéki utóda volt, az analízis Weierstrass által megalapozott, szogorú, kritikai irányát folytatta tovább. H. A. Schwartz szemináriumában találkozott Fejér azzal a problémával, amely azután egész életére megszabta kutatásának irányát.

Már a 19. század 30-as éveiben bevezetett Dirichlet egy, bizonyos függvények szélső értékeinek a meghatározására szolgáló elvet. Ezt az elvet ő maga és nyomában B. Riemann számos matematikai és matematikai-fizikai feladat megoldásában igen nagy sikerrel alkalmazták. Azonban Weierstrass mindent átható kritikája feltárta, hogy az oly jól használható Dirichlet-elv téves alapokon nyugszik, s így az alkalmazásával nyert eredmények is mind kérdésessé váltak. C. Neumann azután a körre vonatkozó Dirichlet-probléma esetében kimutatta, hogy az elv bizonyos általános feltételek szerint sinus és cosinus függvények hatványainak a végtelen sorába, ún. Fourier-sorba fejthető folytonos függvények esetére szigorúan áll, ehhez csak az szükséges, hogy az illető folytonos függvény Fourier-sora mindenütt összetartó legyen. H. A. Schwartz azonban konstruált olyan mindenütt folytonos függvényt, aminek Fourier-sora bizonyos helyen széttartó, divergens.

Mármost Fejér arra a gondolatra jött rá, hogyha a Fourier-sor összegzésekor egy-egy rögzített tagig vett részletösszeg helyett ezen részletösszegek számtani közepeinek a sorozatára térünk át, akkor ez az egy-egy rögzített tagig vett részletösszegek számtani közepeiből alkotott sorozat ott is összetartó lesz, ahol maga a részletösszegekből alkotott sorozat, tehát a folytonos függvényt előállító Fourier-sor széttató.

Fejér ezen egyszerűnek tűnő, s mégis annyira fontos eredménye 1900-ban jelent meg a Francia Tudományos Akadémia Értesítőjében, s erről szól 1902-es, híres doktori disszertációja is. S ehhez csatlakozik csaknem egész további életműve. A továbbiakban kimutatta, hogy a Fourier-sorok részletösszegeinek számtani közepelésével könnyen lehet, sok szempontból jó tulajdonságú függvényeket konstruálni, s ezzel egyik úttörője lett egy, napjainkban rohamosan fejlődő, fontos matematikai diszciplínának, az ún. konstruktív függvénytannak.

Fejér jelentőségét, éppen úgy, mint Vályi Gyuláét, nem lehet egyedül megjelent dolgozatai alapján lemérni. Fejér is nagyon nagy hatású professzor volt, lelkes előadó, körülötte nőtt ki, s ágazott szerte a matematika különböző területei felé az első összefüggő, folytonos magyar matematikai iskola. Ugyanazt a szerepet tölti be ebben a tekintetben a magyar matematikában, mint Korányi Sándor a magyar orvostudományban.

Fejérnek és Riesznek igen nagy szerepe volt a fasizmus által csaknek teljesen összezúzott magyar matematikai élet feltámasztásában. A negyvenes évek végén valósággal élő szimbolumai voltak a magyar matematikának. Már keveset adtak elő, rövid, féléves kollégiumokat. Fejér a Fourier-sorokról, Riesz az integrálegyenletekről. Fejér elmaradhatatlan körgallérjával, hanyagul öltözve, Riesz elegánsan, csokornyakkendőben. Fejér csapongva vázolt nagy, szellemes s sokszor triviálisan egyszerűnek ható gondolatokat, amiknek a nehézsége csak akkor derült ki, ha az ember otthon, a jegyzetéből próbálta kibogozni a hallottak értelmét, Riesz mértéktartóan, a nehezebb helyeken könyvére hivatkozva rótta táblára kristálytiszta levezetéseit.

1946-ban – elsőként a magyar tudományos folyóiratok közül – újraindul az 1944-ben leállított szegedi ’Acta’. 1947-ben a fasiszták által beszüntetett ’Középiskolai Matematikai Lapok’ kezdi meg újra működését, 1949-ben a nagymúltú ’Matematikai és Fizikai Lapok’ utódaként a ’Matematikai Lapok’, majd az Akadémia idegen nyelvű ’Actá’-i. 1950-ben egy fiatal szegedi tudós, Szele Tibor (1918–1955) szerkesztésében Debrecenben is új matematikai lap születik a szegedi ’Acta’ mintájára, a ’Publicationes Mathematicae’. A lap – szerkesztője érdeklődési és munkakörének megfelelően – elsősorban a modern algebra tárgykörébe tartozó dolgozatokat közölt, s csakhamar olyan nemzetközi hírnévre tett szert, hogy a szakma legkiválóbb szovjet és nyugati képviselői keresték fel közleményeikkel, s figyelték egyre nagyobb érdeklődéssel a „debreceni algebrai iskola” – ahogy a nagy szovjet matematikus, A. G. Kuros nevezte a Szele körül összegyűlt fiatalok kis csoportját – működését.