

Elektrodinamika

Jakovác Antal, Takács Gábor, Orosz László

2013.

Tartalomjegyzék

1. Rövid történeti áttekintés	3
1.1. Elektrosztatika	3
1.2. Áram és mágnesség	5
1.3. Elektromágnesség	6
2. Töltéseloszlások	7
2.1. Töltésrendszer energiája	12
2.2. Kitérő: erővonalkép	14
2.3. Speciális töltéseloszlások tere	15
2.3.1. Dipólus tere	15
2.3.2. Egyenletesen töltött végtelen síklap tere	15
2.3.3. Egyenletesen töltött vonaltöltés tere	16
3. Poisson-egyenlet határfeltételekkel	18
3.1. Kapacitás	21
3.2. Tükörtöltések módszere	22
3.2.1. Síklap Green-függvénye	22
3.2.2. Gömb Green-függvénye	23
3.3. Laplace-egyenlet	24
3.3.1. Laplace-egyenlet megoldása téglatesten felvett határfeltételekkel	25
3.4. Koordinátarendszerek, ortogonális függvények	26
3.4.1. Teljesség	27
3.4.2. A Laplace-operátor önadjungáltsága	28
3.4.3. Görbevonalú koordináták	28
3.5. Gömbi koordinátarendszer	34
3.5.1. A radiális egyenlet	35
3.5.2. A térszögfüggő rész	36
3.5.3. Gömbfüggvények	39
3.5.4. A Laplace-egyenlet megoldásai	41
3.6. Hengerkoordináták	44
3.7. Multipólus kifejtés	48

4. Elektrosztatika anyag jelenlétében	51
4.1. Határfeltételek	53
4.2. Tükörtlátések módszere	55
4.3. Teljes függvényrendszerek	56
4.4. Elektrosztatikus energia anyag jelenlétében	58
4.4.1. Állandó dielektrikum	58
4.4.2. Töltéeloszlás külső térben	59
4.4.3. Állandó töltések, változó dielektrikum	60
4.4.4. Állandó potenciál, változó dielektrikum	60
5. Magnetosztatika	62
5.1. Áram	62
5.2. Mágneses alapjelenségek	63
5.2.1. Lokális törvények	63
5.2.2. Mértékinvariancia	65
5.3. Árameloszlások	65
5.4. Külső térbe helyezett árameloszlás	69
5.5. Mágnesség anyag jelenlétében	70
5.5.1. Határfeltételek	74
5.6. Magnetosztatikai feladatok megoldási módszerei	74
6. Maxwell-egyenletek	78
6.1. Vektor- és skalárpotenciál	79
6.2. Maxwell-egyenletek anyag jelenlétében	81
7. Elektromágneses tér energiája	83
7.1. Az energia mérlegegyenlete	83
7.2. Az impulzus mérlegegyenlete	85
8. Kvázistacionárius eset	86
8.1. Indukciós együttható	87
8.2. Mágneses tér kvázistacionárius dinamikája vezetőkből, skin-effektus	87
9. Teljes időfüggés: források nélküli megoldás	90
9.1. Csoport- és fázissebesség	91
9.2. Elektrodinamikai hullámok	93
9.3. Frekvenciafüggő permittivitás, törésmutató	95
9.3.1. Kramers-Kronig reláció	98
9.3.2. A vezetőképesség és a permittivitás kapcsolata	99
9.4. Elektromágneses hullámok közegek határára	100
9.5. Hullámterjedés határfeltételekkel	102

9.5.1. Hullámvezető	103
9.5.2. Üregrezonátor	106
10. Teljes időfüggés: az inhomogén rész megoldása	107
10.1. Green-függvények	107
10.1.1. A Green-függvények fizikai értelmezése	109
10.2. Lokalizált, oszcilláló töltésrendszerek tere	110
10.2.1. Dipólsugárzás	111
10.2.2. Multipol sugárzások	113
11. Általános mozgást végző tömegpont sugárzása	116
11.1. Liénard-Wiechert potenciálok	116
11.2. A sugárzás dipól közelítése	118
11.3. Egyenesvonalú egyenletes mozgást végző test sugárzása	120
11.4. Sugárzás szögeloszlása	122
11.5. Sugárzás spektruma	125
11.5.1. Szinkrotronsugárzás spektruma	126
12. Elektromágneses hullámok szórása	128
12.1. Szórás az anyag egyenlőtlenégein	129
12.2. Szórás gázon és szabályos kristályon	133
13. Cherenkov-sugárzás és átmeneti sugárzás	137
13.1. Cherenkov-sugárzás	137
13.2. Átmeneti sugárzás	141
14. Relativisztikus elektrodinamika	144
14.1. Relativisztikus koordináták	144
14.2. Lorentz-transzformáció	147
14.3. Tömegpont relativisztikus dinamikája	150
14.4. Alkalmazások	152
14.5. Sugárzások relativisztikus tárgyalása	155
15. Matematikai alapfogalmak	159
15.1. Mezők deriváltja	160
15.2. Mezők integrálja	160
15.3. Lineáris algebra	162
15.4. Legendre-polinomok	163
15.4.1. Megoldás hatványsor alakban	163
15.4.2. Ortogonalitás	164
15.4.3. Rodrigues formula	165
15.4.4. Generátorfüggvény	166

15.4.5. Normálás	167
15.4.6. Függvények kifejtése	167
15.5. Asszociált Legendre-függvények	168
15.5.1. Szinguláris pontok	168
15.5.2. Ansatz és rekurzió	169
15.5.3. Megoldás előállítása a Legendre-polinomokkal	169
15.5.4. Kiterjesztés negatív indexre	170
15.5.5. Az asszociált Legendre-függvények alapvető tulajdonságai	171
15.6. Gömbfüggvények	172
15.7. Bessel-függvények	174
15.7.1. Hatványsor megoldás	174
15.7.2. Módosított Bessel-egyenlet	177
15.7.3. A Bessel-függvények aszimptotikus viselkedése	180
15.7.4. Integrálformulák módosított Bessel-függvényekkel	181
15.7.5. A Bessel-függvények gyökei	182
15.7.6. Egy fontos integrál	182
15.7.7. A Bessel-függvények ortogonalitása	183
15.7.8. Bessel-Fourier sor és teljesség	184
15.7.9. Hankel transzformáció	185
16.A Liénard-Wiechert potenciálokból származó térerősségek	186

Előszó

Ez a könyv a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizikus képzésének másodéves elektrodinamika előadásainak jegyzetanyagára támaszkodik. Ugyanakkor a szerzők megpróbálták minél inkább önálló, lényeges előismeretek nélkül is követhető legyen a szöveg.

Az elektrodinamika nehézségét az adja, hogy *térelmélet*, azaz a tér minden pontjában megadott mezőkkel foglalkozik. Ebből a szempontból rokon a folytonos közegek mechanikai modelljeivel, mint például a hidrodinamika vagy a rugalmas testek leírása. Az elektrodinamikában azonban nincsen mikroszkopikus mechanikai modell a háttérben, itt a mezők valóban az alapvető fizikai változók. A térelméletek kezelése elsősorban azért nehéz, mert a pontmechanikához képest új matematikai fogalmak lépnek fel, és a végeredményül kapott egyenletek nem közönséges, hanem parciális differenciálegyenletek. Mindezek miatt a hagyományos elektrodinamika oktatás jelentős része az ilyen típusú matematikai problémák megoldásával foglalkozik.

A könyv felépítésében a szükséges matematikai előismereteket, valamint a téma tárgyalásakor fellépő matematikai háttéranyagot külön fejezetben foglaltuk össze. Ez lehetőséget biztosít arra, hogy aki ezekkel a fogalmakkal már tisztában van, ezeket a fejezeteket könnyen átugorhassa.

Az elektrodinamika elmélete lényegében lezárt diszciplína, a Maxwell-egyenletekre épül, amelyet már az 1800-as évek vége felé is a ma használt formában írtak fel. Ennek ellenére a fizikai értelmezésben sokszor találkozhatunk homályos megfogalmazással, elsősorban az anyagban érvényes elektrodinamikai egyenletek tekintetében, például a mágneses indukció és mágneses tér értelmezésében. Ugyanakkor már számos kitűnő könyv jelent meg az eltelt hosszú idő során, amelyek az irodalomjegyzékben szerepelnek. J.D. Jackson kitűnő könyve [1], amely a magyar fordításban már az SI rendszert használja az egyik ilyen forrás, melyet gyakran fogunk használni. Landau és Lifsic nagy sikerű elméleti fizika sorozatában az elektrodinamika két kötetben szerepel [2, 3]. Érdeemes forgatni R. Feynman ragyogó fizikai látásmóddal megírt Mai fizika sorozatát, az elektrodinamika az 5. kötetben szerepel [4].

A könyv megírásában köszönettel tartozunk Prof. Patkós Andrásnak, akitől a szerzők egy része annak idején az elektrodinamikát először hallgatta, s akitől származó jegyzetek szintén az anyag részét képezik.

1. fejezet

Rövid történeti áttekintés

Ebben a fejezetben az elektrodinamika kialakulásának fő fejezeteit tekintjük át, elsősorban Simonyi Károly könyvére támaszkodva [5]. A további részletekhez az olvasót ezen könyv olvasására buzdítjuk.

Bár sok tudományos diszciplína kezdődik úgy, hogy „már az ókori görögök is...”, az elektrodinamikára ez nem igazán igaz. Az ókorban ismertek bizonyos elektromos és mágneses alapjelenségeket, azonban ezek elszigetelt ismeretek maradtak. Ami ebből fennmaradt, az elsősorban a mai nevekben ölt testet. Az elektron a borostyán görög megfelelőjéből származik, és arra utal, hogy a borostyán dörzsöléses elektromosságát a görögök is ismerték. A mágnességről a természetben fellelhető „magnetic litosz”, azaz mágneskő révén volt tudomásuk.

1.1. Elektrosztatika

Az elektrodinamika igazi kvalitatív megismerése csak a középkorban kezdődött el. Egyik első képviselője volt *P. Peregrinus*, aki 1269-ben kísérleteket végzett a mágnesek tulajdonságainak felderítésére, például ő volt az, aki a mágnes erővonalait feltérképezte. Tevékenykedése ugyanakkor nem volt nagy hatása kortársaira, és az elektromágneses jelenségek kutatása lényegében három évszázadig újból szünetelt.

A következő lépést *W. Gilbert* tette, aki 1600 táján a Föld mágnessége iránt tanúsított érdeklődést, és iránytűt szerkesztett. Ő mutatta meg a természetes mágnesek tanulmányozásával, hogy nincs mágneses monopólus, a pozitív és negatív pólusok nem választhatók szét, egy félbevágott mágnesben ugyanúgy megjelennek. Megmutatta azt is, hogy a dörzsöléses elektromosság nem csupán a borostyánban alakul ki, hanem például üvegben és viaszban is.

A tudomány történetében számtalanszor fordult elő, hogy egy ügyesen megalkotott találmány nagy lendületet ad a fejlődésnek. Az elektrodinamikában az *O. Guericke* által 1672-ben szerkesztett dörzselektromos gép ilyen úttörő jelentőségű volt. Ezzel a

szerkezettel könnyen lehetett a dörzsöléses elektromossággal feltölthető anyagokat elektromos töltéssel ellátni. Emiatt a XVIII. század első felében az elektromos jelenségek bekerültek az úri szalonokba, kedvelt társasági szórakozás lesz a különböző jelenségek bemutatása. S bár az elektromos kisülések, a töltések vonzása és taszítása látványosságnak sem utolsó, a tudományos megismerés is haladt előre. *S. Grey* 1729 körül felismerte, hogy bizonyos anyagokkal a töltés nagy távolságokra szállítható, más anyagok szigetelőként működnek. Például a szobában feltöltött borostyán töltését a kertben is lehetett ilyen módon hasznosítani. *C. Dufay* 1733-ban felismerte, hogy az üveg és a gyanta „elektromossága” különböző.

A továbblépést ismét egy eszköz, a *von Kleist* és *Musschenbroek* által közel egy időben megalkotott, de az utóbbi működési helyéről leideni palacknak elnevezett eszköz jelentette. A 1.1 ábrán látható szerkezet a töltések összegyűjtésére volt alkalmas, a mai kondenzátor őse. A dörzselektromos szerkezet által szolgáltatott töltést a palack



1.1. ábra. Leideni palack, forrás [6].

belsejében levő elektrolitba vezetik, a töltés semlegesítéséről a palack külsején levő fémborításnak a palackot fogó emberen keresztüli földelése gondoskodott. A szerkezet a XX. században mint van der Graaf generátor született újjá, a modern változat valóban nagy, akár 25 millió voltos feszültségre is feltölthető. Ugyan a XVIII. századi változat nem volt ennyire hatékony, de a források tanúsága szerint [5] akár 180 gárdista „megugrasztására” is alkalmas volt.

A fizika egyik első amerikai képviselője volt *B. Franklin*. Legismertebb munkái a légköri elektromossággal kapcsolatosak, például felismerte 1750 körül, hogy légköri elektromossággal feltölthető a leideni palack. Az ő nevéhez fűződik a csúcshatás felismerése és a villámhárító feltalálása. Bevezette az elektromos töltés fogalmát: a két egyenértékű lehetőség közül ő úgy gondolta, hogy az üvegben halmozódik fel töltéstöbblet (nem a borostyánban), ezt később Euler nevezte el pozitív töltésnek. Franklin felismerte a töltésmegmaradás törvényét is.

Az 1700-as évek végére elegendő fizikai és matematikai ismeret halmozódott fel ahhoz, hogy a kvantitatív törvényeket is fel lehetett állítani. Az elektromos ponttöltés által kifejtett erőhatás $1/r^2$ -es távolságfüggését több tudós nagyjában egy időben is felismerte. *J. Priestley* 1767-ben abból a tényből, hogy a töltések a tapasztalat szerint a felületen gyűlnek össze, és üreg belsejében nincs erőhatás elméleti úton vezette le ezt a törvényt.

Tőle függetlenül *Cavendish* ugyanezzel a gondolatmenettel találta ki az erőtvénnyt, sőt ki is mérte torziós mérleggel. Munkáit azonban nem publikálta, tevékenységéről *Kelvin* révén van tudomásunk, aki 1879-ben publikálta Cavendish elfelejtett munkáit. Ezen felül Cavendish foglalkozott különböző tárgyak kapacitásának mérésével, vizsgált dielektrikumokat, tanulmányozta a vezetőképességet. *C. Coulomb*, akinek a nevéhez kötjük az erőtvénnyt, hadmérnök volt, igen pontos torziós ingákat készített. Ő mérte ki 1784-ben az $1/r^2$ -es Coulomb törvényt. Az erőtvénnyel ismeretében *Poisson* 1811-ben képes volt arra, hogy egy tetszőleges töltéseloszlás által létrehozott erőter matematikai egyenleteit megalkossa.

1.2. Áram és mágnesség

Míg a fenti vizsgálatok a sztatikus elektromosság tulajdonságainak felderítésére irányultak, az árammal és a mágnességgel kapcsolatos jelenségekhez hiányzott egy olyan eszköz, amely állandó feszültségforrásként üzemelt. Ez irányban az első lépés *L. Galvani* nevéhez fűződik [7], aki maga az anatómia és a biológia professzora volt Bolognában. Észrevette békák preparálása közben, hogy ha vasrácsra rézkampón rögzítette a békapreparátumokat, akkor azok a vasrácsra hozzáérve összerándulnak. Ezt ő az állati elektromosság jelének hitte, és megfigyeléseit 1791-ben ilyen módon tette közzé. Később *A. Volta* mutatott rá, hogy itt valójában nem a béka, hanem az eltérő fémek okozzák az effektust. Erre alapozva egymástól nedves kartonlapokkal elkülönített cink és rézlapokból állandó feszültségforrást épített 1800-ban (Volta-oszlop), amelyet Galvani iránti tiszteletből galvánelemnek nevezett el.

Hiába volt azonban meg az áramforrás, az a gondolat, hogy az áram mágneses teret kelt maga körül, annyira különös volt, hogy nagyjából 20 évet kellett várni, míg *C. Oersted* véletlenül észrevette ezt. Ezt követően azonban igen gyorsan megszületett a kvantitatív magnetosztatika: *J.-B. Biot* és *F. Savart* már 1820-ban kimérték az áramjárta vezető körül kialakuló mágneses teret a mágnesű elfordulásával, és leírására egyenletrendszert dolgoztak ki az elektrosztatika mintájára. *A.M. Ampère* felírta a mágneses térre vonatkozó integrális törvényét, és megmutatta, hogy áramkör mágneses hatása egy lapos mágnessel egyenértékű.

Érdekes, hogy míg az áram hőhatása már igen korán nyilvánvaló volt, az ellenállás fogalma milyen lassan alakult ki. Csupán 1826-ban írta fel *G.S. Ohm* a róla elnevezett törvényt. Az áramkörök viselkedésének tisztázására pedig csak 1845-ben *G. Kirchhoff* munkássága alapján derült fény.

1.3. Elektromágnesség

A fentiek alapján láthattuk, hogy az 1820-as évek közepétől ismertek voltak az elektrosztatika és magnetosztatika törvényei. A két látszólag önálló diszciplína összekapcsolása *M. Faraday* nevéhez fűződik, aki 1831-ben észrevette azt, hogy áramkörök ki- illetve bekapcsolásakor egy másik vezető hurokban feszültség keletkezik. Korábban közhiedelem volt az, hogy, szemben az elektrosztatikával, ahol töltött test töltésmegosztást képes létrehozni egy másik testben, az áram nem képes áramot indítani egy másik vezető hurokban. Faraday azt vette észre, hogy az áram megváltozása képes erre. Faradaynek mellesleg számos elektromossággal kapcsolatos felfedezést és konstrukciót tulajdoníthatunk (elektromotor, az elektrolízis, a dielektrikumok vizsgálata, a fény polarizációjának mágneses térben való elfordulását megfogalmazó Faraday-effektus). Mégis, az elektromosság és mágnesség leírására vonatkozó egyik legfontosabb ötlete az volt, hogy ezeket ez effektusokat egy mező bevezetésével lehet legjobban megközelíteni.

Ezt az ötletet fejlesztette tovább *J.C. Maxwell*, aki hosszas munkával 1855-1873 közötti időszakban megfogalmazta az elektromágnesség matematikai leírását, a Maxwell-egyenleteket. A kezdeti mechanisztikus modellektől egészen a kizárólag az absztrakt elektromos és mágneses tereket tartalmazó leírásig ívelő gondolatsor nagy tudományos vívmány volt, érvényessége a mai napig változatlanul fennáll. Maxwell nevéhez fűződik a vektorpotenciál bevezetése is.

Lényegében a Maxwell-egyenletek felírásával befejeződött az elektrodinamika törvényeinek felderítése. Az egyenletek mai formájának megalkotásában *H. Hertz* szerzett érdemeket, aki másrészt 1886-ban kísérletileg is kimutatta az elektromágneses hullámokat, ezzel igazolva a Maxwell-egyenletek jóslatait. Ő mutatta azt is meg, hogy a fény elektromágneses hullám. *H.A. Lorentz* 1875-ben pedig felírta a Maxwell-egyenletek anyag jelenlétében érvényes formáját. 1891-ben állt elő az elektronelméletével, megfogalmazta a Lorentz-erőt. Az ő nevéhez fűződik a Lorentz-transzformációk felírása, amely a speciális relativitáselméletben döntő szerepet kapott.

Bár az elektrodinamikai alapkutatások a XIX. század végére lezárultak, a különböző alkalmazások a mai napig életünket alapvetően meghatározzák. Az elmélet fejlődésére később, a kvantummechanika felfedezésével került sor, amikor is a kvantum elektrodinamika megfogalmazódott *P. Dirac*, *W. Pauli* és nem utolsósorban *Wigner Jenő* munkássága alapján.

2. fejezet

Töltéseloszlások

Az elektromosan aktív anyag a töltésén keresztül képes más töltött anyagra erőhatást gyakorolni. A töltés mértékegysége SI-ben a Coulomb. Ezt nem az elektrosztatikában definiálják, hanem az áram mértékegységéből, az Amperből, mint $1\text{C} = 1\text{As}$ 1 Amper áram által 1 másodperc alatt szállított töltés. Ehhez persze kell az áram definíciója, ez az áram mágneses hatásából adható meg, l. később.

A tapasztalatok szerint egy makroszkopikus test által kifejtett erőhatás leírható úgy, mint az anyag egyes darabkái által kifejtett erőhatás összege (szuperpozíció elve). Emiatt elegendő, ha végtelenül kicsiny anyagdarab által kifejtett erőhatást írjuk fel. Az anyag végtelen finomításával jön létre a ponttöltés fogalma, amely egyetlen fizikai pontra koncentrálódó töltés. Ez egyrészt absztrakció, azonban a valódi anyag töltése ténylegesen az atom alkotórészein (proton és elektron), azaz igen kis helyen koncentrálódó töltések összessége, melyek nagysága az elemi töltés ($1.602 \cdot 10^{-19}\text{ C}$) egész számszorosa.

Ha a töltés mértékegységét már rögzítettük, megmérhetjük, hogy mekkora erővel hat egymásra két ponttöltés. Coulomb mérései alapján az \mathbf{x}_1 helyen levő q_1 ponttöltés által az \mathbf{x}_2 helyen levő q_2 ponttöltésre ható erő (a matematikai jelölések a szokásosak, l. **15** fejezet)

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3}, \quad (2.1)$$

A képletben q_1 és q_2 Coulombban mérendő, a k faktor értéke $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$, ahol $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\text{ Vm/C}$, a vákuum permittivitása¹. Mivel ϵ_0 igen kicsi, ezért ez az erőhatás rendkívül nagy, két 1 C-os ponttöltés egymásra kb. $9 \cdot 10^9\text{ N}$ erővel hat: ez több, mint 100000 elefántbika együttes súlya.

Faraday és Maxwell új fogalmat vezettek be a fizikába: a mező vagy tér fogalmát. Eszerint a ponttöltés nem közvetlenül a másik töltésre hat, hanem valójában létrehoz a tér minden pontjában egy elektromos mezőt, és ezt a mezőt érzékeli a másik test:

$$\text{forrás} \longrightarrow \text{mező} \longrightarrow \text{erőhatás} \quad (2.2)$$

¹Megjegyzés: CGS rendszerben $k_{CGS} = 1$.

Ezen kép segítségével a fenti erőhatást két részre bontjuk: a q_1 töltésű ponttöltés először létrehoz maga körül egy elektromos mezőt

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}. \quad (2.3)$$

Ebbe az elektromos mezőbe helyezett q_2 ponttöltés erőhatást érez, melynek nagysága

$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}(\mathbf{x}_2). \quad (2.4)$$

Természetesen a két képlet összeolvasva visszaadja (2.1) képletet. A fenti felbontásnak ilyen módon elvi jelentősége van, lehetővé teszi, hogy erőhatások helyett az elektromos térről beszéljünk, amely csak egy töltéstől függ, míg az erő mindkettőtől. Később a mezők hasznos fogalomnak fognak bizonyulni a távolhatások és retardálás leírásában (1. később).

Matematikailag az elektromos tér egy vektormező, vagyis egy $\mathbf{E} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{R}^3$ leképezés, ahol \mathbf{M} jelenti a három dimenziós fizikai terünket, vagyis egy adott koordináta-rendszerben azonosítható \mathbf{R}^3 -nel. A jobb oldalon szereplő \mathbf{R}^3 pedig azt jelenti, hogy a tér minden egyes pontjában az elektromos térnek három komponense van. Konkrétan a (2.3) mező esetén a három komponens Descartes-koordinátákban

$$E_x(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(x - x_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}, \quad E_y(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(y - y_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}, \quad E_z(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(z - z_1)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3},$$

ahol $\mathbf{x} = (x, y, z)$ és $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$. A három komponens máskor $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ módon is jelölni fogjuk, ekkor összefoglaló jelöléssel

$$E_i(\mathbf{x}) = k \frac{q_1(x_i - (x_1)_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|^3}$$

A mezőkkel kapcsolatos matematikai műveletek iránt érdeklődő olvasót a Függelék 15 fejezetének áttekintésére bízgatjuk.

A szuperpozíció az elektromos tér szintjén azt jelenti, hogy több töltés együttes tere az egyes töltések által létrehozott terek összege. Ha egy ponttöltésrendszerünk van, amelyben q_1, \dots, q_n töltések $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ helyen találhatók, akkor a létrehozott elektromos tér:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (2.5)$$

Egy makroszkopikus anyag töltése helyről helyre változhat. Vegyünk egy $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ térfogatelemet az \mathbf{x}_i pont körül, amelyben a $\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}$ mennyiség csak kicsit változik. Ha ebben a térfogatban $q_i = \varrho(\mathbf{x}_i) \Delta V$ töltés található, akkor az előző képletet átírhatjuk, mint

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \varrho(\mathbf{x}_i) \Delta V \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}. \quad (2.6)$$

Ha van értelme a folytonos határesetnek, azaz ha $\Delta V \rightarrow 0$ esetén a $\varrho(\mathbf{x})$ függvény értelmes marad, akkor a fenti összegzésből integrálba mehetünk át:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \varrho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.7)$$

Descartes-komponensekben kifejezett alakja pedig

$$E_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \varrho(\mathbf{x}') \frac{x_i - x'_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.8)$$

A közelítés logikájából látszik, hogy ponttöltések közvetlen közelében nem lesz jó a folytonos töltéeloszlás kép, ott az egyes töltéseket külön kell figyelembe venni. Ugyanakkor matematikailag a ponttöltés megfogalmazható mint egy speciális töltéeloszlás:

$$\text{ponttöltés } \mathbf{x}_0 \text{ helyen} \longrightarrow \varrho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.9)$$

amivel a ponttöltés rendszer töltéeloszlása

$$\varrho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (2.10)$$

Itt $\delta(\mathbf{x})$ a 3D Dirac-delta *disztribúció*, amely olyan függvény, amely az origó kivételével mindenhol nulla, a teljes térre vett integrálja mégis 1. Matematikailag megfogalmazható tulajdonságai

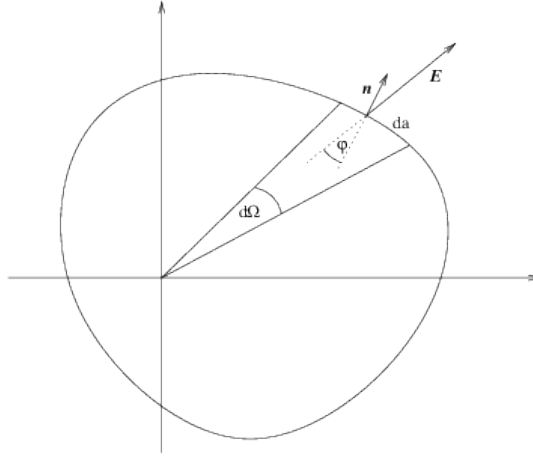
$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \delta(x \neq 0) = 0, \quad \int dx f(x) \delta(x) = f(0). \quad (2.11)$$

A Dirac-deltára gondolhatunk úgy, mint a $\delta_\epsilon(x) = \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)}$ függvény sorozat eredményére ha $\epsilon \rightarrow 0$: egy egyre vékonyodó, de egyre magasodó csúcsra. Később használni fogjuk, hogy változóhelyettesítés hatására

$$\delta(f(x)) = \sum_{\substack{x_i \\ f(x_i)=0}} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}. \quad (2.12)$$

A ponttöltés terének van egy különleges tulajdonsága. Integráljuk ki egy zárt felületre, l. 2.1 ábrán. A számítás során felhasználjuk, hogy a kis da felületelem origóra merőleges vetülete $da \cos \varphi = r^2 d\Omega$, ahol $d\Omega$ a térszög, azaz a felületelem látszólagos szögkiterjedése. Az elektromos tér és a felület normálisának szorzata $\mathbf{E}\mathbf{n} = E \cos \varphi$. Így végül is azt kapjuk, hogy

$$\oint d\mathbf{f} \mathbf{E} = \int da \mathbf{n} \mathbf{E} = \int d\Omega \frac{r^2}{\cos \varphi} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \varphi}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \begin{cases} q/\epsilon_0 & \text{ha } q \in V \\ 0 & \text{ha } q \notin V \end{cases} \quad (2.13)$$



2.1. ábra. Zárt felületre integráljuk a ponttöltés elektromos terét

Vagyis a fenti integrál csak akkor nem nulla, ha a töltés benne van a felület által bezárt térfogatban! A szuperpozíció miatt ponttöltés rendszerénél az adott térfogaton belül levő töltések összegét fogjuk kapni. Ez könnyen általánosítható töltéeloszlásra is

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}) \quad \text{Gauss-törvény,} \quad (2.14)$$

hiszen a jobb oldalon a V térfogaton belüli össztöltést számoltuk össze. A felületi integrált át lehet írni a Gauss-tétel segítségével

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{E} = \int_V d^3\mathbf{x} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

Mivel ez igaz *minden* térfogatra, ezért levonhatjuk a következőt:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad \text{Maxwell I,} \quad (2.16)$$

Ez már *lokális* törvény, az első Maxwell-egyenlet, amely differenciálegyenletet ad az elektromos tér és a töltéssűrűség kapcsolatára.

A ponttöltés terére egyéb összefüggést is be tudunk látni:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.17)$$

Ennek bizonyításához egy általános centrális függvény gradiensét határozzuk meg, vagyis ahol $f(\mathbf{x}) \rightarrow f(r)$ és $r = |\mathbf{x}|$. Mivel $r^2 = \sum_i x_i^2$, így

$$[\operatorname{grad} f(r)]_i = \partial_i f(r) = \frac{\partial r^2}{\partial x_i} \frac{1}{2r} \frac{df}{dr} = \frac{x_i}{r} f'(r) = \hat{\mathbf{x}} f'(r). \quad (2.18)$$

Ha $f(r) = 1/r$, akkor $f'(r) = -1/r^2$; figyelembe véve még egy \mathbf{x}_1 -gyel való eltolást is, a (2.17) összefüggést bizonyítottuk.

Eszerint (2.7) egyenletet átalakítva kapjuk:

$$E_i(\mathbf{x}) = -\text{grad } \Phi(\mathbf{x}), \quad (2.19)$$

ahol

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.20)$$

Φ neve skalárpotenciál vagy egyszerűen potenciál. A potenciálnak nincs közvetlen fizikai jelentése, belőle nem származik erőhatás, csupán egy segédmenyiség. Mivel csak a gradiense, azaz deriváltja mérhető, ezért egy konstanssal eltolható. Speciálisan megadhatjuk egy \mathbf{x}' -be helyezett q nagyságú ponttöltés potenciálját:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (2.21)$$

További példákat később nézünk meg.

A potenciál létének, valamint a $\text{rot grad} = 0$ azonosság következménye, hogy

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{Maxwell II (sztatika)}. \quad (2.22)$$

Ez Maxwell második egyenlete, amely az elektrosztatikában érvényes.

A potenciál és a töltéeloszlás kapcsolatára is levezethetünk egyenletet. (2.16) egyenlet divergenciáját véve kapjuk

$$\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\Delta\Phi = \frac{\varrho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \Rightarrow \Delta\Phi = -\frac{\varrho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (2.23)$$

Az ilyen típusú egyenletet *Poisson-egyenletnek* nevezzük. Alkalmazva a ponttöltés (2.21) potenciáljára, láthatjuk, hogy

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{x}). \quad (2.24)$$

Hogy ez az egyenlet igaz, természetesen független attól, milyen fizikai háttérrel jutottunk el hozzá. Levezethető más módon is, pl. az $1/r \rightarrow 1/\sqrt{r^2 + \epsilon^2}$ regularizációval, a végén $\epsilon \rightarrow 0$ limeszt elvégezve (HF.). A (2.24) összefüggést később még sokszor használni fogjuk.

Ha a térerősséget ismerjük, abból is kiszámítható a potenciál. Legyen $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ a térerősség, és integráljuk ki egy tetszőleges \mathbf{x}_1 -ből \mathbf{x}_2 -be vezető görbe mentén:

$$\int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s} \mathbf{E}(\mathbf{s}) = - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} ds_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{s}} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{dx_i}{d\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{s}} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \Phi(\mathbf{x}_1) - \Phi(\mathbf{x}_2), \quad (2.25)$$

tehát

$$\Phi(\mathbf{x}_1) - \Phi(\mathbf{x}_2) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s} \mathbf{E}(\mathbf{s}). \quad (2.26)$$

Ezzel az \mathbf{x}_1 -beli és \mathbf{x}_2 -beli potenciálok különbségét kapjuk. Természetesen nem határozható meg a potenciál abszolút értéke, hiszen az egy konstans erejéig határozatlan.

Ha lerögzítjük $\Phi(\mathbf{x}_2)$ -t, és más görbe mentén érjük el \mathbf{x}_1 -et, akkor elvileg kaphatnánk más eredményt a térerősség integráljára, ekkor $\Phi(\mathbf{x}_1)$ értéke függene a választott úttól. Azonban Maxwell II egyenletét és a Stokes-tételt használva írhatjuk a kétféleképpen számolt $\Phi(\mathbf{x}_1)$ -ek különbségére

$$\delta\Phi(\mathbf{x}_1) = \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s} \mathbf{E}(\mathbf{s}) - \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s}' \mathbf{E}(\mathbf{s}') = \oint d\mathbf{s} \mathbf{E}(\mathbf{s}) = \int_F d\mathbf{f} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (2.27)$$

Vagyis a sztatikában érvényes II. Maxwell-egyenlet következtében a potenciál egyértelmű. Az ilyen eseteket nevezzük konzervatív mezőnek.

2.1. Töltésrendszer energiája

Elektromos mezőben mozgó töltésre ható erő $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Ha fel akarunk építeni egy töltésrendszert, ez ellen az erő ellen kell dolgoznunk, vagyis $-\mathbf{F}$ erőt kell kifejtenünk. $d\mathbf{x}$ elmozdulás esetén az általunk végzett munka:

$$dW = -\mathbf{F}d\mathbf{x} = -q\mathbf{E}d\mathbf{x} \Rightarrow W_{\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2} = -q \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}_2} d\mathbf{s} \mathbf{E}(\mathbf{s}) = q(\Phi(\mathbf{x}_2) - \Phi(\mathbf{x}_1)). \quad (2.28)$$

(2.27) képlet alapján az $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2$ mozgásnál végzett munka független a pályától. Ha $\mathbf{x}_1 = \infty$, és $\Phi(\infty) = 0$ (ez véges töltésrendszerrel mindig megtehető), akkor $W_{\infty \rightarrow \mathbf{x}} = q\Phi(\mathbf{x})$.

Az általunk végzett munka – az energiamegmaradás miatt – a töltésrendszer energiájában tárolódik. Ezért a fenti képletet a következőképpen értelmezzük: ha van egy töltésrendszerünk, amely már létrehozott egy $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ térerősséget, s ehhez hozzáadunk egy δq töltést a végtelenből \mathbf{x}_0 helyre, akkor a töltésrendszer energiájának változása

$$\delta W = \delta q \Phi(\mathbf{x}_0). \quad (2.29)$$

Teljes töltésrendszer felépítésénél egyesével tesszük be a töltéseket, az újonnan betett töltések a régiak terét érzik:

$$W = \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.30)$$

Itt ki kell hagyni az $i = j$ esetet, mert ekkor végtelent kapnánk.

Folytonos esetre is könnyen átfogalmazhatók a fenti gondolatok: ekkor egy $\delta\rho$ töltésseloszlással módosítjuk a már meglevő töltérendszerünket, ekkor

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \delta\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}). \quad (2.31)$$

A teljes töltésseloszlás energiájához felhasználjuk (2.20) egyenletet:

$$\delta W = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\delta\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right), \quad (2.32)$$

hiszen a kis változás (amely a deriválással analóg fogalom) vagy az első, vagy a második tagra hat, de mindkettő járuléka egyforma. Így kapjuk

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}). \quad (2.33)$$

Felhasználva a Maxwell-egyenletet (2.16), valamint az $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ képletet

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \Phi \partial_i E_i = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \partial_i (\Phi E_i) - \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} (\partial_i \Phi) E_i = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^2x_i \Phi E_i + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}^2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Az első tag nulla, mert a végtelenben $\Phi = 0$, így marad

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{E}^2. \quad (2.35)$$

Ez az elektrosztatikus energia kifejezése a térerősségekkel kifejezve. Észrevehetjük, hogy az energia egy lokális mennyiség térintegráljaként áll elő, $W = \int d^3\mathbf{x} w(\mathbf{x})$. Emiatt beszélhetünk az energia sűrűségéről, amelynek kifejezése

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2. \quad (2.36)$$

Látszólag (2.30) kifejezésből (2.35) közvetlenül nyerhető, mégis, míg az utóbbi pozitív eredményt ad, az első lehet negatív is – például abban az egyszerű esetben, mikor két, egymással ellentétes ponttöltésünk van. Az ellentmondás feloldására vegyük észre, hogy az első esetben kizártuk az $i = j$ esetet, a folytonos leírásban erre nem volt mód. Úgy fogalmazhatunk, hogy a folytonos eset tartalmazza a „sajátenergiát” is. Például ha egy ponttöltésre kiszámítjuk a (2.35) integrált, végtelent kapunk, míg természetesen (2.30) nullát adna. Ha valahogyan regularizáljuk az integrált (pl. hipotetikus „elektronsugár” bevezetésével), akkor véges eredményt kapunk a sajátenergiára. Ha pedig kivonjuk a két ponttöltés (2.35) képlet alapján számolt teljes energiájából a két különálló ponttöltés sajátenergiáját, akkor már a (2.30) eredménnyel konzisztens végeredményt kapunk.

2.2. Kitérő: erővonalkép

Vektormezők ábrázolására különböző módszerek vannak. Lehet a tér kiválasztott pontjaiban kis nyilacskákkal érzékelteni a vektormező nagyságát és irányát. Potenciális vektormező esetén (vagyis ha a rotációja nulla) megrajzolhatjuk a $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_0$ konstans potenciálú (ekvipotenciális) felületeket. Mivel a vektormező a potenciál gradiense, így merőleges az ekvipotenciális. A vektormező nagysága pedig – egyenletes lépésekkel változtatott Φ_0 felületsereg megrajzolása esetén – az ekvipotenciális felületek sűrűségével lesz arányos.

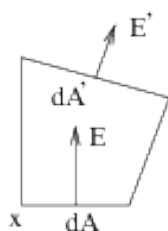
Ugyanakkor lehetséges erővonalakkal is szemléltetni a vektormezőt. Ennek definiálásához vegyük az \mathbf{E} vektormezőt, és definiáljunk egy olyan $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ görbét melynek érintője éppen \mathbf{E}

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = \mathbf{E}(\gamma(\tau)). \quad (2.37)$$

Ezek a görbék az erővonalak, melyből a térerősség irányát kaphatjuk meg. Mivel $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$, az erővonalak az ekvipotenciális felületre merőlegesek.

A térerősség nagyságára a görbék érzéketlenek, hiszen csupán a paraméterezést változtatja meg. A térerősség nagysága ezért az erővonalak *sűrűségével* adható meg: egy \mathbf{E} -re merőleges adott felületen átmenő erővonalak száma legyen fordítottan arányos \mathbf{E} nagyságával.

Ha az erővonalak sűrűségét egy adott felületen definiálhatjuk, és a vonalakat a (2.37) egyenletnek megfelelően folytatjuk, akkor egy másik felületen kiszámíthatjuk a sűrűségüket. Ez nem feltétlenül esik egybe a sűrűség térerősség nagyságából történő kiszámításával. Mikor konzisztens tehát az erővonalkép? Vegyünk egy olyan infinitezimális térfogatot, amely egyik sarok pontja \mathbf{x} , az alaplap merőleges $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ -re, az oldalélek pedig a sarokpontokban érvényes térerősségekkel párhuzamosak (l. 2.2). E térfogatra integrálva



2.2. ábra. Erővonalak konzisztenciája: az erővonalak közötti távolság az erővonalak széttartásával (divergenciájával) kell összefüggésben legyen.

\mathbf{E} -t, az oldallapok nem adnak járulékot, hiszen ott a normális merőleges a térerősségekre. Az alaplapokon $\mathbf{n} \parallel \mathbf{E}$, vagyis

$$\oint d\mathbf{f} \mathbf{E} = dA' E' - dA E. \quad (2.38)$$

Mivel az erővonalak sűrűsége, feltételezésünk szerint, mindenhol arányos a térerősséggel, azaz $E dA = \text{konstans}$, így ennek az integrálnak nullának kell lennie.

Ugyanakkor a Gauss tétel az integrál megegyezik $\text{div } \mathbf{E}$ térfogati integráljával. Mivel a térfogat infinitezimális, itt a $\text{div } \mathbf{E}$ konstansnak vehető. A fenti összefüggés miatt tehát

$$\text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (2.39)$$

Az erővonalkép tehát akkor konzisztens, ha a vektormező divergenciamentes. Divergencia esetén (pl. ha töltést helyezünk a térbe), új erővonalakat kell indítani a divergencia forrásából.

2.3. Speciális töltéseloszlások tere

Nézzünk meg néhány példát töltéseloszlások által létrehozott potenciálokra. Az általános képlet természetesen (2.20), de olykor integrálás nélkül is boldogulunk.

2.3.1. Dipólus tere

Két ellentétes, de egyenlő abszolút értékű potenciált egymás mellé rakva kapjuk a dipólus potenciálját. Tegyük a $-q$ töltést $-\mathbf{a}/2$ helyre, a $+q$ töltést a $\mathbf{a}/2$ helyre, ekkor \mathbf{a} -hoz képest nagy távolságra a potenciál, felhasználva (2.21) képletet

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{a}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \mathbf{a}/2|} \right] \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{a}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \Rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}, \quad (2.40)$$

ahol bevezettük a $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$ dipóluserősséget. Ha $\mathbf{a} \rightarrow 0$, miközben \mathbf{p} véges marad, akkor a fenti képlet minden $\mathbf{x} \neq 0$ helyen érvényes lesz.

A térerősség

$$E_i(\mathbf{x}) = -\partial_i \Phi(\mathbf{x}) = -\frac{p_j}{4\pi\epsilon_0} \partial_i \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3x_i \mathbf{p}\mathbf{x} - p_i \mathbf{x}^2}{|\mathbf{x}|^5}, \quad (2.41)$$

vektorosan

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{p}\mathbf{x}) - \mathbf{p} \mathbf{x}^2}{|\mathbf{x}|^5} \quad (2.42)$$

2.3.2. Egyenletesen töltött végtelen síklap tere

Vegyük most egy végtelen sík felületet, és töltsük fel egyenletes σ felületi töltéssűrűséggel. Ez azt jelenti, hogy a felület egy dA darabján elhelyezkedő töltés nagysága σdA . A határozottság kedvéért a felület legyen az x - y síkban, vagyis a töltéssűrűség $\rho(x, y, z) = \sigma \delta(z)$.

A térerősség illetve potenciál közvetlen számítása helyett használjuk ki a töltéselrendezés *szimmetriáját*. Mivel az nem függ x, y -től, hiszen az $x-y$ síkban eltolásinvariáns a megadott eloszlás, ezért feltehető, hogy a potenciál sem fog x, y -től függeni. Ha viszont $\Phi(z)$, akkor a térerősség nem nulla komponense csak $E_z(z)$ lesz. Legyen $z \leq 0$ -ra a potenciál $\Phi^\pm(z)$, a térerősség $E_z^\pm(z)$.

Vegyünk most egy olyan T téglalapot, amely merőleges a felületre, és integráljuk \mathbf{E} -t a felületére. Mivel a téglalap oldalain $\mathbf{E}\mathbf{n} = 0$, csak a tetején és az alján kapunk járulékot, ennek nagysága $dA(E_z^+(z) - E_z^-(z))$, ahol dA az alapterület. A Gauss-törvény miatt ez arányos a téglalap belsejében levő töltéssel, ami $dA\sigma$. Innen

$$E_z^+(z) - E_z^-(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (2.43)$$

Látható módon csak annyi megkötést kapunk, hogy a térerősség felületre merőleges komponensének ugrása σ/ε_0 . Ahhoz, hogy magukat a térerősségeket is meg tudjuk adni, a végtelenben érvényes határfeltételeket kell megadni.

Ha z és $-z$ egymással egyenértékű, akkor

$$E_z^+(z) = -E_z^-(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad \Phi(z) = -\frac{\sigma|z|}{2\varepsilon_0}. \quad (2.44)$$

Ha az egyik oldalon ($z < 0$) a térerősség nulla (pl. fém belseje), akkor

$$E_z^+(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \Phi^+(z) = -\frac{\sigma z}{\varepsilon_0}. \quad (2.45)$$

Megfigyelhetjük, hogy a potenciál végtelenhez tart, ha $z \rightarrow \infty$. Ahogyan korábban említettük, csupán véges töltéseloszlások esetén biztosított, hogy a potenciál nullának választható a végtelenben. A végtelen síklap tere ellenpélda abban az esetben, ha végtelen töltéseloszlásunk van.

Egy triviális eset: ha $\sigma = 0$, akkor $E_z^+(z) - E_z^-(z)$, azaz a térerősség normális komponense folytonos.

2.3.3. Egyenletesen töltött vonaltöltés tere

Most egy végtelen egyenes töltéseloszlást vegyünk, amelynek vonal menti töltéssűrűsége legyen η – azaz a töltés minden $d\ell$ szakaszon $\eta d\ell$. Ha az egyenest a z tengelynek választjuk, akkor a töltéssűrűség képlete $\varrho(x, y, z) = \eta\delta(x)\delta(y)$.

Az előző esethez hasonlóan itt a szimmetria azt diktálja, hogy nem függhet semmi z -től és φ -től. A potenciál tehát konstans kell legyen az egyenest körbevevő hengerpaláston, és emiatt a térerősségnek csak a hengerpalástra merőleges komponensei lehetnek. Vegyük most körbe az egyenest egy olyan hengerrel, amelynek sugara r , magassága h ,

és integráljuk ki a térerősséget ennek felületére. A fentiek miatt csak a paláston kapunk járulékot, értéke $2\pi rhE$. Ez arányos a bezárt töltéssel, vagyis

$$2\pi r d\ell E = \frac{1}{\varepsilon_0} d\ell \eta \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \Phi = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (2.46)$$

A potenciál itt is végtelenhez tart, ahogyan $r \rightarrow 0$ vagy $r \rightarrow \infty$.

3. fejezet

Poisson-egyenlet határfeltételekkel

Eddig azt tanulmányoztuk, hogy milyen potenciál illetve térerősség alakul ki, ha ismerjük a töltéseloszlást. Azonban általában nem tudjuk rögzíteni a töltéseket, pl. azért, mert az anyagban elmozduló töltéshordozók vannak, így magától töltéstöbblet illetve hiány alakulhat ki. Ekkor nem tudjuk a térerősséget sem kiszámolni közvetlenül.

Láttuk (2.23)-ban, hogy a potenciál egy Poisson-egyenletnek tesz eleget. Az anyagi közegek jelenléte határfeltételeket szab a megoldásnak. Tipikus határfeltételek:

- **fém felülete** (tökéletes vezető): ha a fém belsejében a töltések a legkisebb térerősség hatására is elmozdulnak, akkor olyan töltéseloszlás alakul ki, amely teljesen lenullázza a belső térerősséget. Ezért fém belsejében nem lehet \mathbf{E} , a felületen pedig $\mathbf{E} \parallel \mathbf{n}$ a felület normálisával. Emiatt a fém felületén $\delta\Phi = \int d\mathbf{x} \mathbf{E} = 0$, a fém felülete *ekvipotenciális*.
- **felületi töltéssűrűség**: ha a felületen valamilyen töltéssűrűség adott, a felület túloldalán $\mathbf{E} = 0$, akkor $\mathbf{E} = \mathbf{n}\sigma/\varepsilon_0$ (l. (2.45))

Ennek általánosításaként a megoldandó feladat:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Phi(\mathbf{x}_f) = \text{adott} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{n} \cdot \text{grad } \Phi(\mathbf{x}_f) \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \text{adott}, \quad (3.1)$$

ahol $\mathbf{x}_f \in$ felület. A felület lehet nem összefüggő (azaz több felület), és lehet a végtelenben is. Az első fajta határfeltételt *Dirichlet*, a második fajtát *Neumann* határfeltételnek hívjuk.

Először bebizonyítjuk, hogy a Poisson-egyenlet megoldása egyértelmű, adott határfeltételek esetén

3.1. Tétel *Legyen $\Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = -\rho/\varepsilon_0$, ugyanazokkal a határfeltételekkel. Ekkor $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{konstans}$.*

Bizonyítás. Legyen $K = \Phi_1 - \Phi_2$, erre igaz, hogy $\Delta K = 0$, és a határon $K = 0$ vagy $\mathbf{n} \cdot \text{grad } K = 0$. Alkalmazzuk a Gauss-tételt (15.8) a $K \text{ grad } K$ vektormezőre:

$$\begin{aligned} \int_V d^3\mathbf{x} \operatorname{div}(K \text{ grad } K) &= \int_V d^3\mathbf{x} [(\text{grad } K)^2 + K \Delta K] = \int_V d^3\mathbf{x} (\text{grad } K)^2 = \\ &= \oint_S d\mathbf{f} K \text{ grad } K = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mivel a teljes térre integrálva egy pozitív függvényt 0-t kapunk, ezért a függvény maga nulla kell legyen: $\text{grad } K = 0$, azaz $K = \text{konstans}$. \square

A következőkben megmutatjuk, hogy ha meg tudjuk oldani a feladatot egyetlen ponttöltésre valamilyen jól választott határfeltételek mellett, akkor meg tudjuk oldani tet-szőleges töltéeloszlásra is. Keressünk tehát egy olyan $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényt, amely kielégíti a

$$\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.3)$$

egyenletet, később megadott határfeltételekkel. G neve *Green-függvény*, fizikailag egy \mathbf{y} -ba helyezett egységnyi ponttöltés potenciálja. Mivel az egyenlet szimmetrikus az \mathbf{x} és \mathbf{y} cseréjére, ezért $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ is szimmetrikus függvénye lesz a két argumentumának. Ha a végtelenben vett határfeltételeket nézünk, ahol nulla potenciált határozunk meg, akkor a megoldás a szokásos (2.21) $q = 1$ választással.

Most bebizonyítjuk a következő tételt:

3.2. Tétel G. Green, 1824: legyen φ és ψ két skalármező, V egy térfogatelem, $S = \partial V$ a felülete. Ekkor

$$\int_V d^3\mathbf{x} (\varphi(\mathbf{x}) \Delta \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \Delta \varphi(\mathbf{x})) = \oint_S d\mathbf{f} (\varphi(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \nabla \varphi(\mathbf{x})). \quad (3.4)$$

Bizonyítás. Használjuk a Gauss-tételt (15.8) $U_1 = \varphi \nabla \psi$ és $U_2 = \psi \nabla \varphi$ vektormezőkre.

$$\operatorname{div} U_1 = (\nabla \varphi)(\nabla \psi) + \varphi \Delta \psi, \quad \operatorname{div} U_2 = (\nabla \varphi)(\nabla \psi) + \psi \Delta \varphi. \quad (3.5)$$

Ezért

$$\begin{aligned} \int_V d^3\mathbf{x} (\operatorname{div} U_1 - \operatorname{div} U_2) &= \int_V d^3\mathbf{x} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) = \oint_S d\mathbf{f} (U_1 - U_2) = \\ &= \oint_S d\mathbf{f} (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ebből már következik az állítás. \square

Alkalmazzuk a Green-tételt $\psi(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ és $\varphi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ esetre. Használva (3.1) és (3.3) egyenleteket

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\Phi(\mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\varrho(\mathbf{x}) = \oint_S d\mathbf{f} (\Phi(\mathbf{x})\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla\Phi(\mathbf{x})), \quad (3.7)$$

átrendezve

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\varrho(\mathbf{x}) - \varepsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} (\Phi(\mathbf{x})\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla\Phi(\mathbf{x})). \quad (3.8)$$

Mivel $d\mathbf{f} \sim \mathbf{n}$, a gradiensből csak a normális irányú deriváltak számítanak.

Tisztán Dirichlet-féle határfeltétel. esetén válasszuk a Green-függvény határfeltételének

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x} \in S) = 0 \quad (\text{Dirichlet}). \quad (3.9)$$

Ekkor a második tag nulla, ezért

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\varrho(\mathbf{x}) - \varepsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} \Phi(\mathbf{x})\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.10)$$

Tisztán Neumann-féle határfeltétel. esetén jó lenne ugyanezt csinálni, csak a felületre merőleges deriválttal. Azonban

$$\oint_S d\mathbf{f} \text{grad} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_V d^3\mathbf{x} \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}, \quad (3.11)$$

ezért a gradiens nem lehet azonosan nulla. Így most a legegyszerűbb választás

$$\text{grad} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x} \in S} = -\frac{1}{\varepsilon_0 |S|} \quad (\text{Neumann}), \quad (3.12)$$

ahol $|S|$ a felület nagysága. Ezzel

$$\Phi(\mathbf{y}) = \langle \Phi \rangle_S + \int_V d^3\mathbf{x} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\varrho(\mathbf{x}) + \varepsilon_0 \oint_S d\mathbf{f} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\nabla\Phi(\mathbf{x}), \quad (3.13)$$

ahol $\langle \Phi \rangle_S$ a potenciál átlaga a felületen, ez nem határozható meg a tisztán Neumann határfeltételeknél.

Vagyis elég a Poisson-egyenletet ponttöltésre megoldani, Dirichlet határfeltételek esetén nulla felületi potenciállal. Persze ez is igen bonyolult feladat, amelynek számos megoldási módszere lehetséges. A legáltalánosabb esetben csak numerikus módszereket alkalmazhatunk, de speciális esetekben segíthet a megoldás megsejtése (pl. tükörtöltések módszere, két dimenziós függvények használata).

3.1. Kapacitás

Mielőtt a részletekbe belemennénk, vizsgáljuk meg az elektrodinamika szuperpozíciós elvének tükröződését a potenciál problémák megoldásában. Ehhez vegyünk egy olyan rendszert, amely fém felületeket tartalmaz, különböző potenciálokra feltöltve. A felületeket jelöljük S_i -vel, a rajtuk érvényes potenciált V_i -vel. A szuperpozíciós elv és a Dirichlet határfeltételekre érvényes (3.10) képlet alapján állíthatjuk (ahol most $\varrho = 0$, hiszen nem tettünk be külső töltést), hogy a potenciál a tér tetszőleges pontjában lineáris függvénye lesz a felületi potenciáloknak.

$$\Phi(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{y}) V_j. \quad (3.14)$$

Másrészt a felületi töltéssűrűség a felületen érvényes potenciál felületre merőleges deriváltjával arányos (l. (2.45)), ezért az i -dik felületén levő össztöltés lineáris függvénye lesz a felületi potenciáloknak

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j. \quad (3.15)$$

Az együtttható a *kapacitás*, általában egy mátrix. A rendszer energiája, felhasználva, hogy a felületek ekvipotenciálisak:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i \oint_{S_i} d\mathbf{f}_{\mathbf{x}} \sigma_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_i Q_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij} V_i V_j. \quad (3.16)$$

Termodinamikai megfontolások alapján a kapacitásmátrix szimmetrikus kell legyen.

Ha ismerjük a rendszerünk Green-függvényét Dirichlet határfeltételekkel, akkor a kapacitás könnyen megadható. Legyen a Green-függvény $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, ekkor – mivel most $\varrho = 0$ – (3.10) egyenlet szerint

$$\Phi(\mathbf{y}) = -\varepsilon_0 \sum_{j=1}^n V_j \oint_{S_j} d\mathbf{f}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.17)$$

A i . felületen levő töltés a felületi töltés összege

$$Q_i = \oint_{S_i} d\mathbf{f}_{\mathbf{y}} \sigma_j(\mathbf{y}) = -\varepsilon_0 \oint_{S_i} d\mathbf{f}_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}) = \varepsilon_0^2 \sum_{j=1}^n V_j \oint_{S_i} d\mathbf{f}_{\mathbf{y}} \oint_{S_j} d\mathbf{f}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (3.18)$$

valóban lineáris V_i -kben. Innen a kapacitás

$$C_{ij} = \varepsilon_0^2 \oint_{S_i} d\mathbf{f}_{\mathbf{y}} \oint_{S_j} d\mathbf{f}_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (3.19)$$

Ez valóban egy i - j -ben szimmetrikus mátrix.

Egyszerű esetekben a potenciálok alapján meg lehet mondani a töltés nagyságát, ekkor a kapacitás könnyen leolvasható. Pl.

- gömb kapacitása: Q töltésű R sugarú gömb tere megegyezik egy origóba helyezett ponttöltés terével:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (3.20)$$

- síkkondenzátor kapacitása: két A felületű síklap d távolságra, egyike σ , másika $-\sigma$ töltéssűrűséggel. A köztük levő teret konstanssal közelítve $E = \sigma/\epsilon_0$. Emiatt

$$Q = \sigma A, \quad V = \sigma d/\epsilon_0 \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{A\epsilon_0}{d}. \quad (3.21)$$

3.2. Tükörtöltések módszere

Vegyünk Dirichlet határfeltételeket, amikor a Green függvény egy ponttöltés tere akkor, ha a határokon mindenütt nulla potenciált rögzítünk. A felületek a teret két (vagy több) részre vágják: a határok közötti fizikai térben érvényes a Poisson egyenlet, a határok belseje pedig a Green-függvény meghatározásánál nulla potenciálú.

A tükörtöltések módszerénél megpróbáljuk a határfeltételeket néhány, a *nemfizikai* térbe (azaz a határfelületek által elszeparált térrészbe) elhelyezett extra ponttöltéssel kielégíteni. Ez nem megy mindig, de vannak speciális felületek, ahol működik. Mivel az extra töltések a nemfizikai térben vannak, a fizikai térbeli egyenletek számára nem jelentenek extra forrást, ott az egyenletek változatlanok maradnak.

3.2.1. Síklap Green-függvénye

Vegyünk a $z = 0$ síkon megadott Dirichlet határfeltételeket. Ekkor a Green függvényt úgy állítjuk elő, hogy egy $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ pontba elhelyezünk egy egységnyi ponttöltést, a teret keressük $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ pontban, hogy $\Phi(y_1, y_2, y_3 = 0) = 0$. Ennek a feltételnek nyilván megfelel egy olyan rendszer, ahol $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, -x_3)$ pontba leteszünk egy (-1) ponttöltést, hiszen a teljes megoldás ekkor

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}|} \right], \quad (3.22)$$

komponensekben kiírva

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 + x_3)^2}} \right]. \quad (3.23)$$

Mivel a tükörtlöltést a $-x_3$ helyre tettük, az $x_3 > 0$ fizikai térrészben valóban csak egy ponttöltés szerepel. Másrészt az is igaz, hogy $\Phi(y_3 = 0) = 0$, mert ekkor a két tag egyenlő nagyságú. Vagyis a fenti G valóban a Green-függvény.

kérdés: mi a síklap Green-függvénye az $x_3 < 0$ térrészben?

3.2.2. Gömb Green-függvénye

Vegyünk egy R sugarú gömböt az origó körül, és keressük a Green-függvényt a $r > R$ tartományban. Ehhez egy ponttöltésre kell megoldanunk a $\Phi(r = R) = 0$ határérték-feladatot. A gömbszimmetria miatt válasszuk a ponttöltés helyét a $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ pontnak. Tegyük fel, hogy a tükörtlöltések módszere működik egyetlen, a gömb belsejébe $\mathbf{x}' = (x', 0, 0)$ helyre betett $-q$ nagyságú tükörtlöltéssel. Vagyis a feltevésünk szerint

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{q}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|} \right], \quad (3.24)$$

komponensekben kifejezve

$$\Phi(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + y_2^2 + y_3^2}} - \frac{q}{\sqrt{(y_1 - x_1')^2 + y_2^2 + y_3^2}} \right]. \quad (3.25)$$

Próbáljuk úgy választani x_1' -t és q -q, hogy a $\Phi = 0$ felület egyenlete $\mathbf{y}^2 = R^2$ legyen

$$\begin{aligned} q^2 [(y_1 - x_1)^2 + y_2^2 + y_3^2] &= (y_1 - x_1')^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ q^2 [x_1^2 - 2y_1x_1 + R^2] &= x_1'^2 - 2y_1x_1' + R^2 \quad \forall y_1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ez teljesíthető, mert két változónk van két egyenletre:

$$q^2 [x_1^2 + R^2] = x_1'^2 + R^2 \quad q^2 x_1 = x_1'. \quad (3.27)$$

$$(q^2 - 1)(q^2 x_1^2 - R^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad q^2 = 1 \quad \text{vagy} \quad q = \frac{R}{x_1}.$$

A $q = 1$ esetre $x_1' = x_1$, ekkor nincs egyáltalán tér. A fizikai megoldás a másik

$$q = \frac{R}{x_1}, \quad x_1' = \frac{R^2}{x_1}. \quad (3.28)$$

Tetszőleges \mathbf{x} és \mathbf{y} esetén a Green-függvény

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{R/|\mathbf{x}|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x} \frac{R^2}{|\mathbf{x}|^2}|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} - \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathbf{y}^2 \mathbf{x}^2}{R^2} + R^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{y}}} \right]. \quad (3.29)$$

A második formula mutatja, hogy $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

kérdés: mi a gömb Green-függvénye az $r < R$ térrészben?

Alkalmazás:

Milyen az egyenletes \mathbf{E}_0 elektromos térbe helyezett földelt gömb tere?

Megoldás:

A földeltség azt jelenti, hogy $\Phi = 0$ a felületen. Az egyenletes elektromos teret előállíthatom két töltés közötti térként, ha a töltések végtelen távol vannak, de végtelen erősek. Képletben: q töltés legyen $-x$ helyen, $-q$ töltés x helyen, ekkor az elektromos térerősség közepén

$$E_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} \Rightarrow q = 2\pi\epsilon_0 x^2 E_0. \quad (3.30)$$

A két ponttöltés két tükörtöltést hoz létre, a töltések nagysága, illetve az origótól való távolságuk

$$Q = qR/x = 2\pi\epsilon_0 x R E_0, \quad x' = R^2/x \quad (3.31)$$

Ha $x \rightarrow \infty$, akkor a tükörtöltések egy dipólust alkotnak, a dipólerősség $p = 2Qx' = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_0$. Dipólus potenciálját láttuk (2.40)-ben. Ezért a teljes tér potenciálja, vektorosan

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\mathbf{E}_0 \mathbf{x} \left[1 - \frac{R^3}{|\mathbf{x}|^3} \right]. \quad (3.32)$$

Értelmezés: az elektromos tér a kezdetben semleges fémgömböt elektromosan aktív állapotba hozza, *polarizálja*. A polarizáció gömb esetén dipólmomentum kialakulását jelenti, amely arányos a gömb térfogatával. Ennek a dipólnak a nagysága, összehasonlítva (2.40) egyenlettel:

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0. \quad (3.33)$$

Fémgömbben a töltéshordozók végtelenül könnyen elmozdulnak, vagyis a fenti eredmény az adott térfogatban maximálisan kialakuló dipólmomentum.



3.3. Laplace-egyenlet

Sokszor a Poisson egyenlet nulla potenciálú határfeltételeinek megoldása helyett érdekesebb a nulla forrású *Laplace-egyenletet* vizsgálni általános határfeltételek mellett. A két feladat ekvivalens, hiszen a Green-függvény megoldását kereshetjük

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.34)$$

alakban, ekkor, mivel G és a ponttöltés potenciálja is ugyanazt a (3.3) egyenletet elégíti ki:

$$\Delta_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (3.35)$$

Másrészt, mivel $G(\mathbf{x} \in \mathcal{S}, \mathbf{y}) = 0$, ezért

$$F(\mathbf{x} \in \mathcal{S}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (3.36)$$

Vagyis F -re a Laplace-egyenlet vonatkozik jól meghatározott határfeltételekkel.

3.3.1. Laplace-egyenlet megoldása téglatesten felvett határfeltételekkel

Vegyünk egy a , b ill. c élhosszúságú téglatestet, és a felületeken rójuk ki a $\Phi(\mathbf{x} \in \text{felület}) = V(\mathbf{x})$ Dirichlet határfeltételeket. Milyen lesz a potenciál a téglatest belsejében?

A megoldást hat potenciál összegeként adjuk meg, mindegyikre igaz, hogy öt lapon nulla, a hatodikon az ott érvényes V értékét veszi fel. Ezek közül itt egyet írunk fel, amely a felső lapon nem nulla: $\Phi(x, y, z = c) = V(x, y)$, a többi lapon nulla: $\Phi(x = 0, a) = \Phi(y = 0, b) = \Phi(z = 0) = 0$.

A feladathoz a Descartes koordináták illeszkednek jól; a \parallel koordináták most x és y , a \perp koordináta z . A Laplace felírható mint

$$\Delta = \Delta_{\parallel} + \Delta_{\perp}, \quad \Delta_{\parallel} = \partial_x^2 + \partial_y^2, \quad \Delta_{\perp} = \partial_z^2. \quad (3.37)$$

A megoldást keressük $\Phi(x, y, z) = \Phi_{\parallel}(x, y)\Phi_z(z)$ alakban:

$$\Delta\Phi = \Phi_z\Delta_{\parallel}\Phi_{\parallel} + \Phi_{\parallel}\Delta_z\Phi_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta_{\parallel}\Phi_{\parallel}}{\Phi_{\parallel}} + \frac{\Delta_z\Phi_z}{\Phi_z} = 0. \quad (3.38)$$

Az első tag csak x, y -től, a második csak z -től függ, az összegük úgy lehet csak nulla, ha mindkettő konstans

$$\Delta_{\parallel}\Phi_{\parallel} = -\lambda^2\Phi_{\parallel}, \quad \frac{d^2\Phi_z}{dz^2} = \lambda^2\Phi_z. \quad (3.39)$$

Az első egyenlet megoldását keressük ismét $\Phi_{\parallel}(x, y) = \Phi_x(x)\Phi_y(y)$ alakban. A fenti gondolatmenettel

$$\frac{d^2\Phi_x}{dx^2} = -\alpha^2\Phi_x, \quad \frac{d^2\Phi_y}{dy^2} = -\beta^2\Phi_y, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2. \quad (3.40)$$

Ezen egyenletek megoldásai a harmonikus függvények

$$\Phi_x(x) \sim \sin(\alpha(x+x_0)), \quad \Phi_y(y) \sim \sin(\beta(y+y_0)), \quad \Phi_z(z) \sim \sinh(\lambda(z+z_0)). \quad (3.41)$$

A kielégítendő határfeltételek: $\Phi(x=0, a) = \Phi(y=0, b) = \Phi(z=0) = 0$ miatt

$$\Phi_x(x) \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \Phi_y(y) \sim \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad \Phi_z(z) \sim \sinh(\lambda_{nm}z), \quad (3.42)$$

ahol

$$\lambda_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}. \quad (3.43)$$

A teljes megoldás ezek tetszőleges együtthatóval vett összege

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{nm=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(\lambda_{nm}z). \quad (3.44)$$

Még ki kell elégítenünk a $z=c$ lapon felvett határfeltételeket

$$V(x, y) = \sum_{nm=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(\lambda_{nm}c). \quad (3.45)$$

Kihasználhatjuk a sajátfüggvények ortogonalitását, amely most úgy írható, hogy

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right) = \frac{ab}{4} \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \quad (3.46)$$

Ezzel

$$\frac{ab}{4} A_{nm} \sinh(\lambda_{nm}c) = \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \equiv V_{nm}. \quad (3.47)$$

Ezzel

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{nm=1}^{\infty} \frac{4V_{nm}}{ab \sinh(\lambda_{nm}c)} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(\lambda_{nm}z). \quad (3.48)$$

3.4. Koordinátarendszerek, ortogonális függvények

Speciális szimmetriájú határokkal rendelkező rendszerekben érdemes a Laplace-egyenletet úgy megoldani, hogy a feladathoz alkalmazkodó koordinátarendszert választunk. A koordinátarendszer azt jelenti, hogy a helyvektorokat paraméterezzük $\mathbf{r}(\xi_i)$ -vel $i = 1, 2, 3$. Válasszuk a speciális koordinátarendszert úgy, hogy a felületünk tartozzon mondjuk a harmadik ξ_3 változó konstans értékéhez, a többi koordinátavonal pedig legyen a felületre merőleges! Azaz ha a határt S felület jelöli, akkor $\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 1) \equiv \mathcal{S}$, és $\partial \mathbf{r} / \partial \xi_3 \parallel d\mathbf{f}$.

Ebben a koordinátarendszerben remélhetjük, hogy a felület irányú és az arra merőleges deriváltak „nem keverednek”, azaz azt várjuk, hogy

$$0 = \Delta F = \Delta_{\parallel} F + \Delta_{\perp} F, \quad (3.49)$$

ahol Δ_{\parallel} illetve Δ_{\perp} felület irányú, illetve arra merőleges deriváltakat tartalmaz. Ekkor a feladat megoldását kereshetjük

$$F(\xi_{\parallel}, \xi_{\perp}) = F_{\parallel}(\xi_{\parallel})F_{\perp}(\xi_{\perp}) \quad (3.50)$$

alakban, ahol $\xi_{\parallel} = (\xi_1, \xi_2)$ és $\xi_{\perp} = \xi_3$. Ekkor

$$0 = F_{\perp} \Delta_{\parallel} F_{\parallel} + F_{\parallel} \Delta_{\perp} F_{\perp} \Rightarrow 0 = \frac{\Delta_{\parallel} F}{F_{\parallel}} + \frac{\Delta_{\perp} F}{F_{\perp}}. \quad (3.51)$$

Megfelelő normálás esetén az első tag csak ξ_{\parallel} koordinátáktól függ, a második csak ξ_{\perp} koordinátáktól. Az összegük csak akkor lehet állandó (nulla), ha mindkét tag konstans. Azaz

$$\Delta_{\parallel} F_{\parallel} = \lambda F_{\parallel}, \quad \Delta_{\perp} F_{\perp} = -\lambda F_{\perp} \quad (3.52)$$

sajátérték-egyenleteket kapunk valamilyen λ -val. A teljes megoldás tehát

$$F(\xi_i) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} F_{\parallel}^{(\lambda)}(\xi_{\parallel}) F_{\perp}^{(-\lambda)}(\xi_3). \quad (3.53)$$

c_{λ} -k onnan határozhatók meg, hogy

$$F(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 1) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} F_{\parallel}^{(\lambda)}(\xi_{\parallel}) = \text{határfeltételek}, \quad (3.54)$$

feltételezve, hogy $F_{\perp}^{(-\lambda)}(\xi_3 = 1) = 1$.

3.4.1. Teljesség

Ezzel kapcsolatban felmerül a kérdés: vajon minden, \mathcal{S} -en adott függvény felírható a fenti alakban, vagyis bármilyen határfeltétel esetén jó az eljárásunk? Ha Δ egy $N \times N$ -es valós szimmetrikus mátrix lenne, akkor sok mindent tudnánk a megoldásról, amit a 15.3 fejezetben foglaltunk össze. Ekkor tudnánk, hogy a sajátvektorok ortogonális bázist alkotnak, vagyis a fenti kérdésre igen lenne a felelet. A jelen folytonos esetet képzelhetjük úgy, hogy $N \rightarrow \infty$ -t veszünk, és végtelenül besűrítünk pontokat. Ekkor felállítható egy megfeleltetés a diszkrét és folytonos esetek között, ami a 3.1 táblázatban látható.

	diszkrét	folytonos
vektor	\mathbf{v}	$F \in L^2$
index	i	ξ
összegzés	\sum_i	$\int_S d^2\xi$
skalárszorzat	$\mathbf{u}^* \mathbf{v}$	$\int_S d^2\xi U^*(\xi) V(\xi)$
sajátérték-egy.	$\Delta \mathbf{F}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{F}_{(i)}$	$\Delta_{\parallel} F_{\lambda} = \lambda F_{\lambda}$
sajátérték	$\lambda_i \in \mathbf{R}$	$\lambda \in \mathbf{R}$
sajátvektor	$\mathbf{F}_{(i)}$ vektor	$F_{\lambda}(\xi)$ függvények
ortonormáltság	$\mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{F}_{(j)} = \delta_{ij}$	$\int_S d^2\xi F_{\lambda}^*(\xi) F_{\lambda'}(\xi) = \delta_{\lambda\lambda'}$
teljesség	$\sum_{i=1}^N F_{(i),a}^* F_{(i),b} = \delta_{ab}$	$\sum_{\lambda} F_{\lambda}^*(\xi) F_{\lambda}(\xi') = \delta(\xi - \xi')$
kifejtés	$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{F}_{(i)}$ $c_i = \mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{b}$	$f(\xi) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} F_{\lambda}(\xi)$ $c_{\lambda} = \int_S d^2\xi F_{\lambda}^*(\xi) f(\xi)$

3.1. táblázat. Megfeleltetés

3.4.2. A Laplace-operátor önadjungáltsága

Még bizonyítsuk be, hogy a Laplace-operátor valóban valós és önadjungált. A valósság nyilvánvaló, hiszen minden valós függvény Laplace-a is valós. Az adjungálás definícióját az operátorokra a diszkrét esetből általánosítva úgy adhatjuk meg (l. 15.3 fejezet), hogy:

$$\int_S d^2\xi F^*(\xi) M G(\xi) = \int_S d^2\xi (M^{\dagger} F(\xi))^* G(\xi). \quad (3.55)$$

A Laplace-operátorra a Gauss-tétel alkalmazásával írhatjuk

$$\int_S d^2\xi F^* \nabla (\nabla G) = - \int_S d^2\xi (\nabla F)^* (\nabla G) = \int_S d^2\xi (\Delta F)^* G \quad (3.56)$$

(a felületi integrálokat elhagyjuk vagy azért mert S -nek nincs határa, vagy azért, mert a végtelenben F ill. G eltűnik a négyzetesen integrálhatóság miatt). Emiatt $\Delta^{\dagger} = \Delta$, vagyis a Laplace-operátor valóban önadjungált.

3.4.3. Görbevonali koordináták

A következő megválaszolandó kérdés az, hogy hogyan néz ki a Laplace-operátor görbevonali koordináták esetén? Ennél kissé általánosabban fogalmazzuk meg a kérdést, és a görbevonali koordinátarendszerekben érvényes analízis alapjait nézzük meg.

Görbevonali koordinátarendszerben a tér minden pontját paraméterezem három számmal. Szokás szerint jelöljük ezeket a paramétereket ξ^i , $i = 1, 2, 3$ felső indexes mennyiségekkel, azaz $\mathbf{r}(\xi^i)$ a tér paraméterezése.

A görbevonali koordinátarendszerek egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy minden helyen mások a koordinátatengelyek. A koordinátavonalak definíciójához egy kivétellel

az összes paramétert rögzítem, így görbesereget kapok: $\mathbf{r}(\xi^j)|_{\xi^j \neq i = fix}$. Adott ponton 3 ilyen görbe megy át, annak megfelelően, hogy $i = 1, 2$ vagy 3 a fenti konstrukcióban. Ezek érintői jelölik ki a koordinátatengelyeket:

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (3.57)$$

Látható módon ezen *lokális* bázisok valóban minden pontban más irányba mutatnak.

Az \mathbf{R}^n -ben kitüntetett a Descartes-koordinátarendszer, amely globális ortonormált koordinátákat használ: $\mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i^{(0)}$. Ezekkel felírva az új bázisvektorokat:

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \mathbf{e}_j^{(0)} \equiv J_{ij}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j^{(0)}. \quad (3.58)$$

A J_{ij} mátrix függ attól, hogy hogyan választjuk a Descartes bázisunkat, azonban $J \equiv \det J_{ij}$ már nem függhet ettől, csakis a görbevonallú koordinátarendszer definíciójától. J geometriai jelentése a bázisvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata. Ezt láthatjuk onnan, hogy a determináns írható hármasszorzatként is

$$J = [\mathbf{e}_1(\mathbf{x}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{x})] \mathbf{e}_3(\mathbf{x}), \quad (3.59)$$

és ez éppen a kifeszített paralelepipedon térfogata. Másrészt a térfogatelem számításánál áttérve új koordinátákra a Jacobi determináns értéke jön be, ami éppen J :

$$\int d^3 \mathbf{x} = \int d^3 \xi J. \quad (3.60)$$

A továbbiakban elhagyjuk a \mathbf{x} hely explicit jelölését.

A (lokális) bázisvektorok általában nem normáltak, és nem merőlegesek egymásra. Ekkor érdemes bevezetni a *duális* bázist \mathbf{e}^i jelöléssel, hogy

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}^j = \delta_{ij}. \quad (3.61)$$

Egy vektor kifejezhető mindkét bázisban

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}^i \quad \Rightarrow \quad v^i = \mathbf{v} \mathbf{e}^i, \quad v_i = \mathbf{v} \mathbf{e}_i. \quad (3.62)$$

A felső indexes mennyiségeket szokás kontravariáns, az alsó indexeseket kovariáns komponenseknek nevezni. A felső és alsó indexek összeállításánál szummázást értünk. Hangsúlyozzuk, hogy \mathbf{v} egy koordinátarendszertől független mennyiség, a v^i koordináták azonban, természetesen, koordinátarendszer-függők.

Kifejezhető természetesen az egyik bázis is a másik segítségével

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \quad \Rightarrow \quad g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j, \quad (3.63)$$

g neve metrikus tenzor. Mivel

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} g^{jk} \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, \quad (3.64)$$

a két mátrix egymás inverze. A Descartes-bázissal kifejezve

$$g_{ij} = J_{ik} \mathbf{e}_k^{(0)} J_{j\ell} \mathbf{e}_\ell^{(0)} = J_{ik} J_{jk}. \quad (3.65)$$

Emiatt $J^2 = \det J_{ik} J_{jk} = \det g_{ij} \equiv g$. A térfogatelemet tehát a metrikus tenzorral is kifejezhetjük $J = \sqrt{g}$.

Két vektor skaláris szorzata:

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = u^i \mathbf{e}_i v^j \mathbf{e}_j = u^i v^j g_{ij}, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{u}\mathbf{v} = u_i \mathbf{e}^i v_j \mathbf{e}^j = u_i v_j g^{ij}. \quad (3.66)$$

A vektoriális szorzat kifejezése

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{e}_k = a^i b^j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = J \varepsilon_{ijk} a^i b^j. \quad (3.67)$$

Most nézzük meg, hogyan változnak a deriválás szabályai, ha görbevonallú koordinátáink vannak. A deriválásnak abszolút, koordinátarendszer-független értelme van, azt méri, mennyit változik egy mező értéke, ha \mathbf{x} -ből $\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ pontba megyek át. Ezt fogjuk kifejezni a görbevonallú koordinátákkal.

Először tekintsünk egy skalár mezőt, és vizsgáljuk a fenti eltolás során létrejövő változást. Koordinátázva a teret $\xi^i \rightarrow \xi^i + \delta\xi^i$ koordinátákon felvett mezőértékek különbségét nézzük:

$$\delta\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\xi + \delta\xi) - \Phi(\xi) = \delta\xi^i \frac{\delta\Phi}{\delta\xi^i} = \delta\mathbf{x} \mathbf{e}^i \frac{\delta\Phi}{\delta\xi^i}. \quad (3.68)$$

Mivel a bal oldalon egy koordinátarendszer-független mennyiség áll, és $\delta\mathbf{x}$ is koordinátarendszer-független mennyiség, ezért

$$\text{grad } \Phi = \nabla\Phi = \mathbf{e}^i \frac{\delta\Phi}{\delta\xi^i} \quad \Rightarrow \quad \nabla_i \Phi = \partial_i \Phi, \quad \nabla^i \Phi = g^{ij} \partial_j \Phi \quad (3.69)$$

is koordinátázásfüggetlen, fizikai mennyiség – ez a skalár mező gradiense.

Ha vektormezőt megváltozását nézem, akkor valamivel komplikáltabb a helyzet, mert figyelembe kell venni a bázisok megváltozását is!

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E^i \mathbf{e}_i)(\xi + \delta\xi) - (E^i \mathbf{e}_i)(\xi) = \delta\xi^j \left[\frac{\partial E^i}{\partial \xi^j} \mathbf{e}_i + E^i \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j} \right] = \\ &= \delta\mathbf{x} \left[\frac{\partial E^i}{\partial \xi^j} \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i + E^i \mathbf{e}^j \otimes \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j} \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Szokás a bázisvektor deriváltját, amely egy vektormező, kifejezni koordináták szerint:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}^k \partial_i \mathbf{e}_j, \quad (3.71)$$

Γ -k a Christoffel szimbólumok. Mivel

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (3.72)$$

Ismét a gradiensnél látott érveléssel: a bal oldal koordinátarendszer-független, $\delta \mathbf{x}$ szintén az, ezért a vektormező deriváltmátrixa is koordinátarendszer-független.

$$\nabla \otimes \mathbf{E} = \left[\frac{\partial E^k}{\partial \xi^j} + E^i \Gamma_{ij}^k \right] \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \equiv \nabla_j E^k \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \quad \Rightarrow \quad (\nabla_i E)^k = \partial_i E^k + \Gamma_{ij}^k E^j \quad (3.73)$$

Fontos megjegyezni, hogy a zárójeles kifejezés egyik tagja sem alkot koordinátarendszer-független mennyiséget, vagyis a parciális deriválásnak abszolút (fizikai) jelentése nincs. Az igazi fizikai deriválás a ∇ kovariáns derivált.

Megjegyzések a kovariáns deriváltról, illetve Christoffel szimbólumokról:

- írjuk a kovariáns deriválást $(\nabla_i E)^k = \nabla_{ij}^k E^j$ alakban, ahol $\nabla_{ij}^k = \partial_i \delta_j^k + \Gamma_{ij}^k$. Ezt átírhatjuk, bevezetve a $\Gamma_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^j$ mátrixokat, melynek komponensei $(\Gamma_i)_j^k = \Gamma_{ij}^k$. Ekkor a kovariáns derivált mint mátrix $\nabla_i = \partial_i + \Gamma_i$.
- a definiáló (3.71) képlet alapján

$$\mathbf{e}_i(\xi + d\xi) = \mathbf{e}_i(\xi) + \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k d\xi^j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_i(\xi + d\xi) = \mathbf{e}_i(\xi) + \Gamma_i d\mathbf{x}. \quad (3.74)$$

Vagyis Γ_i mátrix megadja, hogyan változik a koordinátarendszer i . bázisvektora, ha egy kicsit arrébb megyünk. Más szóval megadja a koordinátarendszerek kapcsolatát – ezért szokták Γ -t *konnerxió*-nak is nevezni. Mivel a koordinátarendszerek kapcsolatát adja meg, definíciója koordinátarendszer-függő!

- Párhuzamos eltolásról akkor beszélünk, ha az új helyen a fizikai \mathbf{E} ugyanaz mint a régi helyen. A koordinátázott alak persze változik: ha adott \mathbf{x} pontban egy \mathbf{E} vektor, és $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ helyre párhuzamosan eltoljuk, akkor az ottani koordinátarendszerben a komponensei nem ugyanazok, mint az eredeti komponensek. A komponensek változásához a fizikai \mathbf{E} változatlanágát használhatjuk ki: $d\mathbf{E} = 0$, azaz

$$dE^i \mathbf{e}_i + \Gamma_{ij}^k E^i d\xi^j \mathbf{e}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad dE^k = -\Gamma_{ij}^k E^i d\xi^j. \quad (3.75)$$

- Ha két párhuzamos eltolást végzek, először \mathbf{u} aztán \mathbf{v} vektorokkal, akkor a komponensek változása:

$$\begin{aligned} E^k(x + u + v) &= E^k(x + u) - \Gamma_{ij}^k(x + u) E^i(x + u) v^j = \\ &= E^k(x) - \Gamma_{ij}^k(x) E^i(x) u^j - \Gamma_{ij}^k(x) E^i(x) v^j - \\ &\quad - \partial_\ell \Gamma_{ij}^k(x) E^i(x) u^\ell v^j + \Gamma_{ij}^k(x) \Gamma_{\ell m}^i(x) E^\ell(x) u^m v^j \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ez a kifejezés nem szimmetrikus az $u - v$ cserére: ha előbb mozdulok a \mathbf{v} felé, aztán az \mathbf{u} felé, akkor az előző eredményhez képesti eltérés

$$\begin{aligned}\delta E^k &= \partial_\ell \Gamma_{ij}^k E^i u^\ell v^j - \partial_\ell \Gamma_{ij}^k E^i v^\ell u^j - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{\ell m}^i E^\ell u^m v^j + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{\ell m}^i E^\ell v^m u^j = \\ &= R_{ij\ell}^k E^i u^j v^\ell,\end{aligned}\quad (3.77)$$

ahol

$$R_{ij\ell}^k = \partial_j \Gamma_{\ell i}^k - \partial_\ell \Gamma_{ji}^k + \Gamma_{mj}^k \Gamma_{\ell i}^m - \Gamma_{m\ell}^k \Gamma_{ji}^m. \quad (3.78)$$

Ez a mennyiség nulla, amit könnyen meg lehet mutatni, felhasználva $\Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}^k \partial_i \mathbf{e}_j$ valamint $\partial_j (\mathbf{e}^k \mathbf{e}_m) = \partial_j \delta_m^k = 0$ és $\sum_m \mathbf{e}^m \mathbf{e}_m = \mathbf{1}$ egyenleteket. Fizikailag is érthető, hiszen egy síkon a párhuzamos eltolás egyértelmű, akármilyen úton hajtjuk is végre azt. Ha azonban egy gömbfelületen próbálnánk az eltolást megvalósítani, akkor a fenti mennyiség már nem lenne nulla, ahogy ezt geometriai úton is egyszerűen kipróbálhatjuk. Ezért a fenti mennyiséget a tér *görbületének* hívhatjuk. Könnyen látható a Christoffel szimbólumok mátrix reprezentációjának alapján, hogy

$$(R_{j\ell})_i^k = ([\nabla_j, \nabla_\ell])_i^k = (\nabla_j \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_j)_i^k. \quad (3.79)$$

- Többindexes mennyiségek kovariáns deriváltjainak számításakor felhasználható, hogy $A^i B^j \dots$ többindexes mennyiség, és ∇ deriválás, vagyis a láncszabály alkalmazható. Így pl.

$$(\nabla_i A B)^{jk} = (\nabla_i A)^j B^k + A^j (\nabla_i B)^k = \partial_i (A^j B^k) + \Gamma_{i\ell}^j A^\ell B^k + \Gamma_{i\ell}^k A^j B^\ell, \quad (3.80)$$

tehát

$$(\nabla_i T)^{jk} = \partial_i T^{jk} + \Gamma_{i\ell}^j T^{\ell k} + \Gamma_{i\ell}^k T^{j\ell}. \quad (3.81)$$

- Kovariáns vektormező kovariáns deriváltjának számításakor felhasználhatjuk, hogy $E_k A^k$ skalármező tetszőleges A^j esetén, ezért:

$$\begin{aligned}\nabla_i (E_k A^k) &= (\nabla_i E)_k A^k + E_k (\nabla_i A)^k = (\nabla_i E)_k A^k + E_k \partial_i A^k + \Gamma_{ij}^k E_k A^j = \\ &= \partial_i (E_k A^k).\end{aligned}\quad (3.82)$$

Innen

$$(\nabla_i E)_j = \partial_i E_j - \Gamma_{ij}^k E_k = (\delta_j^k \partial_i - \Gamma_{ij}^k) E_k. \quad (3.83)$$

- A metrikus tenzor deriváltjához egy vektormező kovariáns deriváltja i . irányban

$$\begin{aligned}\nabla_i \mathbf{E} &= \mathbf{e}^j (\nabla_i E)_j = \mathbf{e}^j (\partial_i E_j - \Gamma_{ij}^k E_k) = \\ &= \mathbf{e}_j (\nabla_i E)^j = \mathbf{e}_j (\partial_i E^j + \Gamma_{ik}^j E^k).\end{aligned}\quad (3.84)$$

Felhasználva, hogy $E_j = g_{jk} E^k$, a fenti egyenlet átrendezésével azt látjuk, hogy a metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla:

$$(\nabla_i g)_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} - \Gamma_{ik}^\ell g_{j\ell} = 0. \quad (3.85)$$

Ez biztosítja, hogy a kovariáns deriválás indexeit is g -vel lehet fel-le húzni.

- A fenti egyenletet mindhárom lehetséges indexkombinációval felírva adódik

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}). \quad (3.86)$$

A vektormező deriváltjának trace-e az \mathbf{E} divergenciája, skalármező

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \mathbf{E} = \partial_j E^j + \Gamma_{ij}^j E^i. \quad (3.87)$$

Hogy a fenti kifejezést leegyszerűsítsük, vegyük a J deriváltját:

$$\partial_i J = \partial_i \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \Gamma_{1i}^1 \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \dots = \Gamma_{ji}^j J \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^j = \frac{\partial_i J}{J}. \quad (3.88)$$

Ezzel

$$\nabla \mathbf{E} = \partial_i E^i + \frac{\partial_i J}{J} E^i = \frac{1}{J} \partial_i (J E^i). \quad (3.89)$$

Mivel $g = J^2$, ezért

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j \Phi). \quad (3.90)$$

Különösen egyszerű kifejezéseket kaphatunk, ha az új bázis is ortogonális, azaz

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = h_i^2 \delta_{ij} = g_{ij} \quad \Rightarrow \quad g^{ij} = \frac{1}{h_i^2} \delta_{ij}, \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3. \quad (3.91)$$

Ekkor

$$\Delta \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i}. \quad (3.92)$$

Az integrálási mérték

$$\int d^3 \mathbf{x} = \int d^3 \xi h_1 h_2 h_3. \quad (3.93)$$

Vektormező komponenseinél szokták *normálni* a bázisvektorokat, vagyis bevezetik a

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = E^i \mathbf{e}_i = \hat{E}_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad \Rightarrow \quad E^i = \frac{1}{h_i} \hat{E}_i, \quad E_i = h_i \hat{E}_i, \quad (3.94)$$

ekkor ortogonális bázis esetén nincs különbség a felső és alsó indexek között. A gradiens komponensei, illetve a divergencia kifejezése ekkor

$$\nabla_i \Phi = \frac{1}{h_i} \partial_i \Phi, \quad \nabla \mathbf{E} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \partial_i \frac{h_1 h_2 h_3 \hat{E}^i}{h_i}, \quad (3.95)$$

a Laplace-operátor kifejezése ugyanaz.

Még néhány formula: $\nabla \otimes \mathbf{E}$ antiszimmetrikus része

$$(\nabla_i E_j - \nabla_j E_i) \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i = \nabla_i E_j (\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i - \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = \frac{1}{J} \nabla_i E_j \varepsilon^{ijk} \mathbf{e}_k \times, \quad (3.96)$$

tehát

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{J} \varepsilon^{ijk} \nabla_i E_j \mathbf{e}_k. \quad (3.97)$$

Γ alsó indexeinek szimmetriája miatt

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{1}{J} \varepsilon^{ijk} \partial_i E_j \mathbf{e}_k \rightarrow \varepsilon^{ijk} \frac{h_k}{J} \partial_i (h_j \hat{E}_j) \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (3.98)$$

ahol a jobb oldal ortogonális koordinátarendszerekben érvényes.

3.5. Gömbi koordinátarendszer

A gömbi koordinátákra a következő transzformációval térünk át

$$(x, y, z) \rightarrow (r, \theta, \varphi), \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}. \quad (3.99)$$

A lokális bázis (3.57) alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \mathbf{e}_\theta &= (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) \\ \mathbf{e}_\varphi &= (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Szokás $(\theta, \varphi) = \Omega$ jelölést is alkalmazni (térshög). A koordinátatengelyek egymásra merőlegesek, ezért a megfelelő h mennyiségek

$$h_r = \sqrt{\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r} = 1, \quad h_\theta = \sqrt{\mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta} = r, \quad h_\varphi = \sqrt{\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi} = r \sin \theta. \quad (3.101)$$

Ezért az integrálási mérték, a határokat is feltüntetve

$$\int d^3 \mathbf{x} = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta = \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad x = \cos \theta. \quad (3.102)$$

A Laplace-operátor

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (3.103)$$

Az első tag írható más alakban is

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\Phi). \quad (3.104)$$

A gömbi koordinátarendszer jól illeszkedik gömbfelületeken vagy kúpfelületeken adott határfeltételekhez.

A Laplace-egyenletet rendezzük át a korábbi formuláknak megfelelően. Érdemes megszorozni az egyenletet r^2 -tel

$$r^2 \Delta \Phi = 0 = r^2 \Delta_r \Phi + \Delta_\Omega \Phi, \quad (3.105)$$

ahol bevezettük a

$$\begin{aligned} \Delta_r \Phi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \\ \Delta_\Omega \Phi &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (3.106)$$

jelöléseket. Keressük a megoldást

$$\Phi(r, \Omega) = R(r)Y(\Omega) \quad (3.107)$$

alakban. A fenti egyenletet osztva Φ -vel

$$\frac{r^2 \Delta \Phi}{\Phi} = 0 = \frac{r^2 \Delta_r R}{R} + \frac{\Delta_\Omega Y}{Y} \Rightarrow r^2 \Delta_r R = \ell(\ell + 1)R, \quad \Delta_\Omega Y = -\ell(\ell + 1)Y, \quad (3.108)$$

hiszen az első tag csak r -től, a második csak Ω -tól függ. A sajátértéket most $\lambda = \ell(\ell + 1)$ alakban írtuk a későbbi kényelem kedvéért.

3.5.1. A radiális egyenlet

A radiális egyenlet kiírva

$$r \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rR) = \ell(\ell + 1)R. \quad (3.109)$$

Megoldását keressük $R(r) = r^a$ alakban

$$a(a + 1) = \ell(\ell + 1) \Rightarrow a = \ell, \quad \text{vagy} \quad a = -(\ell + 1). \quad (3.110)$$

Mivel másodrendű az egyenlet, valóban két lineárisan független megoldást vártunk.

3.5.2. A térszögfüggő rész

A térszögtől függő részt szorozzuk meg $\sin^2 \theta$ -val:

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\ell(\ell + 1) \sin^2 \theta Y. \quad (3.111)$$

Keressük a megoldást itt is szorzat alakban $Y(\theta, \varphi) = P(\theta)\Psi(\varphi)$. A fenti egyenletet osszuk el Y -nal, és rendezzük át

$$\left[\frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \ell(\ell + 1) \sin^2 \theta \right] + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = 0. \quad (3.112)$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} &= -m^2 \Psi \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P &= 0, \end{aligned} \quad (3.113)$$

hiszen az első tag csak θ -tól, a második csak φ -tól függ.

A Ψ -ra vonatkozó egyenletet jól ismerjük, megoldásai

$$\Psi(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad \text{vagy} \quad \Psi(\varphi) = e^{-im\varphi}. \quad (3.114)$$

Másodrendű egyenlet lévén, itt is két lineárisan független megoldást kaptunk.

A P -re vonatkozó egyenlet nem a szokásos. Hogy a trigonometrikus függvényektől megszabaduljunk, vezessük be új változót

$$x = \cos \theta, \quad \frac{d}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P = 0. \quad (3.115)$$

Ezt *általánosított (vagy asszociált) Legendre-egyenletként* ismeri a matematikai irodalom (lásd pl. [10]). Két lineárisan független megoldást várunk, jelöljük őket P_ℓ^m és Q_ℓ^m -el (első ill. másodfajú Legendre-függvények). Vizsgáljuk meg ezeket a megoldásokat előbb speciális esetekben:

$m = \ell = 0$ eset: Ekkor

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dx} = \frac{C_2}{1 - x^2} \quad \Rightarrow \quad P(x) = C_1 + \frac{C_2}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \quad (3.116)$$

A két megoldást azonosítjuk $P_0^0 = 1$ és $Q_0^0 = \ln \frac{1+x}{1-x}$. A második megoldás $x = \pm 1$ -nél, azaz $\theta = 0, \pi$ -nél divergál. Ha tehát ez a pont benne van az értelmezési tartományban, akkor Q_0^0 nem vehet részt a kifejtésben – hasonlóan ahhoz, hogy $f(0) = 0$ függvények

trigonometrikus függvényekkel való kifejtésében csak a sin-ok szerepelhetnek, a cos-ok nem.

$m = 0$, $\ell \neq 0$ eset: Ekkor amit kapunk

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \ell(\ell+1)P = 0 \quad (3.117)$$

Legendre-egyenlet. Ennek megoldásairól a következőket lehet tudni (l. pl. [11, 12])

- Általános ℓ esetén a két megoldás, $P_\ell(x)$ és $Q_\ell(x)$ közül az egyik $x = 1$ -nél ($\theta = \pi$ -nél), a másik $x = -1$ -nél ($\theta = 0$ -nál) divergál.
- Ha ℓ egész, akkor az egyik megoldás, $P_\ell(x)$, ℓ -edfokú polinom, vagy páros vagy páratlan hatványokat tartalmaz, ezért $P_\ell(-x) = (-1)^\ell P_\ell(x)$; míg $Q_\ell(x)$ divergál $x = \pm 1$ -nél (l. az $\ell = 0$ esetet). A szokásos normálás $P_\ell(1) = 1$. Ekkor az általános alak megadható a Rodrigues-formulával

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \end{cases} \quad (3.118)$$

- Az ortogonalitási és teljességi relációjuk:

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell(x) P_{\ell'}(x) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}, \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} P_\ell(x) P_\ell(x') = \delta(x-x'). \quad (3.119)$$

- A Legendre-polinomok generátorfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell P_\ell(x). \quad (3.120)$$

Ennek bizonyítása: Vizsgáljuk az $1/|\mathbf{y} - \mathbf{e}_z|$ kifejezést abban az esetben, ha $t = |\mathbf{y}| < 1$. Gömbi koordinátarendszerben kifejezve

$$\frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{e}_z|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 - 2t \cos \theta}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 - 2t \cos \theta}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell(t) P_\ell(\cos \theta), \quad (3.121)$$

hiszen P_ℓ -ek bázist alkotnak a $[-1, 1]$ tartományban értelmezett (négyzetesen integrálható) függvények terében. Másrészt a Laplace-operátort alkalmazva

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{e}_z|} = -4\pi \delta(\mathbf{y} - \mathbf{e}_z) = 0, \quad (3.122)$$

hiszen $|\mathbf{y}| < |\mathbf{e}_z|$. Emiatt $f_\ell(t) \sim t^\ell$ vagy $t^{-\ell-1}$. Mivel ez utóbbi nem reguláris a $t = 0$ -ban, marad az első. Tehát

$$\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 - 2tx}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell t^\ell P_\ell(x). \quad (3.123)$$

A c_ℓ együtthatókat az $x = 1$ eset vizsgálatával kapjuk. Ekkor ugyanis $P_\ell(1) = 1$ miatt

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell t^\ell \Rightarrow c_\ell = 1. \quad (3.124)$$

Ez a formula fontos lesz a multipol kifejtésnél, hiszen

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta}} = \frac{1}{r_>} \frac{1}{\sqrt{1 + (r_</r_>)^2 - 2(r_</r_>) \cos \theta}} = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} P_\ell(\cos \theta), \end{aligned} \quad (3.125)$$

ahol $r_< = \min(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)$ és $r_> = \max(|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|)$.

Általános eset: Ekkor meg kell oldani a

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP}{dx} \right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P = 0 \quad (3.126)$$

egyenletet. Ennek megoldásaira hasonlókat mondhatók mint az előbb

- Általános ℓ, m esetén a két megoldás, $P_\ell^m(x)$ és $Q_\ell^m(x)$ közül az egyik $x = 1$ -nél ($\theta = \pi$ -nél), a másik $x = -1$ -nél ($\theta = 0$ -nál) divergál.
- Ha ℓ, m egész és $-\ell \leq m \leq \ell$, akkor az egyik megoldás, $P_\ell^m(x)$ reguláris a teljes $x \in [-1, 1]$ tartományban, és pozitív m -ekre

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x), \quad m \geq 0, \quad (3.127)$$

negatív m -ekre

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(x), \quad m < 0. \quad (3.128)$$

Ekkor a másik megoldás, $Q_\ell^m(x)$ divergál $x = \pm 1$ -nél.

- Ortogonalitási reláció:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_\ell^m(x) P_{\ell'}^m(x) &= \frac{2(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!} \delta_{\ell\ell'}, \\ \int_{-1}^1 dx \frac{P_\ell^m(x) P_{\ell'}^{m'}(x)}{1-x^2} &= \frac{(\ell+m)!}{m(\ell-m)!} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (3.129)$$

3.5.3. Gömbfüggvények

A teljes térszögfüggő részben a reguláris (elsőrendű) Legendre-függvényekből kapjuk a *gömbfüggvényeket* [13]; a szokásos normálással

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (3.130)$$

Ekkor igaz

$$Y_{\ell, -m} = (-1)^m Y_{\ell m}^*, \quad \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\Omega) Y_{\ell' m'}(\Omega) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (3.131)$$

valamint

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta' \varphi') = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \theta - \cos \theta'). \quad (3.132)$$

Az első néhány gömbfüggvény

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta, \quad Y_{11} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \\ Y_{20} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad Y_{21} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \quad Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}. \end{aligned} \quad (3.133)$$

Gömbfelületen négyzetesen integrálható függvények kifejtethetők $Y_{\ell m}$ szerint:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad f_{\ell m} = \int d\Omega Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) f(\theta, \varphi). \quad (3.134)$$

Ha a kifejtendő függvény nem függ φ -től, akkor az ortogonalitás miatt csak $m = 0$ jön szóba.

Gömbfüggvények és forgatások

A gömbfüggvények fontos szerepet játszanak a forgatások vizsgálatában is. Ehhez végezzünk el egy ortogonális transzformációt a vektorokon: $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ -re $\mathbf{x}' = \mathbf{O}\mathbf{x}$, ahol $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{1}$. Ekkor $\mathbf{x}'^2 = (\mathbf{O}\mathbf{x})(\mathbf{O}\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbf{O}^T\mathbf{O}\mathbf{x} = \mathbf{x}^2$, vagyis a hossz invariánsan marad. \mathbf{O} tehát forgatást ír le.

A Laplace-operátor $\Delta = \nabla\nabla$, azaz a ∇ „négyzete”, ezért invariáns. Gömbi koordinátarendszerben felírva a radiális rész szintén invariáns (hiszen a vektorok hossza nem változik). Emiatt a térszögfüggő Laplace-operátor is invariáns.

Nézzük most a gömbfüggvényeket. Mivel egy \mathbf{n} egységvektor gömbi koordinátái ($r = 1, \theta, \varphi$), ezért a (θ, φ) argumentumokat helyettesíthetjük az \mathbf{n} megadásával: így pl. $Y_{\ell m}(\mathbf{n})$. Elforgatva a koordinátarendszert $Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n})$ függvényt kapjuk. Miután azonban Δ_{Ω} invariáns a forgatásra, ezért igaz lesz

$$\Delta_{\Omega}Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = -\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\mathbf{n}) \quad \Rightarrow \quad \Delta_{\Omega}Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n}) = -\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n}). \quad (3.135)$$

Ezért $Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n})$ az $\ell(\ell+1)$ sajátértékhez tartozó sajátfüggvénye Δ_{Ω} -nak. Következésképpen benne van az ezen sajátértékhez tartozó sajátaltérben, így kifejezhető az ehhez a sajátértékhez tartozó sajátfüggvények összegeként:

$$Y_{\ell m}(\mathbf{O}\mathbf{n}) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D_{mm'}(\mathbf{O})Y_{\ell m'}(\mathbf{n}), \quad (3.136)$$

ahol az együtthatók függnek a forgatás mátrixától. Mivel két forgatás egymásutánját nézve $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = \mathbf{O}_3$ szintén forgatáshoz jutunk, a fenti formulába beírva a

$$\sum_n D_{mn}(\mathbf{O}_1)D_{nm'}(\mathbf{O}_2) = D_{mm'}(\mathbf{O}_3)$$

kifejezést kapjuk. Az $Y_{\ell m}$ függvények normáltsága miatt (l. (3.131) második egyenlete), valamint a $d\Omega$ integrálási mérték forgásinvarianciája miatt igaz az is, hogy

$$\sum_n D_{nm}^*(\mathbf{O})D_{nm'}(\mathbf{O}) = \delta_{mm'}.$$

A fentieket úgy foglалhatjuk össze, hogy a forgások *ábrázolódnak* az adott ℓ -hez tartozó gömbfüggvények terén.

Ezeket a gondolatokat sokféleképpen hasznosíthatjuk. Egyik alkalmazás a következő tétel:

3.3. Tétel *Kifejtési tétel Ha adott \mathbf{n} illetve \mathbf{n}' két egységvektor, akkor*

$$P_{\ell}(\mathbf{n}'\mathbf{n}) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\mathbf{n}')Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \quad (3.137)$$

Bizonyítás. Jelöljük \mathbf{O} -val azt a forgatást, amely \mathbf{n}' -t \mathbf{e}_z -be viszi: $\mathbf{O}\mathbf{n}' = \mathbf{e}_z$. Emiatt

$$\begin{aligned} Y_{\ell m}(\mathbf{n}') &= Y_{\ell m}(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{e}_z) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D_{mm'}(\mathbf{O}^{-1})Y_{\ell m'}(\mathbf{e}_z) = D_{m0}(\mathbf{O}^{-1})\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} = \\ &= D_{0m}^*(\mathbf{O})\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}, \end{aligned} \quad (3.138)$$

ahol felhasználtuk, hogy $\theta = 0$ -nál, vagyis $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ esetén (3.130) miatt $Y_{\ell m}(\mathbf{e}_z) = \delta_{m0}\sqrt{(2\ell+1)/(4\pi)}$.

Másrészt ha $m = 0$ -t nézzük, akkor $Y_{\ell 0}(\mathbf{n}) = \sqrt{(2\ell+1)/(4\pi)}P_{\ell}(\mathbf{e}_z\mathbf{n})$, hiszen az argumentum $\mathbf{e}_z\mathbf{n} = \cos\theta$. Emiatt

$$\begin{aligned} P_{\ell}(\mathbf{e}_z\mathbf{O}\mathbf{n}) &= \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}Y_{\ell 0}(\mathbf{O}\mathbf{n}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\sum_m D_{0m}(\mathbf{O})Y_{\ell m}(\mathbf{n}) = \\ &= \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_m Y_{\ell m}^*(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{e}_z)Y_{\ell m}(\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Mivel $\mathbf{e}_z\mathbf{O}\mathbf{n} = (\mathbf{O}^T\mathbf{e}_z)\mathbf{n} = (\mathbf{O}^{-1}\mathbf{e}_z)\mathbf{n} = \mathbf{n}'\mathbf{n}$, ezért éppen a kívánt alakot kaptuk. \square

3.5.4. A Laplace-egyenlet megoldásai

A teljes kifejtéshez használandó alak:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{\nu, m} \left(A_{\nu, m} r^{\nu} P_{\nu}^m(\cos\theta) e^{im\varphi} + \frac{B_{\nu, m}}{r^{\nu+1}} P_{\nu}^m(\cos\theta) e^{im\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + C_{\nu, m} r^{\nu} Q_{\nu}^m(\cos\theta) e^{im\varphi} + \frac{D_{\nu, m}}{r^{\nu+1}} Q_{\nu}^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \right). \end{aligned} \quad (3.140)$$

Speciális esetekben:

- Ha $\varphi \in [0, 2\pi]$, akkor $\Phi(r, \theta, \varphi) = \Phi(r, \theta, \varphi + 2\pi)$ miatt $m \in \mathbf{Z}$ egész szám. Ha a határfeltételek nem függnek φ -től (hengersizimmetria), akkor $m = 0$.
- Ha a $\theta = 0$, azaz a z tengely benne van az értelmezési tartományban, akkor csak a P_{ν}^m függvények használandók.
- Ha a megoldás a teljes 4π térszögben értelmezett, akkor $\ell \in \mathbf{N}$ és $-\ell \leq m \leq \ell$, vagyis a gömbfüggvényeket kell használnunk

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(A_{\ell m} r^{\ell} + \frac{B_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi). \quad (3.141)$$

Az $A_{\ell m}$ illetve $B_{\ell m}$ együtthatókat a határfeltételek szabják meg.

- Legspeciálisabb esetben ha a megoldás a teljes 4π térszögben értelmezett, és a határfeltételek nem függnék φ -tól (hengerszimmetria):

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (3.142)$$

Ekkor az A_{ℓ} illetve B_{ℓ} együtthatók meghatározásához elég a potenciál ismerete a $\cos \theta = 1$ mellett, azaz a z tengelyen, ekkor ugyanis $P_{\ell}(1) = 1$.

Alkalmazás:

Oldjuk meg a már látott homogén \mathbf{E}_0 térerősségbe helyezett földelt, R sugarú fémgömb terének problémáját gömbi koordinátarendszerben is.

Megoldás

Mivel a teljes 4π tartományban értelmezett a megoldás, ezért a gömbfüggvények szerinti kifejtést kell választanunk. Válasszuk a z tengelyt az \mathbf{E}_0 irányának, akkor a feladat φ -független, és így kifejezhető a Legendre-polinomok szerint, l. (3.142):

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta). \quad (3.143)$$

Az $r \rightarrow \infty$ limeszben csak a pozitív együtthatók maradnak, ott adott a potenciál értéke:

$$\Phi(r \rightarrow \infty, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta, \quad (3.144)$$

emiatt

$$A_1 = -E_0 \quad A_{\ell \neq 1} = 0. \quad (3.145)$$

A gömbfelületen a potenciál nulla

$$\Phi(r = R, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} R^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{R^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = 0, \quad (3.146)$$

vagyis

$$B_{\ell} = -A_{\ell} R^{2\ell+1} \quad \Rightarrow \quad B_1 = -E_0 R^3, \quad B_{\ell \neq 1} = 0. \quad (3.147)$$

Végül is kapjuk

$$\Phi = -E_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) r \cos \theta = -\mathbf{E}_0 \mathbf{x} \left(1 - \frac{R^3}{|\mathbf{x}|^3} \right), \quad (3.148)$$

ahogyan korábban már láttuk (vö. (3.32)). ♦

Alkalmazás:

Egy Θ nyílásszögű kúp felületén $\Phi = 0$. Milyen a tér a kúp belsejében, a csúcs közelében, ha a kúpot lezáró gömbfelületen a potenciál forgásszimmetrikus?

Megoldás:

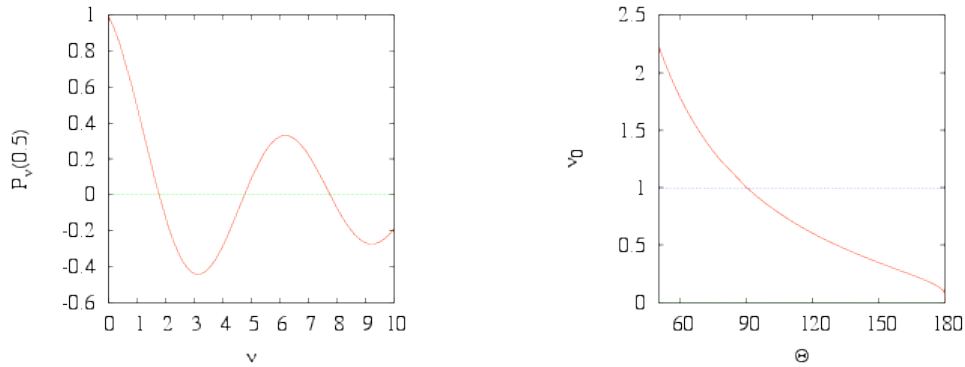
Itt *nem* a teljes 4π tartományban értelmezett a megoldás, viszont a $\theta = 0$ benne van az értelmezési tartományban, és a megoldás nem függ φ -től. Ezenfelül a potenciál véges az $r \rightarrow 0$ esetben. Így a kifejtés:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{\nu} A_{\nu} r^{\nu} P_{\nu}(\cos \theta). \quad (3.149)$$

A lehetséges ν értékeket az szorítja meg, hogy a potenciál nulla $\theta = \Theta$ esetben:

$$P_{\nu}(\cos \Theta) = 0. \quad (3.150)$$

Egy adott Θ -ra a $P_{\nu}(\cos \Theta)$ oszcilláló függvénye ν -nek, l. ábra. 3.1. A $P_{\nu}(x)$



3.1. ábra. Legendre-függvény

függvények teljes rendszert alkotnak, azaz kifejthető $r = R$ mellett adott (φ -független) határfeltétel.

Ha egyre közelebb megyünk a csúcshoz, akkor egyre jobban a legkisebb lehetséges ν érték dominál

$$\Phi(r \rightarrow 0, \theta) \sim r^{\nu_0} P_{\nu_0}(\cos \theta). \quad (3.151)$$

A ν_0 legkisebb nullhely függése $\cos \Theta$ -tól a 3.1 ábrán látható. Jellemzők

- Ha $\Theta \rightarrow 0$, akkor $\cos \Theta \rightarrow 1$, viszont $P_{\nu}(1) = 1$, azaz egyre nagyobb ν kell a nullhelyhez, így $\nu_0 \rightarrow \infty$.
- Ha $\Theta < \pi/2$, azaz bemélyedés, akkor $\nu_0 > 1$.

- Ha $\Theta = \pi/2$, akkor a kúp síklapba megy át, ennek közelében $\Phi \sim z = r \cos \theta$, azaz $\nu_0 = 1$ -et várunk; mivel $P_1(x) = x$, ezért valóban $\nu_0 = 1$.
- Ha $\Theta > \pi/2$, azaz csúcs, akkor $\nu_0 < 1$.

A felületre merőleges elektromos tér nagysága

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \sim r^{\nu_0-1} \sin \theta P'_{\nu_0}(\cos \theta) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (3.152)$$

Ez azt jelenti, hogy $\Theta > \pi/2$ esetén, vagyis csúcs esetén, a felülethez közeledve a térerősség végtelenhez tart. Ez a csúcshatás, amit például a villámhárító esetében tudunk kihasználni. Levegőben ugyanis a maximális elektromos tér $E_{\max} \approx 10^6 - 10^7 \text{ V/m}$ (valamelyest függ a levegő állapotától, pl. nedves-ségtartalmától). Ennél nagyobb térben a kis számban jelen levő ionok a tér hatására felgyorsulva a többi gázmolekulával ütköznek, és újabb ionokat hoznak létre. Az így kialakuló lavina kisülést, villámot eredményez. Csúcsos felületnél, ahogy láttuk, nagyobb a térerő, emiatt több az ion, ezért oda fog becsapni a villám. ♦

3.6. Hengerkoordináták

A hengerkoordináták definíciója

$$(x, y, z) \rightarrow (\varrho, \varphi, z), \quad \begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \\ y = \varrho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (3.153)$$

A lokális bázis (3.57) alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\varrho &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \\ \mathbf{e}_\varphi &= (-\varrho \sin \varphi, \varrho \cos \varphi, 0) \\ \mathbf{e}_z &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.154)$$

Emiatt

$$h_\varrho = 1, \quad h_\varphi = \varrho, \quad h_z = 1 \quad \Rightarrow \quad \int d^3\mathbf{x} = \int_0^\infty d\varrho \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^\infty dz. \quad (3.155)$$

A Laplace-egyenlet alakja

$$0 = \Delta \Phi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (3.156)$$

Az egyenlet mindhárom változójában szétválasztható, vagyis a megoldás kereshető

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = R(\varrho)\Psi(\varphi)Z(z) \quad (3.157)$$

alakban. Ezt alkalmazva, és elosztva Φ -vel:

$$0 = \Delta\Phi = \frac{1}{\varrho R} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}. \quad (3.158)$$

Viszont választhatunk, melyik koordinátát tekintjük ξ_\perp -nek. Egyik lehetőség, hogy $\xi_\parallel = (\varrho, \varphi)$, $\xi_\perp = z$. Ekkor

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z \quad \Rightarrow \quad Z = e^{kz}, \quad \text{vagy} \quad e^{-kz}, \quad (3.159)$$

valamint

$$\frac{1}{\varrho R} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2 \Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = -k^2. \quad (3.160)$$

Ezt megszorozva ϱ^2 -tel kapjuk

$$\left[\frac{\varrho}{R} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + k^2 \varrho^2 \right] + \frac{1}{\Psi} \frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = 0, \quad (3.161)$$

tehát mindkét tagnak konstansnak kell lennie. Ez első egyenlet

$$\frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} = -m^2 \Psi. \quad (3.162)$$

Ennek megoldása

$$\Psi = e^{im\varphi}, \quad \text{vagy} \quad e^{-im\varphi}. \quad (3.163)$$

Ha az értelmezési tartomány $\varphi \in [0, 2\pi]$, akkor a megoldás periodikus kell legyen 2π szerint, ezért $m \in \mathbf{N}$ egész.

Az m^2 konstans a másodikba beírva, és átrendezve kapjuk a második egyenletre:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left(\varrho \frac{dR}{d\varrho} \right) + \left(k^2 - \frac{m^2}{\varrho^2} \right) R = 0. \quad (3.164)$$

Ennek megoldásához vezessünk be új változót $x = k\varrho$ módon, ekkor

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R = 0. \quad (3.165)$$

Ez a Bessel-egyenlet, megoldásai a Bessel-függvények. Másodfokú egyenlet lévén, két független megoldást várunk.

- Elsőfajú Bessel-függvények $J_m(x)$. Hatványsor reprezentációja

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad (3.166)$$

ahol Γ a gamma-függvény:

$$\Gamma(n \in \mathbf{N}) = (n-1)!, \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (3.167)$$

Másik, gyakran használt reprezentáció

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\tau \cos(n\tau - x \sin \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\tau e^{i(n\tau - x \sin \tau)}. \quad (3.168)$$

- Ha m nem egész, akkor $J_m(x)$ és $J_{-m}(x)$ lineárisan függetlenek. Ha m egész, akkor $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$, vagyis keresni kell egy ettől lineárisan független megoldást:

$$N_m(x) = \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \quad (3.169)$$

másodfajú Bessel-függvény vagy Neumann-függvény. Néha ezek kombinációját használják:

$$H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x), \quad H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x), \quad (3.170)$$

harmadfajú Bessel-függvények vagy Henkel-függvények.

- Határesetek: $x \ll 1$ esetén

$$J_m(x) = \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^m, \quad N_m(x) = \begin{cases} -\frac{\Gamma(m)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m, & \text{ha } m \neq 0 \\ \frac{2}{\pi} \log \frac{x}{2} & \text{ha } m = 0. \end{cases} \quad (3.171)$$

A nagy $x \gg 1$ eset:

$$J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad N_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.172)$$

Innen látszik, hogy a Bessel-függvényeknek végtelen sok gyöke van.

- Az elsőfajú Bessel-függvények bázist alkotnak a négyzetesen integrálható függvények terén.

Ortogonalitási relációk: a $0 \leq \varrho \leq a$ esetben

$$\int_0^a d\varrho \varrho J_m(\alpha_{mi} \frac{\varrho}{a}) J_m(\alpha_{mj} \frac{\varrho}{a}) = \frac{a^2}{2} [J_{m+1}(\alpha_{mi})]^2 \delta_{ij}, \quad (3.173)$$

ahol fix m -re $J_m(\alpha_{mi}) = 0 \forall i$. A fenti kifejezés arra használható, hogy ha $\varrho = a$ -nál nulla a potenciál, akkor az ezt kielégítő Bessel-függvények szerint kell kifejtenuünk.

A $0 \leq \varrho \leq \infty$ esetben

$$\int_0^\infty d\varrho \varrho J_m(k\varrho) J_m(k'\varrho) = \frac{1}{k} \delta(k - k'). \quad (3.174)$$

A Laplace-egyenlet megoldásai ezek szerint

$$\begin{aligned} \Phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{km} \left[(A_{mk} J_m(k\varrho) + B_{mk} N_m(k\varrho)) e^{kz} e^{im\varphi} + \{k \rightarrow -k\} + \right. \\ \left. + \{m \rightarrow -m\} + \{k \rightarrow -k, m \rightarrow -m\} \right]. \end{aligned} \quad (3.175)$$

A lehetséges k és m értékeket a határfeltételek állítják be.

Alkalmazás:

Adott egy h magasságú R sugarú henger, melynek oldalán és az alaplajján $\Phi = 0$, a tetején $\Phi(\varrho, \varphi, z = h) = V(\varrho, \varphi)$. Milyen a potenciál a henger belsejében?

Megoldás:

Mivel a feladat a teljes $\varphi \in [0, 2\pi]$ tartományban értelmes, ezért m egész. Másrészt a potenciál reguláris a $\varrho \rightarrow 0$ esetben, ezért N_m együtthatója nulla. A potenciálnak nullának kell lennie $\varrho = R$ esetben, valamint $z = 0$ esetben. A kifejtés ezek szerint

$$\Phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sinh(k_{mi} z) J_m(k_{mi} \varrho) (A_{mi} \sin m\varphi + B_{mi} \cos m\varphi), \quad (3.176)$$

ahol $k_{mi} R = \alpha_{mi}$. A potenciál $z = h$ -nál $V(\varrho, \varphi)$, azaz

$$V(\varrho, \varphi, z) = \sum_{mi} \sinh(k_{mi} h) J_m(k_{mi} \varrho) (A_{mi} \sin m\varphi + B_{mi} \cos m\varphi) \quad (3.177)$$

Az együtthatók, kihasználva még, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin m\varphi \sin n\varphi &= \pi \delta_{nm}, & \int_0^{2\pi} d\varphi \sin m\varphi \cos n\varphi &= 0 \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \cos m\varphi \cos n\varphi &= \pi \delta_{nm}, & \int_0^{2\pi} d\varphi \cos m\varphi \sin n\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (3.178)$$

a következőknek adódnak:

$$\begin{aligned} A_{mi} &= \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mi}) \sinh(k_{mi}h)} \int_0^a d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi V(\rho, \varphi) J_m(k_{mi}\rho) \sin m\varphi, \\ B_{mi} &= \frac{2}{\pi a^2 J_{m+1}^2(\alpha_{mi}) \sinh(k_{mi}h)} \int_0^a d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi V(\rho, \varphi) J_m(k_{mi}\rho) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (3.179)$$

◆

3.7. Multipólus kifejtés

Hagyjuk most a speciális koordinátarendszereket, és tárgyaljuk ismét *adott* töltéseloszlás terét, de most nagy távolságra. Legyen tehát egy lokalizált töltéseloszlásunk, amelynek karakterisztikus mérete a :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (3.180)$$

Az $|\mathbf{x}| \gg a$ esetben sorba fejthetjük a nevezőt – ezt megtehetjük általános koordinátákkal, vagy gömbi koordinátarendszerben kifejtve.

Általános koordinátákkal ($|\mathbf{x}| = r$ jelöléssel)

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} - x'_i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} + \dots \quad (3.181)$$

Mivel

$$\partial_i \frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3}, \quad \partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5}, \quad (3.182)$$

ezért:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}' \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{x}' \mathbf{x})^2 - \mathbf{x}'^2 \mathbf{x}^2}{r^5} + \dots \quad (3.183)$$

Visszaírva

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\mathbf{x}'\mathbf{x})^2 - \mathbf{x}'^2\mathbf{x}^2}{r^5} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}\mathbf{Q}\mathbf{x}}{r^5} + \dots \right],\end{aligned}\quad (3.184)$$

ahol

$$Q = \int d^3\mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{p} = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}'), \quad Q_{ij} = \int d^3\mathbf{x}' (3x'_i x'_j - \mathbf{x}'^2 \delta_{ij}) \varrho(\mathbf{x}'), \quad (3.185)$$

a töltés, dipólmomentum illetve kvadrupólmomentum. Ez utóbbi egy 3×3 -as szimmetrikus tenzor.

Ha magasabb rendű multipólmomentumokra is szükség van, akkor érdemesebb a gömbi koordinátákban kifejezett alakot használni. Felhasználva (3.125) és (3.137) egyenleteket, valamint hogy most $|\mathbf{x}| = r \gg |\mathbf{x}'| = r'$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\mathbf{x}\mathbf{x}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} \frac{4\pi}{2\ell+1} Y_{\ell m}^*(\hat{\mathbf{x}}') Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}). \quad (3.186)$$

Ezzel:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell m} \frac{q_{\ell m}}{2\ell+1} \frac{1}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (3.187)$$

ahol

$$q_{\ell m} = \int d^3\mathbf{x}' r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi') \varrho(\mathbf{x}'). \quad (3.188)$$

- Összefüggés van a q , \mathbf{p} , Q_{ij} és $q_{\ell m}$, $\ell = 0, 1, 2$ együtthatók között:

$$Q = \sqrt{4\pi} q_{00}, \quad \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \begin{pmatrix} q_{1,-1} - q_{1,1} \\ i(q_{1,-1} + q_{1,1}) \\ \sqrt{2} q_{10} \end{pmatrix}, \quad (3.189)$$

a szimmetrikus kvadrupól tenzor elemei:

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{6\pi}{15}} (q_{22} + q_{2-2} - \sqrt{\frac{2}{3}} q_{20}) & 4i\sqrt{\frac{2\pi}{15}} (q_{2-2} - q_{22}) & \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (q_{2-1} - q_{21}) \\ Q_{yx} & -\sqrt{\frac{6\pi}{15}} (q_{22} + q_{2-2} - \sqrt{\frac{2}{3}} q_{20}) & i\sqrt{\frac{2\pi}{15}} (q_{2-1} + q_{21}) \\ Q_{zx} & Q_{zy} & 4\sqrt{\frac{\pi}{5}} q_{20} \end{pmatrix}. \quad (3.190)$$

- A töltéeloszlás jellemző méretével átskálázva a (3.185) alapján láthatjuk, hogy $p/Q \sim a$, $Q_{ij}/Q \sim a^2$. A (3.188) azt mutatja, hogy ez egy általános érvényű megfigyelés, azaz $q_{\ell m}/Q \sim a^\ell$.
- Ha áthelyezem a koordinátarendszer középpontját, akkor $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}' + \mathbf{c}$ módon kell az integrálok alatt módosítani, vagyis a fenti együtthatók módosulása:

$$\Delta Q = 0, \quad \delta \mathbf{p} = Q \mathbf{c}, \quad \Delta Q_{ij} = 3(c_i p_j + c_j p_i) - 2\mathbf{c} \mathbf{p} \delta_{ij} + (3c_i c_j - c^2 \delta_{ij})Q, \dots \quad (3.191)$$

Általában igaz, hogy a legalacsonyabb multipolmomentum koordinátarendszer-független.

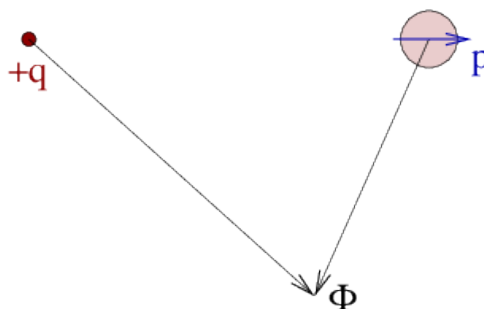
- Miért van a kvadrupol tenzornak 5 komponense, mikor egy általános 3×3 mátrix komponenseinek száma 9? A potenciál kvadrupol része arányos $Q_{ij} x^i x^j \partial_i \partial_j r^{-1}$ mennyiséggel. Q antiszimmetrikus része azért nem ad járulékot, mert egy szimmetrikus kombinációval van szorozva. Q egységmátrixsal arányos része pedig $\sim x^2 \Delta r^{-1} = 0$ miatt nem ad járulékot.

4. fejezet

Elektrosztatika anyag jelenlétében

Valódi anyagokban kétfajta viselkedés lehetséges: ha vannak szabad töltéshordozók, akkor sztatikus elektromos tér hatására addig mozognak, ameddig az elektromos tér le nem árnyékolódik. Ha nincsenek szabadon elmozduló töltéshordozók, akkor is vannak elektromos töltések az anyagban, helyhez kötötten. Ebben az esetben elektromos tér hatására a töltéshordozók csak kicsit mozdulnak el.

Tekintsük az anyag egy kis, nulla össztöltésű anyagdarabkáját. Ennek lehet eleve valamilyen töltéseloszlása, de ha külső elektromos teret alkalmazunk, akkor mindenképpen kialakul egy nem triviális töltéseloszlás, vagyis az anyagdarabka polarizálódik. Fémgömb esetén láttuk (l. (3.32) és (3.148)), hogy egy dipólmomentum alakul ki, de persze a kialakuló töltéseloszlás ennél bonyolultabb is lehet. Ugyanakkor a molekuláris töltéseloszlást makroszkopikus távolságból figyeljük meg, vagyis alkalmazható a multipol kifejtés. Az anyagdarabka jellemző méretére a -t véve, az n . multipólmomentum a^n -nel arányos, tere r távolságból figyelve a dipól teréhez képest a^{n-1}/r^{n-1} faktorial szorzódik, vagyis messziről figyelve elhanyagolható. Emiatt az anyag kis darabkájának töltésszerkezetét a dipólmomentumával közelíthetjük. Vagyis ha egy ponttöltést és egy kis anyagdarabkát nézünk



4.1. ábra. Ponttöltés és dipóllal közelített anyagdarab együttes hatása

(l. 4.1. ábra), akkor az \mathbf{x} helyen mérhető potenciál:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^3}, \quad (4.1)$$

ahol \mathbf{x}_0 a ponttöltés, \mathbf{x}_p az anyagdarabka helye.

Ennek általánosításához egy ponttöltés helyett egy töltéssűrűséggel jellemzett töltéseloszlást helyezünk el, és egy anyagdarabka helyett kiterjedt anyaggal számolunk. Ez utóbbit úgy vesszük figyelembe, hogy felosztjuk elemi dV térfogatú cellákra, amelyeknek valamilyen helyfüggő \mathbf{p} dipólmomentuma van. A töltéseloszlás mintájára bevezethetjük a dipólmomentum-sűrűséget (vagy polarizációs sűrűséget), $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}/dV$ módon. Ekkor a felosztással nullához tartva integrált kapunk, és a teljes járulék alakja:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varrho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (4.2)$$

A második tagban levő integrált tovább alakítva (elhagyva a teljes divergenciából jövő felületi tagokat)

$$\int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{P}(\mathbf{x}') \left[\nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] = - \int d^3\mathbf{x}' \frac{(\nabla \mathbf{P})(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (4.3)$$

Ezt visszaírva

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x} \frac{\varrho(\mathbf{x}') - \nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.4)$$

Vagyis a polarizációból eredő járulék pontosan olyan alakú, mint a betett töltéssűrűség járuléka. Ezt úgy fogalmazhatjuk, hogy a teljes érezhető töltéssűrűség értéke

$$\varrho_{tot} = \varrho - \nabla \mathbf{P} = \varrho + \varrho_{pol}. \quad (4.5)$$

A második tagot szokták *polarizációs töltéssűrűségnek* nevezni. A mikroszkopikus kép emögött az, hogy ha megnézzük, hogy egy V térfogatban mekkora töltés helyezkedik el, akkor az általunk betett töltések mellett az anyag töltéssűrűségét is figyelembe kell venni. A térfogat belsejében levő dipólok össztöltése nulla, csak azok maradnak, amelyek a felületen vannak, és így a felük kilóg a térfogatunkból. A dipól felület irányú komponense nulla járulékot ad, vagyis a bent rekedt töltéshez $q_a = -\mathbf{p}\mathbf{n} = -\mathbf{P}\mathbf{n}dV = -a\mathbf{P}\mathbf{n}dA$, azaz $q = -\mathbf{P}\mathbf{n}dA$. A teljes töltés tehát

$$Q = \int_V d^3\mathbf{x} \varrho - \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{P} = \int_V d^3\mathbf{x} (\varrho - \text{div } \mathbf{P}). \quad (4.6)$$

Vagyis az elektromos tér értékét meghatározó Maxwell-egyenlet most úgy írható, hogy

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \varrho_{tot} \quad \Rightarrow \quad \nabla \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \varrho. \quad (4.7)$$

Bevezetve $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ mennyiséget (elektromos eltolás) az anyagban érvényes Maxwell-egyenletek alakja

$$\nabla \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (4.8)$$

A második egyenlet az $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ egyenlet következménye. Az első egyenlet értelmezése tehát: ha beteszünk a rendszerbe ρ töltéssűrűséget, akkor az anyag polarizációja miatt a valódi töltéssűrűség *nem* ρ . Az elektromos tér egyenleteibe a teljes töltéssűrűség jön be. A polarizációt figyelembe véve definiálhatjuk a \mathbf{D} elektromos eltolást, ennek forrása már az expliciten betett (külső) töltéssűrűség.

Hogy a fenti egyenletet kezelni tudjuk, szükségünk van egy $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ összefüggésre. Fémgömbnél láttuk ((3.33)), hogy $\mathbf{p} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Vagyis ha V térfogatban van egy fémgömb, akkor a polarizációsűrűség

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{V} = \frac{4\pi \varepsilon_0 R^3}{V} \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{4\pi R^3}{V} \right) \mathbf{E}. \quad (4.9)$$

A legtöbb anyagra igaz lesz

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (4.10)$$

ahol χ (elektromos szuszceptibilitás) ε_r (relatív permittivitás) illetve ε (permittivitás vagy dielektromos állandó) szimmetrikus mátrixok, izotrop anyagban azonban csak számok.

Teljesen általános anyagi tulajdonságok esetén nem tehetünk mást, mint megpróbáljuk megoldani a

$$\nabla(\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla \Phi(\mathbf{x})) = -\rho(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

egyenletet. Homogén, izotrop anyagban a potenciálra felírható

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \Rightarrow \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (4.12)$$

Ugyanaz az egyenlet mint vákuumban, csak a permittivitás értéke más. Részlegesen homogén közegekben a homogén tartományokban alkalmazhatjuk a fenti képletet, a közegethatárokon határfeltételeket szabhatunk.

4.1. Határfeltételek

Közegethatáron a határfelületen dA alapú $d\ell$ magasságú henger felületére integrálva, ahol $d\ell \rightarrow 0$ a felületre rakott külső töltést kapjuk. Feltéve, hogy nincs külső felületi töltéssűrűség, kapjuk:

$$\int_V \text{div } \mathbf{D} = 0 = dA(D_{2n} - D_{1n}) \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}. \quad (4.13)$$

Ennek fizikai jelentése az, hogy inhomogén anyagban, két homogén anyag határán felületi töltéssűrűség alakul ki, hiszen a felülethez közel, a felületet a $z = 0$ síkba fektetve:

$$\varrho_{pol} = -\partial_i P_i = -\partial_i [P_{2i}\Theta(z) + P_{1i}\Theta(-z)] = (P_{1z} - P_{2z})\delta(z) \Rightarrow \sigma = P_{1z} - P_{2z}. \quad (4.14)$$

Általában a felületi töltéssűrűség a polarizáció normális vetületének ugrásával egyenlő. Mivel az elektromos térerősség normális vetületének ugrása a felületi töltéssűrűséggel egyenlő

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 E_{2n} - \varepsilon_0 E_{1n} = P_{1n} - P_{2n} \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}, \quad (4.15)$$

ami ugyanaz, mint (4.13).

A másik határfeltétel onnan jön, hogy a felületet körbeölelő, $d\ell$ magasságú és dh hosszúságú téglalapra integráljuk $\text{rot } \mathbf{E}$ -t, miközben $d\ell \rightarrow 0$:

$$\int_A \text{rot } \mathbf{E} = 0 = dh(E_{2t} - E_{1t}) \Rightarrow E_{2t} = E_{1t}. \quad (4.16)$$

Ez fizikailag úgy interpretálható, hogy a felület irányában nincsen polarizációs töltéssűrűség, ezért a térerősség ilyen irányú komponensének nincsen ugrása:

$$E_{2t} = E_{1t}. \quad (4.17)$$

A határfeltételeket a potenciálra megfogalmazva: ha a potenciál mindenütt értelmezett, akkor a térerősség végeességéből a potenciál folytonossága következik. E_n ugrása a felületre merőleges derivált ugrását jelenti:

$$\Phi_2 = \Phi_1, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1}. \quad (4.18)$$

Vagyis részben folytonos közegeknél

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{és a felületeken } \Phi \text{ és } \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ folytonos.} \quad (4.19)$$

Mivel itt is a Poisson egyenlet megoldását keressük, ugyanazok a módszerek alkalmazhatók, mint a fémek esetében.

Megjegyzés: ha $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$, akkor $D_{2n} = D_{1n}$ miatt $E_{2n} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{1n} = 0$, hiszen ε_1 és E_{1n} is végesek maradnak. Emiatt $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ a határon végig, így a megoldás:

$$\Phi|_{\text{belül}} = \text{konst.} \Rightarrow \mathbf{E}|_{\text{belül}} = 0, \quad \Phi|_{\text{határon}} = \text{konst.} \quad (4.20)$$

Ez felel meg a fémeknek.

4.2. Tükörtlöltések módszere

A módszer logikája ugyanaz mint a fémek esetében: az 1. térben felírt Poisson egyenlet megoldását keressük az oda helyezett ponttöltések tere, és a többi (azaz *nem* az első térrészbe) elhelyezett tükörtlöltések tere összegeként. Mivel e tükörtlöltések nem az első térrészben vannak, nem befolyásolják a Poisson egyenlet forrását. Ugyanez igaz persze a többi térrészre is.

Alkalmazás:

A felső félsíkot ($z > 0$) ε_1 , az alsó félsíkot ($z < 0$) ε_2 permittivitású anyag tölti ki. A felső félsíkra q töltést helyezünk \mathbf{x}_0 helyre, a síktól z_0 távolságra. Milyen lesz a potenciál a rendszerben?

Megoldás

A megoldandó egyenletek

$$\Delta\Phi_1(\mathbf{x}) = -\frac{q}{\varepsilon_1}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \Delta\Phi_2 = 0, \quad (4.21)$$

a határfeltételek:

$$\Phi_1(x, y, 0) = \Phi_2(x, y, 0), \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)} = \varepsilon_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)}. \quad (4.22)$$

Tükörtlöltés feltevés: próbáljuk a Φ_1 potenciált a q töltés és a 2. félsíkba, a síktól szintén z_0 távolságra elhelyezett q' töltéssel leírni; Φ_2 -t pedig próbáljuk az 1. félsíkba, a síktól z_0 távolságra elhelyezett q'' ponttöltéssel leírni. Azaz

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}}, \\ \Phi_2(\mathbf{x}) &= \frac{q''}{4\pi\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

A határfeltételek

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, 0) = \Phi_2(x, y, 0) &\Rightarrow \frac{q + q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2} \\ \varepsilon_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)} = \varepsilon_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \Big|_{(x,y,0)} &\Rightarrow q - q' = q''. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ennek megoldása

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q. \quad (4.25)$$

Speciális eset, ha $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, ekkor $q' = 0$ és $q'' = q$, azaz egyetlen q töltéssel leírható az egész tér.

Másik speciális eset, ha $\varepsilon_2 = \infty$, vagyis a 2. térrészben fém van. Ekkor $q' = -q$ és q'' véges, így $\Phi_2 = 0$: azaz az 1. térrészben a korábban látott tükörtöltés megoldást kapjuk, a 2. térrészben nulla a potenciál. ♦

4.3. Teljes függvényrendszerek

Ha a $\Delta\Phi = 0$ egyenlet megoldását keressük, akkor a korábban látott megoldásokat használhatjuk különböző szimmetriájú rendszerekben.

Alkalmazás:

Dielektromos gömb külső térbe helyezve: vegyünk egy R sugarú gömböt ε permittivitással, kívül ε_k permittivitású anyag legyen. Alkalmazzunk \mathbf{E}_0 külső elektromos teret. Milyen lesz az elektromos térerősség a rendszerben?

Megoldás

A megoldandó egyenletek, ha a külső elektromos tér z irányú:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Phi_k = 0, \quad (4.26)$$

a határfeltételek

$$\begin{aligned} \Phi_k(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) &= -E_0 r \cos \theta, & \Phi(r \rightarrow 0) &= \text{véges.} \\ \Phi(r = R, \theta, \varphi) &= \Phi_k(r = R, \theta, \varphi), & \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{(r=R, \theta, \varphi)} &= \varepsilon_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial r} \Big|_{(r=R, \theta, \varphi)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Miután a határfeltételek φ -függetlenek, kereshetjük a megoldást is φ -független alakban. Ekkor a Laplace-egyenlet megoldása gömbi koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned} \Phi_k(r, \theta) &= \sum_{\ell} (A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta), \\ \Phi(r, \theta) &= \sum_{\ell} (C_{\ell} r^{\ell} + D_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Most már csak a határfeltételek kielégítése van hátra. Az $r \rightarrow \infty$ esetben

$$\Phi_k(r, \theta) = \sum_{\ell} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta, \quad (4.29)$$

innen $A_1 = -E_0$ és $A_{\ell \neq 1} = 0$. A többi határfeltétel:

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0 : \quad & \Phi = D_\ell r^{-\ell-1} P_\ell(\cos \theta) = \text{véges} \quad \Rightarrow \quad D_\ell = 0 \\ r = R : \quad & -E_0 R \delta_{\ell 1} + B_\ell R^{-\ell-1} = C_\ell R^\ell \\ r = R : \quad & \varepsilon_k (-E_0 \delta_{\ell 1} - (\ell + 1) B_\ell R^{-\ell-2}) = \varepsilon \ell C_\ell R^{\ell-1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Innen kapjuk $\ell \neq 1$ esetén $B_\ell = C_\ell = 0$, valamint

$$C_1 = -\frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} E_0, \quad B_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} E_0 R^3. \quad (4.31)$$

Ezzel felírva a megoldások

$$\Phi_1 = -\mathbf{E} \mathbf{x} \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} \frac{R^3}{r^3} \right), \quad \Phi_2 = -\frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} \mathbf{E} \mathbf{x}. \quad (4.32)$$

A megfelelő térerősségek:

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} R^3 \frac{3\mathbf{x}(\mathbf{E}_0 \mathbf{x}) - \mathbf{E}_0 r^2}{r^5}, \quad \mathbf{E}_b = \frac{3\varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} \mathbf{E}_0. \quad (4.33)$$

A gömbön kívül a megoldás a külső tér mellett egy dipól tere, ahol a dipól erőssége

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_k \frac{\varepsilon - \varepsilon_k}{2\varepsilon_k + \varepsilon} R^3 \mathbf{E}_0 = 4\pi\varepsilon_k \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E}_0, \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_k}. \quad (4.34)$$

Fém esetén $\varepsilon \rightarrow \infty$, azaz $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_1 R^3 \mathbf{E}$, összhangban korábbi eredményeinkkel. Ha $\varepsilon_k > \varepsilon$, vagyis a külső térben jobban polarizálható anyag van, akkor \mathbf{p} ellentétes \mathbf{E}_0 -lal. Speciális eset, ha kívül vákuum van, belül pedig anyag, ekkor $\varepsilon_k = \varepsilon_0$.

Belül a térerősség homogén, azonban nagysága eltér az alkalmazott homogén külső tértől. A polarizáció hatására létrejövő egyenletes tér nagysága

$$\mathbf{E}_{pol} = \frac{\varepsilon_k - \varepsilon}{2\varepsilon_k + \varepsilon} \mathbf{E}_0. \quad (4.35)$$

Ha tehát kívül jobban polarizálható anyag található, akkor \mathbf{E}_{polar} növeli a külső teret, ha belül van jobban polarizálható anyag, akkor csökkenti azt.

A felületen ($r = R$ -nél) a térerősségek különbsége a felületre merőleges, nagysága a felületi töltéssűrűség:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_k)}{2\varepsilon_k + \varepsilon} (\hat{\mathbf{x}} \mathbf{E}_0). \quad (4.36)$$

Innen az látszik, hogy ha $\varepsilon > \varepsilon_k$, akkor a tér irányában pozitív töltések halmozódnak fel, ellenkező esetben negatív töltések. ♦

A fenti feladatra építhetünk anyagmodellt is. Mikroszkopikusan az atomi (molekuláris) polarizálhatóság kiszámítható, arányos a külső térrel. Ugyanakkor ugyanezt az anyagdarabkát úgy is felfoghatjuk, mint ha szét lenne kenve arra a térrészre, amelyben a fenti molekula/atom található. Gömbnek tekintve a szétkentséget, a fenti feladat megoldásából tudjuk a polarizáció nagyságát. E kettő leírás konzisztenciájából következik:

$$\mathbf{p} = \varepsilon_0 \gamma \mathbf{E}_0 = 4\pi \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 3V \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}. \quad (4.37)$$

Bevezetve $n = 1/V$ a sűrűséget:

$$\gamma = \frac{3}{n} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}, \quad \varepsilon_r = \frac{3 + 2n\gamma}{3 - n\gamma}, \quad \chi = \varepsilon_r - 1 = \frac{n\gamma}{1 - \frac{n\gamma}{3}}. \quad (4.38)$$

Ez a *Clausius-Mosotti* egyenlet. Akkor ad jó eredményt, ha az anyagnak a töltésszerkezete teljes mértékben a polarizáció hatására alakul ki.

Hogy γ -t megkapjuk, mikroszkopikus leírásra van szükség. Legegyszerűbb modell, ha a töltéshordozót (elektront) harmonikus potenciállal kötöttnek képzeljük. Ekkor \mathbf{E}_0 térerősség hatására történő elmozdulás \mathbf{x} értéke

$$D\mathbf{x} = q\mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = q\mathbf{x} = \frac{e^2}{D} \mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{q^2}{\varepsilon_0 D}. \quad (4.39)$$

A rugóállandó helyett a rezgési frekvenciával is kifejezhetjük a mikroszkopikus polarizálhatóságot: $\omega^2 = D/m$ miatt

$$\gamma = \frac{q^2}{\varepsilon_0 \omega^2 m}. \quad (4.40)$$

Ha több töltéshordozó, illetve több sajátfrekvencia is van, akkor

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i^2}{\omega_i^2 m_i}. \quad (4.41)$$

4.4. Elektrosztatikus energia anyag jelenlétében

Korábban már láttuk rögzített töltéseloszlás energiáját. Anyag jelenlétében nem tudjuk rögzíteni az összes töltést, így az ott kapott képlet módosításra szorul.

4.4.1. Állandó dielektrikum

Először rögzítsük a dielektrikumot. Induljunk ki abból, hogy $\delta\varrho$ extra külső töltés adott potenciálba végtelenből történő behozatalához szükséges energia

$$\delta W = \int d^3\mathbf{x} \delta\varrho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}). \quad (4.42)$$

A behozott töltés miatt az anyag kissé átpolarizálódik:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad \operatorname{div}(\mathbf{D} + \delta \mathbf{D}) = \varrho + \delta \varrho \quad \Rightarrow \quad \delta \varrho = \operatorname{div} \delta \mathbf{D}. \quad (4.43)$$

Ezt visszaírva, és felhasználva, hogy $\Phi(\infty) = 0$:

$$\delta W = \int d^3 \mathbf{x} \operatorname{div}(\delta \mathbf{D}) \Phi = - \int d^3 \mathbf{x} \delta \mathbf{D} \operatorname{grad} \Phi = \int d^3 \mathbf{x} \delta \mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (4.44)$$

Amennyiben az anyag lineáris, azaz $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, akkor a fenti alak felintegrálható:

$$W = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{D} \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (4.45)$$

Egy hasonló gondolatmenettel azt is mondhattuk volna, hogy mikor kívülről behozok egy töltést, valójában az anyagot is átpolarizáljuk, vagyis összesen $\varrho_{tot} = \varrho + \varrho_{pol}$ töltést viszek a rendszerbe. Ennek forrása már \mathbf{E} , vagyis ekkor a fenti gondolatmenet a szokásos vákuum formulát adja.

A kettő gondolatmenet közötti különbség az anyag polarizációs járuléka

$$\int d^3 \mathbf{x} \delta \varrho_{pol} \Phi = - \int d^3 \mathbf{x} \operatorname{div}(\delta \mathbf{P}) \Phi = \int d^3 \mathbf{x} \delta \mathbf{P} \operatorname{grad} \Phi = - \int d^3 \mathbf{x} \delta \mathbf{P} \mathbf{E}. \quad (4.46)$$

Kérdés, hogy ez az energia honnan származik.

Mikroszkopikusan lineáris anyag képzelhető négyzetes potenciállal kötött töltéshordozóknak. A rugóban tárolt potenciális energia:

$$q \mathbf{E} = D \mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \frac{q^2 \mathbf{E}}{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} D \mathbf{x}^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2 \mathbf{E}^2}{D} = \frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{E}. \quad (4.47)$$

Ha a dipólok eloszlását folytonosnak vesszük, akkor a rugók potenciális energiája és az elektromos tér energiája összesen

$$W = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \varepsilon_0 \mathbf{E} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{P} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{D} \mathbf{E}. \quad (4.48)$$

4.4.2. Töltéseloszlás külső térben

Hogy mikroszkopikusan is lássuk, mi történik a polarizációs energiával, vizsgáljunk rögzített kis méretű töltéseloszlást simított külső elektromos térben. Ennek energiája:

$$W = \int d^3 \mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}) \Phi_0(\mathbf{x}) = \int d^3 \mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}) \left(\Phi_0(0) + \mathbf{x} \nabla \Phi_0(0) + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \Phi_0 + \dots \right) \quad (4.49)$$

Mivel $\Delta \Phi = 0$, az utolsó tagot kiegészíthetjük $\delta_{ij} r^2$ -tel. Ekkor

$$W = Q \Phi - \mathbf{p} \mathbf{E} - \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} + \dots \quad (4.50)$$

4.4.3. Állandó töltések, változó dielektrikum

Változtassuk a dielektrikumot állandó külső töltéseloszlás mellett. Induljunk dielektrikum nélküli állapotból, ekkor legyen a térerősség \mathbf{E}_0 , az elektromos eltolás $\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$. A dielektrikum jelenlétében ezek megváltoznak \mathbf{E} illetve \mathbf{D} értékre. Számítsuk ki a különbséget!

A kiinduló képletben most csak a dielektrikum energiáját akarjuk számolni, azaz le kell vonni azt a potenciál járulékot, amely a dielektrikum nélkül lenne jelen:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} \delta \varrho(\mathbf{x}) (\Phi(\mathbf{x}) - \Phi_0(\mathbf{x})). \quad (4.51)$$

Most a fixált töltéseloszlást kétféle módon írhatjuk, mivel $\varrho = \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{D}_0$. Használjuk a következő alakot:

$$\delta W' = \int d^3\mathbf{x} [\Phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D}_0 - \Phi_0 \operatorname{div} \delta \mathbf{D}] = \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{E} \delta \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \delta \mathbf{D}]. \quad (4.52)$$

Lineáris anyagban $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, illetve $\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{P}$, ezért

$$\delta W' = - \int d^3\mathbf{x} \delta \mathbf{P} \mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad W' = - \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P} \mathbf{E}_0, \quad \delta w' = - \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{E}_0. \quad (4.53)$$

4.4.4. Állandó potenciál, változó dielektrikum

Azt is megtehetjük, hogy a rendszer töltéseit külső potenciállal rögzítjük. Ekkor a fenti gondolatmenet annyiban módosul, hogy most a töltések mind a potenciállal rögzített felületre kerülnek, viszont más töltést kell az anyag jelenlétében felvinni, mint anélkül, mert a potenciálokat kell fixen tartani:

$$\delta W'' = \int d^3\mathbf{x} (\delta \varrho \Phi - \delta \varrho_0 \Phi_0) = \oint d^2x (\delta \sigma \Phi - \delta \sigma_0 \Phi_0). \quad (4.54)$$

Mivel a felületen a potenciálok nem változnak, ezért ott $\Phi = \Phi_0$, illetve tetszőlegesen cserélgethetjük őket. A hasznos kombináció most

$$\delta W'' = \oint d^2x (\delta \sigma \Phi_0 - \delta \sigma_0 \Phi) = \int d^3\mathbf{x} (\delta \varrho \Phi_0 - \delta \varrho_0 \Phi) = \int d^3\mathbf{x} (\delta \mathbf{D} \mathbf{E}_0 - \delta \mathbf{D}_0 \mathbf{E}). \quad (4.55)$$

Láthatóan most pontosan (4.52) mínusz egyszeresét kaptuk:

$$\delta W'' = -\delta W' \quad \Rightarrow \quad W'' = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P} \mathbf{E}_0, \quad \delta w'' = \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{E}_0. \quad (4.56)$$

A különbség oka az, hogy mást tekintek a két esetben anyag nélküli rendszernek, vagyis a referenciapont különbözik. Ha pl. a fix töltéseket nézem, ahhoz képest a fix

potenciálnál töltéseket kell mozgatni, hogy a potenciálok ne változzanak, ez pedig munkavégzést jelent.

A fenti két gondolatmenet illeszkedik a termodinamikai leírásba: definiálhatjuk a rögzített töltések melletti energiát, infinitezimális alakjában

$$dE = -pdV + TdS - \mathbf{E}_0 d\mathbf{P}. \quad (4.57)$$

Ha a potenciált rögzítem, akkor Legendre-transzformációt kell végeznem. Ekkor egy szabad energia jellegű mennyiséget kapunk

$$\mathcal{F} = E + \mathbf{P}\mathbf{E}_0 \quad \Rightarrow \quad d\mathcal{F} = -pdV + TdS + \mathbf{P}d\mathbf{E}_0. \quad (4.58)$$

5. fejezet

Magnetosztatika

A mágneses jelenségek később kerültek a figyelem középpontjába. Ennek egyik oka az, hogy a mágneses tér létrehozásához, eltekintve az állandó mágnesektől, áramforrásra van szükség, és ezt viszonylag később fedezték fel (l. Volta). Először vizsgáljuk az áramokat, utána tárgyaljuk az általuk létrehozott mágneses mezőt.

5.1. Áram

A töltések áramlását egy $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ sebességmezővel veszem figyelembe, vagyis \mathbf{x} helyen levő elemi dV cellában a töltések átlagsebessége $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Alokális töltéssűrűséggel szorozva kapjuk az áramsűrűséget: $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$, amely szintén egy vektormező.

Ha felvesszünk egy $d\mathbf{f}$ felületelemet, azon mennyi töltés áramlik át egységnyi idő alatt? Ha az adott pontban a mozgó töltések felületre merőleges komponense v_{\perp} , akkor azok a töltések jutnak át, amelyek $dV = v_{\perp} dt d\mathbf{f}$ térfogatú dobozban vannak, ezek össztöltése $dq = dV \rho$. Tehát az időegység alatt átfolyó töltések száma, tekintetbe véve, hogy $v_{\perp} d\mathbf{f} = \mathbf{v} d\mathbf{f}$:

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{\text{átfolyó}} = \mathbf{J} d\mathbf{f}. \quad (5.1)$$

Ha a töltések egy hosszú vezetőkben haladnak, akkor áramerősség a vezető teljes keresztmetszetén egységnyi idő alatt átfolyó töltés. A fentiek miatt

$$I = \int d\mathbf{f} \mathbf{J}(\mathbf{x}). \quad (5.2)$$

SI egysége az amper $1A = 1C/s$. Ha vékony vezetőt nézünk, akkor a fenti képlet miatt

$$dV \mathbf{J} \rightarrow I d\mathbf{s}. \quad (5.3)$$

Ha egy zárt térfogatelemet veszünk, akkor a teljes felületén kiáramló töltés egyenlő a belül levő töltések fogyásával, ha nincs a töltésnek forrása, azaz a töltés megmaradó

mennyiség. Azaz:

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\frac{d}{dt} \int_V d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (5.4)$$

Ez a töltésmegmaradás mérlegegyenlete. Magnetosztatikában $\dot{\varrho} = 0$, azaz $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$.

5.2. Mágneses alapjelenségek

Tapasztalat szerint az áram hat az iránytűre (Oersted, 1819), azaz az áram létrehoz valamilyen mágneses mezőt. Ennek jellemzésére használjuk az iránytűre ható forgatónyomaték nagyságát. Az így definiált *mágneses indukció* tapasztalat szerint az egyes áramelemek hatásának összege, ahol az elemi járulékok

$$d\mathbf{B} \sim \frac{d\mathbf{J} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \quad (5.5)$$

Az arányossági tényező SI-ben $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ N/A}^2$, μ_0 a vákuum permeabilitás. A \mathbf{B} mértékegysége a tesla (T). Kiterjedt vezetőre

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (5.6)$$

Szintén tapasztalat, hogy mágneses térben ponttöltésre ható erő (Lorentz-erő)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (5.7)$$

Ennek általánosítása áramhurkokra, felismerve a fenti képletben a $q\mathbf{v}$ elemi áramsűrűség-járulékot:

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (5.8)$$

A forgatónyomaték kifejezése az $\mathbf{N} = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$ alakból következik:

$$\mathbf{N} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \times (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x})). \quad (5.9)$$

5.2.1. Lokális törvények

Ismét használhatjuk, hogy $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|^3$ gradiensként áll elő

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \nabla_{\mathbf{x}} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \nabla_{\mathbf{x}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.10)$$

Ezt visszahelyettesítve (5.6) egyenletbe, kapjuk

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (5.11)$$

azaz

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.12)$$

A bevezetett \mathbf{A} mennyiség a vektorpotenciál. Ha vékony vezetők van, akkor

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}'|} \quad (5.13)$$

Miután \mathbf{B} rotációként áll elő:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (5.14)$$

az a harmadik Maxwell-törvény.

Számoljuk ki \mathbf{B} rotációját

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \nabla \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m = \partial_i (\partial_j A_j) - \Delta A_i. \quad (5.15)$$

Innen az első tag

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \partial_i \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \partial_i J_i(\mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 0 \quad (5.16)$$

sztatikában. Itt eldobtunk egy felületi integrált, mondván, hogy $J(\infty) = 0$. Az \mathbf{A} laplacának számítása:

$$\Delta A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') (-4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')) = -\mu_0 J_i(\mathbf{x}). \quad (5.17)$$

Összesen tehát

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (5.18)$$

Ez a negyedik Maxwell-törvény (sztatikára). Egy felületre integrálva

$$\int_F d\mathbf{f} \text{ rot } \mathbf{B} = \oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{B} = \mu_0 \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J} = \mu_0 I \Rightarrow \mu_0 I = \oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{B}, \quad (5.19)$$

ez az Ampère törvény.

5.2.2. Mértékinvariancia

Ugyanúgy mint a skalárpotenciál esetén, a \mathbf{A} tér nem fizikai mennyiség, csak a rotációja az (később ezt az állítást finomíthatjuk...). Mivel $\text{rot grad } \Psi = 0$, egy skalármező gradiensét hozzáadhatjuk \mathbf{A} -hoz, és még mindig ugyanazt a mágneses indukciót kapjuk:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \Psi. \quad (5.20)$$

Ezt az elektrodinamika *mértékszabadságának* (vagy mértékinvarianciájának) hívjuk.

Hogy számolni tudjunk, rögzíteni kell Ψ -t (mértékrögzítés). A fenti számolásban, ahogy láttuk $\text{div } \mathbf{A} = 0$ feltételünk volt, az a Coulomb mérték.

5.3. Árameloszlások

Vizsgáljuk meg speciális árameloszlások által létrehozott mágneses indukciót!

Alkalmazás:

Végtelen hosszú, végtelenül vékony, egyenes vezetőben I áram folyik. Mekkora a mágneses indukció?

Megoldás

A rendszer hengersizmetriája miatt nem függhet semmi φ -tól hengerkoordinátarendszerben felírva. \mathbf{B} iránya tisztán \hat{e}_φ , ezért alkalmazható az Ampère törvény a vezetőt körülölelő r sugarú körre

$$\oint d\mathbf{s} \mathbf{B} = 2\pi r B_\varphi = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (5.21)$$



Alkalmazás:

Adott egy R sugarú vékony kör alakú vezető, amelyben I áram folyik. Mekkora az általa létrehozott mágneses indukció?

Megoldás

A vektorpotenciálját számoljuk ki:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}'|} \quad (5.22)$$

A kört paraméterezni kell

$$\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} R \cos \varphi' \\ R \sin \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} \quad d\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi' \\ R \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi'. \quad (5.23)$$

Írjuk fel \mathbf{x} -et hengerkoordinátákban

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{s}'| = \sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (5.24)$$

Emiatt

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}} \begin{pmatrix} -R \sin \varphi' \\ R \cos \varphi' \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Írjuk fel a vektorpotenciált hengerkoordinátákban; az egy hosszúságúra normált bázisvektorok:

$$\hat{\mathbf{e}}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

emiatt

$$A_\varrho(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varrho = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{-\sin(\varphi - \varphi')}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}} = 0,$$

$$A_z(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = 0. \quad (5.27)$$

A nem nulla komponens

$$A_\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{z^2 + \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos(\varphi - \varphi')}}. \quad (5.28)$$

A_φ nem függ φ -től, ami a feladat hengersizmetriájából következik. Descartes koordinátákban az azimutszögfüggés kizárólag a bázisvektorok helyfüggéséből adódik.

Az integrál megadható elliptikus függvények segítségével, vagy numerikusan is számolható. Minket az érdekel most, hogy milyen lesz a tér nagy távolságokra? Ekkor $r^2 = \varrho^2 + z^2$ jelöléssel $r \gg R$, emiatt

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \frac{1}{r} - \frac{u^2}{2r^3} + \dots \quad (5.29)$$

Most $u^2 = R^2 - 2\varrho R \cos \varphi$, azaz

$$A_\varphi(\varrho, z) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' R \cos \varphi' \left[\frac{1}{r} + \frac{2\varrho R \cos \varphi' - R^2}{2r^3} + \dots \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{R^2 \pi I \varrho}{r^3} + \dots, \quad (5.30)$$

hiszen az első tag nem ad járulékot. Mivel most

$$\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{x} = \hat{\mathbf{e}}_z \times (z\hat{\mathbf{e}}_z + \varrho\hat{\mathbf{e}}_r) = \varrho\hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (5.31)$$

ezért a fenti eredmény úgy írható, hogy

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \text{ahol} \quad \mathbf{m} = R^2 \pi I \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (5.32)$$

◆

A fenti feladat általánosítható tetszőleges áramhurok terének nagy távolságú viselkedésére:

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{J_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') \left[\frac{1}{r} + \frac{x_j x'_j}{r^3} + \dots \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{x_j}{r^3} \int d^3\mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') x'_j + \dots \end{aligned} \quad (5.33)$$

Az első tag együtthatója (a végtelen felületre vett integrálokat eldobjuk, mert ott $\mathbf{J} = 0$, valamint kihasználjuk, hogy $\text{div } \mathbf{J} = 0$)

$$\int d^3\mathbf{x} J_i = \int d^3\mathbf{x} (\partial_j x_i) J_j = - \int d^3x x_i \text{div } \mathbf{J} = 0. \quad (5.34)$$

Ezért a sorfejtés első tagja hiányzik, amit a mágneses monopólusok hiányaként értelmezhetünk¹.

A második tagban fellépő integrál:

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} x_j J_i &= \int d^3\mathbf{x} x_j (\partial_k x_i) J_k = - \int d^3x x_i \partial_k (x_j J_k) = \\ &= - \int d^3x (x_i J_j - x_i x_j \text{div } \mathbf{J}) = - \int d^3x x_i J_j. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Vagyis az együttható antiszimmetrikus mátrix: ehhez hozzárendelhetünk egy vektort, amit *mágneses dipólmomentumnak* hívunk:

$$\int d^3\mathbf{x} x_j J_i = \varepsilon_{jik} m_k. \quad (5.36)$$

Az inverz reláció

$$m_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{x} x_j J_k, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \times \mathbf{J}. \quad (5.37)$$

¹Vigyázat! Időfüggés esetén megmarad ez a tag, ami a mágneses dipólsugárzáshoz vezet. l. később.

Emiatt végül:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{r^3} + \dots \quad (5.38)$$

Mágneses dipól indukciója:

$$\begin{aligned} B_i &= (\text{rot } \mathbf{A})_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \partial_j \frac{\varepsilon_{k\ell n} m_\ell x_n}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} (\delta_{i\ell} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{j\ell}) \frac{m_\ell \delta_{jn} r^2 - 3m_\ell x_j x_n}{r^5} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3x_i(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}) - m_i r^2}{r^5}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

ugyanaz a képlet mint az elektromos dipól esetében.

Megjegyzések a mágneses dipólmomentummal kapcsolatban:

- Vezető hurok esetén, a Stokes-tétel miatt:

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{x} x_j J_k = \frac{I}{2} \oint ds_k (\varepsilon_{ijk} x_j) = \frac{I}{2} \int_F df_k \varepsilon_{k\ell n} \partial_\ell (\varepsilon_{ijn} x_j) = \\ &= \frac{I}{2} \varepsilon_{k\ell n} \varepsilon_{i\ell n} \int_F df_k = I \int_F df_i, \end{aligned} \quad (5.40)$$

vagyis a mágneses dipólmomentum $\mathbf{m} = I\mathbf{F}$ az áramhurok felületével arányos.

- töltött részecske mozgása esetén

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}), \quad (5.41)$$

ahol $\mathbf{r}(t)$ a részecske trajektóriája. Ekkor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \times [q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})] = \frac{q}{2m} \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = \frac{q}{2m} \mathbf{L} = \gamma \mathbf{L}, \quad (5.42)$$

ahol \mathbf{L} a részecske impulzusmomentuma (perdülete). Vagyis a mágneses dipólmomentum a perdülettel arányos lesz. Az arányossági tényező a giromágneses faktor γ . A fenti egyenletből $\gamma = q/(2m)$.

Ez az összefüggés igaz lesz atomi méretekig. Saját impulzusmomentummal (spin-el) rendelkező elemi részecskék esetében már van egy faktor a fenti eredmény előtt:

$$\mathbf{m} = g \frac{q}{2m} \mathbf{L}, \quad (5.43)$$

g a giromágneses faktor (Landé-faktor vagy g -faktor). Elektronra $g_e = 2.002319\dots$: $g = 2$ jön az elektronok Dirac-egyenletéből, a járulékos $0.002319\dots$ faktor a kvantum elektrodinamika eredménye.

- A fenti tétel általánosítása forgó, töltött merev testre: itt $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, azaz $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \varrho(\mathbf{x})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$. Emiatt

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}) \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[\int d^3\mathbf{x} \varrho(\mathbf{x}) (\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}) \right] \boldsymbol{\omega} = \frac{Q}{2M} \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\omega}. \quad (5.44)$$

ahol $\boldsymbol{\Theta}$ a test tehetetlenségi nyomatéka, ha a tömegeloszlására $\varrho_m = \varrho M/Q$ -t veszünk.

5.4. Külső térbe helyezett árameloszlás

Ha közel homogén külső térbe árameloszlást helyezek, akkor a mágneses indukció sorba fejthető: $B_i(\mathbf{x}) = B_i(0) + x_j \partial_j B_i(0) + \dots$. Ezzel

$$F_i = \int d^3\mathbf{x} (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}))_i = \varepsilon_{ijk} \int d^3\mathbf{x} J_j(\mathbf{x}) (B_k(0) + x_\ell \partial_\ell B_k(0) + \dots). \quad (5.45)$$

Korábban már láttuk, hogy az első tag nulla, a másodikban pedig

$$\int d^3\mathbf{x} x_\ell J_j(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\ell j n} m_n. \quad (5.46)$$

Ezzel $\varepsilon_{jki} \varepsilon_{jnl} = \delta_{kn} \delta_{il} - \delta_{kl} \delta_{in}$ miatt

$$F_i = (\delta_{kn} \delta_{il} - \delta_{kl} \delta_{in}) m_n \partial_\ell B_k = m_k \partial_i B_k - m_i \partial_i B_i \Rightarrow \mathbf{F} = \nabla(\mathbf{mB}), \quad (5.47)$$

mivel $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Vagyis a dipólt a mágneses indukció deriváltja mozgatja!

A fenti erő írható potenciál gradienseként

$$\mathbf{F} = -\nabla U, \quad (5.48)$$

ahol bevezettük a külső térbe helyezett dipól helyzeti energiáját

$$U = -\mathbf{mB} \quad (5.49)$$

módon.

A forgatónyomaték kifejezése:

$$N_i = \int d^3\mathbf{x} [\mathbf{x} \times (\mathbf{J}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}))]_i = \int d^3\mathbf{x} (J_i(\mathbf{x}) x_j B_j(\mathbf{x}) - B_i(\mathbf{x}) x_j J_j(\mathbf{x})). \quad (5.50)$$

Ha $B_i(\mathbf{x} = 0) = B_i$ konstans értéket helyettesítünk vissza, akkor felhasználva a (5.35) egyenletet láthatjuk, hogy a második tag integrálja eltűnik, az első tagból pedig $\varepsilon_{jil} m_\ell B_j$ értéket kapunk. Vektorosan tehát

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (5.51)$$

A forgatónyomaték tehát valóban arányos a mágneses indukcióval, ahogy azt a mágneses indukció definiálásánál fel is tettük. Ez az alak egyébként éppúgy levezethető a (5.49) formulából, mint a dipólra ható erő.

A fentiek fényében elemezhetjük, mit is csinál egy kis mágnes egy másik, rögzített mágnes mellett. Mindkét mágneset közelítsük dipóllal, \mathbf{m} illetve \mathbf{m}_0 dipólmomentummal. Ha \mathbf{m} nem párhuzamos a lokális mágneses indukcióval, akkor olyan forgatónyomaték hat rá, amely a mágneses indukció irányába forgatja, összhangban azzal, hogy ekkor a dipól energiája ($-\mathbf{m}\mathbf{B}$) csökken – vagyis a két dipól ellentétes pólusával fordul egymás felé. Ezek után, mivel a mágneses indukció csökken a távolsággal, $-\mathbf{m}\mathbf{B}$ nő a távolsággal, gradiense tehát kifelé mutat, negatív gradiense pedig befelé. Vagyis a nagy mágnes magához vonzza a kicsit.

Ugyanezen ok miatt egymás mellé helyezett dipólok szintén ellentétes pólusaikkal fordulnak egymás felé, vagyis csökkentik egymás terét. Vagyis tisztán magnetosztatikai erők az antiferromágneses rendeződést részesítik előnyben (l. később).

5.5. Mágnesség anyag jelenlétében

Hasonlóan az elektrosztatikához, anyag jelenlétében a makroszkopikus árameloszlások csak egy részét képezik a teljes árameloszlásnak. Kis méretű, lokalizált árameloszlások képződhetnek az anyagban. Ezek által létrehozott mágneses indukció, a méretéhez képest nagy távolságra, mint láttuk, mágneses dipóllal írható le: a magasabb multipólmomentumok járuléka a/r hatványaiával van elnyomva, ahol a az árameloszlás jellemző mérete, r a megfigyelési pont távolsága. Másik lehetőség az, hogy az anyagban eleve vannak olyan mágnesesen aktív elemi összetevők, amelyek szintén a dipólmomentumukkal jellemezhetők nagy távolságon.

Emiatt az anyag jelenlétét itt is, mint elektrosztatikában, mágneses dipólsűrűséggel (mágnesezettség) jellemezhetjük: $d\mathbf{m} = dV \mathbf{M}(\mathbf{x})$. A teljes tér tehát

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right], \quad (5.52)$$

ahol az első tag a kívülről betett árameloszlás, a második tag a mágneses dipólsűrűség járuléka.

A második tag komponenseit kifejtve:

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') (x_k - x'_k)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} &= \int d^3\mathbf{x}' \varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') (-\partial_k) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \\ &= \int d^3\mathbf{x}' \varepsilon_{ijk} M_j(\mathbf{x}') \partial'_k \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \{\text{parc. int.}\} = \\ &= \int d^3\mathbf{x}' \frac{-\varepsilon_{ijk} \partial'_k M_j(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int d^3\mathbf{x}' \frac{(\text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{x}'))_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (5.53)$$

ahol a felületi tagot eldobtuk, mondván, hogy $\mathbf{M}(\infty) = 0$. Tehát a mágneses dipólsűrűség ugyanúgy a külső áramokhoz ad járulékot, mint az elektrosztatikában a dipólsűrűség a külső töltéssűrűséghez:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') + \text{rot } \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.54)$$

Ezt az egyenletet úgy értelmezhetjük, hogy a teljes töltéssűrűség nem csupán az általunk kontrollált áramokból áll, hanem a mikroszkopikus áramok is járulékot adnak

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{mikr}, \quad \mathbf{J}_{mikr} = \text{rot } \mathbf{M}. \quad (5.55)$$

Figyeljük meg, hogy itt pozitív előjellel jön a mikroszkopikus járulékok! A fizikai kép emögött az, hogy ha egy F felületen átfolyó áramot akarjuk kiszámítani, akkor egyrészt figyelembe kell venni a makroszkopikus áramsűrűséget, valamint a mikroszkopikus áramokat, ezeket $\mathbf{m} = \mathbf{n}I_{mikr}dA$ mágneses dipólmomentumukkal jellemezzük. Miután a mikroszkopikus áramok kis méretű köráramok, így a felület belsejében nulla teljes átfolyó töltést eredményeznek. A felület határán is csak a határvonal irányú ($\hat{\mathbf{s}}$) komponens ad járulékot: azaz a járulékos áramerősség: $I_{mikr}\mathbf{n}\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{m}\hat{\mathbf{s}}/dA = \mathbf{M}\hat{\mathbf{s}}dV/dA = \mathbf{M}d\mathbf{s}$. Vagyis a teljes áram

$$I_{tot} = \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J}_{tot} = \int_F d\mathbf{f} \mathbf{J} + \oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{M} = \int_F d\mathbf{f} (\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}). \quad (5.56)$$

A lokális törvények \mathbf{J}_{tot} -ra vonatkoznak, vagyis a negyedik Maxwell-egyenlet alakja:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{tot} = \mu_0 (\mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M}). \quad (5.57)$$

Bevezetjük a

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (5.58)$$

mágneses térerősséget, ezzel a magnetosztatika Maxwell-egyenletei:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (5.59)$$

Az Ampère törvényt a (5.19) képlettel analóg módon kapjuk

$$\oint_{\partial F} d\mathbf{s} \mathbf{H} = I. \quad (5.60)$$

A \mathbf{H} mágneses tér (bár a neve mást sugall) csak egy segédmennyiség, ugyanis a mérhető erőhatások csak \mathbf{B} -ből jönnek. Ennek ellenére sokszor a mágneses tér segítségével fejezik

ki a megoldást: vákuumban csak egy konstans különbség van a kettő között, és a mágneses tér az egyenletekben hasonló szerepet játszik, mint az elektrodinamika egyenleteiben az \mathbf{E} .

Hogy meg tudjuk oldani a fenti egyenleteket, kell egy $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ vagy $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ reláció. Ez sokszor nagyon bonyolult, mert az anyag elemi mágneses összetevőinek kölcsönhatása sokszor összemérhető a mágneses tér energiájával, sőt, meg is haladhatja azt. Az anyag mágneses tulajdonságait ezért elsősorban a mikrofizikai jelenségek határozzák meg.

- **dia- és paramágneses anyagok:** az anyagok bizonyos fajtáinál lineárisan függ a mágnesezettség illetve a mágneses tér a mágneses indukciótól; izotrop esetben:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu}{\mu_0} = \mu_r = 1 + \chi, \quad (5.61)$$

χ a mágneses szuszceptibilitás, μ illetve μ_r az anyag (relatív) permeabilitása. Formálisan ez az elektrosztatikához hasonlít

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (5.62)$$

Diamágneses anyagoknál $\chi < 0$ vagyis $\mu < \mu_0$, ami annak felel meg, hogy a generálódó mikroszkopikus mágnesezettség csökkenteni igyekszik a külső mágneses tér hatását. Olyan anyagoknál, ahol az elemi összetevőknek nincs mágneses dipólmomentumuk az indukció (l. később) által létrehozott elemi áramhurkok ilyen tulajdonságúak (Lenz-törvény). Ha összehasonlítjuk az elektrosztatikával, akkor az indukció és a töltésmegosztás hasonló szerepet játszik abban, hogy mindkettő csökkenteni igyekszik a megfelelő külső tér hatását. Az együtthatók szintjén azért borul fel az analógia, mert $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, de a fizikailag erőhatást kifejezni képes mágneses indukció esetén az anyagi konstans pont reciprok módon vezettük be: $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$. Vagyis $\varepsilon_r > 1$ megfelel $1/\mu_r > 1$ esetnek, azaz $\mu_r < 1$.

Ha az elemi összetevők maguk is mágnesek, akkor a fellebb tárgyalt forgatónyomaték hatására \mathbf{m} a \mathbf{B} irányába igyekszik beállni, vagyis $\mathbf{M} \sim \mathbf{B}$. Emiatt $\xi > 0$, azaz $\mu > \mu_0$. Ezek a *paramágneses anyagok*. Ennek nincs megfelelője az elektrosztatikában, hiszen ott $\mathbf{P} \sim \mathbf{E}$, ami miatt ismét az ε_r növekedését kapjuk.

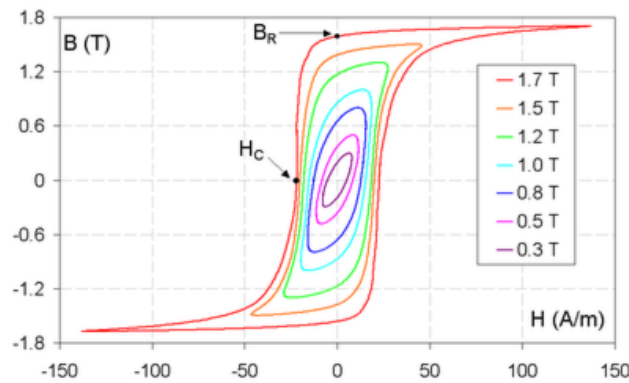
Ha a lineáris közelítés jó, akkor általában kicsi a χ értéke, tipikusan $|\mu - \mu_0|/\mu_0 \sim 10^{-5}$, vagyis sokszor elhanyagolható.

- **(anti)-ferromágneses anyagok:** ha az anyag rendelkezik mágneses szerkezettel, azaz elemi dipólokkal, akkor ezen dipólok egymásra hatását is olykor figyelembe kell venni. Ha csak a mágneses dipólok kölcsönhatását tekintenénk, akkor ezek egymással ellentétesen fordulva megszüntetnék a mágneses teret. Azonban az anyag mágneses dipóljai (spinje) közötti kölcsönhatások alapvetően kvantumos eredetűek, amelyek jóval erősebbek lehetnek a mágneses kölcsönhatásnál. Ezekben az

anyagokban a mezoszkopikus mágneses szerkezetet nem a külső mágneses indukció határozza meg elsősorban.

Ha az elemi mágneses dipólok ellentétes beállása preferált, akkor makroszkopikusan nem látható mágneses tér, csakúgy, mintha csak a mágneses kölcsönhatást tekintettük volna: ezek az antiferromágneses anyagok.

Ha az elemi mágneses dipólok párhuzamos beállása preferált, akkor homogén mágnesezettség alakulhat ki külső mágneses indukció hiányában is: ezek a ferromágneses anyagok. Hogy a teljes anyag mágneses energiáját csökkentsük, különböző mágnesezettségű tartományok (domének) alakulnak ki, ez a doménszerkezet határozza meg az anyag teljes mágneses terét. Külső mágneses indukció alkalmazásával ezek a doménfalak vándorolnak, s így az anyag mikroszkopikus szerkezete megváltozik. Emiatt a mágneses indukció kikapcsolásával már egy más doménszerkezetű, más mágneses terű anyagot találunk. Ez a histerézis jelensége (l. ábra. (5.1))



5.1. ábra. Histerézis hurok [14]

Habár a jelenség nem lineáris, minden pontban beszélhetünk permeabilitásról

$$\mu(\mathbf{H})\mathbf{H} = \mathbf{B}$$

alapján. Mivel a mágneses domének határa jóval könnyebben mozgatható, mint az elemi spinek, ezért jóval nagyobb mágneses permeabilitást kapunk, mint a diamágneses vagy paramágneses anyagoknál, akár $\mu/\mu_0 \sim 10^6$ is lehet, de 10^3 - 10^4 tipikus értékek (a fenti ábrán tipikusan 10^4). A gyors változás addig tart, amíg a teljes anyag egy mágneses domén, ekkor a μ értéke lecsökken a paramágneses anyagok szintjére, azaz több nagyságrendet esik. Ez a mágneses telítődés (szaturáció). Mágneses szaturációnál a mágneses indukció értéke a legjobb vasötvözeteknél ~ 2 T.

Ha kikapcsoljuk a külső mágneses teret, miután szaturáltuk az anyagot, akkor kapunk egy remanens mágnesezettséget, azaz egy megmaradó mágneses dipólsűrűséget.

5.5.1. Határfeltételek

Tekintsünk olyan anyagot, ahol az anyagi jellemzők hirtelen változnak meg (részlegesen homogén anyagok). A határon a $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ és $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ elektrodinamikai analógiájára

$$B_n \quad \text{és} \quad H_t \quad \text{folytonos,} \quad (5.63)$$

ha nincs kívülről adott felületi áramsűrűség.

Ez nem jelenti persze azt, hogy a két anyag határán nincs felületi áramsűrűség. Valóban, ha a felület z irányú, akkor $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \Theta(z) + \mathbf{M}_2 \Theta(-z)$, ezért

$$J_{\text{ind},i} = \varepsilon_{ijk} \partial_j M_k = \hat{\mathbf{e}}_z \times (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \delta(z). \quad (5.64)$$

Ez a $\delta(z)$ miatt a felületen folyó áramnak felel meg.

5.6. Magnetosztatikai feladatok megoldási módszerei

Megoldandó

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \text{és} \quad B_n, H_t \text{ folytonosak.} \quad (5.65)$$

Ennek megoldásánál a következő szempontokat vehetjük figyelembe

- Vektorpotenciál a legáltalánosabb esetben is mindig bevezethető: $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Ekkor adott $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ vagy $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ reláció esetén így a

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}(\operatorname{rot} \mathbf{A})) = \mathbf{J}, \quad \text{vagy} \quad \Delta \mathbf{A} = -\mu_0 [\mathbf{J} + \operatorname{rot} \mathbf{M}(\operatorname{rot} \mathbf{A})] \quad (5.66)$$

egyenleteket kell megoldanunk.

- Ha részlegesen homogén közegeket tekintünk, akkor az anyagi paraméterek állandó értékével számolhatunk a homogén részekben, a közeghatárokon a fent tárgyalt határfeltételeket alkalmazzuk. A következőkben csak ilyenek tárgyalására szorítkozunk.
- Ha az anyag lineáris, akkor $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ összefüggés alkalmazható. Hasonló közelítés alkalmazható akkor is, ha az anyag nem lineáris ugyan, de nem túl nagy változásokat tekintünk. Ha például az anyagban maradandó M_0 mágnesezettség van, akkor kis mágneses terek esetén felírható $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0$. A két esetet összevonva Coulomb mértékben ($\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$) kapjuk

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} - \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{A} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \text{folytonos a határon.} \quad (5.67)$$

- Ha $\mathbf{J} = 0$, akkor $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ miatt létezik (mágneses) skalárpotenciál, $\mathbf{H} = -\text{grad } \Phi_M$. Ha $\mathbf{J} = 0$ csak egy véges térrészre vonatkozik, akkor ott ugyan bevezethető a mágneses skalárpotenciál, azonban nem feltétlenül egyértékű függvényként. Ugyanis az Ampère törvény alapján

$$\oint d\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} = -\delta\Phi_M = \int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{J} \Rightarrow \delta\Phi_M = -\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{J} = -I, \quad (5.68)$$

azaz Φ_M -nek ugrása van. Végtelen vezető esetén például $\Phi_M = -I\varphi/(2\pi)$, innen gradiens képzéssel adódik a már látott (5.21) képlet. Ha ebben az esetben általános lineáris közelítést alkalmazunk az anyagban, akkor

$$0 = \text{div } \mathbf{B} = \text{div}(\mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_0) = -\mu\Delta\Phi_M + \mu_0\text{div } \mathbf{M}_0. \quad (5.69)$$

Összefoglalva tehát ekkor a megoldandó egyenlet

$$\mu\Delta\Phi_M = \mu_0\text{div } \mathbf{M}_0, \quad \Phi_M \quad \text{és} \quad -\mu\frac{\partial\Phi_M}{\partial n} + \mu_0\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_0 \quad \text{folytonos a határon.} \quad (5.70)$$

Alkalmazás:

Homogén \mathbf{H}_0 mágneses térbe helyezett μ permeabilitású R sugarú gömb mágneses tere és indukciója.

Megoldás

Ezt már megoldottuk elektrosztatikában (l. (4.32)). Annak analógiájára

$$\text{kívül:} \quad \Phi_M = -\mathbf{H}_0\mathbf{x} \left[1 - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \frac{R^3}{r^3} \right] \quad \text{belül:} \quad \Phi_M = -\frac{3}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0\mathbf{x}, \quad (5.71)$$

vagyis kívül a külső tér mellett egy dipól járulékát kapjuk

$$\mathbf{m} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} 4\pi R^3 \mathbf{H}_0. \quad (5.72)$$

Belül egyenletes teret kapunk:

$$\mathbf{H} = \frac{3}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{B} = \frac{3\mu_r}{2 + \mu_r} \mu_0 \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} = \frac{3(\mu_r - 1)}{2 + \mu_r} \mathbf{H}_0. \quad (5.73)$$

Tökéletes diamágnes esetén $\mu_r = 0$, vagyis a mágneses indukció belül nulla, leárnyékolódik a külső tér. Ezzel lehetővé válik, hogy a tökéletes diamágneseket a mágneses tér egyenleteinek tárgyalásakor mint *határfeltételeket* vegyük

figyelembe, hiszen a mágneses indukció normális komponenseinek folytonossága miatt a határon $B_n = 0$ feltételünk lesz. Ez analóg az elektrosztatika tökéletes vezetőinek esetével.

Erős ferromágnes esetén μ_r nagy, vagyis a belső mágneses tér nulla, a mágneses indukció azonban nem. ♦

Alkalmazás: Gömbmágnes tere

Mekkora a mágneses tér és mágneses indukció egy R sugarú gömbmágnes esetében, ha mágnesezettsége homogén \mathbf{M}_0 ?

Megoldás

Válasszuk a z irányt \mathbf{M}_0 irányának. A gömbön belül állandó a mágnesezettség, így $\text{div } \mathbf{M}$ csak a határon nem nulla, a releváns mennyiség

$$\mathbf{n}\mathbf{M}_0 = \frac{\mathbf{x}\mathbf{M}_0}{r} = M_0 \frac{z}{r} = M_0 \cos \theta = M_0 P_1(\cos \theta) \quad (5.74)$$

gömbi koordinátarendszerben.

A Laplace-egyenlet megoldását két részletben keressük: belül legyen Φ_{M1} , kívül Φ_{M2} , ezekre

$$\Delta \Phi_{M1} = 0, \quad \Delta \Phi_{M2} = 0. \quad (5.75)$$

A határfeltételek

$$\Phi_{M1} = \Phi_{M2}, \quad \partial_n \Phi_{M1} - \partial_n \Phi_{M2} = \mathbf{n}\mathbf{M}_0 = M_0 P_1(\cos \theta). \quad (5.76)$$

A megoldás a φ -függetlenség miatt kereshető Legendre-polinomokkal kifejtve. Mivel az $r = 0$ illetve az $r = \infty$ értékek végesek, marad

$$\Phi_{M1} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta), \quad \Phi_{M2} = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_{\ell} r^{-\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta). \quad (5.77)$$

A határfeltételek:

$$A_{\ell} R^{2\ell+1} = B_{\ell}, \quad \ell A_{\ell} R^{\ell-1} + (\ell+1) B_{\ell} R^{-\ell-2} = M_0 \delta_{\ell 1}, \quad (5.78)$$

innen

$$A_{\ell \neq 1} = B_{\ell \neq 1} = 0, \quad A_1 = M_0/3, \quad B_1 = R^3 M_0/3. \quad (5.79)$$

Tehát a gömb belsejében

$$\Phi_{M1} = \frac{M_0}{3} z \Rightarrow \mathbf{H}_{\text{belül}} = -\frac{\mathbf{M}}{3}, \quad \mathbf{B}_{\text{belül}} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{2\mu_0}{3} \mathbf{M}. \quad (5.80)$$

Belül a mágneses tér és mágneses indukció homogén. Érdekes, hogy a mágneses tér ellentétes a mágnesezettséggel. Kívül:

$$\Phi_{M2} = \frac{M_0 R^3}{3r^2} \cos \theta. \quad (5.81)$$

Ez egy $\mathbf{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{M}_0$ erősségű dipól tere. Ha kiszámítjuk a dipólsűrűséget $\frac{\mathbf{m}}{V_{\text{gömb}}} = \mathbf{M}_0$, visszkapjuk a gömbmágnes homogén mágnesezettségét. ♦

6. fejezet

Maxwell-egyenletek

Míg egy töltés egy semleges testet polarizál, azaz elektromosan aktívvá tesz, egy áramkör jelenléte nem indukál áramot egy mellette levő vezető hurokban. De Faraday 1831-ben észrevette, hogy az áram megváltozása már hatással van a másik áramkörösre. A körben indukálódó feszültség, Faraday megfigyelése szerint, arányos a mágneses fluxus változásával:

$$\mathcal{E} = \oint_{\partial F} \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell}, \quad \mathcal{F} = \int_F \mathbf{B} d\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}. \quad (6.1)$$

A Stokes-tételt felhasználva

$$\int_F \left[\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] d\mathbf{f} = 0, \quad \forall F \quad \Rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (6.2)$$

Ez a második Maxwell-egyenlet időfüggő, teljes alakja.

Megjegyzés: a \mathcal{E} és $\dot{\mathcal{F}}$ közötti 1-es együttható nem véletlen, a Lorentz-erővel konzisztens. Ha ugyanis egy merőleges mágneses térben levő áramhurokot megnövelek egy kis $d\ell$ szakaszon dx -szel, akkor az ezen a szakaszon levő töltésekre $F = qvB$ nagyságú erő hat, ami megfelel egy $E = vB$ térerősség hatásának. Emiatt $d\ell E = \delta\mathcal{E} = d\ell dx B/dt = d\mathcal{F}/dt$.

Időfüggés esetén módosítani kell a rot \mathbf{B} sztatikában megismert egyenletét is, hiszen most

$$\text{div} [\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] = \mu_0 \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{E}) \quad \Rightarrow \quad \text{div} \left[\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \right] = 0. \quad (6.3)$$

Innen ugyan nem következik egyértelműen, de a sztatikával ekkor kapunk egyszerűen egyezést, ha a divergencia argumentuma nulla. Ebben az esetben kapjuk a következő egyenletet:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \quad (6.4)$$

Ezzel egy konzisztens egyenletrendszeret kaptunk, a Maxwell-egyenleteket:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right).\end{aligned}\quad (6.5)$$

Jelölés: miután $\mu_0 \varepsilon_0$ dimenziója $(s/m)^2$, így egy sebesség dimenziójú mennyiség inverz négyzete; ezért írjuk

$$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow c = 2.99 \cdot 10^8 \frac{m}{s}. \quad (6.6)$$

c fizikai jelentése a fénysebesség lesz, l. később.

Megjegyzés: a továbbiakban olykor az időderiváltat ∂_t alakban fogjuk írni.

6.1. Vektor- és skalárpotenciál

Mivel $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, ezért továbbra is igaz, hogy egy vektorpotenciál rotációja:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.7)$$

Ha ezt visszaírjuk az \mathbf{E} egyenletébe

$$0 = \operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} [\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}]. \quad (6.8)$$

Egy nulla rotációjú vektormezőt írhatunk gradiens alakjában:

$$\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\operatorname{grad} \Phi \Rightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad (6.9)$$

vagyis a skalárpotenciál valamivel bonyolultabban jelentkezik az elektromos tér kifejezésében.

Ha ezeket visszaírjuk a Maxwell-egyenletekbe:

$$\begin{aligned}-\operatorname{div} \mathbf{E} &= \Delta \Phi + \partial_t \nabla \mathbf{A} = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \\ -\operatorname{rot} \mathbf{B} &= \Delta \mathbf{A} - \nabla(\nabla \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \nabla \partial_t \Phi + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A}.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Ismét felhívjuk a figyelmet arra, hogy \mathbf{A} és Φ nem fizikai mennyiségek, csupán \mathbf{E} és \mathbf{B} azok. Emiatt ha olyan vektor- illetve skalárpotenciált választunk, amely ugyanazt az \mathbf{E} -t illetve \mathbf{B} -t adja, akkor ez ekvivalens az eredeti választással (mértékinvariancia, mértékszabadság). Időfüggő esetben \mathbf{A} -t továbbra is egy gradienssel lehet megváltoztatni, mert annak rotációja nulla, viszont az elektromos tér bonyolultabb kifejezése miatt a skalárpotenciál másképp változtatandó:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (6.11)$$

A mértéktranszformációval összeköthető \mathbf{A} és Φ terek ekvivalenciaosztályokat jelölnek ki az összes téren belül: ezek a mérték-orbitok (mértékpályák). A mértékpályákhoz azonos fizika tartozik. Megtehetjük tehát azt, hogy a mérték-orbitokból mindig kiválasztunk egy reprezentáns elemet (ami itt persze egy teljes $\mathbf{A}(t, \mathbf{x})$, $\Phi(t, \mathbf{x})$ mezőkonfigurációt jelent). A kiválasztás módját nevezzük mértékrögzítésnek, az azt leíró egyenletet mértékfeltételnek vagy egyszerűen csak mértéknek. Nyilván olyan mértékrögzítést kell választani, amely minden mérték-orbitot csak egyszer metszi el¹. Vannak különösen jól bevált mértékek:

- Coulomb-mérték: itt előírjuk a $\text{div } \mathbf{A} = 0$ feltételt. Ez teljesíthető, hiszen ha $\text{div } \mathbf{A} \neq 0$ eredetileg, akkor megkövetelve a $\text{div } \mathbf{A}' = 0$ -t kapjuk

$$0 = \text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} + \Delta \Psi \quad \Rightarrow \quad \Delta \Psi = -\text{div } \mathbf{A}, \quad (6.12)$$

amely egyenlet megoldható, pontosabban marad benne egy térben állandó de esetleg időfüggő konstans. Ebben az esetben a skalárpotenciál egyenlete ugyanaz mint a stacionárius esetben:

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (6.13)$$

Ezzel a megoldással rögzítjük az időfüggő konstans értékét nullára.

Miután megvan a Φ értéke, visszaírva a második egyenletbe:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \Phi. \quad (6.14)$$

Itt a bal oldal divergenciája nulla, és ezzel konzisztens a jobb oldal is, hiszen $-\mu_0$ -at kiemelve:

$$\text{div} [\mathbf{J} - \varepsilon_0 \partial_t \nabla \Phi] = \text{div } \mathbf{J} - \varepsilon_0 \partial_t \Delta \Phi = \text{div } \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0 \quad (6.15)$$

a kontinuitási egyenlet miatt. Fogalmazhatunk úgy is, hogy \mathbf{J} -t felbontjuk transzverzális és longitudinális részre, hogy

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_\ell, \quad \nabla \mathbf{J}_t = 0, \quad \text{és} \quad \nabla \times \mathbf{J}_\ell = 0, \quad (6.16)$$

ekkor csak a transzverzális módus szerepelhet az előző egyenlet jobb oldalán:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_t. \quad (6.17)$$

¹Ez néha nem is olyan egyszerű (Gribov-probléma).

- Lorenz-mérték (sugárzási mérték): ekkor azt követeljük meg, hogy

$$\nabla \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = 0. \quad (6.18)$$

Ebben az esetben mindkét egyenlet ugyanolyan alakot ölt:

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.19)$$

Láthatóan mindkét mértékben a tér- és időderiváltak egy kombinációja jelenik meg:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2, \quad (6.20)$$

ez a d’Alambert operátor. Ezzel

$$\square \Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (6.21)$$

6.2. Maxwell-egyenletek anyag jelenlétében

Anyag jelenlétében ugyanazokat a gondolatokat használhatjuk, mint időfüggetlen esetben. Egy helyen kell csupán módosítani: ha a polarizációs töltések mozognak, az áramot képvisel. A teljes áram tehát

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{mkr} + \mathbf{J}_{pol}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{J}_{mkr} = \text{rot } \mathbf{M}, \quad (6.22)$$

ahol \mathbf{J}_{pol} a polarizációs töltések mozgásából származó áram. A töltésmegmaradás mérlegegyenlete miatt:

$$0 = \partial_t \varrho_{pol} + \text{div } \mathbf{J}_{pol} = \text{div } [\mathbf{J}_{pol} - \partial_t \mathbf{P}]. \quad (6.23)$$

A zárójel rotációként írható, ez azonban \mathbf{J}_{mkr} korrekcióját jelenti, vagyis vehetjük nullának. Ekkor

$$\mathbf{J}_{pol} = \partial_t \mathbf{P}. \quad (6.24)$$

Ezzel:

$$\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = \mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_{mkr} + \mathbf{J}_{pol} = \mathbf{J} + \text{rot } \mathbf{M} + \partial_t \mathbf{P} \Rightarrow \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D}. \quad (6.25)$$

Vagyis közegben a Maxwell-egyenletek:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{D} &= \varrho, & \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ennek megoldásához kellenek a $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ illetve $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ konstitúciós relációk, most már időfüggő esetre. Itt figyelembe vehetjük azt, hogy az időfüggés akkor játszik fontos szerepet, ha elég gyorsak a terek időbeli változásai, különben végig stacionárius esetet tekinthetünk (azaz teljesen elhanyagolhatjuk az időderiváltakat). Ez a legtöbb esetben azt jelenti, hogy az időfüggés jóval gyorsabb annál, hogy az anyag belső szerkezete (pl. mágneses domének) jelentősen átrendeződhessenek. Ezért, ha az időfüggés fontos, akkor a lineáris közelítés jó lesz mind az elektromos, mind a mágneses terek esetén.

Emiatt gyors időfüggés esetén, részlegesen homogén anyagban (vagy vákuumban) a homogén részekben igaz lesz:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varrho - \Delta \mathbf{E} = -\partial_t \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\mu \partial_t \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} = -\Delta \mathbf{B} = \mu \operatorname{rot} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mu \operatorname{rot} \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B},\end{aligned}\tag{6.27}$$

azaz

$$\begin{aligned}\square \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla \varrho + \mu \partial_t \mathbf{J} \\ \square \mathbf{B} &= -\mu \nabla \times \mathbf{J}.\end{aligned}\tag{6.28}$$

Vagyis a \mathbf{E} illetve \mathbf{B} terekre is a d’Alambert operátor adja az időfejlődést.

7. fejezet

Elektromágneses tér energiája

Ha mágneses tér is jelen van, akkor az energia kifejezése megváltozik. Mivel a mágneses tér létrehozásakor az indukció jelensége fontos, ezért nem hanyagolhatjuk el az időfüggést.

7.1. Az energia mérlegegyenlete

Az időfüggést felhasználva azonban az energia- és impulzusmegmaradás egy más szemléletét kapjuk. Ehhez nézzük meg, hogy egy töltés mozgásakor mekkora teljesítményt kell leadnunk. A teljesítmény kifejezése általában $P_F = \mathbf{v}\mathbf{F}$, és ha az erő elektromágneses kölcsönhatásból származik, akkor

$$P_F = \mathbf{v}q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\mathbf{v}\mathbf{E} \Rightarrow P_F = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}). \quad (7.1)$$

A tér felépítéséhez szükséges teljesítmény ennek ellentettje. Ezért

$$P = -P_F = - \int d^3\mathbf{x} \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}) \Rightarrow p = -\mathbf{E}\mathbf{J} \quad (7.2)$$

teljesítménysűrűség definiálható. Ezt átírhatjuk a Maxwell-egyenletek segítségével

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}\mathbf{J} &= \mathbf{E}(-\text{rot } \mathbf{H} + \partial_t \mathbf{D}) = \mathbf{E}\partial_t \mathbf{D} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} = \\ &= \mathbf{E}\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H}\partial_t \mathbf{B} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} + \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Az első két tag teljes időderivált alakjában írható

$$\mathbf{E}\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{H}\partial_t \mathbf{B} = \partial_t w, \quad \delta w = \mathbf{E}\delta \mathbf{D} + \mathbf{H}\delta \mathbf{B} \quad (7.4)$$

Lineáris anyagokban:

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H}) = \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2. \quad (7.5)$$

Az utolsó két tag teljes divergencia, hiszen definiálva

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (7.6)$$

Poynting-vektort, annak divergenciája előállítja a kívánt tagokat:

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \partial_i \varepsilon_{ijk} (E_j H_k) = H_k \varepsilon_{ijk} \partial_i E_j - E_j \varepsilon_{jik} \partial_i H_k = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (7.7)$$

Vagyis azt kapjuk, hogy

$$\partial_t w + \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{J} \mathbf{E} = 0. \quad (7.8)$$

A teljes térre integrálva a divergencia nem ad járulékot, azaz

$$\partial_t \int d^3 \mathbf{x} w = \int d^3 \mathbf{x} (-\mathbf{J} \mathbf{E}) = P, \quad (7.9)$$

vagyis a w integrálja az elektromágneses tér energiájaként értelmezhető, w maga ezért az energiasűrűség. Valóban, csupán az elektromos részt tekintve már találkoztunk ezzel a kifejezéssel (l. (4.45)).

Emiatt (7.8) az energia megmaradását fejezi ki mérlegegyenlet formájában. Ilyen módon a \mathbf{S} Poynting-vektor is fizikai értelmet nyer, ez képviseli az energia-áramsűrűséget, azaz $\partial_t w + \operatorname{div} \mathbf{S}$ együtt az elektromágneses tér energiájának mérlegegyenletét adja. Az utolsó tagot ($\mathbf{J} \mathbf{E}$) vagy forrásnak tekintjük, vagy az elektromágneses térben mozgó áramok teljesítménysűrűségének értelmezve az energia anyaghoz kötött részét képviseli.

Itt is megtehetjük azt, hogy a tér forrását, azaz az áramsűrűséget rögzítjük, és az anyagot változtatjuk. Vonjuk ki az anyag jelenlétében érvényes energiát az anyag nélkül érvényes energiából. Mivel a források ugyanazok, azaz $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0$, írhatjuk, hogy

$$\delta W' = \int d^3 \mathbf{x} \mathbf{J} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) \delta t = \int d^3 \mathbf{x} (\mathbf{J}_0 \mathbf{E} - \mathbf{J} \mathbf{E}_0) \delta t. \quad (7.10)$$

Beírva a $\mathbf{J} = \operatorname{rot} \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}$ kifejezést, ugyanazt kell végrehajtani, mint fent:

$$\delta W' = \int d^3 \mathbf{x} (\mathbf{H}_0 \delta \mathbf{B} - \mathbf{H} \delta \mathbf{B}_0 + \mathbf{E} \delta \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \delta \mathbf{D}). \quad (7.11)$$

Lineáris anyagban

$$W' = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} (\mathbf{H}_0 \mathbf{B} - \mathbf{H} \mathbf{B}_0 + \mathbf{E} \mathbf{D}_0 - \mathbf{E}_0 \mathbf{D}). \quad (7.12)$$

Kihasználva, hogy $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ és $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, kapjuk

$$W' = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} (\mathbf{M} \mathbf{B}_0 - \mathbf{P} \mathbf{E}_0). \quad (7.13)$$

A második tag ismerős, az első a mágneses anyag járuléka. De ne felejtsük el, hogy ha az áramhurkok rögzítettek, akkor változó mágneses tér feszültséget indukál, ami csökkenteni igyekszik az áramokat. Vagyis kívül is munkát kellett végezni az áramok fenntartása érdekében. Ezért a mágneses rendszer inkább a konstans potenciálban mozgatott dielektrikum példájával analóg.

7.2. Az impulzus mérlegegyenlete

Hasonló módon járhatunk el az impulzusváltozásnál is: ha egy próbatöltést helyezünk elektromágneses térbe, akkor a rá ható erő a Lorentz erő:

$$\mathbf{F} = \int d^3\mathbf{x} (\varrho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}). \quad (7.14)$$

Az erő az impulzusváltozás forrása, ugyanolyan szerepet játszik, mint a teljesítmény az energiánál. Ezért megpróbálhatjuk kifejezni az elektromágneses tér impulzus mérlegegyenletét.

Átalakítva a jobb oldalt

$$\begin{aligned} \varrho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} &= \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{B} \times (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}) = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \partial_t \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= \partial_t (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) - \dot{\mathbf{B}} \times \mathbf{D} + \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &= -\partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Az első tag teljes időderivált, a második tag pedig teljes divergencia, hiszen lineáris anyagban

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_i &= E_i \partial_j D_j - \varepsilon_{kij} D_j \varepsilon_{klm} \partial_l E_m = E_i \partial_j D_j - D_j \partial_i E_j + D_j \partial_j E_i = \\ &= \partial_j \left(E_i D_j - \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{E} \delta_{ij} \right), \end{aligned} \quad (7.16)$$

és hasonló egyenletet kapunk a mágneses szektorban is. Bevezetve

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (7.17)$$

és

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} \mathbf{E} + \mathbf{B} \mathbf{H}) \delta_{ij} - E_i D_j - H_i B_j \quad (7.18)$$

menyiségeket, azt kapjuk, hogy

$$\partial_t g_i + \partial_j T_{ij} + (\varrho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})_i = 0. \quad (7.19)$$

Az egyenlet értelmezéséhez integráljuk ki a teljes térre a fenti kifejezést:

$$\partial_t \int d^3\mathbf{x} g_i = - \int d^3\mathbf{x} (\varrho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})_i. \quad (7.20)$$

A jobb oldal az anyagra ható erő ellenereje, tehát a bal oldal nem más, mint az elektromágneses tér impulzusa, vagyis \mathbf{g} az elektromágneses tér impulzussűrűségének. A divergencia faktor pedig, a mérlegegyenletek szokásos értelmezése szerint, az impulzus áramsűrűsége vagy *Marwell-féle feszültségtenzor*.

8. fejezet

Kvázistacionárius eset

Az időfüggés tárgyalásában az első lépés, ha a második deriváltakat elhanyagoljuk (6.28) egyenletben (vagyis a d’Alambert operátor helyett Laplace-operátort veszünk). Ennek fizikai oka az lehet, hogy a második derivált egy $1/c^2$ faktorról van beszorozva, vagyis csak akkor jelentős, ha a mezők térbeli és időbeli változásának skálája c faktorban különbözik. Ez azt jelenti, hogy az azt létrehozó töltések mozgására is ez kell vonatkozzon, tehát $v \sim c$ esetben lesz jelentős. Lassú, kis frekvenciás mozgások esetében tehát valóban elhanyagolhatjuk ezeket a tagokat. Szabad töltéshordozókkal rendelkező vezetőkben lejátszódó alacsony frekvenciás folyamatok leírására például igen alkalmas ez a közelítés: ezt fogjuk most megvizsgálni.

Jó vezetőkben gyakran eltekinthetünk a szabad töltések felhalmozódásától, azaz vehetjük a $\varrho = 0$ közelítést. Feltehetjük továbbá, hogy az áramsűrűség lineárisan függ a térerősségtől

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{Ohm törvény}). \quad (8.1)$$

Ezzel a Maxwell-egyenletek zárttá válnak. A fenti átírással

$$\square \mathbf{E} = \mu \sigma \partial_t \mathbf{E}, \quad \square \mathbf{B} = \mu \sigma \partial_t \mathbf{B}. \quad (8.2)$$

Ez a *távíró-egyenlet*. Alacsony frekvenciás határesetben elhanyagolva a második deriváltakat kapjuk:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \sigma \partial_t \mathbf{E}, \quad \Delta \mathbf{B} = \mu \sigma \partial_t \mathbf{B}. \quad (8.3)$$

A kvázistacionárius esetben a potenciálokra Lorentz mértékben, lineáris anyagban a következő egyenlet vonatkozik

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= -\frac{\varrho}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varrho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \Delta \mathbf{A} &= -\mu \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

8.1. Indukciós együttható

Vegyünk változó áramsűrűségű rendszert homogén közegben. Egy kijelölt $C = \partial F$ görbe mentén mérhető elektromotoros erő ekkor, (8.4) alapján:

$$\mathcal{E}_C = -\partial_t \int_F d\mathbf{f} \mathbf{B} = -\partial_t \oint_C d\mathbf{s} \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_C d\mathbf{s} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\partial_t \mathbf{J}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (8.5)$$

Tegyük fel, hogy az áramok vezetőkben folynak, és a vezetőkben az árameloszlás térbeli eloszlása nem változik időben, csak a nagysága. Vagyis

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}') = \sum_i I_i(t) \mathbf{j}_i(\mathbf{x}'). \quad (8.6)$$

Ezt visszaírva kapjuk:

$$\mathcal{E}_C = -\sum_i L_{Ci} \dot{I}_i, \quad L_{Ci} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_C d\mathbf{s} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (8.7)$$

Az L csak az árameloszlás geometriájától függ, azaz időben állandó, neve indukciós együttható.

Ha vékony vezetőkről van szó, amelyek C_i görbék mentén folynak, akkor az k . körben ébredő elektromotoros erő

$$\mathcal{E}_k = -\sum_i L_{ki} \dot{I}_i, \quad L_{ki} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_k} d\mathbf{s} \oint_{C_i} d\mathbf{s}' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (8.8)$$

L_{ki} a kölcsönös indukció együttható. $k = i$ esetén önindukciós együtthatóról beszélünk, de ekkor nem szabad a vezető vastagságát elhanyagolni.

8.2. Mágneses tér kvázistacionárius dinamikája vezetőkben, skin-effektus

Nézzük most a mágneses tér egyenletét (8.3) alapján, és vizsgáljuk meg az időfüggést két példán keresztül:

Alkalmazás:

Induljunk ki egy inhomogén mágneses konfigurációból $\mathbf{B}(t = 0, \mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{x})$.

Homogén vezető közegben hogyan fejlődik a mágneses indukció időben?

Megoldás

Érdemes térbeli Fourier-transzformációt végezni a \mathbf{B} téren

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (8.9)$$

Ekkor

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (-k^2) \mathbf{B}(\mathbf{k}), \quad (8.10)$$

Ezzel

$$\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} [k^2 \mathbf{B} + \mu\sigma \partial_t \mathbf{B}] = 0. \quad (8.11)$$

Inverz Fourier-transzformáció után

$$k^2 \mathbf{B} + \mu\sigma \partial_t \mathbf{B} = 0, \quad (8.12)$$

amely egyenlet megoldása

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{k}) = \mathbf{b}(\mathbf{k}) e^{-\frac{k^2 t}{\mu\sigma}}. \quad (8.13)$$

Láthatóan a mágneses tér konstanshoz tart, hiszen a konstans részre $\mathbf{k} = 0$, az nem csillapodik. Minél nagyobb a hullámszám, azaz minél nagyobb k , annál gyorsabban lecseng annak amplitúdója. Mivel a nagyfrekvenciás Fourier módusok felelősek az „élekért”, így az időfejlődés során egyre simább lesz a mágneses indukció. ♦

Alkalmazás:

Adott egy félteret kitöltő μ_r relatív permeabilitású anyag. Kívül határfeltételként $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ mágneses teret írunk elő, ahol \mathbf{H}_0 konstans. Milyen lesz a mágneses tér az anyagban?

Megoldás

Az anyagon belül igaz a hővezetési egyenlet \mathbf{H} -ra

$$\Delta \mathbf{H} = \mu\sigma \partial_t \mathbf{H}. \quad (8.14)$$

A határon \mathbf{H}_t és $\mu \mathbf{H}_n$ folytonos minden időpillanatban. Emiatt minden arányos $e^{-i\omega t}$ -vel, vagyis $\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$. Ezt az alakot visszaírva kapjuk

$$\Delta \mathbf{h} = -i\omega \mu\sigma \mathbf{h}. \quad (8.15)$$

A kezdeti feltétel független a transzverzális (x és y) koordinátáktól, így a megoldás is az lesz. Legyen a normális koordináta z , ekkor $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(z)$, és

$$\frac{d^2 h_i}{dz^2} = -i\omega \mu\sigma h_i. \quad (8.16)$$

Ennek megoldása

$$h_i(z) = h_i(0) e^{\pm \kappa z}, \quad \kappa^2 = -i\omega \mu\sigma. \quad (8.17)$$

Be szokták vezetni a $\delta = (1 - i)/\kappa$ mennyiséget. Ennek értéke

$$\kappa = \sqrt{-i\omega\mu\sigma} = \frac{1 - i}{\delta}, \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \quad (8.18)$$

Határfeltétel, hogy $z \rightarrow \infty$ esetén ne legyen végtelen a tér, emiatt a negatív előjelet kell választanunk. Ezenfelül a transzverzális H megy folytonosan át a határon, valamint a normális irányú B . Emiatt

$$\mathbf{H}_t(t, \mathbf{x}) = \mathbf{H}_{0t} e^{-i(\omega t - z/\delta) - z/\delta}, \quad H_n(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_r} H_{0n} e^{-i(\omega t - z/\delta) - z/\delta}. \quad (8.19)$$

Vagyis valamennyi komponens amplitúdója exponenciálisan lecseng δ karakterisztikus távolságon. Adott anyag esetén a frekvencia növekedtével δ csökken. Nagy frekvencia mellett a mágneses tér tehát egyre inkább csak az anyag felületén van jelen. Emiatt ezt az effektust bőr-effektusnak (*skin-effektus*) nevezzük, a δ mennyiséget pedig *behatolási mélységnek* vagy skin mélységnek.

Ideális diamágnésnél vagy tökéletes vezetőben $\delta = \infty$, azaz nincs lecsengés. Ugyanakkor a normál komponens amplitúdója le van normálva $1/\mu_r$ -rel, vagyis ha van kívül B_n , akkor belül a H_n végtelen, így az energia is $(BH/2)$. Ez azt jelenti, hogy ideális diamágnés vagy tökéletes vezető külső felületén $B_n = 0$ kell legyen, ahogy ezt már korábban is láttuk (l. (5.73)).

Az áramsűrűség:

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{e}_z \times \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}(t, z) = \frac{i - 1}{\delta} \mathbf{e}_z \times \mathbf{H}_t. \quad (8.20)$$

Az áramsűrűség arányos a transzverzális mágneses térrel, azaz ez is lecseng z -ben. Nagy frekvenciánál tehát csak a vezetők felületén folyik áram.

Kiszámíthatjuk a hőveszteséget is. A lokális hőtéljesítmény

$$\mathcal{P} = \mathbf{J} \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}^2 = \frac{2}{\delta^2 \sigma} \cos^2(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{3\pi}{2}) e^{-2z/\delta}. \quad (8.21)$$

Egy periódusra átlagolva $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ miatt a következő alakhoz jutunk:

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{\delta^2 \sigma} H_{0t}^2 e^{-2z/\delta} = \frac{\mu \omega H_{0t}^2}{2} e^{-2z/\delta}. \quad (8.22)$$

A teljes leadott teljesítmény egy $dxdy$ felületen:

$$\langle P \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{dxdy}{\delta^2 \sigma} H_{0t}^2 \int_0^\infty dz e^{-2z/\delta} = \frac{dxdy}{2\delta \sigma} H_{0t}^2 \quad (8.23)$$

◆

9. fejezet

Teljes időfüggés: források nélküli megoldás

Most tekintsük a Maxwell-egyenleteket teljes időfüggésükkel. Mint láttuk, ilyenkor a konstitúciós relációk lineáris közelítése a legtöbb anyag esetén megfelelő lesz. Ekkor részlegesen homogén közegekben ugyanazok az egyenletek igazak, mint vákuumban, így az elektrodinamika összes egyenlete hasonló szerkezetű lesz:

$$\square \Psi = -f. \quad (9.1)$$

Lorentz mértékben a potenciálok minden komponensére, Coulomb mértékben a vektorpotenciálra, adott forrás esetén az \mathbf{E} és \mathbf{B} komponenseire ez az egyenlet lesz igaz. A d’Alambert operátorban levő konstans lineáris közelítés esetén

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}, \quad (9.2)$$

n a törésmutató. A legtöbb anyagra, amelyben a fény terjedni képes, $\mu_r \approx 1$ jó közelítés. Ezért a törésmutató vizsgálatánál használhatjuk a $n \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ képletet.

A fenti egyenlet inhomogén lineáris másodfokú parciális differenciálegyenlet. Az általános megoldás két rész összege

- a homogén rész ($f = 0$) általános megoldása
- az inhomogén rész egy partikuláris megoldása.

Most kezdjük a homogén egyenlet vizsgálatát, azaz

$$\square \Psi = 0. \quad (9.3)$$

Az egyenlet megoldását keressük $\Psi(t, \mathbf{x}) \sim e^{\pm i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ alakban. Visszaírva kapjuk:

$$\omega^2 = c^2 k^2, \quad (9.4)$$

vagyis ω függvénye \mathbf{k} -nak: ezt a függést hívják diszperziós relációnak. Ha nincs kitüntetett irány a térben, akkor csak $|\mathbf{k}|$ -tól függhet ω – jelen esetben a függés lineáris.

Az általános megoldás a fenti alakok összege tetszőleges együtthatóval:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} (a(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} + b(\mathbf{k})e^{i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}), \quad \text{ahol} \quad \omega_k = kc \quad (9.5)$$

(a kezdeti $1/2$ csak a kényelem kedvéért van a képletben, hiszen a és b tetszőleges együtthatók). Mivel Ψ valós ($\Psi^*(t, \mathbf{x}) = \Psi(t, \mathbf{x})$), ezért $a^*(-\mathbf{k}) = b(\mathbf{k})$. Emiatt

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Re \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} a_0(\mathbf{k}) \cos(-\omega_k t + \mathbf{k}\mathbf{x} + \phi_{\mathbf{k}}), \quad (9.6)$$

ahol $a(\mathbf{k}) = a_0 e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$. Emiatt minden lineáris kifejezésben nyugodtan használhatjuk a komplex megoldást (a $b(\mathbf{k})$ -s rész nélkül), a végén a valós részt vesszük.

9.1. Csoport- és fázissebesség

A fenti megoldás síkhullámok összegét írja le. Feledkezzünk meg egy időre arról, hogy $\omega_k = ck$, hogy a tárgyalás a későbbiekre is érvényes legyen.

Tekintsünk egyetlen módust először (monokromatikus síkhullám). Ebben a valódi, valós megoldás alakja

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} + \varphi), \quad (9.7)$$

ahol a és ϕ paramétereket a kezdeti feltételből határozhatjuk meg. Ez a megoldás haladó síkhullámot ír le. A megoldás időben és térben is periodikus. Egy $t = t_0$ -n kiválasztott \mathbf{x}_0 ponttal azonos fázisban levő pontok halmazának elemei:

$$\omega t_0 - \mathbf{k}\mathbf{x}_0 + \varphi = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} + \varphi + 2n\pi, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (9.8)$$

Ebből

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (t - t_0)v_f \hat{\mathbf{k}} + \lambda n \hat{\mathbf{k}} + \beta \hat{\mathbf{k}}_{\perp}, \quad v_f = \frac{\omega_k}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad \mathbf{k}\mathbf{k}_{\perp} = 0. \quad (9.9)$$

$t = t_0$ -nál tehát \mathbf{x}_0 -lal azonos fázisban van a \mathbf{k} -ra merőleges sík (hullámfront), valamint ennek λ -val való eltoltjai (hullámhossz). Az idő előrehaladtával a hullámfrontok $\hat{\mathbf{k}}$ irányában v_f sebességgel haladnak tovább, vagyis ez az azonos fázisú pontok sebessége, a *fázissebesség*. Vákuumban $v_f = c$ = állandó. Miután az elektromágneses hullámokat a fényvel azonosítjuk, ezért a fázissebesség a fénysebesség.

Monokromatikus síkhullámnál igaz, hogy

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi(0, \mathbf{x} - v_f t \hat{\mathbf{k}}), \quad (9.10)$$

azaz a hullám alak csak eltolódik, nem deformálódik. Általános $a(\mathbf{k})$ esetén ez nem lesz így, a hullám gyorsan összekuszálódik. Viszont ha azonos irányú síkhullámokat teszünk össze, akkor a hullámterjedés irányát tekintve x iránynak írhatjuk

$$\Psi(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-i\omega_k t + ikx}. \quad (9.11)$$

Tegyük fel, hogy azon a tartományon, ahol $a(k) \neq 0$, ott ω_k lassan változik. Ekkor sorba fejthetjük valami közepes k_0 körül:

$$\omega_k = \omega_0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega_k}{dk} \right|_{k=k_0} + \dots \quad (9.12)$$

Bevezetjük a *csoportsebességet* a következő képlettel:

$$v_{cs} = \left. \frac{d\omega_k}{dk} \right|_{k=k_0}, \quad (9.13)$$

ekkor

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-i(\omega_0 + (k-k_0)v_{cs})t + ikx} = e^{-i(\omega_0 - k_0 v_{cs})t} \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{-ikv_{cs}t + ikx} = \\ &= e^{-i\omega_0(1-v_{cs}/v_f)t} \int \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{ik(x-v_{cs}t)} = e^{-i\omega_0(1-v_{cs}/v_f)t} \Psi(0, x - v_{cs}t). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Láthatóan egy fázisfaktor erejéig megmarad a hullám alakja. Ezért beszélhetünk hullámcsomagról, amely a burkolóját megtartva stabilan halad előre az időben v_{cs} sebességgel, ez indokolja a csoportsebesség elnevezést. Általában $v_{cs} \neq v_f$, kivéve, ha ω_k lineáris k -ban, mint a vákuumbeli fényterjedésnél. A fázisfaktor előtagban a fázis változása arányos $1 - v_{cs}/v_f$ -vel, vagyis nulla, ha $v_{cs} = v_f$. Ennek jelentése: a burkoló alatt az elemi hullámok v_f sebességgel haladnak előre.

Információ küldésekor mindig hullámcsomagot kell előállítani, hiszen végtelen síkhullamban nincs semmi szerkezet. Emiatt az információtovábbítás sebessége v_{cs} . Előfordulhat bizonyos esetekben, hogy ezek a sebességek nagyobbak a fénysebességnél, ez azonban csak annak a jele, hogy ott nem használhatók ezek a fogalmak.

Ha a fázissebességet a fénysebességből a törésmutatóval képezzük, amelynek ismerjük a frekvenciafüggését:

$$v_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{n\omega}{c}. \quad (9.15)$$

Ekkor a csoportsebesség

$$v_{cs} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{n + \frac{\omega}{2n} \frac{d\varepsilon_r}{d\omega}}. \quad (9.16)$$

9.2. Elektrodinamikai hullámok

Coulomb mértékben, végtelen térben

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0 \\ \square\mathbf{A} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathbf{A}_0(\mathbf{k}) e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}.\end{aligned}\quad (9.17)$$

A Coulomb mértékben $\text{div } \mathbf{A} = 0$, ebből $\mathbf{A}_0(\mathbf{k})\mathbf{k} = 0$.

Egy monokromatikus komponensre az elektromos térerősség

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} = i\omega \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (9.18)$$

vagyis

$$\mathbf{E}_0 = i\omega \mathbf{A}_0, \quad (9.19)$$

ami azt is jelenti, hogy $\mathbf{E}_0\mathbf{k} = 0$. Ez összhangban van a $\text{div } \mathbf{E} = 0$ feltétellel. A mágneses indukció:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} = \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad (9.20)$$

vagyis ennek amplitúdója

$$\mathbf{B}_0 = i\mathbf{k} \times \mathbf{A}_0 = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0. \quad (9.21)$$

Erre is igaz, hogy $\mathbf{B}_0\mathbf{k} = 0$, összhangban a $\text{div } \mathbf{B} = 0$ egyenlettel. Tehát monokromatikus síkhullámban $\hat{\mathbf{k}}$, \mathbf{E}_0 és \mathbf{B}_0 egymásra merőlegesek. A mágneses indukció nagyságára

$$B_0 = \frac{E_0}{c} \quad (9.22)$$

összefüggést kapunk.

A homogén Maxwell-egyenleteknek van egy érdekes szimmetriája. Ha (6.5) vagy az (6.26) egyenletet nézzük lineáris anyagban, akkor észrevehetjük, hogy a $\mathbf{E} \rightarrow -c\mathbf{B}$ és $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E}/c$ helyettesítésre ugyanazok maradnak a függvényalakok. Ezt a leképzt dualitási transzformációnak nevezzük.

A $\hat{\mathbf{k}}$ -ra merőleges altér két dimenziós. Emiatt felvehetünk egy ortonormált bázist $\{\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, és írhatjuk

$$\mathbf{E} = (\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2) e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (9.23)$$

$\mathbf{e}_{1,2}$ a polarizációs vektorok; legyen $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, ekkor $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$. Együtthatóik, $\alpha_{1,2}$ lehetnek komplex mennyiségek is, amely a kétfajta polarizációjú síkhullám különböző fázisát jelentik. Valóban, az igazi térerősség a fenti mennyiség valós része, azaz $\alpha_i = E_i e^{i\varphi_i}$ jelöléssel

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_1 \mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_1) + E_2 \mathbf{e}_2 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_2) \\ \mathbf{B} &= \frac{E_1}{c} \mathbf{e}_2 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_1) - \frac{|E_2|}{c} \mathbf{e}_1 \cos(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_2).\end{aligned}\quad (9.24)$$

Adott \mathbf{x} pontban az (E_1, E_2) két dimenziós vektor egy görbét rajzol ki az idő előrehaladtával. Ha $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor ez egy egyenes, ekkor lineárisan polarizált fényről beszélünk; ha $\varphi_1 = \varphi_2 \pm i\pi/2$, akkor a görbe kör, a fény cirkulárisan polarizált. Általános esetben ellipszist kapunk, a fény elliptikus polarizációjáról beszélünk.

A hullám energiasűrűsége:

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} [\mathbf{E}^2 + (\hat{k} \times \mathbf{E})^2] = \varepsilon_0 \mathbf{E}^2. \quad (9.25)$$

Látható módon az elektromos és a mágneses komponens ugyanakkora járulékot ad az energiasűrűséghez. Ebben az egyenletben a valódi időfüggést kell használnunk, hiszen nemlineáris összefüggésről van szó. Tehát

$$w = \varepsilon_0 (E_1^2 \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_1) + E_2^2 \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t + \varphi_2)). \quad (9.26)$$

Egy periódusra átlagolva

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_1^2 + E_2^2). \quad (9.27)$$

A Poynting-vektor

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E} \times (\hat{k} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{Z_0} \hat{k} \mathbf{E}^2. \quad (9.28)$$

ahol bevezettük a Z_0 vákuumimpedancia fogalmát. Dimenzióját tekintve ez egy ellenállás jellegű mennyiség, értéke

$$Z_0 = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.7 \Omega. \quad (9.29)$$

Az energiaáram iránya tehát a hullám iránya, nagysága pedig

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{c\mu_0\varepsilon_0} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = cw. \quad (9.30)$$

Vagyis az energia-áramsűrűség és az energiasűrűség viszonya ugyanolyan mint a részecskék esetén az áramsűrűség és a töltéssűrűségé, $\mathbf{J} = \mathbf{v}\rho$.

Az impulzussűrűség a (7.17) képlet alapján arányos a Poynting-vektorral, nagysága

$$g = \frac{S}{c^2} = \frac{w}{c} \Rightarrow w = gc. \quad (9.31)$$

A fenti képletek alapján az elektromágneses hullámra gondolhatunk úgy is, mint részecskék áramára, ahol a részecskék energiája és impulzusa $E = cp$ módon kapcsolódik össze. A relativitáselmélet szerint ez nulla tömegű részecskéket jelent. Ez a fotonkép alapja. Az interferencia jelensége miatt azonban mindig megfontoltan kell alkalmazni ezt az azonosítást.

9.3. Frekvenciafüggő permittivitás, törésmutató

Bocsássunk egy lineárisan polarizálható anyagra időfüggő elektromos teret. Az anyag válasza erre a hatásra a polarizáció kialakulása. Azonban a polarizáció értéke egy adott időben nem feltétlenül az éppen akkor adott elektromos térrel arányos, a környezet, a csillapítás mind okozhat fáziskésést, ami miatt a korábbi értékek is számíthatnak. Azt azonban mindenképpen elvárjuk, hogy a polarizáció nem függhet a hozzá képest jövőbeli térerősségektől. A polarizációsűrűségre megfogalmazva, és eltekintve a térkoordinátáktól, írhatjuk tehát:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Theta(t - t') G(t, t') E(t') \quad (9.32)$$

Ha nincs kitüntetett időpont, akkor G csak $t - t'$ -től függhet. Ez a kifejezés a sztatika (4.10) képletének, általánosítása, így a P és E közötti arányossági tényezőt hívhatjuk általános, időfüggő szuszceptibilitásnak:

$$\varepsilon_0 \chi(t - t') = \Theta(t - t') G(t - t') \Rightarrow P(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(t - t') E(t'). \quad (9.33)$$

A szuszceptibilitás értelmezése tehát valójában egy anyagi (lineáris) válaszfüggvény.

A fenti kifejezés egy konvolúció, Fourier-transzformáltja:

$$P(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) E(\omega). \quad (9.34)$$

Fourier-térben tehát szorzat alakú az anyagi válasz. Az elektromos eltolás és a permittivitás így:

$$D(\omega) = \varepsilon_0 E(\omega) + P(\omega) = \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) E(\omega) \Rightarrow \varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi(\omega), \quad (9.35)$$

\mathbf{P} és \mathbf{E} valósága miatt

$$\mathbf{P}^*(\omega) = \mathbf{P}(-\omega), \quad \mathbf{E}^*(\omega) = \mathbf{E}(-\omega) \Rightarrow \chi^*(\omega) = \chi(-\omega). \quad (9.36)$$

Hogy egy konkrét példát adjunk, tekintsük a mikroszkopikus polarizálhatóság modelljét, egy harmonikus potenciálban kötött, de most csillapított töltött részecskét. Bocsássunk erre a rendszerre időfüggő elektromos teret. A mozgásegyenlet egy dimenzióban

$$m \partial_t^2 x + \Gamma \partial_t x + Dx = qE(t) \Rightarrow \partial_t^2 p + \gamma \partial_t p + \omega_0^2 p = \frac{q^2}{m} E(t), \quad (9.37)$$

ahol $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$, $\gamma = \frac{\Gamma}{m}$. Ennek Fourier transzformálttal a megoldása:

$$p(\omega) = \frac{q^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} E(\omega), \quad (9.38)$$

a polarizációsűrűség pedig

$$P(\omega) = \frac{Nq^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2} E(\omega), \quad (9.39)$$

ahol N a töltéshordozók sűrűsége. Ha több sajátfrekvencia van, akkor azok összegét fogjuk kapni. A relatív permittivitás tehát

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{1}{\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2}. \quad (9.40)$$

Ha megvan $\varepsilon_r(\omega)$, akkor felírhatjuk a törésmutató is $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$ kifejezéssel. Mivel $v_f = c/n$, a fázissebesség frekvenciafüggő. A diszperziós reláció $\omega = kc/n$ most tehát nem lineáris, emiatt a csoportsebesség nem egyezik meg a fázissebességgel: a (9.16) kifejezést kell kiértékelni meghatározásához. A térerősség kifejezése monokromatikus síkhullám esetén:

$$E(t, \mathbf{x}) = E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x} \frac{\omega}{c} n(\omega)}. \quad (9.41)$$

Van egy másik effektus is, amely kapcsolatban van a nemtriviális diszperziós relációval. Láthatóan ugyanis a modellünkben ε_r -ben van imaginárius rész is, ha $\gamma \neq 0$. Valóban:

$$\Im \frac{1}{\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{\omega_j^2 - i\gamma\omega - \omega^2} - \frac{1}{\omega_j^2 + i\gamma\omega - \omega^2} \right] = \frac{\gamma\omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (9.42)$$

Emiatt

$$\Im \varepsilon_r(\omega) = \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{\gamma\omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (9.43)$$

Ennek következtében a törésmutatónak is van képzetes része

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = n_{re}(\omega) + i n_{im}(\omega), \quad n_{im}(\omega) > 0. \quad (9.44)$$

Ezt visszaírva az időfejlődésbe

$$E(t, \mathbf{x}) = E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x} \frac{\omega}{c} n_{re}(\omega)} e^{-\mathbf{k}\mathbf{x} \frac{\omega}{c} n_{im}(\omega)}. \quad (9.45)$$

Mivel $n_{im} > 0$, ezért ez egy térben csillapodó hullámot ír le. A hullám energiája elnyelődik az anyagban, emiatt az n_{im} mennyiséget *abszorpció*s együtthatónak is szokták hívni. Miután n_{im} eredete a mikroszkopikus csillapítás, így valójában az energia a mikroszkopikus szabadsági fokok csillapítása miatt csökken. Szokták definiálni a κ opacitást is, mely az energia-áramsűrűség (intenzitás) csillapodásának jellemző hossza egy ϱ sűrűségű anyagban.

$$S(x) = S_0 e^{-\varrho \kappa x} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{2\omega n_{im}(\omega)}{c\varrho}. \quad (9.46)$$

mivel a periódusra átlagolt Poynting-vektor $S \sim |E|^2$. Ha ε_r kicsi, akkor $n \approx 1 + \varepsilon_r/2$, azaz $n_{im} = \Im \varepsilon_r/2$. A (9.43) miatt $\varepsilon_r \sim N$, a részecskesűrűséggel, az indokolja, hogy a ϱ sűrűséget expliciten kiemelik, κ így érzéketlenebb az anyag állapotára.

Az abszorpciós együttható néhány jellemzőjét gondoljuk végig.

- Minél kisebb az abszorpciós együttható, annál átlátszóbb az anyag. Víz esetén egy frekvenciatartományban kicsi az n_{im} , valójában ez határozza meg a látható fény tartományát. Másodrendű fázisátalakulásnál minden frekvenciatartományban megjelennek gerjeszthető módusok, így mindenhol van csillapítás, emiatt látunk kritikus opaleszcenciát.
- Szabad elektrongázra $\omega_j = 0$, $\gamma = 0$, vagyis

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}, \quad \omega_P^2 = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \quad (9.47)$$

ω_P a plazmafrekvencia.

- $\omega < \omega_P$ frekvencián $\varepsilon_r < 0$, vagyis $n(\omega)$ tisztán képzetes, vagyis az elektrongáz nem ereszt át a fényt.
- $\omega > \omega_P$ frekvencián az elektrongázban nincs csillapítás. Ugyanakkor

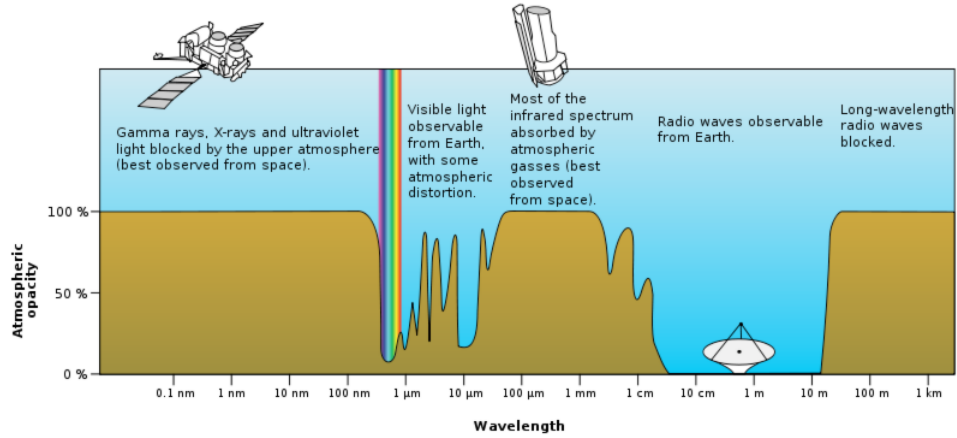
$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} < 1 \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{c}{n} > c. \quad (9.48)$$

A fázissebesség tehát nagyobb mint a fénysebesség. A csoportsebesség azonban (9.16) alapján

$$\omega \frac{d\varepsilon_r}{d\omega} = \frac{2\omega_P^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad v_{cs} = \frac{c}{n + \frac{\omega_P^2}{n\omega^2}} = \frac{nc}{n^2 + \frac{\omega_P^2}{\omega^2}} = nc < c. \quad (9.49)$$

kisebb mint a fénysebesség. $\omega = \omega_P$ -nél $n = 0$, így a csoportsebesség nulla, a fázissebesség végtelen!

- A légkör teljes opacitása (átlátszatlansága) látható a 9.1 ábrán [15]. Az opacitás százalékos értékét $100/(1 + e^{\varrho \kappa L})$ kifejezéssel kaphatjuk, ahol L a légkör optikai úthossza.
 - A légköri frekvenciák alsó részében az ionosféra (amely közelíthető szabad elektrongázzal) átlátszatlan, vagyis visszaveri az elektromágneses sugárzást. Ez használható rádiózásra, mert a hullámok a Föld felületén nagy távolságra is el tudnak jutni [9]. Az URH (VHF) hullámok frekvenciája (hullámhossza) 30-300 MHz (10-1m) már felette van a légköri plazmafrekvenciának, így azok csak rövid távolságon foghatók.



9.1. ábra. A légkör abszorpciós együtthatójának frekvenciafüggése

- Magasabb frekvencián a légkör átlátszó lesz, itt a földi rádiócsillagászati eszközök kilátnak a világűrbe.
- Utána következik egy újabb átlátszatlan rész, amely elsősorban a molekuláris gerjesztési frekvenciák jelenlétének köszönhető.
- A 390 és 750 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) között nincsen olyan gáz, amelynek jelentős elnyelése lenne – elsősorban a víz elnyelését kell itt figyelni. Emiatt a légkör ismét átlátszó.
- Magasabb tartományokban a molekuláris ionizáció egyre fontosabb szerepet játszik, emiatt a légkör ismét átlátszatlanává válik.

9.3.1. Kramers-Kronig reláció

Láttuk, hogy $\varepsilon_0 \chi(t) = \Theta(t)G(t)$, vagyis csak $G(t)$ -ből csak a $t > 0$ értékek számítanak, a $t < 0$ tartomány szabadon értelmezhető. A $G(-t) = -G(t)$ választás esetén egyszerű formulákat kapunk. Mivel szorzatfüggvény Fourier-transzformáltja konvolúció, valamint a Θ -függvény Fourier-transzformáltja:

$$\Theta(\omega) = \frac{i}{\omega + i\delta} \Big|_{\delta \rightarrow 0^+}, \quad (9.50)$$

ezért

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{iG(\omega')}{\omega - \omega' + i\delta}. \quad (9.51)$$

Valós függvény Fourier-transzformáltjára

$$G^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} G(t) = G(-\omega), \quad (9.52)$$

páratlan függvény Fourier-transzformáltja

$$G(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} G(-t) = -G(\omega) \Rightarrow G^*(\omega) = -G(\omega), \quad (9.53)$$

vagyis $G(\omega)$ tisztán imaginárius. Ekkor:

$$\Im \frac{1}{\omega - \omega' + i\varepsilon} = -\pi \delta(\omega - \omega') \Rightarrow \Im \varepsilon_r(\omega) = \frac{-iG(\omega)}{2}. \quad (9.54)$$

A fenti mikroszkopikus példában

$$G(\omega) = \sum_j \frac{N_j q_j^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{2i\gamma\omega}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (9.55)$$

Általában a mikroszkopikus modellekből tetszőlegesen pozitív függvény jöhet. Ezt visszaírva az ε_r kifejezésébe:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\Im \varepsilon_r(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon}. \quad (9.56)$$

Ez azt mutatja, hogy ε_r imaginárius része teljesen meghatározza az ε_r -t (Kramers-Kronig reláció). Ez a kauzalitás következménye.

9.3.2. A vezetőképesség és a permittivitás kapcsolata

Bocsássunk anyagra időfüggő elektromos teret, legyen az időfüggés monokromatikus, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, a helyfüggéstől tekintsünk el. A térerősség polarizációsűrűséget hoz létre. Lineáris anyagban (9.34) szerint

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{P}_0 = \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_0. \quad (9.57)$$

A polarizáció változása a polarizációs töltések mozgását jelenti, ami áramot jelent (6.24)

$$\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P} = -i\omega \mathbf{P} = -i\omega \varepsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}. \quad (9.58)$$

Ezzel megkaptuk az Ohm-törvény $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ mikroszkopikus alakját (l. (8.1) képlet). A σ vezetőképesség értéke a fentiek szerint

$$\sigma = -i\omega \varepsilon_0 \chi(\omega), \quad (9.59)$$

vagyis a relatív permittivitás $\varepsilon_r = 1 + \chi$ értéke

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0\omega} \quad (9.60)$$

kis frekvencián. Vagyis vezetők esetén azt várjuk, hogy a permittivitás imaginárius része divergál kis frekvenciákra, az együtttható éppen a vezetőképesség.

A molekuláris modellünkben nem kötött, de csillapított elektrongázra $\omega_0 = 0$, azaz

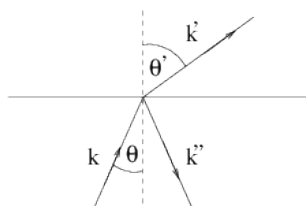
$$\varepsilon_r = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{-i\omega\gamma - \omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 1 + \frac{Nq^2}{m\gamma} \frac{i}{\varepsilon_0\omega} \Rightarrow \sigma = \frac{Nq^2}{m\gamma}, \quad (9.61)$$

a Drude-modell eredménye.

9.4. Elektromágneses hullámok közegek határán

Homogén közegek határán ki kell elégíteni a határfeltételeket:

$$D_n, B_n, \mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t \text{ folytonosak.} \quad (9.62)$$



9.2. ábra. Hullám közeghatáron

Tekintsünk egy síkhullámot, amely egy \mathbf{n} normálisú sík közeghatárra érkezik (9.2): ahonnan érkezik, ott ε , ahova ott ε' legyen a permittivitás. Az eredmény három hullám összege lesz: a beeső hullám mellett egy átmenő (megtört) és egy visszavert hullámé. Jelöljük a beeső hullám térerősségeit a következő módon:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}. \quad (9.63)$$

A határfeltételek minden időpontban való érvényessége miatt a megtört és a visszavert hullámra is $e^{-i\omega t}$ az időfejlődés. A megtört hullám jellemzői legyenek \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{k}' , a visszavert hullámra \mathbf{E}'' , \mathbf{B}'' , \mathbf{k}'' . Jelöljük $\mathbf{k}\mathbf{n} = \cos\theta$, és $\mathbf{k}'\mathbf{n} = \cos\theta'$. Feltesszük azt, hogy $\mathbf{k}''\mathbf{n} = -\mathbf{k}\mathbf{n}$, vagyis a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel (ez természetesen kijön egy bonyolultabb számolásból is).

Koordinátázzuk a rendszert úgy, hogy $\hat{\mathbf{e}}_z \parallel \mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} \sin \theta' \\ 0 \\ \cos \theta' \end{pmatrix} \quad \mathbf{k}'' = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.64)$$

A polarizációhoz érdemes a feladat geometriájához illeszkedő bázist választani:

$$1.) \quad \mathbf{E}\mathbf{n} = 0, \quad 2.) \quad \mathbf{E} \in \{\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{n} \text{ sík}\} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{n} = 0. \quad (9.65)$$

Ezek a feltételek igazak maradnak a megtört és visszavert hullámra is.

1. Itt $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}, \hat{\mathbf{k}}$, azaz, felhasználva $\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0$ összefüggést

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}'_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E'_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}''_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ E''_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_0 &= \frac{E_0}{c} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}'_0 = \frac{E'_0}{c} \begin{pmatrix} -\cos \theta' \\ 0 \\ \sin \theta' \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}''_0 = \frac{E''_0}{c} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.66)$$

A határfeltételek

$$\begin{aligned} D_n &= \text{folyt.} & -- \\ \mathbf{E}_t &= \text{folyt} & E_0 + E''_0 = E'_0 \\ B_n &= \text{folyt.} & \frac{1}{c}(E_0 + E''_0) \sin \theta = \frac{1}{c'}E'_0 \sin \theta' \\ \mathbf{H}_t &= \text{folyt} & \frac{1}{c\mu}(E_0 - E''_0) \cos \theta = \frac{1}{c'\mu'}E'_0 \cos \theta'. \end{aligned} \quad (9.67)$$

A B_n illetve \mathbf{E}_t egyenletekből következik

$$\frac{1}{c} \sin \theta = \frac{1}{c'} \sin \theta' \Rightarrow n \sin \theta = n' \sin \theta' \quad (9.68)$$

a Snellius-Descartes-törvény. Innen megkapjuk a θ' -t.

A térerősségekre a megoldás

$$E''_0 = E_0 \frac{\mu' c' \cos \theta - \mu c \cos \theta'}{\mu' c' \cos \theta + \mu c \cos \theta'}, \quad E'_0 = E_0 \frac{2\mu' c' \cos \theta}{\mu' c' \cos \theta + \mu c \cos \theta'}. \quad (9.69)$$

2. Ebben az esetben \mathbf{B} teljesen transzverzális, azaz a felírandó egyenletek

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(B_0 + B''_0) &= \frac{1}{\mu'}B'_0 \\ (E_0 - E''_0) \cos \theta &= E'_0 \cos \theta' \\ \varepsilon(E_0 + E''_0) \sin \theta &= \varepsilon' E'_0 \sin \theta'. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Az első és utolsó egyenlet összehasonlításából most is a Snellius-Descartes-törvény következik. A megoldás:

$$E_0'' = E_0 \frac{\mu c \cos \theta - \mu' c' \cos \theta'}{\mu c \cos \theta + \mu' c' \cos \theta'}, \quad E_0' = E_0 \frac{2\mu' c' \cos \theta}{\mu c \cos \theta + \mu' c' \cos \theta'}. \quad (9.71)$$

Ez a képlet formálisan a $\mu \rightarrow \varepsilon$ helyettesítéssel adódik az előző eredményből, ami a forrásmentes Maxwell-egyenletek dualitásának következménye.

Tanulságok

- $n' < n$ esetén $\sin \theta' > \sin \theta$, vagyis van olyan θ_0 , amelyre nincs megoldás, azaz nincs megtört fény: $\sin \theta_0 = n'/n$. Ennél nagyobb beesési szögek esetén a hullám teljes egészében visszaverődik.
- a 2.) esetben $\mu = \mu'$ -t választva elérhető, hogy $E_0'' = 0$. Ennek feltétele

$$c \cos \theta = c' \cos \theta' \quad (9.72)$$

Vezessük be $c/c' = n'/n = r$ mennyiséget. Ekkor a Snellius-Descartes törvény szerint $\sin \theta' = \frac{1}{r} \sin \theta$, vagyis

$$r^2 \cos^2 \theta = \cos^2 \theta' = 1 - \sin^2 \theta' = 1 - \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (9.73)$$

Innen $r = 1$ esetén azonosságot kapunk: ekkor nincs különbség a törésmutatók között, és soha nincs visszavert hullám. Ha $r \neq 1$, akkor beírva az ismert trigonometrikus azonosságokat $\cos^2 \theta = 1/(1 + \tan^2 \theta)$ és $\sin^2 \theta = \tan^2 \theta / (1 + \tan^2 \theta)$ egyszerűen kapjuk

$$\tan \theta = r = \frac{n'}{n}. \quad (9.74)$$

Ez a Brewster-szög, ekkor a visszavert hullám a felülettel párhuzamosan polarizált. Érdekes módon a másik esetben nem létezik megoldása az $E_0'' = 0$ egyenletnek. A felület irányú elektromos polarizációval rendelkező visszavert hullám tehát mindig van (kivéve persze ha $n' = n$).

9.5. Hullámterjedés határfeltételekkel

A határfeltételek speciális típusa az, amikor teljesen eltekinthetünk valamelyik anyagban az elektromágneses tértől. Ilyen például egy ideális vezetővel határolt térrész, amelyet ideális diamágnesnek is tekinthetünk. Ekkor az anyagon belül sem \mathbf{E} sem \mathbf{B} nem létezhet, vagyis a határon teljesülnie kell

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad B_n = 0 \quad (9.75)$$

feltételeknek. Fizikailag közelítőleg ilyen rendszerek a hullámvezetők illetve üregrezonátorok.

9.5.1. Hullámvezető

A hullámvezető egy ideális vezetők által határolt cső, amelyben elektromágneses hullámok tudnak terjedni. Itt most az egyszerűség kedvéért vegyünk téglalap keresztmetszetű egyenes csövet. A rendszer koordinátázásához válasszuk a koordináta-rendszer z irányát vegyük a cső irányának. A cső mérete legyen $a \times b$. Ekkor a (9.75) határfeltételek:

$$\begin{aligned} E_x(x, 0, z, t) &= E_z(x, 0, z, t) = E_x(x, b, z, t) = E_z(x, b, z, t) = \\ &= E_y(0, y, z, t) = E_z(0, y, z, t) = E_y(a, y, z, t) = E_z(a, y, z, t) = 0, \\ B_y(x, 0, z, t) &= B_y(x, b, z, t) = B_x(0, y, z, t) = B_x(a, y, z, t) = 0. \end{aligned} \quad (9.76)$$

Érdekes az általános konfigurációkat, ahol E_z és B_z nem nulla, két hullám szuperpozíciójaként kezelni, ahol vagy $E_z = 0$ (transzverz elektromos, TE módus) és a $B_z = 0$ (transzverz mágneses, TM módus).

TE eset

Itt az elektromos teret érdemes felírni, hiszen egy komponensét már tudjuk. A megoldás síkhullámok összege kell legyen, az idő és a z -függésre valóban síkhullámszerű alakot kaphatunk. A transzverzális irányban azonban a határfeltételek miatt állóhullámok kialakulására kell számítanunk. Mivel az $E_x|_{y=0} = 0$, valamint $E_y|_{x=0} = 0$, ezért várhatóan az egyik $\sin(k_y y)$ -nal, a másik $\sin(k_x x)$ -szel kell arányos legyen. Nézzük a következő Ansatz-ot:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \\ E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.77)$$

A síkhullám összetevőkre igaz $\omega = kc$, azaz $\omega^2 c^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ kell teljesüljön. Az $E_x|_{y=b} = 0$ miatt $k_y = \frac{m\pi}{b}$, az $E_y|_{x=0} = 0$ miatt $k_x = \frac{n\pi}{a}$, ahol n, m egészek kell legyenek.

A $\text{div } \mathbf{E} = 0$ feltétel alakja:

$$e^{-i\omega t + ik_z z} \sin k_x x \sin k_y y (E_{0x} k_x + E_{0y} k_y) = 0. \quad (9.78)$$

Ez szerencsére teljesíthető minden x, y -ra (az Ansatz-unknak köszönhetően), amit kapunk

$$E_{0x} k_x + E_{0y} k_y = 0. \quad (9.79)$$

A mágneses indukciót a $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = i\omega \mathbf{B}$, képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \frac{-i}{\omega} \text{rot } \mathbf{E}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} -\frac{k_z}{\omega} E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \\ \frac{k_z}{\omega} E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \\ \frac{-i}{\omega} (k_x E_{0y} - k_y E_{0x}) \cos k_x x \cos k_y y \end{pmatrix} \quad (9.80)$$

A $\text{div } \mathbf{B} = 0$ és $\text{rot } \mathbf{B} = c^{-2} \partial_t \mathbf{E}$ automatikusan teljesülnek.

Ha $B_z = 0$ lenne, az azt jelentené, hogy $k_x E_{0y} = k_y E_{0x}$, ami (9.79) egyenlettel együtt csak $\mathbf{E} = 0$ esetben teljesülhetne. Emiatt nem lehet egyszerre TE és TM egy megoldás (bonyolultabb geometria esetén már igen).

Fizikailag a megoldás a cső keresztmetszetén állóhullámokat jelent, $n - 1$ illetve $m - 1$ csomóponttal az x illetve y irányban. A cső mentén k_z hullámszámmal és ω frekvenciával terjedő a hullámot kapunk. A z irányú terjedés fázissebessége

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = c \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{k_z a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{k_z b} \right)^2} > c \quad (9.81)$$

mindig nagyobb mint a fénysebesség, azonban a csoportsebesség

$$v_{cs} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{k_z a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{k_z b} \right)^2}} < c \quad (9.82)$$

mindig kisebb.

A körfrekvencia képletéből

$$k_z = \pm \sqrt{\omega^2 c^2 - (k_x^2 + k_y^2)}. \quad (9.83)$$

Mivel k_x és k_y közül legalább az egyik nem nulla (különben a megoldás maga is azonosan nulla lenne), ezért létezik egy legkisebb körfrekvencia (levágási frekvencia), amire még valós k_z -t kapunk. Ha $a > b$, akkor $n = 1$, $m = 0$, azaz $k_x = \pi/a$, $k_y = 0$ választással¹, akkor

$$\omega_{min} = \frac{c\pi}{a}. \quad (9.84)$$

Ha ennél kisebb frekvenciájú hullámot bocsátunk a hullámvezetőre, akkor k_z tisztán imaginárius lesz, azaz exponenciálisan elhalnak a terek. Másrészt kis k_z -kre $v_{cs} \sim k_z$, azaz egyre lassabban terjednek ezek a hullámok.

Az energiaáramláshoz kiszámíthatjuk a Poynting-vektort $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ képlettel. Figyelniük kell, hogy itt már a komplex kifejezések valós részét kell beírni. Az x és y komponens:

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{1}{\mu} (E_y H_z - E_z H_y) = \frac{k_y^2 - k_x^2}{4\mu k_x} E_{0y}^2 \sin(2\omega t - 2k_z z) \sin(2k_x x) \cos^2(k_y y), \\ S_y &= \frac{1}{\mu} (E_z H_x - E_x H_z) = \frac{k_y^2 - k_x^2}{4\mu k_y} E_{0x}^2 \sin(2\omega t - 2k_z z) \cos^2(k_x x) \sin(2k_y y). \end{aligned} \quad (9.85)$$

¹Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor $E_y \neq 0$, azaz ez egy nem nulla megoldást ír le.

Ezek egy periódusra vett átlaga nulla. A z komponens kiszámítása:

$$\begin{aligned} S_z &= \frac{1}{\mu}(E_x B_y - E_y B_x) = \frac{k_z}{\mu\omega}(E_x^2 + E_y^2) = \\ &= \frac{k_z}{\mu\omega} \sin^2(\omega t - k_z z) [E_{0x}^2 \cos^2 k_x x \sin^2 k_y y + E_{0y}^2 \sin^2 k_x x \cos^2 k_y y]. \end{aligned} \quad (9.86)$$

Egy periódusra, valamint a felületre átlagolva

$$\langle S_z \rangle = \frac{k_z}{8\mu\omega} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2). \quad (9.87)$$

Az energiasűrűség kifejezése, rögtön beírva az egy periódusra, valamint a felületre vett átlagolást

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= \frac{1}{8} \left(\frac{\varepsilon}{2} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) + \frac{1}{2\mu\omega^2} (k_z^2 E_{0x}^2 + k_z^2 E_{0y}^2 + (k_x E_{0y} - k_y E_{0x})^2) \right) = \\ &= \frac{1}{16\mu\omega^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} + k_z^2 + k_x^2 + k_y^2 \right) (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) - \frac{1}{16\mu\omega^2} (k_x E_{0x} + k_y E_{0y})^2. \end{aligned} \quad (9.88)$$

Az utolsó tag nulla (9.79) miatt. Emiatt

$$\langle w \rangle = \frac{1}{8\mu c^2} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) = \frac{\langle S_z \rangle}{v_{cs}}. \quad (9.89)$$

Csakúgy, mint korábban a síkhullámok esetén, most is egy részecskeszerű energia áram-sűrűséget kaptunk, ahol a helyettesítő részecskék sebessége v_{cs} csoportsebesség.

TM eset

Az előző esethez hasonlóan tárgyalható, de most a mágneses indukciót érdemes felírni. Ez ismét legyen egy z irányban terjedő hullám, az $x - y$ síkban állóhullámokkal. A határfeltételeket kielégítő megoldás:

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \\ B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.90)$$

ahol $\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$ a Maxwell-egyenletek miatt, és $k_x = \frac{n\pi}{a}$, $k_y = \frac{m\pi}{b}$ a határfeltételek miatt. A $\text{div } \mathbf{B} = 0$ egyenlet következtében

$$B_{0x} k_x + B_{0y} k_y = 0. \quad (9.91)$$

Az elektromos tér a rot $\mathbf{B} = c^{-2} \partial_t \mathbf{E} = -i\omega/c^2 \mathbf{E}$ egyenletből következik:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \frac{ic^2}{\omega} \text{rot } \mathbf{B}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t + ik_z z} \begin{pmatrix} \frac{k_z c^2}{\omega} B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \\ -\frac{k_z c^2}{\omega} B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \\ \frac{ic^2}{\omega} (k_y B_{0x} - k_x B_{0y}) \sin k_x x \sin k_y y \end{pmatrix} \quad (9.92)$$

A $\text{div } \mathbf{E} = 0$ és $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ egyenletek automatikusan teljesülnek.

Ebben a csatornában a minimális frekvencia nem jöhet az $n = 1, m = 0$ választásból, mert ekkor $k_y = 0$, azaz (9.91) miatt $B_{0x} = 0$, és így $\mathbf{B} = 0$ lenne. A minimális frekvenciához $n = m = 1$ tartozik,

$$\omega_{\min} = c\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}. \quad (9.93)$$

9.5.2. Üregrezonátor

Ha a z irányt is lezárjuk c távolságban, akkor a határfeltételekhez hozzájön még

$$\begin{aligned} E_x(x, y, 0, t) = E_y(x, y, 0, t) = E_x(x, y, c, t) = E_y(x, y, c, t) &= 0, \\ B_z(x, y, 0, t) = B_z(x, y, c, t) &= 0. \end{aligned} \quad (9.94)$$

Ekkor a z irányban is állóhullámok alakulnak ki. A TE esetben

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.95)$$

ahol $\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$ a Maxwell-egyenletek miatt, és $k_x = \frac{n\pi}{a}$, $k_y = \frac{m\pi}{b}$ és $k_z = \frac{\ell\pi}{c}$ a határfeltételek miatt. A TM esetben

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} B_{0x} \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z \\ B_{0y} \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.96)$$

innen

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{ic^2}{\omega} e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} B_{0y} k_z \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \\ -B_{0x} k_z \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \\ (B_{0x} k_y - B_{0y} k_x) \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z \end{pmatrix}. \quad (9.97)$$

Az üregben csak bizonyos frekvenciák képesek csillapodás nélkül megmaradni, ezek az üreg sajátfrekvenciái.

10. fejezet

Teljes időfüggés: az inhomogén rész megoldása

Ahogy tárgyaltuk, a $\square\Psi = -f$ megoldásának egyik eleme a homogén rész általános megoldása, amely a határfeltételek figyelembevételére is alkalmas. A másik eleme az inhomogén rész egy parciális megoldásának megkeresése, mégpedig a határfeltételeket is a kényelem diktálta módon választva. A megoldandó egyenletet így a végtelen térre terjeszthetjük ki.

10.1. Green-függvények

A megoldandó egyenlet tehát $\square\Psi = -f$. Ahogyan sztatikában is tettük, az általános forrás helyett áttérünk a pontforrásra:

$$\square_x G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') = -\delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad \Rightarrow \quad \psi(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{x}' G(t, \mathbf{x}; t', \mathbf{x}') f(t', \mathbf{x}'). \quad (10.1)$$

A G megoldást itt is Green-függvénynek hívjuk. Ahogyan korábban is, a jobb oldal $t - t'$ illetve $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ függése miatt $G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

Hogy G -t meghatározzuk, végezzünk időbeli Fourier transzformációt. Fizikailag egy időben pontszerű forrás helyett egy oszcilláló forrás terét számítjuk ki. Mivel $\delta(t) \rightarrow 1$, valamint $\partial_t^2 \rightarrow -\omega^2$, ezért

$$(\Delta + k^2)G(\omega, \mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x}), \quad \omega = kc. \quad (10.2)$$

A $\Delta + k^2$ kifejezést nevezik *Helmholtz operátornak*.

A jobb oldal, valamint a határfeltételek is forgásinvariánsak, ezért G is az lesz, azaz gömbi koordinátarendszerben felírva csak r -től fog függeni. Ezt felhasználva térjünk át

gömbi koordinátarendszerre, és tekintsük egyelőre az $r \neq 0$ esetet:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rG) + k^2 G = 0, \quad \text{ha } r \neq 0. \quad (10.3)$$

Ez másodrendű differenciálegyenlet, megoldásai¹

$$G_{R/A}(\omega, r) = C \frac{e^{\pm ikr}}{r}. \quad (10.4)$$

Az arányossági tényezőhöz a forrást kell figyelembe venni. Integráljuk a $\Delta G = -k^2 G - \delta$ egyenletet egy gömbre a Gauss tétel segítségével, kihasználva, hogy G csak $r = |\mathbf{x}|$ függvénye

$$\begin{aligned} \int_V d^3\mathbf{x} \Delta G &= \oint_{\partial V} d^2\mathbf{x}_i \nabla_i G = 4\pi R^2 \left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=R} = 4\pi C (\pm i k R - 1) e^{\pm i k R} = \\ &= -4\pi k^2 \int_0^R dr r^2 G(r) - 1 = -4\pi C k^2 \int_0^R dr r e^{\pm i k r} - 1 = \\ &= 4\pi C [1 + (\pm i k R - 1) e^{\pm i k R}] - 1. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Ez akkor igaz, ha $C = 1/(4\pi)$. A konstansunk tehát független a k -tól; valójában ezt sejthettük is, mert az $\mathbf{x} = 0$ -nál végtelen nagy forrással a Laplace-operátor végtelen értéke lesz egyensúlyban, vagyis k értéke nem számít az arányossági tényezőben. $k = 0$ -nál viszont a Laplace-egyenlet Green-függvénye jön be, amely – mint a sztatikában láttuk – $1/(4\pi r)$, azaz az arányossági tényező $1/(4\pi)$. Emiatt:

$$G_{R/A}(\omega, r) = \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}. \quad (10.6)$$

Hogy a valós időbeli megoldást is megkapjuk, vissza kell Fourier transzformálnunk a megoldást:

$$G_{R/A}(t, r) = \frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{\pm i\omega r/c} = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t \mp \frac{r}{c}\right). \quad (10.7)$$

Vagyis az eredeti Green-függvények alakja:

$$G_{R/A}(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right). \quad (10.8)$$

¹Valójában elég lenne egy partikuláris megoldás, de a kényelem, és a fizikai interpretáció miatt megtartjuk mindkét megoldást most.

A megoldás pedig:

$$\begin{aligned}\Psi_{R/A}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) f(t', \mathbf{x}') = \\ &= \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} f\left(t \mp \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right).\end{aligned}\quad (10.9)$$

Rögtön megfigyelhetjük, hogy ha a forrás időfüggetlen, akkor a sztatika eredményét kapjuk vissza.

10.1.1. A Green-függvények fizikai értelmezése

Vegyük most azt a nem fizikai példát, mikor a pontforrásunk csak egyetlen pillanatra, egyetlen helyen villan fel egységnyi erősséggel, azaz $f(t, \mathbf{x}') = \delta(t)\delta(\mathbf{x}')$. Ekkor

$$\Psi_R(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (10.10)$$

Ez a megoldás csak $t > 0$ -ra nem nulla, és ott is csak egy $r = ct$ gömbfelületen: azaz egy kifutó gömbhullámfrontot kapunk. Mivel r -be csak késve érkezik a felvillanó forrás jele, ezért azt a megoldást késő, *retardált* megoldásnak hívjuk, és G_R neve retardált Green-függvény. Hogy a sztatikához hasonló képletet kapjunk, jelölhetjük

$$[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret} = f\left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right) \Rightarrow \Psi_R(t, \mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (10.11)$$

Ha egy forrás $t > 0$ -n üzemel, és megadjuk a kezdeti feltételeket, akkor a megoldás

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi_0(t, \mathbf{x}) + \int d^3\mathbf{x}' \frac{[f(t, \mathbf{x}')]_{\mathbf{x}ret}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (10.12)$$

ahol a $\Psi_0(t, \mathbf{x})$ olyan szabad megoldás, amely a $t = 0$ pontban a kezdeti feltételeket szolgáltatja.

Ha ugyanezt az A Green-függvénnyel akarjuk megcsinálni a felvillanó pontforrásra a következő megoldást kapjuk:

$$\Psi_A(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t + \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (10.13)$$

Ez a megoldás $t > 0$ -ra nulla, és $t < 0$ -ra is csak egy $r = -ct$ gömbfelületen különbözik nullától. Ezért egy befutó gömbhullámfrontot kapunk. A megoldás megelőzi a forrás felvillanását, ezért ezt a megoldást előrehozott, *avanzsált* megoldásnak, a G_A Green függvényt avanzsált Green-függvénynek hívjuk. Az értelmezés: ha egy forrás $t < t_0$ -ig üzemel, és megadjuk a tér értékét $t = t_0$ -nál, akkor a korábban mérhető tér:

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \Psi_0(t, \mathbf{x}) + \Psi_A(t, \mathbf{x}). \quad (10.14)$$

10.2. Lokalizált, oszcilláló töltésrendszerek tere

Elektrodinamikában, Lorentz mértékben, ha kezdetben a potenciálok $\Phi = \mathbf{A} = 0$ voltak, akkor a retardált megoldások

$$\begin{aligned}\square\Phi &= -\frac{\varrho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\varrho(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \\ \square\mathbf{A} &= -\mu_0\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\end{aligned}\quad (10.15)$$

Legyen most $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$. A töltésmegmaradás mérlegegyenlete miatt $\varrho \sim e^{-i\omega t}$, és így minden megoldás $\sim e^{-i\omega t}$. Ekkor az időderivált helyettesíthető $-i\omega$ szorzóval.

Lorentz mérték esetén

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \partial_t \Phi = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{-i\omega}{c^2} \Phi \Rightarrow \Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{-ic^2}{\omega} \operatorname{div} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}). \quad (10.16)$$

Ezért elég csak a vektorpotenciált meghatározni, mégpedig a (10.15) képlet alapján:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')e^{-i\omega(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (10.17)$$

Itt is bevezettük a $k = \frac{\omega}{c}$ jelölést, mint a síkhullámoknál.

Tegyük fel, hogy a forrás mérete jóval kisebb, mint a hullámhossz $d \ll \lambda$, ellenkező esetben az egyes töltések sugárzását külön kell kezelni. Ha emellett $r \ll \lambda$ (közelzóna), akkor első közelítésben elhanyagolhatjuk a retardálást, és a kvázistacionárius esetet kapjuk vissza. Ahogyan $r \rightarrow \lambda$, egyre bonyolultabb lesz a tér.

$r \gg \lambda$ esetben (távolzóna, hullámszóna vagy sugárzási zóna) a megoldás ismét leegyszerűsödik. Itt ugyanis elég csak azokat a tagokat megtartani, amelyek $r \rightarrow \infty$ esetén nem tűnnek el. A nevezőben csak a vezető tagot kell megtartani:

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \approx \frac{1}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{d}{r^2}\right). \quad (10.18)$$

Az exponensben azonban

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{r^2 + \mathbf{x}'^2 - 2\mathbf{x}\mathbf{x}'} = r\sqrt{1 - 2\frac{\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right) = r - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right) \quad (10.19)$$

kifejtés miatt a konstans tagot is meg kell tartanunk, hiszen még végtelen távol is megfigyelhető szerepe van. Ekkor

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik(r - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}')}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}. \quad (10.20)$$

Az r -függő tag egy kifutó gömbhullámot ír le, amelynek irányfüggése lesz az integrál miatt. Megjegyzés: bár itt $\mathbf{A}(r) \sim 1/r$, ez azonban nem a monopólusok jelenlétét mutatja, hanem a sugárzás jele.

Az exponensben szereplő $k|\mathbf{x}'| < kd$, azaz itt még sorba fejthetünk:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}') (1 - ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}' + \dots). \quad (10.21)$$

10.2.1. Dipólsugárzás

Az első tag (10.21)-ben:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int d^3\mathbf{x}' \mathbf{J}(\mathbf{x}'). \quad (10.22)$$

A sztatikában ez a tag eltűnik, itt azonban

$$\int d^3\mathbf{x} J_i = \int d^3\mathbf{x} J_j \partial_j x_i = - \int d^3\mathbf{x}' x_i \partial_j J_j = \int d^3\mathbf{x}' x_i \partial_t \varrho = \partial_t p_i = -i\omega p_i, \quad (10.23)$$

ahol p_i a dipólmomentum. Innen

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{-i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \mathbf{p}. \quad (10.24)$$

A kialakuló mező tehát arányos a rendszer dipólmomentumával, pontosabban – az ω szorzó jelenléte miatt – annak változásával. Emiatt ezt a tagot *dipólsugárzásnak* nevezzük.

Hogy az elektromos illetve mágneses tereket megkapjuk, deriválni kell a vektorpotenciált. Mivel az $1/r^2$ tagokat elhagytuk, a deriválás csak az exponensre hat, azaz

$$\partial_j e^{ikr} = ik\hat{x}_j e^{ikr} \Rightarrow \nabla \rightarrow ik\hat{\mathbf{x}}, \quad (10.25)$$

a deriválás helyettesíthető egy vektorral. Emiatt

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{k\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) = \frac{\omega^2}{4\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \quad (10.26)$$

Az elektromos tér a $\text{rot } \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}$ miatt:

$$\mathbf{E} = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}} = Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}, \quad (10.27)$$

ahol ismét megjelent a Z_0 vákuumimpedancia (l. (9.29) képlet). Az elektromos térerősség tehát

$$\mathbf{E} = \frac{Z_0\omega^2}{4\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{x}}. \quad (10.28)$$

A Poynting-vektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = Z_0(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \mathbf{H} = Z_0 \hat{\mathbf{x}} H^2 \Rightarrow S = Z_0 H^2. \quad (10.29)$$

Az időfüggéshez a terek valós részét kell venni, vagyis $S \sim \cos^2 \omega t$. Időátlagban

$$S = \frac{Z_0}{2} H^2 = \frac{Z_0}{32\pi^2 c^2} \omega^4 \frac{p^2}{r^2} \sin^2 \theta. \quad (10.30)$$

Sugárzások esetén szokták a sugárzás teljesítmény-áramsűrűségét, azaz a Poynting-vektor nagyságát *intenzitásnak* nevezni, ezt I -vel is jelölik.

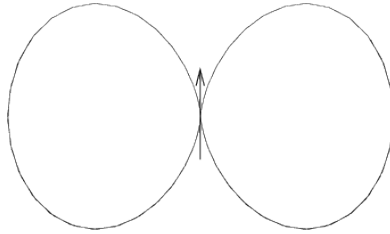
Látható módon a Poynting-vektor a távolsággal fordított arányban csökken. Ez azonban azt jelenti, hogy ha egy adott *térszögbe* kisugárzott teljesítményt (intenzitást) nézzük, akkor távolságfüggetlen eredményt kapunk. Ugyanis egy r távolságban levő $d\Omega$ látszólagos térszögbe eső felület nagysága $r^2 d\Omega$, így kiesik az r^2 :

$$dP = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}} r^2 d\Omega \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \mathbf{S} \hat{\mathbf{x}} r^2. \quad (10.31)$$

Most tehát

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0}{32\pi^2 c^2} \omega^4 p^2 \sin^2 \theta. \quad (10.32)$$

A fenti eredmény ábrázolásához polár-koordinátarendszert szoktak használni, és felveszik a $(R(\theta), \theta)$ görbét, ahol a sugár $R(\theta) = \frac{dP}{d\Omega}$. Ezt a görbét láthatjuk 10.1 ábrán.



10.1. ábra. Dipólantenna sugárzási karakterisztikája

A teljes kisugárzott intenzitáshoz (teljesítményhez) $P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega}$. Mivel

$$\int d\Omega \sin^2 \theta = 2\pi \int_{-1}^1 dx (1 - x^2) = \frac{8\pi}{3}, \quad (10.33)$$

ezért

$$P = \frac{Z_0}{12\pi c^2} \omega^4 p^2. \quad (10.34)$$

Láthatóan a kisugárzott teljesítmény $\sim \omega^4$, azaz csak nagy frekvenciákon lehet jelentős.

Alkalmazás:

Középen táplált d hosszúságú egyenes antenna sugárzása.

Megoldás

A „középen táplált” megnevezés azt jelenti, hogy középen csatlakoztatjuk az egyenes antennát a feszültségforráshoz, amit most áramforrásként veszünk figyelembe. Emiatt középen az áram nagysága adott, periodikusan változik. Az antenna legvégén persze nem tud hova folyni az áram, ott tehát az áramerősség nulla. A legegyszerűbb interpoláló függvényt felvéve feltesszük, hogy az árameloszlás az antenna mentén lineáris:

$$I(t, z) = I_0 e^{-i\omega t} \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right). \quad (10.35)$$

Ekkor

$$\int d^3x \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_z \int_{-d/2}^{d/2} dz I(t, z) = 2I_0 \mathbf{e}_z e^{-i\omega t} \int_0^{d/2} dz \left(1 - \frac{2z}{d}\right) = \frac{I_0 d}{2} \mathbf{e}_z e^{-i\omega t}. \quad (10.36)$$

Mivel (10.23) alapján az áramsűrűség integrálja $-i\omega \mathbf{p} e^{-i\omega t}$, innen $\mathbf{p} = \frac{iI_0 d}{2\omega} \mathbf{e}_z$. Az i fázistolást jelent a képletben. Emiatt a kibocsátott sugárzás intenzitása

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 \omega^4}{32\pi^2 c^2} \frac{I_0^2 d^2}{4\omega^2} \sin^2 \theta = \frac{Z_0 (kd)^2}{128\pi^2} I_0^2 \sin^2 \theta. \quad (10.37)$$

A teljes kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{Z_0 (kd)^2}{48\pi} I_0^2 = \frac{1}{2} R_{sug} I_0^2, \quad \text{ahol} \quad R_{sug} = \frac{Z_0 (kd)^2}{24\pi} \approx 5(kd)^2 \Omega. \quad (10.38)$$

Vagyis az antenna áramkörü szempontból egy ellenállásként viselkedik, amely frekvenciafüggő. Ezt nevezik az antenna sugárzási ellenállásának. ♦

10.2.2. Multipol sugárzások

Az második tag (10.21)-ben:

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \int d^3\mathbf{x}' (-ik \hat{\mathbf{x}} \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}'). \quad (10.39)$$

Az integrál egy kétindexes mennyiséget ad:

$$M_{ij} = \int d^3\mathbf{x} x_i J_j \quad \Rightarrow \quad A_j = \frac{-i\mu_0}{4\pi} k \hat{x}_i M_{ij}. \quad (10.40)$$

M antiszimmetrikus része a mágneses dipólmomentum (l. (5.37))

$$m_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \int d^3 \mathbf{x} x_j J_k. \quad (10.41)$$

A szimmetrikus rész most nem nulla:

$$\int d^3 \mathbf{x} x_i J_j = \int d^3 \mathbf{x} x_i J_k (\partial_k x_j) = - \int d^3 \mathbf{x} x_j \partial_k (x_i J_k) = - \int d^3 \mathbf{x} x_j J_i - \int d^3 \mathbf{x} x_i x_j \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (10.42)$$

azaz

$$\int d^3 \mathbf{x} (x_i J_j + x_j J_i) = - \int d^3 \mathbf{x} x_i x_j \operatorname{div} \mathbf{J} = \partial_t \int d^3 \mathbf{x} \varrho x_i x_j = \frac{-i\omega}{3} \left(Q_{ij} + \delta_{ij} \int d^3 \mathbf{x} \varrho x^2 \right). \quad (10.43)$$

ahol bevezettük az elektromos kvadrupól tenzort (3.185) alapján. Emiatt:

$$A_j(t, \mathbf{x}) = \frac{-i\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \left[k \hat{x}_i \varepsilon_{ijk} m_k - \frac{i\omega k}{6} Q_{ji} \hat{x}_i - \frac{i\omega k}{6} \hat{x}_i \int d^3 \mathbf{x}' \varrho(\mathbf{x}') \mathbf{x}'^2 \right]. \quad (10.44)$$

Az utolsó tag tiszta gradiens, hiszen $\hat{x}_i f(r) = \partial_i F(r)$, ahol $F' = f$. Emiatt ennek rotációja nulla, így elhagyható (más szóval mértéktranszformációval kiküszöbölhető). A többi járuléka:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{-i\mu_0\omega}{4\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}} - \frac{\mu_0\omega^2}{24\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}. \quad (10.45)$$

Az első tag a mágneses dipólsugárzás, a második az elektromos kvadrupólsugárzás képlete. A mágneses dipólsugárzás az elektromos képlettel teljesen analóg, csak $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}}/c$ módon kell az erősségeket helyettesíteni. Az első két rend összege tehát:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{-i\mu_0\omega}{4\pi} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \left[\mathbf{p} + \frac{1}{c} \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}} \right] - \frac{\mu_0\omega^2}{24\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}. \quad (10.46)$$

A térerősségek

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\omega^2}{4\pi c} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \left[\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p} + \frac{1}{c} \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}}) \right] - \frac{i\omega^3}{24\pi c^2} \frac{e^{ikr-i\omega t}}{r} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{Q} \hat{\mathbf{x}}. \\ \mathbf{E} &= Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{S} &= Z_0 \hat{\mathbf{x}} H^2 \Rightarrow \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{Z_0}{2} \hat{\mathbf{x}} |H|^2. \end{aligned} \quad (10.47)$$

A szögeloszlás bonyolult, azonban a teljes kisugárzott teljesítmény kiszámítható, mert a vegyes tagok kiesnek a térszögintegrálás során; pl.:

$$(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p})[\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{x}})] = (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{p})[\mathbf{m} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{x}})] = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{p} \times \mathbf{m}). \quad (10.48)$$

Térszögintegrálás után $\int d\Omega \hat{\mathbf{x}} = 0$. A mágneses dipólsugárzás szögeloszlása ugyanaz, mint az elektromos dipólé, azaz a teljesítménye is ugyanaz. Az elektromos kvadrupol esete bonyolultabb, de a végeredmény:

$$P = \frac{Z_0 \omega^4}{12\pi c^2} \left(p^2 + \frac{m^2}{c^2} \right) + \frac{Z_0 \omega^6}{1440\pi c^4} \text{Tr } \mathbf{Q}^2. \quad (10.49)$$

Láthatóan a mágneses dipól illetve elektromos kvadrupol sugárzások $1/c^2$ -tel elnyomott korrekciót adnak, összhangban a d/λ sorfejtéssel (hiszen $d/\lambda = d\omega/(2\pi c)$, és d belemegy a multipolmomentum definíciójába).

11. fejezet

Általános mozgást végző tömegpont sugárzása

A fenti analízis akkor jó, ha $d \ll \lambda$. Ha ez nem áll fenn, akkor az elemi összetevők sugárzását egyesével kell figyelembe venni, és azok sugárzását interferáltatni kell.

11.1. Liénard-Wiechert potenciálok

Most egyetlen mozgó ponttöltés terét számoljuk ki. Ennek töltés- illetve áramsűrűsége:

$$\varrho(t, \mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)), \quad \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = q\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t)). \quad (11.1)$$

Használjunk Lorentz mértéket, ekkor

$$\square\Phi(t, \mathbf{x}) = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \square\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = -\mu_0\mathbf{J}(t, \mathbf{x}). \quad (11.2)$$

Először számoljuk a skalárpotenciált, azzal analóg lesz a vektorpotenciál számolása. Használjuk a d’Alambert operátor Green-függvényének (10.9) képletbeli alakját, és integráljunk a térfüggésre:

$$\begin{aligned} \Phi(t, \mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' dt' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(\mathbf{x}' - \boldsymbol{\gamma}(t')) \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int dt' \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}{c}\right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \int dt' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}{c}\right), \end{aligned} \quad (11.3)$$

ahol

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\bar{t}), \quad \bar{t} = t - \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\bar{t})|}{c} \Rightarrow c(t - \bar{t}) = R. \quad (11.4)$$

Vagyis \bar{t} a Dirac-delta argumentumának megoldása, fizikailag az az időpont, ahonnan induló fényjel \mathbf{x} -et t -ben éri el. Megkövetelve a retardálást, azaz $\bar{t} < t$ feltételt, a megoldás egyértelmű, ha a részecske sebessége kisebb mint c . A t' -re vonatkozó integrálásnál új változót bevezetve

$$u = t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t'} = 1 - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t'))}{c|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}, \quad (11.5)$$

ezzel

$$\int dt' \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}{c}\right) = \int du \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t'))}{c|\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')|}} \delta(u) = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{Rc}} = \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta}\hat{\mathbf{R}}}, \quad (11.6)$$

ahol $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Ezt visszaírva, összefoglalva:

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta}\hat{\mathbf{R}}}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\bar{t}), \quad \bar{t} = t - \frac{R(\bar{t})}{c}, \quad \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\bar{t}), \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}. \quad (11.7)$$

A fenti levezetéssel teljesen analóg módon

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi R} \frac{\mathbf{v}}{1 - \boldsymbol{\beta}\hat{\mathbf{R}}}. \quad (11.8)$$

A skalár potenciál képlete nagyon hasonlít a ponttöltés sztatikus potenciáljához. Az egyik különbség, hogy a ponttöltésnek a *látszólagos* helyéhez viszonyított távolságot kell felvenni, vagyis ahonnan a sugárzása megérkezik (nyilván a fénye is akkor jön hozzánk, így ez valóban a látszólagos helye): emiatt lesz R a nevezőben. A másik különbség az expliciten fellépő $1 - \boldsymbol{\beta}\hat{\mathbf{R}}$ nevező. Ez valójában a $d\bar{t}/dt$ hányados, hiszen $u = 0$ esetben $\partial u/\partial t'$ ennek reciprokába megy át (l. még (11.10)).

Az elektromos és mágneses térerősségek kiszámolhatók a

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A} \quad (11.9)$$

képletekből. A deriválások azonban nem egyszerűek a bonyolult retardálási képletek

miatt. A felhasználható azonosságok

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R_i}{\partial \bar{t}} &= -v_i(\bar{t}), & \frac{\partial R}{\partial \bar{t}} &= -\hat{\mathbf{R}}\mathbf{v} \\
\frac{\partial \bar{t}}{\partial t} &= 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = 1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta} \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \bar{t}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta}}, \\
\frac{\partial \bar{t}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_i} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{c} + \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_i} = \frac{-R_i}{Rc - \mathbf{R}\mathbf{v}}, \\
\frac{\partial R_i}{\partial x_j} &= \delta_{ij} - v_i \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{v_i R_j}{Rc - \mathbf{R}\mathbf{v}} \\
\frac{\partial R}{\partial x_j} &= \frac{1}{R} R_i \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \hat{R}_j \left(1 + \frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{Rc - \mathbf{R}\mathbf{v}} \right) = \frac{R_j}{R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}}.
\end{aligned} \tag{11.10}$$

Ezek felhasználásával kapható (részleteket l. 16 függelékben) az elektromos térerősségre

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} (1 - \beta^2) \frac{\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta}\hat{\mathbf{R}})^3} + \frac{q\mu_0}{4\pi R} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]}{(1 - \boldsymbol{\beta}\hat{\mathbf{R}})^3}, \tag{11.11}$$

és a mágneses térerősségre:

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}). \tag{11.12}$$

\mathbf{E} -ben az első tag nem függ a gyorsulástól, és a távolságfüggése $\sim 1/R^2$. Emiatt ez a tag a Coulomb potenciál általánosításaként fogható fel. A második tag a gyorsulástól függ, ez felelős a sugárzás leírásáért. Ez arányos a gyorsulással: vagyis a gyorsuló töltés sugároz!

A \mathbf{H} egyszerű alakja miatt könnyen felírható a Poynting-vektor:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{R}} E^2. \tag{11.13}$$

11.2. A sugárzás dipól közelítése

Ha a mozgás sebessége jóval kisebb a fénysebességnél $v \ll c$, akkor a $\beta \approx 0$ közelítést használhatjuk. A $v \ll c$ a fényjel periódusidejével megszorozva $d \ll \lambda$ kifejezésbe megy át, ahol a d a mozgó töltés által megtett út. Emiatt az oszcilláló töltésrendszerek d/λ kifejtése valójában v/c , azaz β szerinti kifejtés is egyben. A $\beta = 0$ eset a vezető, dipól közelítésnek felel meg.

Messziről figyelve a mozgó töltést, mivel a töltés csak keveset mozdul el, $R \approx r$ közelítést használhatjuk. A sebesség számításánál a retardálást még meg kell tartanunk,

vagyis ekkor a vektorpotenciál:

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} \mathbf{v} \Big|_{t-r/c}. \quad (11.14)$$

A sugárzás számításánál a vezető $1/r$ tagot akarjuk megtartani. Ezért a deriválásoknál az $1/r$ -re nem kell hatnunk, vagyis csak a retardálás miatt lehet értéke a térderiváltaknak is:

$$\nabla f(t - \frac{r}{c}) = \nabla(t - \frac{r}{c}) \partial_t f(t - \frac{r}{c}) = -\frac{\hat{\mathbf{x}}}{c} \partial_t f(t - \frac{r}{c}). \quad (11.15)$$

Ezért a mágneses indukció

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r c} (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{x}}) \Big|_{t-r/c}. \quad (11.16)$$

Az elektromos térerősséghez:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \text{rot } \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} (\dot{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r} (\mathbf{a} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}} = Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}}. \quad (11.17)$$

Ez megegyezik a sugárzás (11.11) kifejezésében a $R \approx r$ és $\beta \ll 1$ közelítésnek.

A sugárzás Poynting-vektora:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = Z_0 \hat{\mathbf{x}} H^2 = \hat{\mathbf{x}} \frac{Z_0 q^2}{16\pi^2 r^2 c^2} a^2 \sin^2 \theta, \quad (11.18)$$

innen megkaphatjuk a kisugárzott teljesítményt a térszög függvényében (l. (10.31)):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 q^2}{16\pi^2 c^2} a^2 \sin^2 \theta. \quad (11.19)$$

A teljes kisugárzott teljesítményt pedig a

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^2 \quad (11.20)$$

Larmor-képlet írja le, a v/c kifejtés vezető rendjében. Ez a képlet teljesen analóg a (10.34) képlettel, hiszen ha $p = qx_0 e^{-i\omega t}$ alakú, akkor $\omega^2 p \sim \partial_t^2 p \sim qa$, és ennek a négyzetét tartalmazza (10.34). A 2-es faktor különbség a periódusra vett átlagolás következménye.

Alkalmazás:

Mekkora egy körpályán nemrelativisztikusan mozgó töltés kisugárzott teljesítménye?

Megoldás

Körpálya esetén $a = r\omega^2$, ahol ω a körfrekvencia. Emiatt

$$P = \frac{Z_0 q^2 r^2 \omega^4}{6\pi c^2} = \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} \left(\frac{v}{c}\right)^4. \quad (11.21)$$

Relativisztikus sebességekre a képlet módosul (l. később).

Ezt a képletet megkaphatjuk úgy is, hogy a körmozgást két (fáziskéséssel elindított) oszcilláló dipól összegének tekintjük, és használjuk a (10.34) képletet.

◆

11.3. Egyenesvonalú egyenletes mozgást végző test sugárzása

Most vizsgáljuk meg a teljes Liénard-Wiechert potenciálokat a legegyszerűbb esetben, az egyenesvonalú egyenletes mozgást végző test esetére.

Legyen a megfigyelési pont $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$, a töltés pedig a z tengely mentén mozogjon $\gamma(t) = (0, 0, vt)$. (11.7) alapján szükségünk van a következő mennyiségekre:

$$\mathbf{R} = \mathbf{x} - \gamma(\bar{t}) = (x, 0, -v\bar{t}), \quad (11.22)$$

ahol $c(t - \bar{t}) = R$, azaz

$$c(t - \bar{t}) = \sqrt{x^2 + v^2 \bar{t}^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \gamma^2 \left(t - \frac{1}{\gamma c} \sqrt{x^2 + \gamma^2 v^2 t^2} \right), \quad (11.23)$$

ahol bevezettük a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.24)$$

kifejezést. Ezzel

$$R - \beta \mathbf{R} = c(t - \bar{t}) + \frac{v^2}{c} \bar{t} = ct - \frac{c}{\gamma^2} \bar{t} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{x^2 + \gamma^2 v^2 t^2}. \quad (11.25)$$

Végül

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + \gamma^2 v^2 t^2}}, \quad A_z(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\gamma v}{\sqrt{x^2 + \gamma^2 v^2 t^2}} \quad (11.26)$$

Az elektromos térerősséghez kell

$$\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{v}}{c} = \mathbf{R} - (t - \bar{t})\mathbf{v} = (x, 0, -vt) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{(x^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -vt \end{pmatrix}. \quad (11.27)$$

A mágneses térerősséghez

$$\frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -v\bar{t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -vt \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ -vx(t - \bar{t}) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ -vx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11.28)$$

azaz

$$\mathbf{H} = \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma}{(x^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -vx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (11.29)$$

hiszen $c\epsilon_0 = 1/Z_0$. $v = 0$ -ra visszkapjuk a szokásos sztatikus megoldást. A retardálás hatása azonban az, hogy az ekvipotenciális felületek eltolódnak. Ha $z = vt$ jelölést használunk, akkor a $\Phi = \text{konstans}$ felület írható úgy, mint

$$x'^2 + z^2 = r^2 = \text{konstans}, \quad \text{ahol} \quad x' = \frac{x}{\gamma} = x\sqrt{1 - \beta^2} < x. \quad (11.30)$$

Az ekvipotenciális felületek tehát nem gömbök! A fenti kifejezés egy, a haladás (z) irányban ellapított ellipszis egyenlete, és a nagytengely és kistengely aránya γ . Ez olyan, mintha a haladás irányában mért távolságok összementek volna.

Az elektromos térerősség nagysága $x = 0$, $z = r$ illetve $x = r$, $z = 0$ esetben

$$E(x = 0, z = r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \beta^2), \quad E(x = r, z = 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (11.31)$$

vagyis nagy különbségek lehetnek $\beta \approx 1$, azaz fénysebesség közelében. A térerősség $\beta \approx c$ esetén lényegében a mozgásra merőleges síkban érzékelhető.

A fenti példa azért fontos, mert ha áttérünk egy olyan vonatkoztatási rendszerre, amely a töltéssel együtt mozog, akkor az ekvipotenciális felületek gömb alakúak kell legyenek. Emiatt a mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérés közben a hosszak nagyságát is módosítani kell, ami idegen a klasszikus elképzelésektől, ahol ezt az áttérést az egyszerű $z' = z - vt$ és $t' = t$ a Galilei-transzformációval végezzük. Vagyis a Maxwell-egyenletek nem invariánsak a Galilei-transzformációra: helyette valami más transzformációs szabály kell, amit Lorentz írt fel először: ezek a Lorentz-transzformációk. Erről később lesz szó.

11.4. Sugárzás szögeloszlása

Most vizsgáljuk a (11.11) egyenletek sugárzási részét, azaz a gyorsulással arányos tagokat, és számoljuk ki a kibocsátott sugárzás szögfüggését. Ehhez a Poynting-vektor (11.13) képletébe a térerősség megfelelő tagját kell behelyettesítenünk.

Azonban, ellentétben a multipólus-sorfejtéssel, itt most nem mindegy, hogy milyen megfigyelő szerinti eloszlást vesszük. Szokásosan a szögeloszlásnál a mozgó részecske szerinti szögeloszlást szokták számolni. Ez azt jelenti, hogy olyan koordináta-rendszert választunk, ahol $\gamma(\bar{t}) = 0$, ekkor $\mathbf{R} = \mathbf{x}$. A Poynting-vektorból a rögzített megfigyelő által időegységenként észlelt energiát kapnánk meg. Ha a mozgó részecske által időegységenként kisugárzott teljesítményre vagyunk kíváncsiak, akkor a kisugárzás idejét kell figyelembe venni, nem az észlelés idejét:

$$dP = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} \frac{dt}{d\bar{t}} = R^2 d\Omega \hat{\mathbf{R}} \mathbf{S} (1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta}), \quad (11.32)$$

azaz a keresett szögeloszlás:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 q^2}{16\pi^2} \frac{[\hat{\mathbf{x}} \times ((\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2}{(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})^5}. \quad (11.33)$$

Két speciális esetet nézünk meg.

- Ha $\boldsymbol{\beta} \parallel \dot{\boldsymbol{\beta}}$, vagyis egy dimenziós gyorsulásról van szó, akkor a számláló

$$\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}} \Rightarrow [\hat{\mathbf{x}} \times ((\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 = \dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}})^2 = \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \theta, \quad (11.34)$$

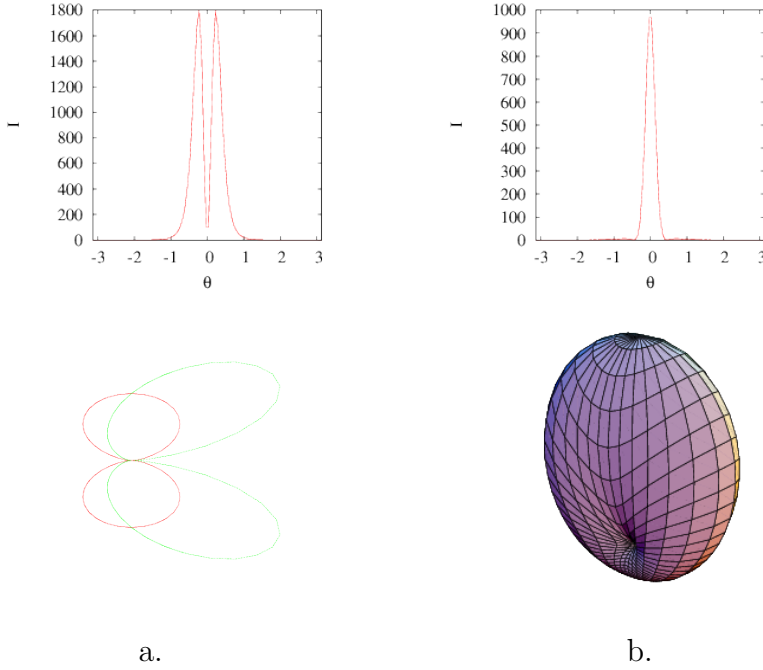
ahol $\hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}} = \cos \theta$. Ezzel

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{Z_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (11.35)$$

Ha $\beta = 0$, akkor visszkapjuk a dipólus-sugárzás szögeloszlását. Általános β -ra a sugárzás a sebesség irányába tolódik, l. 11.1/a ábra. Nagy sebességek esetén $\beta \approx 1$, ezért (11.24) alapján $1 - \beta = (1 - \beta^2)/(1 + \beta) \approx 1/(2\gamma^2)$. Ekkor a kis szögek dominálnak, vagyis közelíthetjük $\sin \theta \approx \theta$ és $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, azaz $1 - \beta \cos \theta \approx (1 + (\gamma\theta)^2)/(2\gamma^2)$, innen

$$P \approx \frac{2Z_0 q^2 a^2}{\pi^2 c^2} \gamma^8 \frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + (\gamma\theta)^2)^5}. \quad (11.36)$$

Ez azt jelenti, hogy a maximum $\theta_{max} \approx \frac{1}{2\gamma}$ körül található, a maximális teljesítmény $P_{max} \sim \gamma^8$.



11.1. ábra. Sugárzások szögeloszlása: a. egy dimenziós gyorsulás, a sebesség és a gyorsulás iránya is x b. körpálya, a sebesség iránya merőleges a gyorsulásra.

- Ha $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$, akkor a számlálóban

$$\hat{\mathbf{x}} \times ((\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}) = (\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{x}} \dot{\boldsymbol{\beta}}) - \dot{\boldsymbol{\beta}}(1 - \hat{\mathbf{x}} \boldsymbol{\beta}),$$

azaz

$$[\hat{\mathbf{x}} \times ((\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2 = (\dot{\boldsymbol{\beta}})^2(1 - \hat{\mathbf{x}} \boldsymbol{\beta})^2 - \frac{(\hat{\mathbf{x}} \dot{\boldsymbol{\beta}})^2}{\gamma^2}.$$

Most $\hat{\mathbf{v}}$ és $\hat{\mathbf{a}}$ egymásra merőleges: válasszuk az elsőt a z tengelynek, a másodikat az x tengelynek, vagyis

$$\boldsymbol{\beta} = \beta \mathbf{e}_z, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{a}{c} \mathbf{e}_x, \quad \Rightarrow \quad \beta \hat{\mathbf{x}} = \beta \cos \theta, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} \hat{\mathbf{x}} = \frac{a}{c} \sin \theta \cos \varphi. \quad (11.37)$$

Ezzel

$$P = \frac{Z_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c^2} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right]. \quad (11.38)$$

Az eloszlás különböző nézetei a 11.1/b-d. ábrákon láthatók. A sugárzás itt is a sebesség irányába tolódik. Kis szögek esetén ha $\cos \varphi = 1$:

$$P \approx \frac{Z_0 q^2 a^2}{2\pi^2 c^2} \gamma^6 \frac{(1 - (\gamma\theta)^2)^2}{(1 + (\gamma\theta)^2)^5} \quad (11.39)$$

A maximum itt is $\theta_{max} \sim \frac{1}{\gamma}$ szögnél található $P_{max} \sim \gamma^6$.

A teljes kibocsátott teljesítményhez ki kell integrálni a teljes térszögre a (11.33) kifejezést. Az integrál elég bonyolult, de elvégezhető. Az eredmény:

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} \gamma^6 (\mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2), \quad (11.40)$$

ahol $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Összehasonlítva a (11.20) képlettel, látható, hogy $\beta^2 = v^2/c^2$ -es korrekciókat kapunk, ahogyan vártuk is. Az integrál bonyolultsága ellenére a végképlet igen egyszerű – valójában megkaphatjuk a Maxwell-egyenletek szimmetriatulajdonságait használva, l. később.

Speciális esetként vizsgáljuk meg a körpályán mozgó test esetét. Ekkor $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$. A test akkor is gyorsul, ha egyenletes sebességgel mozog a körpályán, ez a *szinkrotronsugárzás*. Legyen a görbületi sugár r , ekkor

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = va \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a})^2 = \frac{1}{\gamma^2} a^2 = \frac{\omega^4 r^2}{\gamma^2} = \frac{\beta^4 c^4}{\gamma^2 r^2}. \quad (11.41)$$

Ezzel

$$P = \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} (\gamma \beta)^4. \quad (11.42)$$

Ezt összehasonlítva (11.21) képlettel, a különbség a γ^4 faktor megjelenése. Ezt az egyenletet felírhatjuk a részecske impulzusával is, hiszen $\mathcal{E} = m_0 \gamma c^2$ és $\beta = pc/\mathcal{E}$ miatt $\beta \gamma = p/(m_0 c)$:

$$P = \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} \left(\frac{p}{m_0 c} \right)^4 \xrightarrow{v \approx c} \frac{Z_0 q^2 c^2}{6\pi r^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2} \right)^4, \quad (11.43)$$

ahol az utolsó alak az ultrarelativisztikus sebességekre vonatkozik. Egy fordulat alatt elszenvedett veszteség energiában az ultrarelativisztikus tartományban ($t_{per} \approx 2\pi r/c$):

$$\delta \mathcal{E} = \frac{Z_0 q^2 c}{3r} \left(\frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2} \right)^4. \quad (11.44)$$

Ez igen nagy lehet, különösen, ha m_0 kicsi. A CERN LEP2 gyorsítójában $\mathcal{E} \approx 60 GeV$ energiás elektronnyalábnál $\mathcal{E}/m_0 c^2 = 1.2 \cdot 10^5$, ezzel fordulatonként $300 MeV$ veszteség volt – valójában ez a legfontosabb ok, hogy miért nem lehet nagyobb energiás elektron-pozitron gyorsítót építeni.

$\delta \mathcal{E}$ csökkentéséhez adott energia mellett vagy nagyobb sugár kell, vagy nagyobb m_0 . Emiatt a mai gyorsítók már hatalmas méretűek (CERN: 27 km-es (kb 4.3 km sugarú) gyűrű), és elektron helyett protonokat vagy nehézionokat gyorsítanak (LHC). Ekkor a sugárzási veszteség $(m_e/m_p)^4 \approx 6 \cdot 10^{-14}$ faktorialábbal kisebb, általában elhanyagolható.

Lehet, hogy a sugárzást akarjuk használni, pl. anyagvizsgálatra, ekkor a sugárzási veszteség növelése a cél. Ehhez az elektronnyalábot hullámmozgató pályára kényszerítik (undulátor).

11.5. Sugárzás spektruma

A sugárzó test által kibocsátott sugárzást annak alapján is vizsgálhatjuk, milyen frekvenciájú összetevői vannak, vagyis ha egy spektrométert helyezek a sugárzás útjába, akkor az valamely frekvenciatartományban mekkora kimenő intenzitást észlel.

Gondoljuk először végig, mit is mér a spektrométer. Ha a sugárzás teljes időfüggését Fourier-transzformáljuk, akkor időfüggés helyett frekvenciafüggést kapunk. Azonban a spektrométer csak véges ideig mér, vagyis nem a Fourier-spektrumot dolgozza fel teljesen. Ugyanakkor azokra a módusokra, amelyekre érzékeny, nagyon hosszú, végtelennek tekinthető a mérési ideje. Mindezek alapján úgy gondolhatunk a spektrumra, hogy a sugárzás intenzitásának időfüggését két részre osztjuk, egy lassú és egy gyors részre, aztán a gyors részen Fourier-transzformációt végzünk el. Ezek után kaphatunk egy időfüggő spektrumot.

Most tehát a spektrométer által észlelt sugárzás teljesítményét kell figyelembe vennünk. A bejövő intenzitást úgy írjuk fel, hogy

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{Z_0} R^2 \mathbf{E}^2(t) = \frac{1}{Z_0} \mathbf{C}^2(t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}(t) = R \mathbf{E}_{\text{sug}}(t) = \frac{qZ_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta})^3} \quad (11.45)$$

(itt tehát hiányzik az extra $1 - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}$ faktor a (11.33) egyenlethez képest). A spektrométerbe beérkező összenergia, végtelennek tekintve a mérési időt:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{C}^2(t). \quad (11.46)$$

Fourier-transzformálva a fenti kifejezést, és felhasználva, hogy $\mathbf{C}(t)$ valósága miatt $\mathbf{C}(-\omega) = \mathbf{C}^*(\omega)$, kapjuk

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{1}{Z_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\mathbf{C}(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi Z_0} \int_0^{\infty} d\omega |\mathbf{C}(\omega)|^2. \quad (11.47)$$

Innen beazonosíthatjuk az adott frekvenciatartományban észlelhető teljesítményt (intenzitást):

$$\frac{d^2P}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\pi Z_0} |\mathbf{C}(\omega)|^2. \quad (11.48)$$

Felírhatjuk \mathbf{E} -t illetve \mathbf{C} -t polarizációs irányok szerint:

$$\mathbf{C} = \mathbf{e}_1 C_1 + \mathbf{e}_2 C_2 \quad \Rightarrow \quad C_{1,2} = \mathbf{e}_{1,2} \mathbf{C}, \quad (11.49)$$

ezzel

$$\frac{d^2P}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{\pi Z_0} (|C_1(\omega)|^2 + |C_2(\omega)|^2), \quad (11.50)$$

a két tag a két polarizációs irány független járuléka.

A konkrét alakból

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\omega) &= \frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta})^3} \Big|_{\bar{t}=t-R(\bar{t})/c} = \\ &= \frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t'+R(t')/c)} \frac{\hat{\mathbf{R}} \times [(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{R}}\boldsymbol{\beta})^2},\end{aligned}\quad (11.51)$$

ahol alkalmaztuk a $t' = \bar{t}$ új változóra való áttérést.

Ha elég messze van a megfigyelési pont, akkor a dipól közelítésnél látott átalakítások alkalmazhatók:

$$R = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}| \approx r - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}, \quad \text{máshol} \quad \hat{\mathbf{R}} \approx \hat{\mathbf{x}}. \quad (11.52)$$

Ekkor:

$$\mathbf{C}(\omega) = \frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega(t' + \frac{r}{c} - \frac{\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}(t')}{c})} \frac{\hat{\mathbf{x}} \times [(\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})^2}. \quad (11.53)$$

Használhatjuk a következő azonosságot

$$\frac{\hat{\mathbf{x}} \times [(\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}} \right] \quad (11.54)$$

Mivel az $\exp(i\omega r/c)$ fázisfaktor kiesik $|\mathbf{C}(\omega)|^2$ -ből, ezért a lényeges részre írhatjuk

$$\mathbf{C}(\omega) \Rightarrow \frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}(t)/c)} \frac{d}{dt} \left[\frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{x}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta}} \right]. \quad (11.55)$$

Ez az alak jól mutatja, hogy csak onnan jön sugárzás, ahol gyorsul a részecske.

Egy polarizációra való vetület $\mathbf{e}\mathbf{x} = 0$ miatt

$$\mathbf{e}\mathbf{C}(\omega) = -\frac{Z_0 q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma}(t)/c)} \frac{(\mathbf{e}\boldsymbol{\beta})(\hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}}) + (\mathbf{e}\dot{\boldsymbol{\beta}})(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})}{(1 - \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta})^2}. \quad (11.56)$$

11.5.1. Szinkrotronsugárzás spektruma

Körmozgás esetén a körpálya síkja legyen az xy sík, a sugara ϱ , a körfrekvencia $\bar{\omega} = v/\varrho$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \varrho \begin{pmatrix} \sin \bar{\omega} t \\ \cos \bar{\omega} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \beta \begin{pmatrix} \cos \bar{\omega} t \\ -\sin \bar{\omega} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\beta \bar{\omega} \begin{pmatrix} \sin \bar{\omega} t \\ \cos \bar{\omega} t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{\perp} = \mathbf{e}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ -\cos \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (11.57)$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\gamma} &= \varrho \cos \theta \sin \bar{\omega}t, & \hat{\mathbf{x}}\boldsymbol{\beta} &= \beta \cos \theta \cos \bar{\omega}t, & \hat{\mathbf{x}}\dot{\boldsymbol{\beta}} &= -\beta\bar{\omega} \cos \theta \sin \bar{\omega}t, \\
\mathbf{e}_{\parallel}\boldsymbol{\beta} &= -\beta \sin \bar{\omega}t, & \mathbf{e}_{\parallel}\dot{\boldsymbol{\beta}} &= -\beta\bar{\omega} \cos \bar{\omega}t, & \mathbf{e}_{\perp}\boldsymbol{\beta} &= \beta \sin \theta \cos \bar{\omega}t, \\
\mathbf{e}_{\perp}\dot{\boldsymbol{\beta}} &= -\beta\bar{\omega} \sin \theta \sin \bar{\omega}t,
\end{aligned} \tag{11.58}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\parallel}\mathbf{C}(\omega) &= -\frac{Z_0q\beta\bar{\omega}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t-\frac{\varrho}{c} \cos \theta \sin \bar{\omega}t)} \frac{\cos \bar{\omega}t - \beta \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta \cos \bar{\omega}t)^2}, \\
\mathbf{e}_{\perp}\mathbf{C}(\omega) &= -\frac{Z_0q\beta\bar{\omega} \sin \theta}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(t-\frac{\varrho}{c} \cos \theta \sin \bar{\omega}t)} \frac{\sin \bar{\omega}t}{(1 - \beta \cos \theta \cos \bar{\omega}t)^2}.
\end{aligned} \tag{11.59}$$

$\beta \approx 1$ esetén a sugárzás csak vékony, $\sim 1/\gamma$ szögben érkezik, vagyis időben felbontva rövid idejű sugárzást kapunk. Ekkor van értelme a spektrális felbontásnak. Ha $\bar{\omega}t \ll 1$ a releváns tartományban, akkor $\sin x \approx x$ és $\cos x \approx 1 - x^2/2$ vezető rendjének helyettesítéssel $\cos \theta = 1$ -nél kapjuk (vegyük észre, hogy $\bar{\omega}\varrho/c = \beta$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\parallel}\mathbf{C}(\omega) &\approx -\frac{Z_0q\bar{\omega}}{4\pi}(1-\beta) \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{i\omega t(1-\beta)}}{\left(1 - \beta + \frac{\bar{\omega}^2 t^2}{2}\right)^2} = \\
&= -\frac{Z_0q\omega^3(1-\beta)^4}{\pi\bar{\omega}^3} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{iu}}{\left(\frac{2\omega^2(1-\beta)^3}{\bar{\omega}^2} + u^2\right)^2} = \\
&= -\frac{Z_0q\gamma a^3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{iu}}{(a^2 + u^2)^2} = -\frac{Z_0q\gamma}{4}(a+1)e^{-a},
\end{aligned} \tag{11.60}$$

ahol bevezettük az $a^2 = \frac{2\omega^2(1-\beta)^3}{\bar{\omega}^2}$ jelölést, és felhasználtuk a korábban látott $1 - \beta \approx 1/(2\gamma^2)$ közelítést a $\beta \approx 1$ közelében. A fenti alak mutatja, hogy az integrál annál az ω_c frekvenciánál fog levágni, ahol $a \sim 1$, azaz

$$\frac{\omega_c^2(1-\beta)^3}{\bar{\omega}^2} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_c \sim \frac{\bar{\omega}}{(1-\beta)^{3/2}} \sim \gamma^3 \frac{c}{\varrho}. \tag{11.61}$$

Ezt heurisztikusan is megérthetjük: a sugárzás szöge $\sim 1/\gamma$, a sebesség c , vagyis az az idő, amíg a sugárzást látom: $\Delta t_0 = \theta/\bar{\omega} \sim \varrho/(c\gamma)$. Mivel azonban a forrás a megfigyelő felé mozog, a jel első és hátsó éle között levő távolság $c\Delta t_0 - v\Delta t_0$, vagyis a köztük eltelt idő $\Delta t = \Delta t_0(1-\beta) \sim \Delta t_0/\gamma^2 \sim \varrho/(c\gamma^3)$. Fourier-térben az ennek megfelelő frekvencia $\omega_c \sim \gamma^3 c/\varrho$.

12. fejezet

Elektromágneses hullámok szórása

A sugárzás eddigi vizsgálatát leírhatjuk úgy, hogy először a forrásmentes sugárzást néztük, aztán megértettük, hogy a sugárzás forrása a gyorsuló töltés. Itt tovább mehetünk, és megkérdezhetjük, miért gyorsul a töltés? Ennek egy lehetséges oka az, hogy elektromágneses hullám tere gyorsítja. Vagyis ekkor egy beérkező elektromágneses hullám töltéseket gyorsít, azok viszont sugároznak. Ez a folyamat az elektromágneses hullámok szórása. Ezzel foglalkozunk most.

Legyen a bemenő hullám monokromatikus síkhullám:

$$\mathbf{E}_{be} = \mathbf{e}_0 E_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{H}_{be} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{be}. \quad (12.1)$$

Ez elér egy kisméretű anyagdarabot, annak töltéseit gyorsítja, ezek sugároznak, kialakítva a szórt teret. Miután az anyagdarab kis méretű, feltehetjük, hogy a sugárzása gömbhullám. Ennek megfelelően a teljes elektromos, illetve mágneses tér

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{be} + \mathbf{E}_{szórt}, \quad \mathbf{E}_{szórt} = \mathbf{A}_{szórt} \frac{e^{ikr}}{r}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}. \quad (12.2)$$

Hogyan jellemezhető a szórási? Lehetne *szórt teljesítmény/bemenő teljesítmény*, azonban a szórt teljesítmény függ a távolságtól (gömbhullám). Ezért a távolságfüggetlen jellemző

$$d\sigma = \frac{\text{egységnyi térszögbe szórt teljesítmény}}{\text{egységnyi felületen bemenő teljesítmény}} = \frac{|r^2 d\Omega S_{szórt}|}{|S_{be}|}. \quad (12.3)$$

Ennek a mennyiségnek felület (m^2) dimenziója van, a neve *szórási hatáskeresztmetszet*. A szórt hullámnál megtehetjük, hogy csak egy, \mathbf{e} vektorral jellemzett polarizációt veszünk figyelembe. Beírva a térerősségeket azt kapjuk, hogy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{e}^* \mathbf{A}_{szórt}|^2}{E_0^2}. \quad (12.4)$$

A teljes hatáskeresztmetszet a teljes 4π térszögbe szórt teljesítmény nagysága egységyi felületen bemenő teljesítmény arányában:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (12.5)$$

12.1. Szórás az anyag egyenlőtlenségein

A szórócentrumot többféleképpen kezelhetjük. Most tegyük fel, hogy folytonos anyagmodellünk van, ahol a dielektromos állandó és a permeabilitás helyfüggő: $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$, és az anyag átlagát jellemző ε_0 , μ_0 (most nem feltétlenül a vákuum érték!) értékekhez képest kicsi az eltérés. A szuszceptibilitásokkal felírva

$$\frac{\varepsilon(x) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \chi_E \ll 1, \quad \text{és} \quad \frac{\mu(x) - \mu_0}{\mu_0} = \chi_M \ll 1. \quad (12.6)$$

A Maxwell-egyenleteket ekkor *forrástag nélkül* írhatjuk fel

$$\nabla \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D}. \quad (12.7)$$

A probléma megoldásának kulcsa, hogy egy olyan mennyiséget tekintünk, amely homogén anyagban nulla lenne. Ahogy később látható lesz, az optimális választás:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E})) &= \nabla(\operatorname{div} \mathbf{D}) - \Delta \mathbf{D} + \varepsilon_0 \partial_t \nabla \times \mathbf{B} = \\ &= -\Delta \mathbf{D} + \varepsilon_0 \partial_t \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}) + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Átrendezve:

$$\square \mathbf{D} = \varepsilon_0 \partial_t \nabla \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}) - \nabla \times (\nabla \times (\mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E})), \quad (12.9)$$

vagy a szuszceptibilitásokkal kifejezve:

$$\square \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \nabla \times (\chi_M \mathbf{H}) - \varepsilon_0 \nabla \times (\nabla \times (\chi_E \mathbf{E})). \quad (12.10)$$

Ha a jobb oldal nulla lenne (homogén anyag), megkapnánk a szabad hullámegyenletet. Most a jobb oldal tekinthető a hullámok forrásának.

Ha a beeső hullám monokromatikus síkhullám, akkor az időfüggése $\sim e^{-i\omega t}$, ez lesz minden tér időfüggése is. Ekkor az időderivált $-i\omega$ -val helyettesíthető:

$$(\Delta + k^2) \mathbf{D} = -i\varepsilon_0 \mu_0 \omega \nabla \times (\chi_M \mathbf{H}) - \varepsilon_0 \nabla \times (\nabla \times (\chi_E \mathbf{E})). \quad (12.11)$$

Ezt formálisan meg tudjuk oldani a Helmholtz operátor Green függvénye (10.6) segítségével:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \left[i\varepsilon_0 \mu_0 \omega \nabla \times (\chi_M \mathbf{H}) + \varepsilon_0 \nabla \times (\nabla \times (\chi_E \mathbf{E})) \right]. \quad (12.12)$$

A második tag felel meg a szórt hullámnak. Távoli megfigyelő esetén a szokásos közelítéssel élve $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r - \hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'$ kapjuk

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \varepsilon_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'} \left[i\omega\mu_0 \nabla \times (\chi_M \mathbf{H}) + \nabla \times (\nabla \times (\chi_E \mathbf{E})) \right]. \quad (12.13)$$

Ezt leosztva ε_0 -al beazonosíthatjuk a kifutó gömbhullámokat (\mathbf{D}/ε_0 ugyan nem teljesen \mathbf{E} , de az eltérésük csak lokális, nem képvisel sugárzást):

$$\mathbf{A}_{\text{szórt}} = \frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'} \left[i\omega\mu_0 \nabla \times (\chi_M \mathbf{H}) + \nabla \times (\nabla \times (\chi_E \mathbf{E})) \right], \quad (12.14)$$

Parciális integrálással a deriválásokat átháríthatjuk az $e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'}$ alakra egy negatív előjel fellépése mellett: emiatt $\nabla \rightarrow ik\hat{\mathbf{x}}$ helyettesítéssel élhetünk. Mivel $\omega = kc$ és $Z_0 = \mu_0 c$, így

$$\mathbf{A}_{\text{szórt}} = \frac{k^2}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' e^{-ik\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}'} \left[\chi_M Z_0 \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{x}} + \chi_E \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{x}}) \right]. \quad (12.15)$$

Ez az egyenlet valójában egy implicit egyenlet, nem explicit megoldás, hiszen a jobb oldalon fellépő térerősségek tartalmazzák $\mathbf{A}_{\text{szórt}}$ -at. Azonban megoldhatjuk szukcesszív approximációval:

$$\mathbf{E}_{be}, \mathbf{H}_{be} \Rightarrow \mathbf{A}_{\text{szórt}}^{(1)} \Rightarrow \mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1 \Rightarrow \mathbf{A}_{\text{szórt}}^{(2)} \Rightarrow \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2 \Rightarrow \dots, \quad (12.16)$$

a folyamat vége az egzakt megoldás. Ha kicsik a szórócentrumok, akkor a második, harmadik stb. térerősségekhez tartozó korrekciók – a többszörös szórások járulékai – egyre kisebbek. Sokszor megelégedhetünk az első korrekcióval (Born-közelítés). Ekkor a fenti képletbe a beeső síkhullám (12.1) képlete írható be:

$$\mathbf{A}_{\text{szórt}} = \frac{k^2 E_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}' - k\hat{\mathbf{x}}\mathbf{x}')} \left[\chi_M (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0) \times \hat{\mathbf{x}} + \chi_E \hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{e}_0 \times \hat{\mathbf{x}}) \right]. \quad (12.17)$$

Vezessük be a

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - k\hat{\mathbf{x}} \quad (12.18)$$

vektort, ezzel az exponens $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}'}$ alakban írható. Vegyük észre azt is, hogy itt valójában χ_M és χ_E Fourier transzformáltját számoljuk ki! Azaz

$$\mathbf{A}_{\text{szórt}} = \frac{k^2 E_0}{4\pi} \left[\tilde{\chi}_M(\mathbf{q})(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0) \times \hat{\mathbf{x}} + \tilde{\chi}_E(\mathbf{q})\hat{\mathbf{x}} \times (\mathbf{e}_0 \times \hat{\mathbf{x}}) \right]. \quad (12.19)$$

Adott \mathbf{e} kimenő polarizációra vetítéshez \mathbf{e}^* -gal kell szoroznunk; felhasználva, hogy $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a})$:

$$\mathbf{e}^* \mathbf{A}_{\text{szórt}} = \frac{k^2 E_0}{4\pi} \left[\tilde{\chi}_M(\mathbf{q})(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^*) + \tilde{\chi}_E(\mathbf{q})\mathbf{e}^* \mathbf{e}_0 \right]. \quad (12.20)$$

Emiatt aztán a differenciális hatáskeresztmetszet (12.4) alapján:

$$\frac{d\sigma_{\mathbf{e}\mathbf{e}_0}}{d\Omega} = \frac{k^4}{16\pi^2} \left| \tilde{\chi}_M(\mathbf{q})(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^*) + \tilde{\chi}_E(\mathbf{q})\mathbf{e}^*\mathbf{e}_0 \right|^2, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k} - k\hat{\mathbf{x}}. \quad (12.21)$$

Jellegzetessége a $\sim k^4$ függés.

A polarizációs vektorokat érdemes a következő módon választani: $\mathbf{e}_0^\perp = \mathbf{e}^\perp = \alpha \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{x}}$ és $\mathbf{e}_0^\parallel = \mathbf{e}_0^\perp \times \hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{e}^\parallel = \mathbf{e}_0^\perp \times \hat{\mathbf{x}}$. A normáláshoz $\alpha = 1/\sin\theta$, ahol $\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{k}} = \cos\theta$. Választva egy olyan koordinátarendszert, ahol $\hat{\mathbf{k}}\|z$, azaz $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$, kapjuk

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^\perp = \mathbf{e}_0^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_0^\parallel = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^\parallel = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \quad (12.22)$$

A megfelelő polarizációs vektor szorzatok

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\perp &= 1, & \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\parallel &= 0, & \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\perp &= 0, & \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\parallel &= \cos\theta, \\ (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\perp)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\perp) &= \mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\parallel = \cos\theta, & (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\perp)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\parallel) &= -\mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\perp = 0, \\ (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\parallel)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\perp) &= -\mathbf{e}_0^\parallel \mathbf{e}^\perp = 0, & (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0^\parallel)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^\parallel) &= \mathbf{e}_0^\perp \mathbf{e}^\perp = 1. \end{aligned} \quad (12.23)$$

Ilyen módon végül is

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\parallel\parallel}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{16\pi^2} |\chi_M(\mathbf{q}) + \chi_E(\mathbf{q}) \cos\theta|^2, \\ \frac{d\sigma_{\perp\perp}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{16\pi^2} |\chi_M(\mathbf{q}) \cos\theta + \chi_E(\mathbf{q})|^2. \end{aligned} \quad (12.24)$$

Vagyis a szórás során a fenti módon választott polarizációk nem keverednek.

Ha a bemenő hullám polarizálatlan, vagyis azonos mennyiségben tartalmazza a különböző polarizációk járulékát, akkor átlagolnunk kell a különböző polarizációk járulékára:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{32\pi^2} |\chi_M(\mathbf{q}) + \chi_E(\mathbf{q}) \cos\theta|^2, \\ \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{k^4}{32\pi^2} |\chi_M(\mathbf{q}) \cos\theta + \chi_E(\mathbf{q})|^2. \end{aligned} \quad (12.25)$$

A kimenő polarizáltság jellemzésére vezessük be:

$$\Pi(\theta) = \frac{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega}}. \quad (12.26)$$

Nyilván $\Pi(\theta) \in [-1, 1]$, ha $\Pi(\theta) = 1$ akkor teljesen merőleges, ha $\Pi(\theta) = -1$, akkor teljesen párhuzamos a polarizáltság.

Alkalmazás:

Kis r sugarú fémgömb szórási hatáskeresztmetszete?

Megoldás

Kis méretű fémgömbnél vehetjük a beeső hullám terét homogénnek. Ekkor a beeső elektromos tér dipólmomentumot hoz létre, melynek erőssége (l. (3.33)) $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{E}$. Ez jellemezhető sűrűséggel is: $\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{E} \delta(\mathbf{x})$. Az elektromos eltolás ezért

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + 4\pi\epsilon_0 r^3 \mathbf{E} \delta(\mathbf{x})) \mathbf{E} \Rightarrow \chi_E(x) = 4\pi r^3 \delta(\mathbf{x}). \quad (12.27)$$

A fémgömböt tökéletes diamágnesnek tekintve homogén mágneses térben szintén egy dipól alakul ki $\mathbf{m} = -2\pi r^3 \mathbf{H}$ (l. (5.72) a $\mu_r = 0$ limeszben). Ez megfelel

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \Rightarrow \chi_M(x) = -2\pi r^3 \delta(x). \quad (12.28)$$

Ezzel az integrálok elvégezhetők, és

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 r^6 \left| \mathbf{e}^* \mathbf{e}_0 - \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_0)(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{e}^*) \right|^2 \quad (12.29)$$

A különböző polarizációk járuléka

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{1}{2} k^4 r^6 \left| 1 - \frac{\cos \theta}{2} \right|^2, \quad \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \frac{1}{2} k^4 r^6 \left| \cos \theta - \frac{1}{2} \right|^2. \quad (12.30)$$

A polarizációkra összegzett differenciális hatáskeresztmetszet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 r^6 \left(\frac{5}{8} (1 + \cos^2 \theta) - \cos \theta \right), \quad (12.31)$$

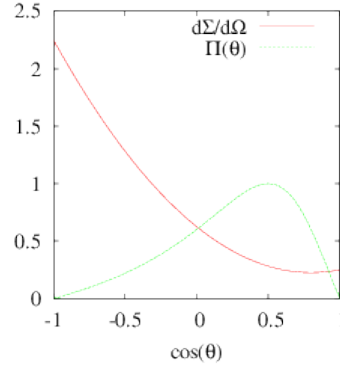
a kimenő polarizáltság

$$\Pi(\theta) = \frac{3 \sin^2 \theta}{5(1 + \cos^2 \theta) - 8 \cos \theta}. \quad (12.32)$$

Ezeket a 12.1 ábrán láthatjuk. Két jellegzetessége:

- erős visszaszórás: a szórt hullám intenzitása hátrafelé a legnagyobb. A fémgömbök pora „tükröződik”.
- a polarizáltság $\cos \theta = 1/2$ -nél 1, ekkor csak \perp polarizáltság marad.

◆



12.1. ábra. Differenciális hatáskeresztmetszet és polarizáltság fémgömbön való szórás esetén

12.2. Szórás gázon és szabályos kristályon

Tegyük fel, hogy a szórócentrumok igen kicsik az elektromágneses hullám hullámhosszához képest. Ekkor molekuláris szinten írhatjuk le a polarizálhatóságot. Itt feltesszük, hogy a mágneses polarizálhatóság elhanyagolható, a molekuláris elektron polarizálhatóság pedig γ_{mol} :

$$\chi_E = \sum_j \gamma_{mol} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad \chi_M = 0. \quad (12.33)$$

Ezzel (12.25) alapján

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2 |\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2, \quad \mathcal{F}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}_j}, \quad \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \cos^2 \theta \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}. \quad (12.34)$$

Az irányfüggő $\mathcal{F}(\mathbf{q})$ faktor valójában az anyageloszlás Fourier-transzformáltja. $|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2$ -t két szummaként felírva:

$$|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = \sum_{ij} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}. \quad (12.35)$$

Gáz esetén a szórócentrumok véletlenszerűen helyezkednek el, vagyis az $i \neq j$ járulékok kiátlagolják egymást, ezért marad $|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = N$, ahol N a szórócentrumok száma. A térfogategységre számolt szórási hatáskeresztmetszet ezért

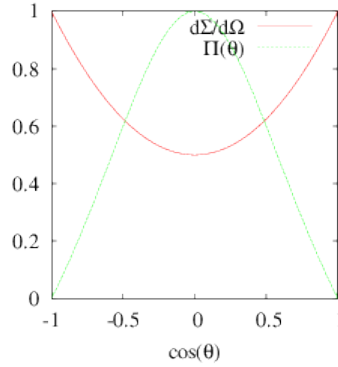
$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2, \quad \frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} = \cos^2 \theta \frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega}, \quad (12.36)$$

ahol $\mathcal{N} = N/V$ a szórócentrumok sűrűsége. Sűrűbb anyagban és nagyobb frekvenciáknál tehát erősebben szóródást látunk.

A teljes differenciális hatáskeresztmetszet illetve a polarizáltság

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{32\pi^2} |\gamma_{mol}|^2 (1 + \cos^2 \theta), \quad \Pi(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (12.37)$$

l. a 12.2 ábrán. Láthatóan $\cos \theta = 0$, azaz a bejövő irányra merőlegesen a legkisebb a



12.2. ábra. Differenciális hatáskeresztmetszet és polarizáltság szögfüggése gázon való szórás esetén.

szórt fény intenzitása, és ott teljes a polarizáltság.

A teljes hatáskeresztmetszet (12.5) az összes irányra összegzett differenciális hatáskeresztmetszet, vagyis a szórt teljes intenzitás:

$$\alpha = \frac{1}{V} \sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 \mathcal{N}}{6\pi} |\gamma_{mol}|^2, \quad \text{mert} \quad \int_{-1}^1 dx (1 + x^2) = \frac{8}{3}. \quad (12.38)$$

Ezt kifejezhetjük a törésmutatóval is, hiszen ritka gázra $\varepsilon_r = 1 + \mathcal{N} \gamma_{mol}$, és $n = \sqrt{\varepsilon_r} \approx 1 + \mathcal{N} \gamma_{mol}/2$ (l. Clausius-Mosotti egyenlet, (4.38)), ezzel

$$\alpha = \frac{2k^4}{3\pi \mathcal{N}} (n - 1)^2, \quad (12.39)$$

ez a *Rayleigh-szórás* formulája.

A térfogattal normált teljes szórási hatáskeresztmetszet leírja a beeső fény intenzitásvesztését: egy $dA dx$ térfogatú térelemre felírva az ott levő anyag által kiszórt összteljesítményre felírható

$$\frac{dP_{szórt}}{S_{be}} = \sigma, \quad (12.40)$$

ahol S_{be} a bemenő teljesítményáram. A kiszórt összteljesítmény az eredeti hullám intenzitásvesztése: $dP_{szórt} = -dP_{be}$. Másrészt a térfogatelembe belépő teljesítmény

$P_{be} = dAS_{be}$. Emiatt

$$\frac{dP_{be}dA}{P_{be}} = -\sigma = -dAdx\alpha \Rightarrow \frac{d \ln P_{be}}{dx} = -\alpha \Rightarrow P_{be} \sim P_{be}^{(0)} e^{-\alpha x}. \quad (12.41)$$

Légkörön való szórásra alkalmazva a fentieket

- a szórás erőssége $\sim k^4$, ezért ha a szórt fényt figyeljük, ott a nagyobb frekvenciák dominálnak, vagyis kék az ég
- ha a fényforrást figyeljük, ott a nagyobb frekvenciák egy része már kiszóródott, vagyis a lemenő Nap fénye vöröses
- $\theta = \pi/2$ -nél, vagyis a Napra merőleges irányban legkisebb a differenciális szórási hatáskeresztmetszet, vagyis ott a legsötétebb (legmélyebb) az ég
- itt teljesen polarizált a fény, ebből a Nap irányát még akkor is meg lehet határozni, ha nem látszik a Nap.
- ha a szórócentrumok sűrűsége végtelenhez tartana, de a törésmutató nem lenne 1, akkor $\alpha \rightarrow 0$, vagyis nem lenne szórás. Az ég kék színe tehát az atomok létezésének közvetett bizonyítéka.

A fenti gondolatmenet alkalmazható akkor is, ha a szórócentrum nem molekula, hanem homogén anyag sűrűség-ingadozásai. A Clausius-Mosotti egyenlet kis sűrűségeknel érvényes alakjából az átlagos $\varepsilon_r = 1 + \mathcal{N}\gamma_{mol}$, azaz az átlagos $\chi_E = \mathcal{N}\gamma_{mol}$. A szórás ennek változásán történik ami \mathcal{N} változása miatt lesz. Tehát

$$\frac{\delta\chi_E}{\chi_E} = \frac{\delta\mathcal{N}}{\mathcal{N}} \Rightarrow \delta\chi_E = \chi_E \frac{\delta\mathcal{N}}{\mathcal{N}} = 2(n-1) \frac{\delta\mathcal{N}}{\mathcal{N}}, \quad (12.42)$$

ahol az utolsó képletben a törésmutatót használtuk fel. Feltéve ismét, hogy nincs mágneses szuszceptibilitás, a (12.25) képlet szerint

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4}{32\pi^2} |\delta\chi_E(\mathbf{q})|^2 = \frac{k^4(n-1)^2}{8\pi^2\mathcal{N}^2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \delta\mathcal{N}(\mathbf{x}) \delta\mathcal{N}(\mathbf{y}). \quad (12.43)$$

Ha feltesszük, hogy egy V_0 tartományon túl a sűrűség fluktuációk korrelálatlanok, akkor a $\langle \delta\mathcal{N}(\mathbf{x}) \delta\mathcal{N}(\mathbf{y}) \rangle$ statisztikus átlagra nullát kapunk, ha $\mathbf{x} - \mathbf{y} \notin V_0$. Emiatt a kettős integrál kifejezésében az egyik koordináta V_0 -t, a másik a teljes V térfogatot futja be. Legyen $N = V_0\mathcal{N}$, ekkor

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = \frac{k^4(n-1)^2}{8\pi^2 N^2} \langle \delta N^2 \rangle V_0. \quad (12.44)$$

Statisztikus fizikából lehet tudni, hogy $\langle \delta N^2 \rangle = k_B T \partial N / \partial \mu$, ahol μ a kémiai potenciál. Termodinamikai összefüggésekből pedig a derivált átírható. Végül is azt kapjuk, hogy

$$\frac{\langle \delta N^2 \rangle}{N} = \mathcal{N} k_B T \beta_T, \quad \text{ahol} \quad \beta_T = - \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T, \quad (12.45)$$

az izoterm kompresszibilitás. Ezzel

$$\frac{1}{V} \frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} = \frac{k^4 (n-1)^2}{8\pi^2} k_B T \beta_T, \quad \alpha = \frac{2k^4 (n-1)^2}{3\pi} k_B T \beta_T. \quad (12.46)$$

Ez a képlet igen hasonlít a Rayleigh-szórásból kapott (12.39) képlethez. Másodrendű fázisátalakulásnál $\beta_T \rightarrow \infty$, ekkor tehát az anyag szórási képessége jelentősen felerősödik. Ez a *kritikus opaleszcencia* jelensége.

Ha a szórócentrumok nem véletlenszerűen helyezkednek el, akkor $\mathcal{F}(\mathbf{q})$ bonyolultabb struktúrát mutat. Pl. köbös rácsot véve:

$$\mathbf{x}_j = a \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{e}_i, \quad n_i \in \mathbf{N}, \quad (12.47)$$

emiatt

$$\mathcal{F}(\mathbf{q}) = \sum_j e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_j} = \prod_{i=1}^3 \sum_{n_i} e^{iq_i a n_i} = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin \frac{2N_i + 1}{2} q_i a}{\sin \frac{q_i a}{2}}, \quad (12.48)$$

mivel

$$\sum_{n=-N}^N e^{iqan} = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} qa}{\sin \frac{qa}{2}}. \quad (12.49)$$

Innen

$$|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2 = \prod_{i=1}^3 \frac{\sin^2 \frac{2N_i + 1}{2} q_i a}{\sin^2 \frac{q_i a}{2}}. \quad (12.50)$$

$|\mathcal{F}(\mathbf{q})|^2$ majdnem mindenütt $\mathcal{O}(1)$, vagyis térfogattal osztva eltűnik a végtelen térfogati limeszben. Kivételt képeznek azok a helyek, ahol

$$q_i = \frac{2\pi\ell_i}{a}, \quad \text{ahol} \quad \ell_i \in \mathbf{N}. \quad (12.51)$$

Ez a (*Bragg-feltétel*), ezeken a helyeken $e^{iq_i a n_i} = 1$, emiatt $\mathcal{F}(\mathbf{q}) = N^2$. Ha a hullám beesési és visszaverődési szöge ugyanaz, azaz $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{x}}$, akkor $\mathbf{q} = 2\mathbf{k}$, és a $k_i a = \pi\ell_i$ feltételt kapjuk.

Az erősítés helyeit figyelve az anyag szerkezetére következtethetünk, ez adja a röntgendiffrakció, illetve az elektronmikroszkóp működési alapját. Másrészt a szórási maximumok frekvenciafüggése miatt megfelelő optikai rács alkalmazásával használhatjuk ezt az elvet spektrométer szerkesztésére is.

13. fejezet

Cherenkov-sugárzás és átmeneti sugárzás

Az elektromágneses hullámok vizsgálatában a következő logikát követtük

- *szabad elektromágneses hullámok*: el. mágn. hullámok térerőssége, Poynting-vektora, jelenségek: abszorpció, törés, hullámvezetők
- *mozgó töltés* \Rightarrow *el. mágn. hullámok*: Liénard-Wiechert potenciálok, térerősségek, szögfüggés, spektrum
- *el. mágn. hullám* \Rightarrow *anyag* \Rightarrow *el. mágn. hullám*: szórási jelenségek, szórás gázon, szabályos kristályon
- *mozgó töltés* \Rightarrow *el. mágn. térerősség* \Rightarrow *anyag* \Rightarrow *el. mágn. hullám*: logikusan a következő lépés.

13.1. Cherenkov-sugárzás

Most azzal a speciális esettel foglalkozunk, amikor a bemenő részecske egyenesvonalú egyenletes mozgást végez (részlegesen) homogén, $\varepsilon(\omega)$ dielektromos állandójú anyagban (feltesszük, hogy $\mu = \mu_0$).

Teljesen homogén közegben, azonban frekvenciafüggő dielektromos állandó mellett kissé megváltozik a Maxwell-egyenletek megoldása a Liénard-Wiechert potenciálokhoz képest. A töltés- illetve áramsűrűség egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén: $\varrho = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ illetve $\mathbf{J} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$. Lorenz-mértékben a potenciálokra vonatkozó egyenletek, egyelőre állandó ε mellett:

$$(\Delta - \mu_0\varepsilon\partial_t^2)\Phi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}, \quad (\Delta - \mu_0\varepsilon\partial_t^2)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}. \quad (13.1)$$

Mivel $\mu_0 \mathbf{J} = \mu_0 \varepsilon \mathbf{v} \frac{\rho}{\varepsilon}$, ezért $\mathbf{A} = \mu_0 \varepsilon \mathbf{v} \Phi$, azaz a vektorpotenciál kifejezhető a skalárpotenciállal.

Fourier-transzformáció után $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$, $\partial_t \rightarrow -i\omega$. A töltéssűrűség Fourier-transzformáltja

$$\int d\mathbf{x} dt e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varrho(t, \mathbf{x}) = \int d\mathbf{x} dt e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}} q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) = q \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})t} = 2\pi q \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (13.2)$$

Emiatt a skalárpotenciál egyenlete:

$$(k^2 - \mu_0 \varepsilon \omega^2) \Phi = \frac{2\pi q}{\varepsilon} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (13.3)$$

ahonnan

$$\Phi(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi q}{\varepsilon} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2 - \mu_0 \varepsilon \omega^2}, \quad \mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}) = 2\pi q \mu_0 \frac{\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2 - \mu_0 \varepsilon \omega^2}. \quad (13.4)$$

Ebben az alakban már figyelembe vehetjük, hogy a permittivitás függ a frekvenciától: $\varepsilon(\omega)$.

Az elektromos térerősség $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \partial_t \mathbf{A}$, innen

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -i\mathbf{k}\Phi + i\omega \mathbf{A} = i(\omega \mu_0 \varepsilon \mathbf{v} - \mathbf{k}) \Phi = \frac{2\pi i q}{\varepsilon} (\omega \mu_0 \varepsilon \mathbf{v} - \mathbf{k}) \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2 - \mu_0 \varepsilon \omega^2}. \quad (13.5)$$

A mágneses indukció $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, azaz

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = i\mu_0 \varepsilon \Phi \mathbf{k} \times \mathbf{v} = \mu_0 \varepsilon \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (13.6)$$

A valós térbeli eredmény kiszámítása inverz Fourier-transzformálttal történik. Válasszunk speciális koordinátarendszert (mint korábban a Liénard-Wiechert potenciálok kiértékelésénél), ahol $\mathbf{v} = (0, 0, v)$, és $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$. A térerősség:

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{2\pi i q}{\varepsilon} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{ik_x x} \frac{\delta(\omega - k_z v)}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \mu_0 \varepsilon \omega^2} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z - \omega \mu_0 \varepsilon v \end{pmatrix} \quad (13.7)$$

A k_z integrál könnyen elvégezhető:

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{i q}{4\pi^2 \varepsilon v} \int dk_x dk_y \frac{e^{ik_x x}}{k_x^2 + k_y^2 + \frac{\omega^2}{v^2} - \mu_0 \varepsilon \omega^2} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ \omega/v - \omega \mu_0 \varepsilon v \end{pmatrix} \quad (13.8)$$

Vezessük be

$$\lambda^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \mu_0 \varepsilon v^2) = \frac{\omega^2}{v^2} \left(1 - \frac{v^2}{c_{\text{közeg}}^2} \right). \quad (13.9)$$

Ha $v < \text{közegbeli fénysebesség}$, akkor λ valós, ellenkező esetben tisztán képzetes. Ezzel

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{iq}{4\pi^2\varepsilon v} \int dk_x dk_y \frac{e^{ik_x x}}{k_x^2 + k_y^2 + \lambda^2} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ \frac{v\lambda^2}{\omega} \end{pmatrix} = -\frac{iq}{4\pi\varepsilon v} \int dk_x \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{k_x^2 + \lambda^2}} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ \frac{v\lambda^2}{\omega} \end{pmatrix}. \quad (13.10)$$

A z komponensben fellépő integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{k_x^2 + \lambda^2}} = \left\{ \begin{matrix} k_x x = z \\ dk_x = dz/x \end{matrix} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\cos z}{\sqrt{z^2 + (\lambda x)^2}} = 2K_0(\lambda x), \quad (13.11)$$

az x komponensben fellépő integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{k_x e^{ik_x x}}{\sqrt{k_x^2 + \lambda^2}} = \frac{i}{x} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{z \sin z}{\sqrt{z^2 + (\lambda x)^2}} = 2iK_1(\lambda x). \quad (13.12)$$

Itt K_n a másodfajú módosított Bessel-függvény, amely a Bessel-függvények analitikus elfolytatásával kapható [8]. Vagyis

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{iq\lambda}{2\pi\varepsilon v} \begin{pmatrix} iK_1(\lambda x) \\ 0 \\ \frac{v\lambda}{\omega} K_0(\lambda x) \end{pmatrix}. \quad (13.13)$$

A mágneses indukció (13.6) alapján

$$\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon v \times \mathbf{E} = \frac{q\mu_0\lambda K_1(\lambda x)}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13.14)$$

A Poynting-vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} -B_y E_z \\ 0 \\ B_y E_x \end{pmatrix}. \quad (13.15)$$

Számoljuk ki a töltés útegységenkénti energiaveszteségét. Ehhez először integráljuk ki a Poynting-vektort a töltés körüli x sugarú hengerre, amivel megkapjuk az időegység alatti energiaveszteséget:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{2\pi x}{\mu_0} \int dz B_y E_z. \quad (13.16)$$

Ebból a sebességgel szorozva térhetünk át az úthossz alatti veszteségekre, azzal viszont az integrálban térünk át idő szerinti integrálra:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}}{dz} &= -\frac{2\pi x}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt B_y(t) E_z(t) = -\frac{x}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega B_y^*(\omega) E_z(\omega) = \\ &= -xv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varepsilon^*(\omega) E_x^*(\omega) E_z(\omega) = -2xv \Re \int_0^{\infty} d\omega \varepsilon^*(\omega) E_x^*(\omega) E_z(\omega). \quad (13.17)\end{aligned}$$

Helyettesítsük be a korábban kapott képleteket, végül is kapjuk (Fermi képlete):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{q^2}{2\pi^2\varepsilon_0} \Re \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{1}{\beta^2\varepsilon_r} - 1 \right) i\lambda^* x K_1^*(\lambda x) K_0(\lambda x). \quad (13.18)$$

Ha $v < c_{\text{közeg}}$, akkor az i fellépte miatt csak akkor kaphatunk járulékot, ha ε_r imaginárius. Ez megfelel annak a képnek, hogy a közeg ekkor elnyeli az energiát.

Ha azonban $v > c_{\text{közeg}}$, akkor $\lambda^2 < 0$, azaz $i\lambda^*$ tisztán valós. Emiatt akkor kapunk járulékot, ha ε_r valós! Ilyenkor nem a környezetben levő anyag veszi fel az energiát, hanem az energia kisugárzódik. Valóban, ha nagy $x \rightarrow \infty$ értékeket nézünk, akkor a Bessel-függvények közelítése:

$$K_n(\lambda x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} e^{-\lambda x}. \quad (13.19)$$

Ha λ imaginárius, akkor a térerősségek egyes frekvenciái valódi időben $\sim \exp(-i(\omega t - |\lambda|x))$ módon változnak, azaz kifutó hullámot írnak le, amelyek $1/\sqrt{x}$ szerint csengenek le. Az energiaáramlás irányára kiszámíthatjuk a Poynting-vektor komponenseinek arányát:

$$\tan \theta = \frac{S_x}{S_z} = -\frac{E_z}{E_x} = \frac{iv\lambda}{\omega} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{\text{közeg}}^2}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{c_{\text{közeg}}}{v}. \quad (13.20)$$

A kifutó hullám iránya tehát mindig ugyanazt a szöget zárja be. Emiatt valójában a mozgó töltés felől kúpszerűen kiinduló hullámot figyelhetünk meg, a fénysebességnél gyorsabb mozgás „lökéshullámfront”-ját. Ez a *Cherenkov-sugárzás* (Cherenkov 1934).

Az energiaveszteség képletét erre az esetre úgy írhatjuk (Frank, Tamm, 1937), hogy

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega}{c^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon_r} \right). \quad (13.21)$$

Próbáljuk megérteni a Cherenkov-sugárzás fizikai okát. Egy abszorpció nélküli anyagban egyenletesen mozgó ponttöltés megmozgatja az anyag részecskéit akár gyorsabban

megy a közegbeli fénysebességnél, akár lassabban. Ezek a gyorsulás hatására sugározni fognak. Ha azonban a ponttöltés sebessége kisebb $c_{\text{közeg}}$ -nél, akkor az egyes részek által kibocsátott járulékok kioltják egymást, így makroszkopikusan nem látunk sugárzást. A $v > c_{\text{közeg}}$ esetben ugyanakkor az anyag részecskéi által kibocsátott sugárzás nem éri utol mozgó ponttöltést, ezért elmarad a destruktív interferencia.

13.2. Átmeneti sugárzás

Most tegyük fel, hogy a tér nem homogén, hanem a $z > 0$ térrészt ε , a $z < 0$ térrészt ε_0 permittivitású anyag tölti ki. Legyen a megoldás a két térrészben E^+ illetve E^- . A fenti tárgyalás megfelelő a forrás által létrehozott tér kezeléséhez, azonban a teljes megoldás tartalmazza a homogén egyenlet megoldását is, ami itt szükséges, hogy figyelembe tudjuk venni a határfeltételeket a két anyagrész találkozásánál:

$$\begin{aligned} E_{x,y}^+(t, x, y, z=0) &= E_{x,y}^-(t, x, y, z=0), & \varepsilon E_z^+(t, x, y, z=0) &= \varepsilon_0 E_z^-(t, x, y, z=0), \\ \mathbf{H}^+(t, x, y, z=0) &= \mathbf{H}^-(t, x, y, z=0), \end{aligned} \quad (13.22)$$

ahol $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{inhom}} + \mathbf{E}_{\text{hom}}$, és az inhomogén rész megoldását Fourier-térben (13.5) és (13.6) adja. Mivel $\mu = \mu_0$ -t vettünk, ezért \mathbf{H} folytonos.

Most tekintsünk el az ε frekvenciafüggésétől. Fourier transzformálva t , x és y szerint ugyanezek a feltételek fennállnak. Ez azt jelenti, hogy a $z = 0$ feltétel kielégítéséhez csak z -ben kell az inverz Fourier-transzformációt elvégeznünk:

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = i(\omega\mu\varepsilon\mathbf{v} - \mathbf{k}) \frac{2\pi q}{\varepsilon} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2 - \mu\varepsilon\omega^2} = i(\omega\mu\varepsilon\mathbf{v} - \mathbf{k}) \frac{2\pi q}{\varepsilon} \frac{\delta(\omega - k_z v)}{k_T^2 + k_z^2 - \mu\varepsilon\omega^2}, \quad (13.23)$$

és $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}_T, z) = \int \frac{dk_z}{2\pi} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{ik_z z}$, ahol a transzverzális tér $T = (x, y)$. A k_z integrál a Dirac-delta miatt könnyen elvégezhető:

$$E_T(\omega, k_x, k_y, z) = \frac{-iq\mathbf{k}_T}{\varepsilon v} \frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2}, \quad E_z = \frac{-iq\lambda^2}{\varepsilon\omega} \frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2}, \quad (13.24)$$

összefoglalva

$$\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}_T, z) = \frac{-iq}{\varepsilon v} \left(\mathbf{k}_T + \frac{\lambda^2 v}{\omega} \mathbf{e}_z \right) \frac{e^{i\omega z/v}}{k_T^2 + \lambda^2}. \quad (13.25)$$

A homogén egyenlet megoldását is hozzuk ilyen alakra. A síkhullám megoldás

$$\mathbf{E}_{\text{hom}}(\omega, \mathbf{k}_T, z) = \mathbf{e} \bar{E}_0 e^{\pm i k_z z}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{e}(\mathbf{k}_T \pm k_z \mathbf{e}_z) = 0, \quad k_z^2 + k_T^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (13.26)$$

A polarizációs irányoknál az egyik \mathbf{e}_\perp irányt válasszuk merőlegesnek mind \mathbf{e}_z -re, mind $\hat{\mathbf{k}}_T$ -re. A másikra érvényes:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_z \mp \alpha \mathbf{k}_T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}(\mathbf{k}_T \pm k_z \mathbf{e}_z) = \pm k_z \mp \alpha k_T^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{k_z}{k_T^2} \quad (13.27)$$

vagyis

$$\mathbf{E}_{hom}(\omega, \mathbf{k}_T, z) = \left[E_\parallel^\pm \left(\mathbf{e}_z \mp \frac{k_z}{k_T^2} \mathbf{k}_T \right) + E_\perp^\pm \mathbf{e}_\perp \right] e^{\pm i k_z z}, \quad k_z = \sqrt{\varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - k_T^2}. \quad (13.28)$$

Fizikai határfeltételek: nincs beeső hullám, azaz $z < 0$ -ban csak $\sim e^{i k_z z}$ illetve $z > 0$ -ban csak $e^{i k_z z}$ hullám maradhat. A két térfélen ezek szerint a teljes térerősség

$$\begin{aligned} E^-(\omega, \mathbf{k}_T, z) &= \left[E_\parallel^- \left(\mathbf{e}_z + \frac{k_z}{k_T^2} \mathbf{k}_T \right) + E_\perp^- \mathbf{e}_\perp \right] e^{-i k_z z} - \frac{i q}{\varepsilon_0 v} \left(\mathbf{k}_T + \frac{\lambda_0^2 v}{\omega} \mathbf{e}_z \right) \frac{e^{i \omega z / v}}{k_T^2 + \lambda_0^2} \\ E^+(\omega, \mathbf{k}_T, z) &= \left[E_\parallel^+ \left(\mathbf{e}_z - \frac{k_z}{k_T^2} \mathbf{k}_T \right) + E_\perp^+ \mathbf{e}_\perp \right] e^{i k_z z} - \frac{i q}{\varepsilon v} \left(\mathbf{k}_T + \frac{\lambda^2 v}{\omega} \mathbf{e}_z \right) \frac{e^{i \omega z / v}}{k_T^2 + \lambda^2}. \end{aligned} \quad (13.29)$$

A $z = 0$ -nál kirótt határfeltételekből meghatározható E_\parallel^\pm , E_\perp^\pm , és ezzel a sugárzás. Az \mathbf{e}_\perp komponensre nincs forrás, azaz ilyen polarizációjú sugárzás nincsen (részletesebben: teljesülnie kell $E_\perp^+ = E_\perp^-$, és a \mathbf{H} folytonossága miatt $E_\perp^+/c = E_\perp^-/c_0$ egyenleteknek egyszerre). A párhuzamos polarizációra az általános képlet bonyolult, ezért az egyszerűség kedvéért nézzük azt az esetet, mikor a $z > 0$ tartományban tökéletes vezetőt veszünk, azaz $\mathbf{E}^+ = 0$. Ekkor a határon $E_T^- = 0$, ebből:

$$E_\parallel^- = \frac{i q k_T^2}{\varepsilon_0 k_z v} \frac{1}{k_T^2 + \lambda_0^2}, \quad (13.30)$$

Polárkoordinátákban $k_z = k \cos \theta$, $k_T = k \sin \theta$, ahol $k = \omega c$. Itt

$$k_T^2 + \lambda^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta + \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta). \quad (13.31)$$

Ezzel:

$$E_\parallel^- = \frac{i q v}{\varepsilon_0 c \omega} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)}. \quad (13.32)$$

Hogy a sugárzás spektrumáról is tudjunk valamit mondani, kiszámoljuk a teljes ki-menő energiát. Mivel a sugárzásban az elektromos és mágneses szektor ugyanakkora energiát ad le, ezért

$$W = \int d^3 \mathbf{x} \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \int dx_T^2 dz \varepsilon_0 \mathbf{E}^2. \quad (13.33)$$

Ebben a képletben a térerősségeknek nem a Fourier, hanem a valós téridőbeli értékére van szükségünk. Ezért inverz Fourier transzformációt kell elvégeznünk a transzverzális irányokban, valamint az időben. A térerősség négyzetére ezek szerint kapjuk:

$$\mathbf{E}^2 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{dk_T^2}{(2\pi)^2} \frac{dk_T'^2}{(2\pi)^2} \mathbf{E}_{hom}^{-*}(\omega, \mathbf{k}_T, z) \mathbf{E}_{hom}^-(\omega', \mathbf{k}_T', z) e^{i(\omega-\omega')t-i(\mathbf{k}_T-\mathbf{k}_T')\mathbf{x}}. \quad (13.34)$$

Az integrál hosszadalmas, több lépésből áll. Végül

$$W = \varepsilon_0 \int \frac{d\omega dk_T^2}{(2\pi)^3} |E_{\parallel}(\omega, \mathbf{k}_T)|^2 \frac{\omega k_z}{k_T^2}. \quad (13.35)$$

Beírva ide E_{\parallel} alakját kapjuk

$$W = \int_0^{\infty} d\omega d\Omega \frac{q^2 v^2}{4\pi^3 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}, \quad (13.36)$$

ahonnan

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \frac{q^2 v^2}{4\pi^3 \varepsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (13.37)$$

Bevezetve

$$\alpha = q^2 / (4\pi \varepsilon_0 \hbar c) = 1/137 \quad (13.38)$$

értékű dimenziótlan mennyiséget (finomszerkezeti állandó), ahol $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Js értékű Planck-állandó, kapjuk az alternatív alakot:

$$\frac{d^2 W}{d\hbar \omega d\Omega} = \frac{\beta^2 \alpha}{\pi^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}. \quad (13.39)$$

A sugárzás ultrarelativisztikus esetben a $\cos \theta \approx 1$ értékeinél erős csúcsot mutat, csakúgy, mint a gyorsuló töltések sugárzásánál láttuk; $\delta\theta \sim 1/\gamma$ a sugárzás kiterjedése.

14. fejezet

Relativisztikus elektrodinamika

Az elektrodinamika nem kovariánsan transzformálódik a Galilei-transzformáció alatt, vagyis a szokásos, klasszikus mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérés esetén megváltoznak az egyenleteink. Ennek két magyarázata lehet: vagy csak egy adott koordinátarendszerben (éter) érvényes az elektrodinamika, vagy más módon kell áttérni mozgó vonatkoztatási rendszerre.

A Michelson-Morley kísérlet azt bizonyította, hogy ha létezik az éter, akkor a földi megfigyelő az éterhez képest nem mozog, hiszen a fény sebessége független volt a mérés irányától. Ez az éterképet kizárja, vagy legalábbis annyira elbonyolítja, hogy nem valószínű ez a hipotézis.

Nézzük a második lehetőséget, és állapítsuk meg azt a transzformációt, amelyre kovariánsak a Maxwell-egyenletek. Ehhez mindenekelőtt új jelöléseket vezetünk be. Hangsúlyozni kell, hogy ezek csupán definíciók, melyek értelmé később lesz világos.

14.1. Relativisztikus koordináták

Vezessük be a nulladik térkoordinátát $x^0 = ct$ módon, vagyis az időt azzal a távolsággal mérjük, amit a fény egységnyi idő alatt megtesz. Ekkor egy eseményt egy négyesvektorral jellemezhetünk

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}). \quad (14.1)$$

Az indexet felülre tesszük, és – ahogy már korábban tárgyaltuk – kontravariáns koordinátáknak nevezzük. A négyesvektor szerinti parciális deriválás

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (14.2)$$

a deriválás indexe alul van, ezek a kovariáns vektorok. Az integrálás

$$\int d^4x = c \int dt d^3\mathbf{x}. \quad (14.3)$$

Vektorok skaláris szorzatához egy metrikus tenzort vezetünk be. A motiváció az, hogy az elektrodinamikában a hullámegyenletben a $\square = \triangle - \partial_t^2/c^2$ differenciáloperátor jelenik meg:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \text{diag}(1, -1, -1, -1) \Rightarrow a \cdot b = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu, \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \\ g^{\mu\nu} &= (g^{-1})_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Komponensekben kiírva tehát

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2/c^2 - \triangle = -\square, \quad x^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2. \quad (14.5)$$

Ez azt jelenti, hogy nem csak a nullvektor hossza nulla, hanem minden $r = ct$ pontra igaz ez, azaz a fénykúp elemeire. Az origóból fénysebességnél kisebb átlagsebességgel elérhető eseményeknél $r = vt$, azaz $x^2 = (c^2 - v^2)t^2 > 0$, ezek az *időszerű* események. Ha $x^2 < 0$, akkor *térszerű* eseményekről beszélünk.

A térkoordinátáknak megfelelően az elektrodinamika mennyiségeit is négyesvektorokba rendezhetjük. Egy tömegpont esetén a töltéssűrűség $\varrho = q\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t))$, míg az áramsűrűség $\mathbf{J} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t))$. Mivel $v_i = \dot{x}_i$, ez azt sugallja, hogy érdemes

$$\mathcal{J}^\mu = (c\varrho, \mathbf{J}) \quad (14.6)$$

módon definiálni a négyes áramsűrűséget. Ekkor a kontinuitási egyenlet

$$0 = \partial_t \varrho + \partial_i J_i = \frac{1}{c} \partial_t (c\varrho) + \partial_i \mathcal{J}^i = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu, \quad (14.7)$$

a négyesdivergencia eltűnését jelenti.

A skalár- és vektorpotenciál sztatikus ponttöltés esetén a töltésből és áramból ugyanolyan módon áll elő, de az egyiket $1/\varepsilon_0$, a másikat μ_0 szorozza, emiatt Φ/c és \mathbf{A} azonos dimenziójú:

$$\frac{\Phi}{c} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 cr} = \frac{\mu_0 qc}{4\pi r}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 q\mathbf{v}}{4\pi r}. \quad (14.8)$$

Emiatt a négyespotenciál definíciója

$$\mathcal{A}^\mu = \left(\frac{1}{c}\Phi, \mathbf{A}\right). \quad (14.9)$$

Hogy a Maxwell-egyenleteket le tudjuk írni, bevezetjük a *térerősségtenzort*:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu, \quad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (14.10)$$

Mivel

$$\begin{aligned} E_i &= -\partial_i \Phi - \partial_t A_i = -\partial_i c\mathcal{A}^0 - c\partial_0 \mathcal{A}^i = -c(\partial^0 \mathcal{A}^i - \partial^i \mathcal{A}^0) = -cF^{0i} \\ B_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = -\varepsilon_{ijk} \partial^j \mathcal{A}^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\partial^j \mathcal{A}^k - \partial^k \mathcal{A}^j) = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk}, \end{aligned} \quad (14.11)$$

ezért

$$F^{0i} = -\frac{1}{c}E_i, \quad F^{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k. \quad (14.12)$$

Vagyis a felső indexes térerősségtenzor komponenseinek jelentése

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.13)$$

A Maxwell-egyenletek egy része a térerősségtenzor deriváltjaival van kapcsolatban:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_i F^{i0} = \frac{1}{c} \partial_i E_i = \frac{1}{c} \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \mu_0 \mathcal{J}^0 \\ \partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = -\frac{1}{c^2} \partial_t E_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j B_k = \mu_0 \mathcal{J}^i, \end{aligned} \quad (14.14)$$

vagyis összefoglalva

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \mathcal{J}^\nu. \quad (14.15)$$

A többi Maxwell-egyenlet valójában azonosság: vezessük be a duális térerősségtenzort:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon^{0123} = 1, \quad (14.16)$$

és teljesen antiszimmetrikus, azaz minden indexpár cseréjére jelet vált. Emiatt $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\sigma\mu\nu\rho}$. A három dimenziós Levi-Civita szimbólummal való kapcsolata $\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon_{ijk}$. A duális kapcsolat

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (-\varepsilon_{jkl} B_l) = -B_i = -\frac{1}{c} \tilde{E}_i \Rightarrow \tilde{E}_i = c B_i \\ \tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} (\varepsilon^{ijk0} F_{k0} + \varepsilon^{ij0k} F_{0k}) = \frac{1}{c} \varepsilon_{ijk} E_k = -\varepsilon_{ijk} \tilde{B}_k \Rightarrow c \tilde{B}_k = -E_k. \end{aligned} \quad (14.17)$$

A duális térerősségtenzor négyesderiváltja automatikusan nulla, hiszen:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (\partial_\rho \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{A}_\rho) = 0, \quad (14.18)$$

ami egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix szorzata. Ezen egyenletek jelentése

$$\begin{aligned} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &= \frac{1}{2} \partial_i \varepsilon^{i0jk} F_{jk} = \frac{1}{2} \partial_i (-\varepsilon_{ijk}) (-\varepsilon_{jkl} B_l) = \operatorname{div} \mathbf{B}, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu i} &= \partial_0 \tilde{F}^{0i} + \partial_j \tilde{F}^{ji} = \frac{1}{2} \partial_0 \varepsilon^{0ijk} F_{jk} + \frac{1}{2} \partial_j (\varepsilon^{ji0k} F_{0k} + \varepsilon^{jik0} F_{k0}) = \\ &= \frac{1}{2c} \partial_t \varepsilon_{ijk} (-\varepsilon_{jkl} B_l) + \frac{1}{c} \partial_j \varepsilon_{jik} E_k = -\frac{1}{c} [\partial_t B_i + (\operatorname{rot} \mathbf{E})_i]. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Vagyis ez a két egyenlet a térerősségtenzor szintjén nem egyenlet, hanem azonosság. Visszafelé gondolkodva pont ez a két egyenlet tette lehetővé a skalár- illetve vektorpotenciál bevezetését.

14.2. Lorentz-transzformáció

A Maxwell-egyenleteket tehát sikerült átfogalmazni olyan alakba, amely kizárólag négyes skalárszorzatokat tartalmaz. Emiatt a Maxwell-egyenletek alakja változatlan marad akkor, ha olyan transzformációt hajtunk végre a négyesvektorokon illetve -tenzorokon, amelyek a *négyes* skalárszorzatot invariánsan hagyják. Emlékeztetőül: a hármas skalár szorzatot invariánsan hagyó transzformációk a forgatások. Lehet tehát ezeket a transzformációkat általánosított forgatásokként felfogni, ahol az idő komponens is „forgatjuk”. A különbség a skalár szorzat tér és idő komponensei között az előjelben van.

Keressük tehát a négyesvektorok olyan lineáris transzformációit

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu}, \quad \forall a^{\mu} \quad (14.20)$$

amelyre a négyes skaláris szorzat invariáns marad:

$$\forall a, b \quad a' \cdot b' = a \cdot b \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} g_{\mu\mu'} \Lambda^{\mu'}_{\nu'} b^{\nu'} = a^{\nu} b^{\nu'} g_{\nu\nu'}. \quad (14.21)$$

Ha ez minden a, b -re teljesül, akkor

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\nu'} g_{\mu\mu'} = g_{\nu\nu'}. \quad (14.22)$$

Ezeket hívjuk *Lorentz-transzformációknak*. A pont azért kell, mert nem mindegy, hogy melyik az első és melyik a második index. Néhány formula:

$$a'_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} a_{\nu}, \quad \Lambda_{\mu}^{\nu} \Lambda_{\sigma}^{\mu} = \delta_{\sigma}^{\nu}, \quad (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\sigma} = \Lambda_{\sigma}^{\nu}. \quad (14.23)$$

A helyvektor négyesvektor, így ennek transzformációja

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad \Rightarrow \quad \partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \partial_{\nu} (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\nu} \partial_{\nu}, \quad (14.24)$$

vagyis a deriválás valóban kovariáns vektorként transzformálódik.

A mezők transzformációja: a transzformált mező a transzformált helyen az eredeti mező elforgatottja, amelyet a régi helyen kell venni – l. forgatás példája. Pl:

$$\mathcal{A}'(x') = \Lambda \mathcal{A}(x) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}'(x) = \Lambda \mathcal{A}(\Lambda^{-1}x). \quad (14.25)$$

Ha találunk ilyen mátrixot, akkor minden négyes skaláris szorzattal megfogalmazható egyenlet ugyanolyan alakú lesz a transzformáció után is. Hogy ezt jobban lássuk, nézzük meg a Maxwell-egyenletek transzformációját. A térerősségtenzor transzformációja

$$F'^{\mu\nu}(x') = \partial'^{\mu} \mathcal{A}'^{\nu}(x') - \partial'^{\nu} \mathcal{A}'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu}_{\nu'} F^{\mu'\nu'}(x). \quad (14.26)$$

Ha az áramsűrűséget is négyesvektorként transzformáljuk, akkor

$$\partial'_{\mu} F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda_{\mu}^{\mu'} \partial_{\mu'} \Lambda_{\sigma}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} F^{\sigma\nu'}(x) = \Lambda_{\nu'}^{\nu} \partial_{\mu'} F^{\mu'\nu'}(x) = \Lambda_{\nu'}^{\nu} \mu_0 \mathcal{J}^{\nu'}(x) = \mu_0 \mathcal{J}^{\nu}(x'), \quad (14.27)$$

vagyis a transzformált térerősségtenzor transzformált koordináták szerinti deriváltja a transzformált áramsűrűséget adja meg. Az elektrodinamika tehát kovariáns a Lorentz-transzformációkkal szemben.

A Lorentz-transzformáció mátrixa 4×4 -es valós mátrix. Ennek eredetileg 16 egymástól függetlenül megadható komponense, paramétere van. A definiáló egyenlete (14.22) 4×4 -es szimmetrikus mátrixot nulla voltát követeli meg, ami 10 megkötést jelent. A Lorentz transzformációk tehát végülis 6 független paramétertől függnek.

Jelöljük

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix} \Rightarrow g\Lambda^T g\Lambda = \mathbf{1}. \quad (14.28)$$

Ennek speciális példája, ha $\Lambda^0_0 = 1$, $\Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = 0$, és $\Lambda^i_j = O_{ij}$, azaz

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} \end{pmatrix} \Rightarrow g\Lambda^T g\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{O}^T \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (14.29)$$

Innen $\mathbf{O}^T \mathbf{O} = \mathbf{1}$, azaz O ortogonális mátrix, azaz forgatást ír le. 3D-s forgatásnak 3 paramétere van, ez a Lorentz-transzformációk 6 paraméteréből 3.

Másik speciális Lorentz transzformáció:

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & 0 & 0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.30)$$

Elég a felső almatrixra koncentrálni, erre (14.22) megkötés:

$$g\Lambda^T g\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^1_0 \\ -\Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 & \Lambda^0_0 \Lambda^0_1 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 \\ -\Lambda^0_0 \Lambda^0_1 + \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 & (\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14.31)$$

azaz

$$\begin{aligned} (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 &= 1 \Rightarrow \Lambda^0_0 = \cosh \eta, & \Lambda^1_0 &= \sinh \eta \\ (\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2 &= 1 \Rightarrow \Lambda^1_1 = \cosh \bar{\eta}, & \Lambda^0_1 &= \sinh \bar{\eta} \\ \Lambda^0_0 \Lambda^0_1 - \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 &\Rightarrow \tanh \eta = \tanh \bar{\eta} \Rightarrow \eta = \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (14.32)$$

Emiatt

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix}. \quad (14.33)$$

Hogy ennek fizikai jelentését megtaláljuk, alkalmazzuk a helyvektorra:

$$x'^0 = \cosh \eta x^0 + \sinh \eta x^1, \quad x'^1 = \cosh \eta x^1 + \sinh \eta x^0. \quad (14.34)$$

A vesszős rendszer origójának egyenlete az eredeti rendszerben: $x'^1 = 0$, azaz

$$x'^1 = 0 = \cosh \eta x + \sinh \eta ct \Rightarrow x = -c \tanh \eta t \Rightarrow \tanh \eta = -\frac{v}{c}. \quad (14.35)$$

Emiatt az η paraméter a mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérésnél a mozgó rendszer sebességével van kapcsolatban – emiatt neve *rapidity*. A fenti példa az x irányban mozgó rendszerre való áttérést jelentette, hasonló módon az y illetve z irányba való áttérést is meg lehet tenni: ez a Lorentz transzformációk újabb 3 paraméterét adják. A Lorentz transzformációk 6 paramétere tehát: 3 forgatás és 3 „boost”.

Mivel

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma, \quad \sinh \eta = \frac{\tanh \eta}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = -\gamma\beta, \quad (14.36)$$

a Lorentz-transzformáció mátrixa:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (14.37)$$

Nézzük meg különböző négyesvektorok transzformációját: a helyvektor esetén

$$x^{\mu} = (ct, x) \Rightarrow t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.38)$$

Az áramsűrűség esetén

$$\mathcal{J}^{\mu} = (c\rho, J) \Rightarrow \rho' = \frac{\rho - vJ/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad J' = \frac{J - v\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.39)$$

A négyespotenciálok esetén

$$\mathcal{A}^{\mu} = \left(\frac{1}{c}\Phi, A\right) \Rightarrow \Phi' = \frac{\Phi - vA}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad A' = \frac{A - v\Phi/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.40)$$

A térerősségtenzor tenzorként transzformálódik

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} F^{\mu'\nu'}. \quad (14.41)$$

A különböző komponensek transzformációja:

$$\begin{aligned} F'^{01} &= \Lambda_{\mu'}^0 \Lambda_{\nu'}^1 F^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^0 \Lambda_{\nu'}^1 F^{01} + \Lambda_{\mu'}^0 \Lambda_{\nu'}^1 F^{10} = (\cosh^2 \eta - \sinh^2 \eta) F^{01} = F^{01} \\ F'^{0i} \Big|_{i>1} &= \Lambda_{\mu'}^0 \Lambda_{\nu'}^i F^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^0 F^{\mu'i} = \cosh \eta F^{0i} + \sinh \eta F^{1i} \\ F'^{1i} \Big|_{i>1} &= \Lambda_{\mu'}^1 \Lambda_{\nu'}^i F^{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu'}^1 F^{\mu'i} = \sinh \eta F^{0i} + \cosh \eta F^{1i} \\ F'^{23} &= \Lambda_{\mu'}^2 \Lambda_{\nu'}^3 F^{\mu'\nu'} = F^{23}. \end{aligned} \quad (14.42)$$

Az elektromágneses térrel megfogalmazva

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & E'_2 &= \frac{E_2 - vB_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & E'_3 &= \frac{E_3 + vB_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ B'_1 &= B_1, & B'_2 &= \frac{B_2 + vE_3/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & B'_3 &= \frac{B_3 - vE_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (14.43)$$

14.3. Tömegpont relativisztikus dinamikája

Einstein arra mutatott rá, hogy ha egy tömegpont kölcsönhat az elektromágneses térrel, akkor ott is a Lorentz-transzformációkat kell használni a mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérésnél. A mozgásegyenleteknek relativisztikusan kovariánsnak kell lenniük.

Először azt állapítsuk meg, hogy egy részecske pályája mentén milyen invariánsok illetve négyesvektorok definiálhatók, hiszen ezek használhatók egy kovariáns mozgásegyenlet felírásához. A pálya a négyes térben $\gamma^\mu(s) = (ct(s), \mathbf{x}(s))$ alakú, ahol s a paraméter. A pálya ívhossza, illetve az ebből definiált sajátidő

$$c\tau = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{\frac{d\gamma^\mu}{ds} \frac{d\gamma_\mu}{ds}} \quad (14.44)$$

egy skalárszorzatot tartalmaz, vagyis relativisztikusan invariáns. Az idővel paramétrezve a pályát $\gamma^\mu(t) = (ct, \mathbf{x}(t))$, azaz

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma d\tau = dt. \quad (14.45)$$

Kovariáns mennyiség a *négyessebesség* – szokásosan normálni szokták c -vel

$$u^\mu = \frac{1}{c} \frac{d\gamma^\mu}{d\tau} = \gamma \left(1, \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad \Rightarrow \quad u^\mu u_\mu = 1. \quad (14.46)$$

Az impulzus $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$, ahol most m_0 -al jelöljük a részecske tömegét. Ennek relativisztikusan invariáns négyesvektor megfelelője tehát:

$$P^\mu = m_0 c u^\mu. \quad (14.47)$$

Ez szintén négyesvektor, a nulladik komponensének jelentését a $v \ll c$ limeszből lehet leolvasni:

$$P^0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{c} \left(m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + \dots \right) \quad \Rightarrow \quad P^0 = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad \mathcal{E} = m_0 \gamma c^2 \equiv m c^2, \quad (14.48)$$

ahol \mathcal{E} a részecske energiája, és a relativisztikus, sebességfüggő tömegnek

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (14.49)$$

menyiséget definiáltuk. Az energia és impulzus négyesvektort képez tehát

$$P^\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right) = (mc, m\mathbf{v}), \quad P^2 = m_0^2 c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \Rightarrow \mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4. \quad (14.50)$$

A mozgásegyenlet tiszta elektromos térben az volt, hogy $\partial_t \mathbf{p} = q\mathbf{E}$. Ennek relativisztikus kiterjesztéséhez vegyük figyelembe, hogy $E_i = cF^{i0} = cF^{i0}u_0/\gamma$, és a $\partial_t = \partial_\tau/\gamma$, vagyis:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(m_0 u^\mu) = qF^{\mu\nu}u_\nu. \quad (14.51)$$

A térszerű indexekre

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(m_0 \gamma \frac{v_i}{c} \right) &= qF^{i\mu}u_\mu = qF^{i0}u_0 + qF^{ij}u_j = q\frac{E_i}{c}\gamma + q(-\varepsilon_{ijk}B_k)(-\gamma\frac{v_j}{c}) = \\ &= \frac{\gamma}{c} q (E_i + \varepsilon_{ijk}v_j B_k), \end{aligned} \quad (14.52)$$

átrendezve

$$\partial_t(m\mathbf{v}) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (14.53)$$

Vagyis a jobb oldalon megkapjuk a Lorentz erőt, mint a Coulomb-erő relativisztikus kiterjesztését. A bal oldalon az egyetlen módosulás, hogy a tömeg sebességfüggő lett, $m_0 \rightarrow m$. Ez azt jelenti, hogy a töltött részecske tömege $v \rightarrow c$ esetén egyre nagyobb lesz, így egyre nehezebb a sebességét növelni. Dinamikailag tehát a fénysebesség nem léphető át.

Az időszzerű indexre

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} = qF^{0i}u_i = q\left(-\frac{E_i}{c}\right)(-\gamma\frac{v_i}{c}) = \frac{\gamma}{c^2} q\mathbf{E}\mathbf{v} \Rightarrow \partial_t(mc^2) = \partial_t\mathcal{E} = q\mathbf{E}\mathbf{v}, \quad (14.54)$$

ami az energia változását írja le.

A mozgásegyenletet energia-impulzus mérlegegyenlet formájában is írhatjuk. Tömegpontra ugyanis $\gamma J^\mu = \gamma(qc, q\mathbf{v}) = cu^\mu$, ezért

$$\partial_t(m_0 cu^\mu) = F^{\mu\nu}J_\nu = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\nu} \partial_\rho F^{\rho}_{\nu} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_\rho \left[-F^{\mu\nu} F^{\rho}_{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\rho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right]. \quad (14.55)$$

Ez utóbbi formula bizonyításához

$$\begin{aligned} F_{\rho\nu} \partial^\rho F^{\mu\nu} &= (\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho)(\partial^\rho \partial^\mu A^\nu - \partial^\rho \partial^\nu A^\mu) = \\ &= (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu)(\partial_\rho A_\nu) - (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\rho) - (\partial^\rho \partial^\nu A^\mu)(\partial_\rho A_\nu) + (\partial^\rho \partial^\nu A^\mu)(\partial_\nu A_\rho) = \\ &= (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu)(\partial_\rho A_\nu) - (\partial^\rho \partial^\mu A^\nu)(\partial_\nu A_\rho), \end{aligned} \quad (14.56)$$

hiszen a $\varrho \rightarrow \nu$ indexcserére a középső sor utolsó két tagja egymásba megy át. Másrészt

$$\begin{aligned}\partial^\mu(F^{\nu\nu'}F_{\nu\nu'}) &= \partial^\mu(\partial^\nu A^{\nu'} - \partial^{\nu'} A^\nu)(\partial_\nu A_{\nu'} - \partial_{\nu'} A_\nu) = \\ &= 2\partial^\mu[(\partial^\nu A^{\nu'})(\partial_\nu A_{\nu'}) - (\partial^{\nu'} A^\nu)(\partial_{\nu'} A_\nu)] = \\ &= 4[(\partial^\mu \partial^\nu A^{\nu'})(\partial_\nu A_{\nu'}) - (\partial^\mu \partial^{\nu'} A^\nu)(\partial_{\nu'} A_\nu)].\end{aligned}\quad (14.57)$$

Emiatt $4F_{\varrho\nu}\partial^\varrho F^{\mu\nu} = \partial^\mu(F^{\nu\nu'}F_{\nu\nu'})$, azaz

$$\partial_\varrho \left[-F^{\mu\nu} F_{\nu}^\varrho + \frac{1}{4} g^{\mu\varrho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right] = -F^{\mu\nu} \partial_\varrho F_{\nu}^\varrho - F_{\varrho\nu} \partial^\varrho F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial^\mu(F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'}) = -F^{\mu\nu} \partial_\varrho F_{\nu}^\varrho. \quad (14.58)$$

A (14.55) egyenletet átírva

$$\partial_t P^\mu + \partial_\varrho T^{\varrho\mu} = 0, \quad \text{ahol} \quad T^{\varrho\mu} = \frac{1}{\mu_0} \left[-F^{\mu\nu} F_{\nu}^\varrho + \frac{1}{4} g^{\mu\varrho} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} \right], \quad (14.59)$$

vagy komponensekben kiírva

$$\partial_t(\mathcal{E} + T^{00}) + \partial_i(cT^{i0}) = 0, \quad \partial_t(p_i + \frac{1}{c}T^{i0}) + \partial_j T^{ij} = 0. \quad (14.60)$$

A térerősségekkel kifejezve:

$$\frac{1}{4\mu_0} F^{\nu\nu'} F_{\nu\nu'} = \frac{1}{4\mu_0} [2F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij}] = \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right], \quad (14.61)$$

ezért

$$\begin{aligned}T^{00} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^{0i} F_{0i}] + \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right] = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \\ T^{0i} &= T^{i0} = -\frac{1}{\mu_0} F^{0j} F_{j}^i = \frac{1}{c\mu_0} E_j \varepsilon_{ijk} B_k = \frac{1}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})_i \\ T^{ij} &= \frac{1}{\mu_0} [-F^{i0} F_{0}^j - F^{ik} F_{k}^j] - \frac{1}{2\mu_0} \left[-\frac{1}{c^2} \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})_{ij} - (E_i D_j + B_i H_j),\end{aligned}\quad (14.62)$$

megegyeznek a korábban (7.5), (7.6), (7.17) és (7.18) egyenletekben megfogalmazott képletekkel. Mivel $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ emiatt $\mathbf{S} = c^2 \mathbf{g}$ most természetes módon teljesül.

14.4. Alkalmazások

A relativisztikus invariancia illetve kovariancia elve sok esetben jelentősen leegyszerűsíti a számolásokat. Erre nézzünk néhány példát

- Ha egy rendszerben $\mathbf{B} = 0$, akkor egy másik rendszerben

$$E'_{\parallel}(x) = E_{\parallel}(\Lambda^{-1}x), \quad \mathbf{E}'_{\perp}(x) = \gamma \mathbf{E}_{\perp}(\Lambda^{-1}x). \quad (14.63)$$

Pl. z irányú egyenesvonalú egyenletes mozgás esetén az álló rendszerben

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (14.64)$$

A mozgó rendszerben $x' = (ct, x, 0, 0)$ pontban keressük a térerősségeket. Az ennek megfelelő pont az álló koordinátarendszerben

$$x = \Lambda^{-1}x' = (c\gamma t, x, 0, -\gamma vt) \Rightarrow \mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} \gamma x \\ 0 \\ -\gamma vt \end{pmatrix}, \quad (14.65)$$

ami megegyezik a közvetlen számolás eredményével.

- A d'Alembert operátor

$$\square = \triangle - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 = -\partial_{\mu} \partial^{\mu}, \quad (14.66)$$

relativisztikusan invariáns. Emiatt mozgó vonatkoztatási rendszerből nézve is ugyanaz lesz a fénysebesség.

- Ha egy elektromágneses síkhullámot nézek mozgó vonatkoztatási rendszerből, akkor mit látok? Az egyszerűség kedvéért legyen a hullám terjedési iránya ugyanaz, mint a mozgó koordinátarendszer sebességének iránya. Az álló rendszerben legyen

$$\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_y e^{-i\omega(t-x/c)}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{e}_x \times \mathbf{E} = \frac{E_0}{c} \mathbf{e}_z e^{-i\omega(t-x/c)}. \quad (14.67)$$

A mozgó vonatkoztatási rendszer sebessége $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ legyen. Ekkor

$$\begin{aligned} E'_x = E'_z = 0, \quad B'_x = B'_y = 0, \quad E'_y(x) &= \gamma(E_y(\bar{x}) - v B_z(\bar{x})), \\ B'_z(x) &= \gamma(B_z(\bar{x}) - \frac{v E_y(\bar{x})}{c^2}), \quad \bar{x} = \Lambda^{-1}x. \end{aligned} \quad (14.68)$$

Beírva E_y és B_z alakját

$$E'_y(x) = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} E_0 e^{-i\omega(\bar{t}-\bar{x}/c)}, \quad B'_z(x) = \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \frac{E_0}{c} e^{-i\omega(\bar{t}-\bar{x}/c)}. \quad (14.69)$$

Az exponensben szereplő kifejezés

$$\bar{t} = \gamma(t + \frac{xv}{c^2}), \quad \bar{x} = \gamma(x + vt) \quad \Rightarrow \quad \omega(\bar{t} - \frac{\bar{x}}{c}) = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \omega(t - \frac{x}{c}). \quad (14.70)$$

Vagyis a mozgó rendszerben is síkhullámot látunk, azonban az amplitúdó és a frekvencia különbözik az álló rendszerbeli értékektől, a sebesség azonban marad fénysebesség:

$$\mathbf{E}'(x) = E'_0 \mathbf{e}_y e^{-i\omega'(t-x/c)}, \quad E'_0 = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} E_0, \quad \omega' = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \omega. \quad (14.71)$$

A frekvencia változása a *Doppler-effektus*. Ha $v = c$ rendszerbe tudnánk átmenni, akkor $\omega' = 0$ és $E'_0 = 0$ lenne, azaz eltűnne a hullám!

A fenti megoldást úgy is megkaphattuk volna, hogy észrevesszük, hogy

$$\omega t - \mathbf{kx} = k_\mu x^\mu, \quad \text{ahol} \quad k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}). \quad (14.72)$$

Emiatt

$$e^{-ikx'} = e^{-ik\Lambda^{-1}x} = e^{-ik'x}, \quad \text{ahol} \quad k' = \Lambda k, \quad (14.73)$$

vagyis

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \frac{\omega}{c} - \frac{v}{c} \gamma k \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \omega. \quad (14.74)$$

- Ha egy egyenletesen mozgó tömegpontot nézünk: $x' = v't'$ az egyenlete valamely rendszerből nézve. Egy hozzá képest mozgó rendszerből, beírva az x' és t' kifejezését kapjuk

$$\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = v' \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} t. \quad (14.75)$$

Vagyis most is egyenesvonalú egyenletes mozgást látunk, amely eredő sebessége

$$V = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}. \quad (14.76)$$

Ha bármely sebesség c , akkor $V = c$ is igaz. Ha rapiditásban nézzük: $v = -c \tanh \eta$, $v' = -c \tanh \eta'$ és $V = -c \tanh \bar{\eta}$ jelöléssel

$$\tanh \bar{\eta} = \frac{\tanh \eta + \tanh \eta'}{1 + \tanh \eta \tanh \eta'} = \tanh(\eta + \eta') \quad \Rightarrow \quad \bar{\eta} = \eta + \eta', \quad (14.77)$$

vagyis a rapiditásban additívek a sebességek.

14.5. Sugárzások relativisztikus tárgyalása

Mivel a d’Alambert operátor invariáns, így a sugárzások képletei is relativisztikusan átírhatók.

Először nézzük a Green-függvények relativisztikus invarianciáját: amint láttuk (10.8)-ben

$$G_{R/A}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta\left(t \mp \frac{|\mathbf{x}|}{c}\right). \quad (14.78)$$

Ez is relativisztikusan invariáns? Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0, f(x_0)=0} \frac{\delta(x - x_0)}{f'(x_0)}, \quad (14.79)$$

vagyis

$$\delta(x^2) = \delta(c^2t^2 - \mathbf{x}^2) = \frac{1}{2|\mathbf{x}|} (\delta(ct - |\mathbf{x}|) + \delta(ct + |\mathbf{x}|)) = \frac{1}{2c|\mathbf{x}|} (\delta(t - \frac{|\mathbf{x}|}{c}) + \delta(t + \frac{|\mathbf{x}|}{c})). \quad (14.80)$$

Emiatt

$$G_R(x) = \frac{c\Theta(t)}{2\pi} \delta(x^2), \quad G_A(x) = \frac{c\Theta(-t)}{2\pi} \delta(x^2). \quad (14.81)$$

A fenti kifejezés Lorentz invariáns, ha nem használunk időtükrözést is.

Mozgó ponttöltés sugárzását a Liénard-Wiechert potenciálok írják le. A (11.7) és (11.8) képletek összefoglalhatók mint

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{(c, \mathbf{v})}{R - \boldsymbol{\beta} \mathbf{R}} \Big|_{t'}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t'), \quad c(t - t') = R. \quad (14.82)$$

Mivel a bal oldal négyesvektor, próbáljuk meg a jobb oldalt is ilyen formában átfogalmazni. A részecske pályájának négyesvektora, valamint a négyessebesség:

$$\gamma^\mu(t) = (ct, \boldsymbol{\gamma}(t)), \quad u^\mu = \frac{(1, \mathbf{v}/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (14.83)$$

Ekkor a \mathbf{R} vektor általánosítása:

$$R^\mu = x^\mu - \gamma^\mu(t') = (c(t - t'), \mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(t')) = (c(t - t'), \mathbf{R}). \quad (14.84)$$

Ezzel

$$R^\mu u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (R - \boldsymbol{\beta} \mathbf{R}), \quad (14.85)$$

hiszen $R = c(t - t')$ a retardálás egyenlete. Emiatt

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{\mu_0 q c}{4\pi} \frac{u^\mu}{R^\mu u_\mu} \Big|_{t'}, \quad (14.86)$$

már expliciten invariáns képlet.

Nemrelativisztikus közelítésben gyorsuló töltés által kisugárzott teljesítmény a dipól közelítéssel írható le: a Larmor-képletet a (11.20) egyenletben írtuk le:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^2, \quad \text{ha} \quad v \ll c. \quad (14.87)$$

A bal oldal itt relativisztikusan invariáns, hiszen álló rendszerben $cP^\mu = (E, 0)$ és $x^\mu = (ct, 0)$, vagyis mozgó rendszerben

$$E' = \gamma E, \quad t' = \gamma t \quad \Rightarrow \quad \frac{dE'}{dt'} = \frac{dE}{dt}, \quad (14.88)$$

a teljesítmény minden mozgó megfigyelő számára ugyanaz, mint az álló rendszerben. A jobb oldal a Larmor-képletben azonban nem relativisztikusan invariáns. Viszont a $v \rightarrow 0$ limeszt ismerve invariánssá tehetjük. Ehhez először a négyesgyorsulás képletét vezetjük le:

$$a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}(\gamma c, \gamma \mathbf{v}) = \gamma(c, \mathbf{v}) \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2(0, \mathbf{a}), \quad (14.89)$$

ahol $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ hármasyorsulás. Mivel $d\gamma/dt = \gamma^3 \mathbf{v}\mathbf{a}/c^2$, ezért

$$a^\mu = (\gamma^4 \beta \mathbf{a}, \gamma^4 \beta(\beta \mathbf{a}) + \gamma^2 \mathbf{a}). \quad (14.90)$$

Álló koordinátarendszerben $a^\mu \rightarrow (0, \mathbf{a})$, azaz

$$a^\mu a_\mu \rightarrow -\mathbf{a}^2, \quad (14.91)$$

vagyis megtaláltuk a \mathbf{a}^2 relativisztikus kiterjesztését. Ezzel a relativisztikus Larmor-képlet:

$$P = -\frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} a^\mu a_\mu. \quad (14.92)$$

Sebességekkel és gyorsulásokkal kifejezve:

$$-a^\mu a_\mu = \gamma^4 \mathbf{a}^2 + \gamma^6 (\beta \mathbf{a})^2 = \gamma^6 (\mathbf{a}^2 - (\beta \times \mathbf{a})^2). \quad (14.93)$$

Ezzel tehát

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi c^2} \gamma^6 (\mathbf{a}^2 - (\beta \times \mathbf{a})^2). \quad (14.94)$$

Ez a képlet megegyezik a közvetlen számolással kapott (11.40) képlettel.

Kifejezhetjük az impulzussal is a kisugárzott teljesítményt: mivel $p^\mu = m_0 c u^\mu$, ezért

$$a^\mu = c \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{\gamma}{m_0} \partial_t p^\mu \quad \Rightarrow \quad -a_\mu a^\mu = \frac{\gamma^2}{m_0^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{1}{c^2} (\partial_t \mathcal{E})^2 \right]. \quad (14.95)$$

Figyelembe véve, hogy $p^2 = p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2$, azaz $\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4$, azaz

$$\mathcal{E} \partial_t \mathcal{E} = c^2 \mathbf{p} \partial_t \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad \partial_t \mathcal{E} = \frac{c^2 \mathbf{p} \partial_t \mathbf{p}}{\mathcal{E}}. \quad (14.96)$$

ezt visszaírva

$$-a_\mu a^\mu = \frac{\gamma^2}{m_0^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right] = \frac{\gamma^2}{m_0^2} \left[\frac{(\partial_t \mathbf{p})^2}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right]. \quad (14.97)$$

Továbbá $\mathbf{v}c = \frac{c\mathbf{p}}{\mathcal{E}}$, tehát

$$\gamma^2 \left[\frac{v^2}{c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2 - \frac{c^2 (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2}{\mathcal{E}^2} \right] = \frac{\gamma^2 c^2}{\mathcal{E}^2} [\mathbf{p}^2 (\partial_t \mathbf{p})^2 - (\mathbf{p} \partial_t \mathbf{p})^2] = \frac{(\mathbf{p} \times \partial_t \mathbf{p})^2}{m_0^2 c^2}. \quad (14.98)$$

Vagyis végül (14.92) alapján

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m_0^2 c^2} \left[(\partial_t \mathbf{p})^2 + \frac{(\mathbf{p} \times \partial_t \mathbf{p})^2}{m_0^2 c^2} \right]. \quad (14.99)$$

Ha $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$, azaz $\mathbf{p} \parallel \partial_t \mathbf{p}$, vagyis egy dimenziós mozgásról van szó. Ekkor $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$, azaz

$$P = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m_0^2 c^2} (\partial_t \mathbf{p})^2. \quad (14.100)$$

Mekkora a kisugárzott teljesítmény a részecske energiájának egységnyi időbeli növekedéséhez képest? Felhasználva, hogy a külső erő munkája $\partial_t \mathbf{p} = \mathbf{F} = d\mathcal{E}/dx = \partial_x \mathcal{E}$:

$$\frac{P}{\partial_t \mathcal{E}} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m_0^2 c^2} \frac{(\partial_x \mathcal{E})^2}{\partial_t \mathcal{E}} = \frac{Z_0 q^2}{6\pi m_0^2 c^2} \frac{1}{v} \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{d\bar{x}}, \quad \text{ahol} \quad \bar{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{m_0 c^2}, \quad \bar{x} = \frac{6\pi m_0 v}{Z_0 q^2} x. \quad (14.101)$$

Definiálva a részecske töltéssugarát olyan módon, hogy

$$\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 r_0} = m_0 c^2, \quad (14.102)$$

akkor látható módon $\bar{x} = \beta \frac{3x}{2r_0}$. Felhasználva még azt, hogy az energia növekedése a gyorsító télerősség miatt van, beírhatjuk

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = qE \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{\mathcal{E}}}{d\bar{x}} = \frac{2r_0 q}{3\beta m_0 c^2} E. \quad (14.103)$$

Nagy gyorsító tereknél β hamarosan 1 körüli lesz. Vagyis a kisugárzott teljesítmény akkor összemérhető a gyorsító teljesítménnyel, ha $\delta x \sim r_0$ távolságon a részecske energiája a nyugalmi energiájával növekszik, ami télerősséggel kifejezve

$$E \sim \frac{m_0 c^2}{r_0 q}. \quad (14.104)$$

Elektronra kiszámolva ($q = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$, $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$, $c = 2.99 \cdot 10^8\text{m/s}$): $r_0 \approx 1.88 \cdot 10^{-15}\text{m}$. A proton mérete $R_p = 0.88 \cdot 10^{-15}$, vagyis a jobb oldal $r_0 \approx 2.14 R_p$, ez megfelel az atommagok jellemző méretének is. Az elektron saját tömegének megfelelő energia $5.11 \cdot 10^5 \text{ V}$ gyorsító feszültség során keletkezik, vagyis ekkora feszültségesés lenne szükséges atommagnyi méreteken – ez rendkívül nagy! A megfelelő térerősség $E \approx 5 \cdot 10^5 \text{V} / 2.14 R_p \approx 2.7 \cdot 10^{20} \text{V/m}$. A ma elérhető legnagyobb térerősségek rövid impulzusú lézerekben $\sim 10^{12} \text{ V/m}$ nagyságrendűek, ez még messze a kívánt nagyságrend alatt marad. Emiatt a sugárzási veszteség lineáris gyorsítás esetén mindig elhanyagolható.

Másrészt ekkora térerősségek esetén más érdekes jelenségek bekövetkezésére is számíthatunk. A kvantummechanika elvei szerint a vákuumban rövid időre részecske-antirészecske párok keletkeznek, az ilyen állapotok élettartamának becslésére $\Delta\mathcal{E}\tau \sim \hbar$ relációt lehet használni, ahol \hbar a Planck-állandó, és $\Delta\mathcal{E} = 2m_0c^2$ egy részecskepár energiája. Ezen összefüggés értelmezése az, hogy rövid időre a vákuumtól „kölcson lehet venni” energiát, de azt τ idő után vissza kell adni. A visszaadás normál esetben a részecske-antirészecske pár annihilációjával, megsemmisülésével történik. Azonban nagy elektromos terek esetén a rendelkezésre álló τ idő alatt a részecskék gyorsulnak, energiát nyernek. Ha ez az energia elegendő a kölcson fedezésére, a részecske és antirészecske nem kell megsemmisülnön, hanem távozik, és megfigyelhető lesz. Nagy térerősségeknél tehát a vákuum nem stabil, hanem elbomlik párkeltés segítségével: ez a *Schwinger-effektus*.

Becsüljük meg a szükséges térerősséget elektronra! Ehhez vegyük figyelembe, hogy E térerősség τ idő alatt, relativisztikus sebességekkel számolva $eE\tau$ energiát képes adni, most e az elemi töltés, az elektron töltése. A szükséges feltétel tehát

$$2m_0c^2 = eE\tau = \frac{e\hbar}{m_0c^2}E.$$

A megjelenő $c\hbar$ helyett érdemes behozni a korábban definiált finomszerkezeti állandót (13.38), ezzel

$$c\hbar = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\alpha} = \frac{1}{\alpha}r_em_0c^2,$$

tehát a vákuumból történő párkeltéshez szükséges térerősség nagyjából

$$E \sim \alpha \frac{m_0c^2}{r_0q}, \quad (14.105)$$

ez $\alpha = \frac{1}{137}$ faktoriall kisebb, mint a lineáris gyorsítás sugárzási veszteségének jelentőssé válásához. Vagyis a vákuum hamarabb lesz instabil, mielőtt ez bekövetkezne.

15. fejezet

Matematikai alapfogalmak

A matematikai megfogalmazáshoz szükséges definíciók a következők:

15.1. Definíció *A mező egy $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ leképezés.*

A mező valójában a függvény fogalmának kiterjesztése, hiszen ha $n = m = 1$, akkor $U : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, egy dimenziós függvény. Az elektrodinamikában az alaptér $\mathbf{R}^3 \equiv \{(\mathbf{x})\}$ fizikai tér (az idő csak egy paraméter; később átfogalmazunk majd mindent téridőre). Az m értéke lehet

- $m = 1$: skalártér, a tér minden pontjához egy valós számot rendelünk, $\mathbf{x} \mapsto \Phi(\mathbf{x})$ (pl. hőmérsékleteloszlás, elektromos potenciál)
- $m = 3$: vektormező, minden ponthoz egy 3D vektort rendelünk $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{E}(\mathbf{x})$ (pl. sebességeloszlás áramlásnál, elektromos tér).

Komponensek: \mathbf{R}^n -ben a Descartes bázist jelöljük \mathbf{e}_i -vel. Ebben a bázisban kifejthető minden $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vektor: így pl. $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$. A szummát ezentúl el fogjuk hagyni, ismétlődő indexek automatikusan összegzést jelentenek (Einstein konvenció). Ne felejtsük azonban el, hogy a komponenseknek önmagukban nincs jelentésük, csupán a bázis megadásával együtt értelmesek.

\mathbf{R}^n -ben mindig adott egy skalárszorzat $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. A Descartes-bázis erre a skalárszorzatra nézve ortonormált: $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Emiatt a Descartes komponensekkel kifejezve $u, v \in \mathbf{R}^n$ -re $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$. A vektor hossza (abszolút értéke) $|u| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$.

Tenzorszorzat: $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ és $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ diadikus (tenzor) szorzata $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in \mathbf{R}^{nm}$, amely lineáris mindkét komponensében. Emiatt \mathbf{R}^{nm} -en bázist alkot $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \mid i = 1 \dots n, j = 1 \dots m\}$; ebben a bázisban a diadikus szorzat komponensei $u_i v_j$.

Az egy dimenziós függvényeknél megszokott fogalmakat kiterjeszthetjük a mezőkre is, megfelelő átfogalmazással. Mezők összege, számmal való szorzata magától értetődik.

15.1. Mezők deriváltja

15.2. Definíció $U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ mező deriváltja $\nabla U : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{nm}$ mező, egy adott pontban komponensekben kifejezve $\nabla U(\mathbf{x}) \rightarrow \partial_i U_j(\mathbf{x}) \equiv \left. \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}}$, ahol $i = 1, \dots, n$, $j = 1 \dots m$,

ahol $\partial/\partial x_i$ jelentése: csak az i . komponens változik, a többi állandó marad, valamint bevezettük a $\partial_i = \partial/\partial x_i$ rövidítet jelölést. A parciális derivált jelentése: U megváltozása, ha $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$ pontba megyünk:

$$\delta U_j = U_j(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - U_j(\mathbf{x}) = a_i \partial_i U_j, \quad (15.1)$$

Példák:

- $n = m = 1$ esetén $\nabla f = \frac{df}{dx}$ közönséges derivált.
- $n = 3, m = 1$ skalártér esetén $\nabla \Phi \rightarrow \partial_i \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \equiv \text{grad } \Phi$, neve: Φ gradiense. Φ megváltozása \mathbf{a} irányban $\delta \Phi = \mathbf{a} \cdot \text{grad } \Phi$. Emiatt $\text{grad } \Phi$ -re merőleges irányban vannak az ekvipotenciális felületek, maga $\text{grad } \Phi$ a legnagyobb változás irányába mutat.
- $n = m = 3$, ekkor a derivált egy kétindexes mennyiség $\nabla U \rightarrow \partial_i U_j$. Ennek speciális változatai:
 - $\text{div } U = \partial_i U_i$ skalármező, U divergenciája
 - $\text{rot } U = \nabla \times U = \varepsilon_{ijk} \partial_j U_k$ vektormező, U rotációja.¹
- $\text{div grad } \Phi = \Delta \Phi$, Laplace operátor. Komponensekben kifejezve $\Delta \Phi = \partial_i \partial_i \Phi$.
- $[\text{rot rot } U]_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \partial_l U_m = \partial_i \partial_j U_j - \partial_j \partial_j U_i = \text{grad div } U - \Delta U$.
- $\text{div rot } U = \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j U_k = 0$, valamint $[\text{rot grad } \Phi]_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \Phi = 0$.

15.2. Mezők integrálja

Az egy dimenziós függvények integrálját is kiterjeszthetjük mezőkre. Ehhez definiáljuk

- görbe: $\mathbf{R} \supset I \rightarrow \mathbf{R}^3$ függvény, komponensekben $s_i(\tau)$. Értelmezése: a görbét paraméterezzük valós számmal. Görbe érintője egy adott pontban $\frac{ds_i}{d\tau}$.

¹ Itt ε_{ijk} teljesen antiszimmetrikus mennyiség és $\varepsilon_{123} = 1$; vagyis nem nulla elemei csak $1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321}$. ε -ok szorzata: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$.

- felület: $\mathbf{R}^2 \supset A \rightarrow \mathbf{R}^3$ függvény, komponensekben $f_i(u, v)$. Egy felületnek két érintővektora van, ezeket a $\frac{df_i}{du}$ és $\frac{df_i}{dv}$ vektorok feszítik ki. A felület normálisa merőleges a felület összes érintővektorára: $N_i = \varepsilon_{ijk} \frac{df_j}{du} \frac{df_k}{dv}$, a felület normális egységvektora $\mathbf{n} = \mathbf{N}/N$. A felületelem $df_i = N_i du dv \equiv n_i da$. Ennek da nagysága az $\mathbf{f}_u = \mathbf{f}(u+du, v) - \mathbf{f}(u, v)$ és a $\mathbf{f}_v = \mathbf{f}(u, v+dv) - \mathbf{f}(u, v)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe; valóban, ez a felület $f_u f_v \sin \phi = |\mathbf{f}_u \times \mathbf{f}_v|$. Ez, du -ban és dv -ben első rendben megegyezik a fenti kifejezéssel.

Görbén vett integrál

$$\int_s ds_i U(s) = \int_I d\tau \frac{ds_i}{d\tau} U(s(\tau)). \quad (15.2)$$

Más paraméterezést választva $\tau(t)$ áttéréssel:

$$\int_I d\tau \frac{ds_i}{d\tau} U(s(\tau)) = \int_{I'} dt \frac{d\tau}{dt} \frac{ds_i}{dt} \frac{dt}{d\tau} U(s(\tau(t))) = \int_{I'} dt \frac{ds_i}{dt} U(s(t)), \quad (15.3)$$

azaz paraméterezésfüggetlen.

Felületre vett integrál

$$\int_f df_i U(f) = \int_A du dv \varepsilon_{ijk} \frac{df_j}{du} \frac{df_k}{dv} U(f(u, v)). \quad (15.4)$$

Erről szintén könnyen belátható, hogy paraméterezésinvariáns.

Végül térfogatra vett integrál

$$\int_V d^3x U(x). \quad (15.5)$$

Elvileg ezt is lehetne paraméterezni $x(a, b, c)$, ekkor a térfogatelem

$$d^3x = \varepsilon_{ijk} \frac{dx_i}{da} \frac{dx_j}{db} \frac{dx_k}{dc}, \quad (15.6)$$

amely szintén paraméterezésfüggetlen.

Egy dimenzióban az integrálás és differenciálás között összefüggés van (Newton-Leibniz-formula):

$$\int_a^b dt \frac{df}{dt} = f(b) - f(a). \quad (15.7)$$

Ez szintén általánosítható magasabb dimenziós mezőkre, a forma mindig ez marad: egy magasabb dimenziós felületre vett integrálja egy deriválnak a felület határára vett alacsonyabb dimenziós integrállal egyezik meg:

$$\begin{aligned} \int_V dV \operatorname{div} U &= \oint_{\partial V} df_i U_i & (Gauss) \\ \int_A df_i [\operatorname{rot} U]_i &= \oint_{\partial A} ds_i U_i & (Stokes). \end{aligned} \quad (15.8)$$

Derékszögű tartományokra mindkettő bizonyítása egyszerű:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 \partial_1 U_1(x_1, x_2, x_3) &= \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_3}^{b_3} dx_3 [U_1(b_1, x_2, x_3) - U_1(a_1, x_2, x_3)] = \\ &= \int_{B_1} df_1 U_1 + \int_{A_1} df_1 U_1, \end{aligned} \quad (15.9)$$

mivel az irányítás ott ellentétes. Minden oldalra felösszegezve kapjuk a Gauss-tételt. Másrészt

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 [\partial_1 U_2 - \partial_2 U_1] = \int_{a_2}^{b_2} dx_2 [U_2(b_1, x_2) - U_2(a_1, x_2)] - \int_{a_1}^{b_1} dx_1 [U_1(x_1, b_2) - U_1(x_1, a_2)]; \quad (15.10)$$

az irányításokat figyelembe véve ismét megkapjuk a helyes eredményt. A teljes felületet beosztva téglalapokra tetszőleges felületre bizonyítható.

15.3. Lineáris algebra

A lineáris algebrából felhasznált ismeretek közül néhány bizonyítást idézünk fel. Legyen Δ egy $N \times N$ -es önadjungált (valós esetben szimmetrikus) mátrix, ahol az adjungálás definíciója

$$\mathbf{u}^* \mathbf{M} \mathbf{v} = (\mathbf{M}^\dagger \mathbf{u})^* \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad (M^\dagger)_{ij} = M_{ji}^*. \quad (15.11)$$

Ekkor a

$$\Delta \mathbf{F}_{(i)} = \lambda_i \mathbf{F}_{(i)} \quad (15.12)$$

sajátérték egyenletet megoldásáról a következőket tudjuk

- λ_a valós, mert

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{(i)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} &= \lambda_i \mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{F}_{(i)} \\ \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(i)}^* &= \lambda_i^* \mathbf{F}_{(i)} \mathbf{F}_{(i)}^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = \mathbf{F}_{(i)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} - \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(i)}^* = (\lambda_i - \lambda_i^*) \mathbf{F}_{(i)}^* \mathbf{F}_{(i)}$$

- $\mathbf{F}_{(i)}$ -k ortogonálisak, mert

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_{(j)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} &= \lambda_i \mathbf{F}_{(j)}^* \mathbf{F}_{(i)} \\ \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(j)}^* &= \lambda_j \mathbf{F}_{(i)} \mathbf{F}_{(j)}^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = \mathbf{F}_{(j)}^* \Delta \mathbf{F}_{(i)} - \mathbf{F}_{(i)} \Delta \mathbf{F}_{(j)}^* = (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{F}_{(j)}^* \mathbf{F}_{(i)}$$

- $\{\mathbf{F}_{(i)} | i = 1, \dots, N\}$ teljes rendszert alkot, azaz minden \mathbf{b} vektorra $\exists \{c_i | i = 1, \dots, N\}$ együtthatók, hogy $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{F}_{(i)}$. Az ortogonalitás miatt $c_i = \mathbf{b} \mathbf{F}_{(i)}$.

Komponensekben a vektorokra igaz:

$$\sum_{i=1}^N F_{(i),a}^* F_{(i),b} = \delta_{ab}, \quad \text{és} \quad \sum_{a=1}^N F_{(i),a}^* F_{(j),a} = \delta_{ij}. \quad (15.13)$$

15.4. Legendre-polinomok

A Legendre-féle differenciálegyenlet

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + \nu(\nu+1)P = 0 \quad (15.14)$$

15.4.1. Megoldás hatványsor alakban

Mivel az egyenlet másodrendű, két lineárisan független megoldása létezik.

Keressük a $[-1, 1]$ intervallumon reguláris megoldásokat a következő alakban:

$$P(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Behelyettesítve:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(\alpha+n)(\alpha+n-1)c_n x^{\alpha+n-2} - [(\alpha+n)(\alpha+n+1) - \nu(\nu+1)]c_n x^{\alpha+n}\} = 0$$

Együtthatók:

$$x^{\alpha-2} : \alpha(\alpha-1)c_0 = 0$$

$$x^{\alpha-1} : \alpha(\alpha+1)c_1 = 0$$

$$x^{\alpha+j} : (\alpha+j+2)(\alpha+j+1)c_{j+2} = [(\alpha+j)(\alpha+j+1) - \nu(\nu+1)]c_j \quad j \in \mathbb{N}$$

Ezért

$$c_{j+2} = \frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - \nu(\nu+1)}{(\alpha+j+2)(\alpha+j+1)} c_j$$

és vagy csak páros, vagy csak páratlan hatványok fordulnak elő. Két eset van:

$$\begin{array}{lll} c_0 \neq 0 : & \alpha = 0 & \text{vagy} \quad \alpha = 1 \\ c_1 \neq 0 : & \alpha = 0 & \text{vagy} \quad \alpha = -1 \end{array}$$

A második lehetőség mind a két esetben paritást vált, a független esetek tehát az $\alpha = 0$ választással előállnak:

$$c_{j+2} = \frac{j(j+1) - \nu(\nu+1)}{(j+2)(j+1)} c_j \quad (15.15)$$

Mivel

$$\frac{c_{j+2}}{c_j} \rightarrow 1 \quad \text{ha} \quad j \rightarrow \infty$$

mindkét sor divergál $x = -1$ -ben, kivéve, ha véges sok tag után terminálnak. Ez akkor lehetséges, ha $\nu = l \in \mathbb{N}$ és ekkor l paritásától függően a páros vagy a páratlan sor terminál. Ezt a megoldást a következőképpen normáljuk:

$$P(1) = 1$$

és l -edfokú Legendre-polinomnak nevezzük, jele

$$P_l(x)$$

Megjegyzés: az (r, θ, ϕ) gömbi koordinátákban felírt Laplace-egyenlet megoldásakor az x jelentése

$$x = \cos \theta$$

Az $x = \pm 1$ pontokbeli regularitás megkövetelése azt jelenti, hogy a megoldási tartomány a θ polárszögben a teljes $[0, \pi]$ intervallum. Amennyiben ez nem követelmény (pl. a csúcshatás tárgyalásánál), megengedhető, hogy l tetszőleges valós szám legyen, valamint ha egyik pontban sem szükséges a regularitás, akkor mindkét lineárisan független megoldás szóba jöhet (ilyenkor a megoldások nem polinomok).

Az l paraméter analitikusan akár a komplex síkra is kiterjeszthető. Mivel az egyenletnek

$$l \rightarrow -l - 1$$

szimmetriája, ezért az l paraméter fundamentális tartománya

$$\Re l \geq -\frac{1}{2}$$

15.4.2. Ortogonalitás

A Legendre-polinomok ortogonálisak:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) \left(\frac{d}{dx}(1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} + l(l+1)P_l(x) \right) \\ &= \int_{-1}^1 dx \left(-\frac{dP_{l'}(x)}{dx}(1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} + l(l+1)P_{l'}(x)P_l(x) \right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 dx \left(-\frac{dP_{l'}(x)}{dx}(1-x^2) \frac{dP_l(x)}{dx} + l(l+1)P_{l'}(x)P_l(x) \right) \\ &\quad - \int_{-1}^1 dx \left(-\frac{dP_l(x)}{dx}(1-x^2) \frac{dP_{l'}(x)}{dx} + l'(l'+1)P_{l'}(x)P_l(x) \right) \\ &= [l(l+1) - l'(l'+1)] \int_{-1}^1 dx P_{l'} P_l \end{aligned}$$

azaz

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) P_l(x) = 0 \quad l \neq l'$$

Mivel minden x^n hatvány előáll a Legendre-polinomok lineáris kombinációjaként, ezért egyben teljes függvényrendszert is alkotnak. Ráadásul mivel az x^n hatványt nála nem nagyobb fokú Legendre-polinomokkal lehet kifejezni, ezért

$$\int_{-1}^1 dx x^n P_l(x) = 0 \quad l > n$$

azaz a Legendre-polinomok pont az elemi hatványokból Gram-Schmidt ortogonalizációval képzett bázis a $[-1, 1]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terében. Normáljuk ezeket a függvényeket a

$$P_l(1) = 1$$

feltétellel.

15.4.3. Rodrigues formula

A fentiekből következik a Rodrigues formula:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

Bizonyítás: először is l -szeres parciális integrálással

$$\int_{-1}^{+1} dx x^n \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l = 0 \quad l > n$$

tehát mindenképpen igaz, hogy

$$P_l(x) \propto \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

mivel utóbbi egy l -edfokú polinom, ami minden nála kisebb fokszámú polinomra ortogonális a $[-1, 1]$ intervallumon. Explicit számítással ellenőrizhető, hogy

$$\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \Big|_{x=1} = 1$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \Big|_{x=1} &= \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x - 1)^l (x + 1)^l \Big|_{x=1} \\ &= \frac{1}{2^l l!} \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} \frac{d^{l-n}}{dx^{l-n}} (x - 1)^l \frac{d^n}{dx^n} (x + 1)^l \Big|_{x=1} \end{aligned}$$

Ebből csak az $n = 0$ tag ad járulékot $x = 1$ -nél, azaz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \Big|_{x=1} &= \frac{1}{2^l l!} (x+1)^l \frac{d^l}{dx^l} (x-1)^l \Big|_{x=1} \\ &= \frac{1}{2^l l!} (x+1)^l l! \Big|_{x=1} \\ &= 1\end{aligned}$$

15.4.4. Generátorfüggvény

A Laplace-egyenlet általános megoldása azimutális szimmetria esetén

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta)$$

A

$$G(\underline{x}, \underline{x}') = \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

is megoldja a Laplace egyenletet ha $\underline{x} \neq \underline{x}'$:

$$\Delta_{\underline{x}} \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = 0$$

Legyen $\underline{x}' = \underline{e}_z$ és $|\underline{x}| = r < 1$, ekkor az $r = 0$ -ban vett regularitás miatt $B_l = 0$ és

$$\frac{1}{|\underline{x} - \underline{e}_z|} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l x^l P_l(\cos \theta)$$

azaz $t = \cos \theta$ jelöléssel

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(t)$$

és a $t = 1$ pontban

$$\frac{1}{1 - r} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \quad \Rightarrow \quad A_l = 1$$

Átjelölve a változókat, ezzel beláttuk, hogy a Legendre-polinomok generátorfüggvénye

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

15.4.5. Normálás

Most már csak

$$N_l = \int_{-1}^1 dx P_l(x)^2$$

kell. Induljunk ki a generátorfüggvényből:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \right)^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^k t^l P_l(x) P_k(x)$$

Mindkét oldalt integrálva

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} N_k t^{2k}$$

Elemi integrálással

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \frac{1}{t} \log \frac{1+t}{1-t}$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} \log(1-t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} \\ \log(1+t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} \end{aligned}$$

adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_k t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} t^{2k}$$

azaz a Legendre-polinomok teljes ortogonalitási relációja

$$\int_{-1}^1 dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

15.4.6. Függvények kifejtése

Legyen f egy a $[-1, 1]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvény. Ekkor

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x)$$

ahol

$$c_l = \frac{2}{2l+1} \int_{-1}^{+1} dx P_l(x) f(x)$$

15.5. Asszociált Legendre-függvények

Az asszociált Legendre-egyenlet

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP}{dx} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad (15.16)$$

ahol kihasználva az egyenlet szimmetriáját a

$$\nu \rightarrow -\nu - 1$$

transzformációra, legyen $\nu \geq -\frac{1}{2}$.

15.5.1. Szinguláris pontok

Ennek az egyenletnek $x = \pm 1$ szinguláris pontjai. Átírva a változót

$$x = 1 - \xi$$

$$\xi(2-\xi)\frac{d}{d\xi}\xi(2-\xi)\frac{dP}{d\xi} + [\nu(\nu+1)\xi(2-\xi) - m^2] P = 0$$

és a megoldást

$$P(x) = \xi^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$$

alakban keresve

$$\alpha = \pm \frac{m}{2}$$

adódik. Ebből csak a pozitív előjel elfogadható a regularitás miatt. Ezek szerint

$$P(x) \propto (1-x)^{m/2}$$

ha $x \sim 1$. Ugyanez a gondolatmenet

$$x = -1 + \xi$$

helyettesítéssel azt adja, hogy

$$P(x) \propto (1+x)^{m/2}$$

ha $x \sim -1$.

15.5.2. Ansatz és rekurzió

Ezért keressük a megoldást a következő alakban:

$$P(x) = (1 - x^2)^{m/2} p(x) \quad (15.17)$$

Legyen $m > 0$ és fejtsük ki a p függvényt:

$$p(x) = \sum_n c_n x^n$$

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\sum_n [n(n-1)x^{n-2} - (m(m+1) + (n+m)^2 - \nu(\nu+1))x^n] c_n = 0$$

azaz

$$c_{n+2} = \frac{(m(m+1) + (n+m)^2 - \nu(\nu+1))}{(n+1)(n+2)} c_n$$

Ez a rekurzió $m = 0$ -ra visszaadja (15.15)-t, ahogy ez el is várható. Megint van egy páros és egy páratlan megoldás, amelyek egymástól függetlenek.

A regularitáshoz $x = \pm 1$ -ben megint az kell, hogy a sor terminálódjon; ez akkor történik meg, ha a fenti rekurzióban a számláló 0, ami két esetben lehetséges:

$$\begin{aligned} n &= -1 - m - \nu \\ n &= \nu - m \end{aligned}$$

Ekkor a második lehetőség vezethet termináláshoz, amihez az kell, hogy

$$\nu = l \in \mathbb{N} \quad \text{és} \quad m \leq l$$

Ekkor a megfelelő paritású hatványokból álló $p(x)$ egy $l - m$ -ed fokú polinom.

15.5.3. Megoldás előállítása a Legendre-polinomokkal

Explicit behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a

$$P_l^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

megoldja az asszociált Legendre-egyenletet.

Bizonyítás: differenciáljuk le a Legendre-egyenletet m -szer

$$\begin{aligned}
& \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} + l(l+1)P \right) \\
&= \frac{d^m}{dx^m} \left((1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + l(l+1)P \right) \\
&= (1-x^2) \frac{d^{2+m} P}{dx^{2+m}} - 2mx \frac{d^{1+m} P}{dx^{1+m}} - m(m-1) \frac{d^m P}{dx^m} \\
&\quad - 2x \frac{d^{1+m} P}{dx^{1+m}} - 2mx \frac{d^m P}{dx^m} + l(l+1) \frac{d^m P}{dx^m}
\end{aligned}$$

azaz $p_l^{(m)}(x) = \frac{d^m P_l}{dx^m}$ (ami egy $l-m$ -edfokú polinom) megoldja az

$$(1-x^2) \frac{d^2 p_l^{(m)}(x)}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dp_l^{(m)}(x)}{dx} + [l(l+1) - m(m+1)] p_l^{(m)}(x) = 0$$

egyenletet.

Másfelől a (15.17) Ansatzot az asszociált Legendre-egyenletbe helyettesítve az adódik, hogy az ott szereplő $p(x)$ függvény megoldja az

$$(1-x^2) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dp(x)}{dx} + [l(l+1) - m(m+1)] p(x) = 0 \quad (15.18)$$

egyenletet. Ebből következik, hogy (a normálást egynek választva)

$$p(x) = p_l^{(m)}(x) = \frac{d^m P_l}{dx^m}$$

hiszen a rekurzió szerint a (15.18) egyenletnek normálás erejéig egyetlen olyan megoldása van, ami $l-m$ -edfokú polinom.

15.5.4. Kiterjesztés negatív indexre

$m < 0$ -ra a fenti formulák a következő módon terjeszthetők ki:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

Ez kiterjeszthető arra az esetre, ha $-l \leq m \leq l$. Azonban mivel (15.16) csak m^2 -et tartalmazza, $P_l^m(x)$ és $P_l^{-m}(x)$ ugyanazt az asszociált Legendre-egyenletet oldja meg, aminek tudjuk, hogy normálás erejéig csak egy véges fokú polinom megoldása van. Ezért ez a két függvény nem lehet független egymástól; köztük fennáll a

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$$

reláció.

Bizonyítás: mivel nem lehetnek függetlenek, ezért

$$P_l^{-m}(x) = c_{lm}P_l^m(x)$$

és csak c_{lm} értéke a kérdéses. Ez az egyenlet kiírva

$$(1-x^2)^{-m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l = c_{lm} (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

azaz

$$\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l = c_{lm} (1-x^2)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

A két oldalon a legmagasabb fokú tag együtthatója meg kell egyezzen:

$$\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2)^l = c_{lm} (-x^2)^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2)^l$$

és itt már explicite el tudjuk végezni a deriválást:

$$2l(2l-1)\dots(l+m+1)x^{l+m} = c_{lm}(-1)^m 2l(2l-1)\dots(l-m+1)x^{l+m}$$

azaz

$$\frac{(2l)!}{(l+m)!} = c_{lm}(-1)^m \frac{(2l)!}{(l-m)!}$$

amiből az állítás következik.

15.5.5. Az asszociált Legendre-függvények alapvető tulajdonságai

1. $P_l^{m=0}(x) = P_l(x)$
2. $P_l^m(x) = 0$, $m > l$. Ez egyszerűen következik abból, hogy

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

és egy $2l$ -edfokú polinom $2l$ -nél magasabb deriváltja nulla.

3. Ortogonalitás

$$\int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = 0$$

ha $l \neq l'$. A bizonyítás ugyanúgy megy, ahogy a P_l Legendre polinomoknál láttuk.

4. Normálás

$$\int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_l^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

Bizonyítás:

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x)$$

Ezt beírjuk az integrál alá

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_l^m(x) \\ &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{+1} dx \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2-1)^l \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \end{aligned}$$

Most m -szer parciálisan integrálunk, a kiintegrált rész a határon mindig 0:

$$\begin{aligned} &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{+1} dx \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l \\ &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{+1} dx P_l(x)^2 \\ &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \end{aligned}$$

Ennek következménye

$$\int_{-1}^{+1} dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

15.6. Gömbfüggvények

Definíció:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Ortonormáltság:

$$\int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Bizonyítás:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi = d(\cos \theta) d\phi$$

azaz

$$\begin{aligned} & \int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi} \frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}} \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) \int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(m-m')\phi} \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{-i(m-m')\phi} = 2\pi \delta_{mm'}$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi} \frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}} 2\pi \delta_{mm'} \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi} \frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}} 2\pi \delta_{mm'} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \\ &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \end{aligned}$$

Teljesség: ha adott a gömbfelületen egy $f(\theta, \phi)$ négyzetesen integrálható függvény, azaz

$$\int d\Omega |f(\theta, \phi)|^2 < \infty$$

akkor kifejezhető gömbfüggvények szerint

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^m f_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \\ f_{lm} &= \int d\Omega Y_{lm}(\theta, \phi)^* f(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Ez mit is jelent?

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^m \int d\Omega' Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')^* f(\theta', \phi') \\ &= \int d(\cos \theta') \int d\phi' \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^m Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')^* \right) f(\theta', \phi') \end{aligned}$$

azaz

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l=-m}^m Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi')^* = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\phi - \phi')$$

Ez fejezi ki azt, hogy a gömbfüggvények rendszere teljes.

15.7. Bessel-függvények

A Bessel-féle differenciálegyenlet

$$J''(x) + \frac{1}{x}J'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)J(x) = 0$$

15.7.1. Hatványsor megoldás

$$\begin{aligned} J(x) &= x^\alpha \sum_n c_n x^n \\ \Downarrow \\ \alpha &= \pm \nu \quad c_{2k} = -\frac{1}{4k(k+\alpha)} c_{2k-2} \\ c_{2k-1} &= 0 \end{aligned}$$

A megoldást felírhatjuk a gamma-függvény

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty dt \, t^{x-1} e^{-t} \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \\ \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\pi}{\sin \pi x} \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \quad n \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

segítségével. A standard induló normálás

$$a_0 = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}$$

akkor

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\alpha} k! \Gamma(k+\alpha+1)}$$

Ha $\nu \notin \mathbb{N}$, akkor a két független megoldás

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ J_{-\nu}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \end{aligned} \tag{15.19}$$

ezen sorok minden $x \in \mathbb{C}$ -re abszolút konvergensek.

Azonban, ha $\nu = m \in \mathbb{N}$

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$$

Ezt úgy oldjuk meg, hogy definiáljuk a Neumann-függvényt

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}$$

J_ν és N_ν mindig bázist alkot; N_ν -nek akkor is van limesze, ha $\nu \rightarrow m \in \mathbb{Z}$.

A Bessel-egyenlet megoldásának egy másik bázisát adják az ún. Hankel-függvények

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = J_\nu(x) \pm iN_\nu(x)$$

Az összes ilyen függvényre igaz, hogy

$$\begin{aligned}\Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} \Omega_\nu(x) \\ \Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) &= 2 \frac{d\Omega_\nu(x)}{dx}\end{aligned}$$

ahol Ω lehet J , N vagy $H^{(1,2)}$.

Bizonyítás: a (15.19) sorból explicit számítással látható, hogy

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) &= x^\nu J_{\nu-1}(x) \\ \frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu(x)) &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\end{aligned}$$

Elvégezve a deriválást a fenti formulákban kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) &= J_{\nu-1}(x) \\ -\frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) &= -J_{\nu+1}(x)\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}J_{\nu-1}(x) &= \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J'_\nu(x) \\ J_{\nu+1}(x) &= \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x)\end{aligned}$$

A két egyenletet összeadva és kivonva

$$\begin{aligned}J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \\ J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2 \frac{dJ_\nu(x)}{dx}\end{aligned}$$

innen pedig N_ν és $H_\nu^{(1,2)}$ definícióját használva ez utóbbiakra is következik az állítás.

A Bessel-függvények előállíthatók a következő integrállal:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{ixt} dt \quad \nu > -1/2$$

Bizonyítás: fejtsük sorba az exponenciálist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ixt)^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^n dt \end{aligned}$$

A

$$\int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^n dt$$

integrál 0, ha n páratlan. Ha pedig $n = 2s$, akkor

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2s} dt &= 2 \int_0^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} t^{2s} dt \\ &= \int_0^{+1} (1-u)^{\nu-1/2} u^{s-1/2} du \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(s+\nu+1)} \end{aligned}$$

Ugyanakkor

$$\Gamma(s+1/2) = (s+1/2)(s-1/2)\dots(1/2)\Gamma(1/2)$$

és $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, ezért

$$\Gamma(s+1/2) = \frac{(2s)!}{2^{2s}s!} \sqrt{\pi}$$

Ezt beírva, az integrálunk

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{ixt} dt &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(s+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \\ &= J_\nu(x) \end{aligned}$$

Explicit számolással látható továbbá, hogy

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \\ N_\nu(x) &\rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{x}{2} + \gamma\right) & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu & \nu \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ahol

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 0.5772 \dots$$

az Euler-Mascheroni állandó. Nagy x -re pedig

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\ N_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Ez utóbbit a módosított Bessel-függvények segítségével igazoljuk.

15.7.2. Módosított Bessel-egyenlet

$$Y''(x) + \frac{1}{x}Y'(x) - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)Y(x) = 0$$

Ennek megoldásai a módosított Bessel-függvények $I_{\pm\nu}(x)$, ahol

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= i^{-\nu} J_\nu(ix) \end{aligned}$$

ahol, ha ν nem egész, akkor a következőképpen kell érteni a komplex hatványt:

$$i^{-\nu} = e^{-i\frac{\pi}{2}\nu}$$

Ha $\nu = m$ egész, akkor $I_m \equiv I_{-m}$ és a másik független megoldás

$$\begin{aligned} K_m(x) &= \lim_{\nu \rightarrow m} K_\nu(x) \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} \frac{I_\nu(x) - I_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \end{aligned}$$

Explicit számolással (N_ν és $H_\nu^{(1)}$ definícióját használva) látható, hogy

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$$

itt a komplex hatvány értéke

$$i^{\nu+1} = e^{i\frac{\pi}{2}(\nu+1)}$$

Ezekre a függvényekre a rekurziós relációk

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (x^\nu I_\nu(x)) &= x^\nu I_{\nu-1}(x) \\
\frac{d}{dx} (x^{-\nu} I_\nu(x)) &= x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) \\
\frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I'_\nu(x) &= I_{\nu-1}(x) \\
-\frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I'_\nu(x) &= I_{\nu+1}(x) \\
I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} I_\nu(x) \\
I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) &= 2 \frac{dI_\nu(x)}{dx}
\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (x^\nu K_\nu(x)) &= -x^\nu K_{\nu-1}(x) \\
\frac{d}{dx} (x^{-\nu} K_\nu(x)) &= -x^{-\nu} K_{\nu+1}(x) \\
\frac{\nu}{x} K_\nu(x) + K'_\nu(x) &= -K_{\nu-1}(x) \\
-\frac{\nu}{x} K_\nu(x) + K'_\nu(x) &= -K_{\nu+1}(x) \\
K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) &= -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x) \\
K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) &= -2 \frac{dK_\nu(x)}{dx}
\end{aligned}$$

(bizonyítás mint J -re).

Az I_n módosított Bessel-függvényekre átvihető a J_n Bessel-függvények integrál előállítás:

$$\begin{aligned}
I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt \quad x > 0, \nu > -1/2
\end{aligned}$$

Másrészt igazolható, hogy

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt \quad x > 0, \nu > -1/2$$

Ez utóbbit úgy tudjuk belátni, hogy megmutatjuk, hogy

$$P_\nu(x) = x^\nu \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt$$

kielégíti a módosított Bessel-egyenletet:

$$\begin{aligned}
& x^2 P_\nu''(x) + x P_\nu'(x) - (x^2 + \nu^2) P_\nu(x) \\
&= x^{\nu+1} \int_1^\infty \left[x(t^2 - 1)^{\nu+1/2} - \left(n + \frac{1}{2} \right) 2t(t^2 - 1)^{\nu-1/2} \right] e^{-xt} dt \\
&= -x^{\nu+1} \int_1^\infty \frac{d}{dt} [(t^2 - 1)^{\nu+1/2} e^{-xt}] dt = 0
\end{aligned}$$

ezért

$$P_\nu(x) = A_\nu I_\nu(x) + B_\nu K_\nu(x)$$

Nagy és pozitív x -re helyettesítsünk

$$t = 1 + \frac{u}{x}$$

akkor

$$\begin{aligned}
P_\nu(x) &= x^{\nu+1} \int_0^\infty \left(\frac{2u}{x} + \frac{u^2}{x^2} \right)^{\nu-1/2} e^{-x-u} du \\
&= x^{\nu+1} \left(\frac{2u}{x} \right)^{\nu-1/2} e^{-x} \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{2x} \right)^{\nu-1/2} u^{\nu-1/2} e^{-u} du \\
&\approx x^{\nu+1} \left(\frac{2}{x} \right)^{\nu-1/2} e^{-x} \int_0^\infty u^{\nu-1/2} e^{-u} du \\
&= \Gamma(\nu + 1/2) x^{\nu+1} \left(\frac{2}{x} \right)^{\nu-1/2} e^{-x} \propto x^{-1/2} e^{-x}
\end{aligned}$$

Tehát

$$P_\nu(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty$$

Mivel $I_n(x)$ hatványsorában az összes együttható pozitív, ezért $I_n(x)$ a végtelenhez tart, ha $x \rightarrow \infty$. Ebből következik, hogy $A_\nu = 0$, azaz

$$P_\nu(x) = B_\nu K_\nu(x)$$

B_ν onnan számítható ki, hogy megnézzük a két oldal viselkedését $x = 0$ körül. Ekkor ismét a

$$t = 1 + \frac{u}{x}$$

helyettesítést használva

$$\begin{aligned}
P_\nu(x) &= x^\nu \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt \\
&= x^{\nu+1} \int_0^\infty \left(\frac{2u}{x} + \frac{u^2}{x^2} \right)^{\nu-1/2} e^{-x-u} du \\
&= x^{-\nu} e^{-x} \int_0^\infty \left(1 + \frac{2x}{u} \right)^{\nu-1/2} u^{2\nu-1} e^{-u} du \\
&\approx x^{-\nu} \int_0^\infty u^{2\nu-1} e^{-u} du \\
&= \Gamma(2\nu) x^{-\nu}
\end{aligned}$$

Másrészt I_n hatványsorát és K_n definícióját használva

$$K_\nu(x) \sim \frac{\Gamma(\nu) 2^{\nu-1}}{x^\nu}$$

ezért tehát

$$B_\nu = \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu) 2^{\nu-1}}$$

De

$$\Gamma(2\nu) = \frac{2^{2\nu-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\nu) \Gamma(\nu + 1/2)$$

ezért

$$B_\nu = \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\nu + 1/2)$$

Tehát

$$\begin{aligned}
K_\nu(x) &= \frac{1}{B_\nu} P_\nu(x) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2} \right)^\nu \int_1^\infty (t^2 - 1)^{\nu-1/2} e^{-xt} dt
\end{aligned}$$

15.7.3. A Bessel-függvények aszimptotikus viselkedése

Felhasználva, hogy nagy x -re

$$P_\nu(x) \sim \Gamma(\nu + 1/2) x^{\nu+1} \left(\frac{2}{x} \right)^{\nu-1/2} e^{-x}$$

azt kapjuk, hogy

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

Viszont

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$$

ezért nagy x -re

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - (\nu+1/2)\pi/2)}$$

Viszont

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \operatorname{Re} H_\nu^{(1)}(x) \\ K_\nu(x) &= \operatorname{Im} H_\nu^{(1)}(x) \end{aligned}$$

ezért nagy x -re

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_\nu(x) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

15.7.4. Integrálformulák módosított Bessel-függvényekkel

1. A Cserenkov-sugárzás kiszámításánál használjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{isx}}{\sqrt{s^2 + 1}} = 2K_0(|t|)$$

és a fentiekben kiszámolt aszimptotikus viselkedést:

$$K_0(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} (1 + O(1/x))$$

2. A szinkrotron sugárzás kiszámításakor felhasználtuk az

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x \sin\left[\frac{2}{3}\xi\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{2/3}(x) \\ \int_0^\infty \cos\left[\frac{2}{3}\xi\left(x + \frac{1}{3}x^3\right)\right] dx &= \frac{1}{\sqrt{3}} K_{1/3}(x) \end{aligned}$$

összefüggéseket.

3. A szinkrotron sugárzás spektrumának frekvencia szerinti kiintegrálásához pedig a következő formula jön jól:

$$\int_0^\infty dx x^\alpha K_\nu(x)^2 = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} - \nu\right) \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2} + \nu\right)}{4\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

ahol $\operatorname{Re}(\alpha + 2\nu) > -1$

és $\operatorname{Re}(\alpha - 2\nu) > -1$

pontosabban ennek $\alpha = 2$ esete:

$$\int_0^\infty d\xi \xi^2 K_\nu(\xi)^2 = \frac{\pi^2}{32} \frac{(1 - 4\nu^2)}{\cos \pi \nu}$$

ahol $|\operatorname{Re} \nu| < \frac{3}{2}$

amiből a frekvenciaintegráláshoz szükséges formulák a következők:

$$\int_0^\infty d\xi \xi^2 K_{1/3}(\xi)^2 = \frac{5\pi^2}{144}$$

$$\int_0^\infty d\xi \xi^2 K_{2/3}(\xi)^2 = \frac{7\pi^2}{144}$$

15.7.5. A Bessel-függvények gyökei

A

$$J_\nu(x) = 0$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van:

$$x_{\nu n} \quad n = 1, 2, \dots$$

J_ν aszimptotikáját felhasználva, az origótól távol fekvő gyökök értéke

$$x_{\nu n} \sim n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$$

15.7.6. Egy fontos integrál

Amennyiben

$$J_\nu(\xi a) = 0$$

akkor

$$\int_0^a x [J_\nu(\xi x)]^2 dx = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\xi a)]^2$$

Először is J_n megoldja a Bessel-egyenletet, ezért

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\xi x) + x \frac{d}{dx} J_\nu(\xi x) + (\xi^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\xi x) = 0$$

így

$$\begin{aligned} 0 &= 2J'_\nu(\xi x) \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} J_\nu(\xi x) + x \frac{d}{dx} J_\nu(\xi x) + (\xi^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\xi x) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(x^2 \left(\frac{d}{dx} J_\nu(\xi x) \right)^2 + (\xi^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\xi x)^2 \right) - 2\xi^2 x J_\nu(\xi x)^2 \end{aligned}$$

azaz

$$2\xi^2 x J_\nu(\xi x)^2 = \frac{d}{dx} \left(x^2 \left(\frac{d}{dx} J_\nu(\xi x) \right)^2 + (\xi^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\xi x)^2 \right)$$

ahonnan

$$2\xi^2 \int_0^a x J_\nu(\xi x)^2 dx = a^2 \left(\frac{d}{dx} J_\nu(\xi x) \right)^2 \Big|_{x=a} + (\xi^2 a^2 - \nu^2) J_\nu(\xi a)^2 + \nu^2 J_\nu(0)^2$$

Na most egyfelől nemnegatív ν -re

$$\nu J_\nu(0) = 0$$

másfelől

$$J_\nu(\xi a) = 0$$

így

$$\int_0^a x J_\nu(\xi x)^2 dx = \frac{1}{2\xi^2} a^2 \left(\frac{d}{dx} J_\nu(\xi x) \right)^2 \Big|_{x=a}$$

Viszont

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J'_\nu(x)$$

ahonnan

$$\xi J_{\nu+1}(\xi x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(\xi x) - \frac{d}{dx} J_\nu(\xi x)$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} J_\nu(\xi x) \Big|_{x=a} &= \frac{\nu}{a} J_\nu(\xi a) - \xi J_{\nu+1}(\xi a) \\ &= -\xi J_{\nu+1}(\xi a) \end{aligned}$$

Innen

$$\int_0^a x [J_\nu(\xi x)]^2 dx = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(\xi a)]^2$$

15.7.7. A Bessel-függvények ortogonalitása

$$\begin{aligned} 0 &= \rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) + \rho \frac{d}{d\rho} J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) + \left(x_{\nu n}^2 \frac{\rho^2}{a^2} - \nu^2 \right) J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) \\ &\quad \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) \right) + \left(x_{\nu n}^2 \frac{\rho^2}{a^2} - \nu^2 \right) J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) \end{aligned}$$

Szorozzuk ezt be $\rho^{-1}J(x_{\nu n'}\rho/a)$ -val, integráljuk ki és integráljunk parciálisan az első tagban:

$$0 = - \int_0^a d\rho \rho \left[\frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n}\rho/a) \right] \left[\frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n'}\rho/a) \right] \\ + \int_0^a d\rho \rho^{-1} J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) \left(x_{\nu n}^2 \frac{\rho^2}{a^2} - \nu^2 \right) J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$$

Cseréljük meg n -et és n' -t:

$$0 = - \int_0^a d\rho \rho \left[\frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n'}\rho/a) \right] \left[\frac{d}{d\rho} J(x_{\nu n}\rho/a) \right] \\ + \int_0^a d\rho \rho^{-1} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) \left(x_{\nu n'}^2 \frac{\rho^2}{a^2} - \nu^2 \right) J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a)$$

A két egyenletet egymásból kivonva

$$a^{-2} (x_{\nu n'}^2 - x_{\nu n}^2) \int_0^a d\rho \rho J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) = 0$$

amiből az előbb igazolt formulát felhasználva kapjuk, hogy

$$\int_0^a d\rho \rho J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) J_\nu(x_{\nu n'}\rho/a) = \frac{a^2}{2} [J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nn'}$$

15.7.8. Bessel-Fourier sor és teljesség

Bármely ν -re, a

$$J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) \quad n \in \mathbb{N}$$

függvények teljes ortogonális rendszert alkotnak a $[0, a]$ intervallumon. Ha egy f függvény négyzetesen integrálható az

$$\int_0^a d\rho \rho |f(\rho)|^2 < \infty$$

értelemben, akkor f felírható

$$f(\rho) = \sum_n f_n J_\nu(x_{\nu n}\rho/a)$$

alakban, ahol az ortogonalitási relációt felhasználva

$$f_n = \frac{2}{[J_{\nu+1}(x_{\nu n}a)]^2} \int_0^a d\rho \rho J_\nu(x_{\nu n}\rho/a) f(\rho)$$

Tehát

$$f(\rho) = \int_0^a d\rho' \rho' \sum_n \frac{2}{[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2} J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) J_\nu(x_{\nu n} \rho'/a) f(\rho')$$

azaz

$$\sum_n \frac{2}{[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2} J_\nu(x_{\nu n} \rho/a) J_\nu(x_{\nu n} \rho'/a) = \frac{1}{\rho'} \delta(\rho - \rho')$$

15.7.9. Hankel transzformáció

Ha végtelen félegyenest veszünk, azaz

$$a \rightarrow \infty$$

akkor a

$$\frac{x_{\nu n}}{a}$$

”hullámszámok” besűrűsödnek és folytonossá válnak a 0 és ∞ között; legyen az ennek megfelelő változó jele k . Ekkor az ortogonalitási reláció határesetére a következő alakú lesz:

$$\int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k} \delta(k - k')$$

Ha f -re igaz, hogy

$$\int_0^\infty d\rho \rho^{1/2} |f(\rho)|$$

véges, akkor a következő alakba írható:

$$f(\rho) = \int_0^\infty dk k F_\nu(k) J_\nu(k\rho)$$

ahol az $F_\nu(k)$ Hankel-transzformált

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty d\rho \rho f(\rho) J_\nu(k\rho)$$

Ez a Fourier transzformáció megfelelője a félegyenesen, és minden $\nu > -1/2$ esetére definiált.

16. fejezet

A Liénard-Wiechert potenciálokból származó térerősségek

Az elektromos térerősség

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A}, \quad (16.1)$$

ahol a potenciálokat (11.7) és (11.8) képletek adják meg. Felhasználva (11.10) képleteket

$$\begin{aligned} \partial_i\Phi &= \partial_i \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \beta\mathbf{R}} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^2} (\partial_i R - \beta_j \partial_i R_j - R_j \partial_i \beta_j) = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^2} \left(\frac{R_i}{R - \beta\mathbf{R}} - \beta_j \left(\delta_{ij} + \frac{\beta_j R_i}{R - \beta\mathbf{R}} \right) - \frac{R_j a_j}{c} \partial_i \bar{t} \right) = \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left(R_i(1 - \beta^2) - \beta_i(R - \beta\mathbf{R}) + \frac{R_i \mathbf{a}\mathbf{R}}{c^2} \right), \\ \partial_t A_i &= \partial_t \left(\frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{v_i}{R - \beta\mathbf{R}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{R}{R - \beta\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\frac{v_i}{R - \beta\mathbf{R}} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{R}{R - \beta\mathbf{R}} \left[\frac{a_i}{R - \beta\mathbf{R}} - \frac{v_i}{(R - \beta\mathbf{R})^2} \left(\frac{\partial R}{\partial \bar{t}} - \frac{R_j a_j}{c} - \beta_j \frac{\partial R_j}{\partial \bar{t}} \right) \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left[\frac{R a_i (R - \beta\mathbf{R})}{c^2} - \frac{R v_i}{c^2} \left(-\frac{\mathbf{R}\mathbf{v}}{R} - \frac{R_j a_j}{c} + c\beta^2 \right) \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \beta\mathbf{R})^3} \left[\frac{R a_i (R - \beta\mathbf{R})}{c^2} + \beta_i \beta\mathbf{R} + \frac{R \mathbf{a}\mathbf{R} \beta_i}{c^2} - R \beta_i \beta^2 \right]. \quad (16.2) \end{aligned}$$

Azt kapjuk összesítve, hogy:

$$\begin{aligned}
E_i &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})^3} \left(R_i(1 - \beta^2) - \beta_i(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}) + \frac{R_i\mathbf{a}\mathbf{R}}{c^2} - \frac{Ra_i(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})}{c^2} - \right. \\
&\quad \left. - \beta_i\boldsymbol{\beta}\mathbf{R} - \frac{R\mathbf{a}\mathbf{R}\beta_i}{c^2} + R\beta_i\beta^2 \right) = \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})^3} \left((R_i - \beta_i R)(1 - \beta^2) + \frac{1}{c^2} [(R_i - \beta_i R)\mathbf{a}\mathbf{R} - Ra_i(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})] \right) = \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})^3} \left((R_i - \beta_i R)(1 - \beta^2) + \frac{1}{c^2} [\mathbf{R} \times [(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{a}]_i \right) \quad (16.3)
\end{aligned}$$

A mágneses térerősségre:

$$\begin{aligned}
H_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\frac{q}{4\pi} \frac{v_k}{R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}} \right) = \frac{q}{4\pi} \left(\epsilon_{ijk} \frac{\partial \bar{t}}{\partial x_j} a_k \frac{1}{R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}} + \epsilon_{ijk} v_k \partial_j \left(\frac{1}{R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R}} \right) \right) = \\
&= \frac{q}{4\pi} \left[-\epsilon_{ijk} \frac{R_j a_k}{c(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})^2} - \frac{\epsilon_{ijk} v_k R_j}{(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})^3} \left((1 - \beta^2) + \frac{\mathbf{a}\mathbf{R}}{c^2} \right) \right] = \\
&= \frac{qc}{4\pi} \frac{1}{(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})^3} \epsilon_{ijk} \hat{R}_j \left[-\beta_k R(1 - \beta^2) + \frac{1}{c^2} (-\beta_k R(\mathbf{a}\mathbf{R}) - Ra_k(R - \boldsymbol{\beta}\mathbf{R})) \right]. \quad (16.4)
\end{aligned}$$

Összehasonlítva az elektromos térerősség (utolsó előtti) kifejezésével, látjuk, hogy

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}. \quad (16.5)$$

Irodalomjegyzék

- [1] J.D Jackson: Klasszikus elektrodinamika (TypoTEX, Budapest 2004)
- [2] L.D. Landau és E.M. Lifsic: Elméleti Fizika II: Klasszikus erőkterek (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)
- [3] L.D. Landau és E.M. Lifsic: Elméleti Fizika VIII: Folytonos közegek elektrodinamikája (Tankönyvkiadó, Budapest, 1976)
- [4] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: Mai fizika 5. (Elektromágnesség, Elektrosztatika, Dielektrikumok, Magnetosztatika) (Műszaki Könyvkiadó, 1970)
- [5] Simonyi K.: A fizika kultúrtörténete (Gondolat, 1986)
- [6] http://en.wikipedia.org/wiki/Leyden_jar
- [7] http://hu.wikipedia.org/wiki/Luigi_Galvani
- [8] http://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function
- [9] http://hu.wikipedia.org/wiki/Elektromágneses_sugárzás
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/LegendreDifferentialEquation.html>
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials
- [12] <http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html>
- [13] http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics
- [14] <http://en.wikipedia.org/wiki/Hysteresis>
- [15] [http://en.wikipedia.org/wiki/Absorption_\(electromagnetic_radiation\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Absorption_(electromagnetic_radiation))