



MAGYAR NEMZETI BANK

OKTATÁSI FÜZETEK

2. szám

2016. június

VERES ISTVÁN ATTILA, CFA, CIPM

Kötvénymatematika



Oktatási füzetek

Veres István Attila, CFA, CIPM

Kötvénymatematika

MAGYAR NEMZETI BANK

Oktatási füzetek

Kötvénymatematika

Az elemzést készítette: Veres István Attila, CFA, CIPM

(Magyar Nemzeti Bank Pénz- és devizapiac igazgatóság)

A kiadványt jóváhagyta: Palotai Dániel, ügyvezető igazgató

Kiadja: Magyar Nemzeti Bank

Felelős kiadó: Hergár Eszter

1054 Budapest, Szabadság tér 9.

www.mnb.hu

Tartalom

| | |
|------------------------------------|----|
| Az anyagban előforduló rövidítések | 5 |
| 1. Bevezetés | 7 |
| 2. A kötvény | 9 |
| 2.1. Kamatozás | 10 |
| 2.2. Kibocsátó | 12 |
| 2.3. Törlesztés módja | 13 |
| 2.4. Lejárat | 14 |
| 2.5. Fedezettség | 15 |
| 3. Kamatszámítás | 16 |
| 3.1. Egyszerű kamatszámítás | 16 |
| 3.2. Kamatos kamatszámítás | 17 |
| 4. Jelenérték-számítás | 21 |
| 4.1. A jelenérték számítása | 21 |
| 4.2. Diszkontszámítás | 24 |
| 4.3. Kötvényárfolyam-számítás | 24 |
| 5. Hozamszámítás | 28 |
| 5.1. Nettó jelenérték | 28 |
| 5.2. Belső megtérülési ráta | 29 |
| 5.3. Lejáratig számított hozam | 30 |
| 5.4. Teljes hozam | 32 |
| 5.5. A hozam-ár kapcsolat | 34 |
| 5.6. „Pull-to-par” | 36 |
| 5.7. Felhalmozott kamat | 38 |

| | |
|--|----|
| 6. Kamatlábckockázat | 41 |
| 6.1. Duration | 42 |
| 6.2. DV01 | 45 |
| 6.3. Konvexitás | 46 |
| 6.4. Negatív konvexitás | 48 |
| 7. Hozamgörbe | 50 |
| 7.1. Spot hozamgörbe | 51 |
| 7.2. „Roll-down” | 54 |
| 7.3. Forward hozamok | 56 |
| 7.4. Hozamgörbe-elméletek | 59 |
| 8. Kereskedés a hozamgörbe mentén | 62 |
| 8.1. A hozamgörbe szintjének változása | 62 |
| 8.2. A hozamgörbe meredekségének változása | 66 |
| 8.3. A hozamgörbe görbületének változása | 70 |
| 9. Ajánlott irodalom | 73 |

Az anyagban előforduló rövidítések

| | |
|-------------|--|
| <i>FV</i> | Future Value, azaz <i>jövőérték</i> . Azt fejezi ki, hogy adott pénzáramlás mekkora értéket képvisel egy adott jövőbeli időpontban. |
| <i>PV</i> | Present Value, azaz <i>jelenérték</i> . Azt fejezi ki, hogy adott jövőbeli pénzáramlásnak mekkora a jelenbeli értéke. |
| <i>r</i> | Kamatláb. Amennyiben nincs jelezve, akkor éves kamatot jelöl. |
| <i>n</i> | Évek száma. |
| <i>days</i> | Napok száma. |
| <i>d</i> | Diszkontláb. |
| <i>yr</i> | Napok száma egy évben. |
| <i>m</i> | Kamatfizetési periódusok száma (éven belül). |
| <i>P</i> | Price, azaz ár. Általában a jelenértékkel felváltva használt, mert a jövőbeli pénzáramlások jelenértékét tekintjük egy eszköz fair árának. A P_0 jelölés hangsúlyosabban a jelenbeli értéket fejezi ki. Ebben az értelemben beszélhetünk más időpontbeli árról, úgyis, mint P_1, P_2, \dots, P_n , azaz 1, 2, ... n periódus múlva érvényes árról. |
| <i>CF</i> | Cash Flow, azaz pénzáramlás. A CF_0 jelölés egy jelenbeli értéket fejezi ki, sokszor a kezdeti befektetést vagy beruházást jelenti. A jövőbeli pénzáramlások jelölése pedig rendre CF_1, CF_2, \dots, CF_n . |
| <i>M</i> | Maturity value, azaz lejáratkori érték. Ez lehet egy kötvény névértéke vagy egy pénzügyi instrumentum várható eladási ára, de lehet akár egy projekt lezárásakor várhatóan realizálható terminálási érték is. |
| <i>AI</i> | Accrued Interest, azaz felhalmozott kamat. A kötvények kuponjának két kuponfizetés közötti időarányos része. |
| <i>C</i> | Kupon (coupon). |
| <i>e</i> | Az Eurler-féle szám, a természetes logaritmus alapja. Irracionális szám, értéke állandó: 2,718... |
| <i>T</i> | Time, azaz időpont. A T_0 jelölés a jelent, a mai napot fejezi ki. Értelemszerűen a T_1, T_2, \dots, T_n jelölések az 1, 2, ... n periódussal későbbi időpontokat fejezi ki, tipikusan 1, 2 stb. éveket. |
| <i>NPV</i> | Net Present Value, azaz nettó jelenérték. |
| <i>YTM</i> | Yield to maturity, azaz lejáratig számított hozam. |
| Δ | Görög delta. Változás jelölésére szolgál. |
| <i>DF</i> | Diszkontfaktor. |
| <i>DUR</i> | Duration. |
| <i>CONV</i> | Konvexitás. |
| <i>S</i> | Spot ráta vagy zéró-kupon ráta. |
| <i>F</i> | Forward vagy határidős ráta. |
| <i>w</i> | Weight, azaz a súly jelölése. |

1. Bevezetés

Jobb ma egy veréb, mint holnap egy tűzok – tartja a mondás, és ez akár a modern pénzügyek alapösszefüggése is lehetne. Két eltérő időpontban érkező pénzáramlás értéke ugyanis eltér egymástól. 100 forint ma nem ugyanannyit ér, mint 100 forint egy év múlva. Sőt lehet, hogy 100 forint ma többet ér, mint 105 forint egy év múlva. Ez a pénz időértéke, illetve tágabban értelmezve a fogyasztási értéke, és ez az érték attól függ, hogy mekkora az adott időszakra vonatkozó kamatláb, vagy hétköznapien fogalmazva, mekkora hozamot lehet elérni adott időszak alatt.

A pénzügyi eszközöket, követeléseket csoportosíthatjuk aszerint is, hogy az általuk biztosított pénzáramlás időpontja és annak nagysága előre ismert-e számunkra, van-e bizonyosságunk e két paraméter tekintetében. Egy casco biztosítás esetében, ami az ún. nem életbiztosítási termékek csoportjába tartozik, például sem azt nem tudjuk, hogy mekkora lesz a kár nagysága, illetve hogy ennek megfelelően mennyit fog fizetni a biztosító, sem azt, hogy a kár mikor következik be. Vagyis sem a pénzáramlás időpontja, sem annak nagysága nem ismert előttünk, mindkettő paramétert bizonytalanság övezi.

Egy életbiztosítás, azon belül egy ún. haláleseti biztosítás esetén például ismert a biztosítás összege, de nem tudjuk, hogy mikor következik be a biztosítási esemény. A részvények esetében az osztalék kifizetésére általában előre meghatározott időpontban, Európában tipikusan évente egyszer kerül sor, de annak mértéke bizonytalan, hiszen nem tudhatjuk, hogy adott évben mennyire lesz nyereséges az adott vállalat, vagyis mekkora összeget fog tudni a tulajdonosok részére kifizetni.

1. ábra

Pénzügyi eszközök csoportosítása pénzáramlásuk időpontja és annak nagysága szerint

| nagyság | időpont | | |
|---------|--------------------|---------------|--------------------|
| | biztos | <i>biztos</i> | <i>bizonytalan</i> |
| | | kötvény | életbiztosítás |
| | <i>bizonytalan</i> | részvény | nem életbiztosítás |

Végül vannak olyan pénzügyi eszközök, amelyek esetén mind a pénzáramlás időpontja, mind annak nagysága ismert előre. Ezeket gyűjtő néven kötvény típusú eszközöknek nevezzük. Angol elnevezése beszédesebb: *fixed income*, azaz fix jövedelem. E kategória természetesen nem teljesen homogén, mert már egy változó kamatozású kötvény esetén is felmerül a kérdés, hogy mitől fix annak pénzáramlása, miközben változó kamatozású. Nem is beszélve még összetettebb, ún. opcionalitást is tartalmazó termékekről, mint az amerikai jelzáloglevelek vagy a visszahívható kötvények. Ami közös ezekben az instrumentumokban, hogy a szabály, ami alapján meghatározzuk a pénzáramlásait, nem változik a kötvény „élete” alatt. Nem szembesülünk azzal a típusú bizonytalansággal, ami a másik három kategóriában tapasztalható, ezért ezen eszközök értékelése, árazása is könnyebb feladat. Az oktatási füzet ezeknek a kötvény típusú eszközöknek az értékelésére fókuszál. Az árfolyam számításán túl cél az árfolyamot mozgató tényezők és azok hatásának, az árfolyamváltozás dinamikájának megértése.

2. A kötvény

A kötvény hitelviszonyt megtestesítő értékpapír. A kötvény kibocsátója vállalja, hogy a szerződésben megjelölt pénzösszeg (tőke) előre meghatározott kamattal vagy egyéb jutalékait, valamint magát a pénzösszeget a kötvény tulajdonosának egy előre meghatározott időpontban, lejáratkor megfizeti. A lejáratig hátralévő időt futamidőnek hívjuk. A kötvényeket többféle szempont szerint csoportosíthatjuk, és a csoportosításuk mentén mutatjuk be, hogy mennyire változatos formát ölthetnek.

Egy értékpapír névleges értékét névértéknek nevezzük (*notional* vagy *face value*). A névérték a tőketörlesztésként kifizetendő nominális összeget jelent, amely tipikusan a futamidő végén történik. A kötvénykötelezettség után előre meghatározott időpontokban fizetett nominális kamatot kuponnak nevezzük. A fizetendő kamat nominális összegét pedig a névértékre vetített kuponráta határozza meg. A következőkben a kötvény egyes jellemzőit vesszük sorra annak érdekében, hogy képet kapjunk arról, hogy egyrészt ezen paraméterek kombinációiból milyen változatos struktúrákat lehet kialakítani, másrészt pedig hogy a kötvények kiértékelését megalapozzuk a szükséges fogalmak bemutatásával.

A kötvény értékelése, árfolyamának megállapítása során a névértékből, futamidőből, kuponrátából stb. kiindulva tudjuk megállapítani a kötvény pénzáramlását. Ezt a pénzáramlást sokszor ún. idővonalon szokás ábrázolni, ami vizuálisan mutatja, hogy az egyes időszakokban mekkora pénzösszeget fizet a kötvény. Ez a pénzáramlás adja majd a kötvény értékelésének alapját.

A kötvények kibocsátása az ún. elsődleges piacon (*primary market*) történik, amikor a hitelezők megkapják a hitelviszonyt megtestesítő értékpapírokat, a hitelfelvevő pedig a tevékenysége finanszírozásához szükséges forrást. Később, a kötvény futamideje alatt a kötvényekkel a kereskedés az ún. másodlagos piacon (*secondary market*) történik, amikor az értékpapír a kötvénytulajdonosok között cserél gazdát. A frissen, legutóbb kibocsátott papírt *on-the-run* papírnak, a régebbi sorozatokat pedig *off-the-run* papírnak hívják (pl. egy 10 éves eredeti futamidővel rendelkező, de már csak 2 év hátralévő futamidejű kötvény).

2.1. Kamatozás

Fix kamat

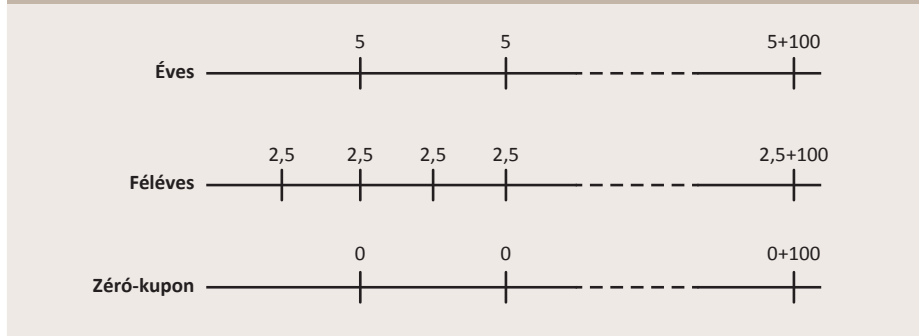
A kötvény kamata vagy kuponja a kötvénykötelezettség után előre meghatározott időpontokban fizetett nominális kamat, a névértékre vetítve. Rendkívül változatos kamatozással lehet kötvényt kibocsátani, de alapvetően a kamatozás lehet fix vagy változó.

Mint neve is mondja, a fix kamatozás azt jelenti, hogy a kamat mértéke a futamidő alatt nem változik. A kötvény a kamatfizetési frekvencia által meghatározott időközönként fizeti az időszakra jutó nominális kamatot. A kamatfizetési frekvencia a fix kuponú kötvények esetén a leggyakrabban éves vagy féléves. Éves kamatfizetés esetén évente egy előre meghatározott napon kapjuk kézhez a teljes évre jutó kamatot, míg féléves frekvencia esetén félévente fizeti a kötvény fele-fele összeget.

Például 5 százalékos kamat és 100 Ft névérték esetén az éves kamat mértéke 5 Ft, de míg éves kuponperiódus esetén évente 5 Ft lesz a pénzáramlás, addig féléves kuponperiódus esetén félévkor és év végén is 2,5 Ft-ot fizet majd a kötvény. A fix kamatozás egyik speciális esete az, amikor a kamat mértéke 0. Ekkor zéró-kupon kötvényről beszélünk, és a kötvény egyetlen pénzáramlása a lejáratkor visszafizetett tőke.

2. ábra

Éves fix, féléves fix, valamint zéró kamatozású kötvény pénzáramlása



Változó vagy lebegő kamat

Ezzel szemben a változó vagy lebegő kamat mértéke időben változik. A leggyakrabban valamilyen bankközi kamatlábhoz mint referencia-kamatlábhoz kötött kamatról beszélünk. A lebegő kamat fizetési gyakorisága tipikusan igazodik a referenciakamat futamidejéhez. Ha például a referenciakamat egy három hónapos kamat, akkor annak mértéke 3 havonta kerül rögzítésre („fixálásra”), és a kötvény háromhavonta fog egy-egy negyedévre jutó kamatot fizetni.

A világon talán legismertebb és legfontosabb, referenciaként szolgáló kamatláb a LIBOR, ami a *London Interbank Offered Rate*, azaz a londoni bankközi hitelkamatláb rövidítése. Naponta történik a *British Banker's Association* által koordinált ún. fixing, amely során 16 bank lejegyzi a bankközi piacon egymásnak jegyzett hitelkamatlábát. A LIBOR-t 1 naptól 1 évig tartó lejáratokra, és a 10 legnagyobb devizára jegyzik. Fontosságát az adja, hogy nagy mennyiségű hitelt (pl. vállalati hitelek, jelzáloghitelek), kötvényt és derivatív ügyletet (pl. kamatláb futures, swap) áraznak a LIBOR-kamatokhoz.

A LIBOR-hoz hasonlóan a legtöbb deviza piacon napi rendszerességgel történik a különböző futamidejű kamatlábak fixálása. A magyar bankközi forint-piacon fixált kamat a *Budapest Interbank Offered Rate*, a budapesti bankközi kamatláb (BUBOR).

Ezekből a referenciakamatokból aztán változatos módon lehet különféle kamatstruktúrákat kialakítani. A kuponráta a referencia-kamatlábból indul ki, és ehhez általában hozzáadódik egy, a hitelfelvevő kockázatosságát kifejező felár. Például egy lebegő kamatozású vállalati kötvény kupon rátája lehet a 3 hónapos LIBOR-ráta + 1 százalékos felár. Ekkor a kötvény kamatfizetési frekvenciája negyedéves lesz, mivel a referenciakamat 3 hónapos, azaz negyedéves futamidejű. Az első kuponperiódusban a kötvény a kibocsátás napján fixált 3 hónapos LIBOR-kamat alapján fizet majd kamatot. Ha a 3 hónapos LIBOR-ráta aznap 2,5 százalékos volt, akkor 3 hónap elteltével a kötvény $2,5 + 1 = 3,5$ százalékos negyedévre eső arányos részét fizeti ki ($3,5/4$ százalékos a 100 Ft névértékre, ami 0,875 Ft, azaz 87,5 fillér). A következő negyedévre fizetett kamat a kuponfizetés napján fixált 3 hónapos LIBOR-ráta lesz. Ahogy a 3 hónapos LIBOR

értéke változik a kötvény futamideje alatt, úgy változik (lebeg) a kötvény által fizetett kamat is.

A kamat pontos mennyiségének megállapítása során fontos szempont lesz, hogy a két időpont közötti napok száma tekintetében milyen ún. napszámítási konvenciót (*day count convention*) alkalmazunk. Ennek számos módja létezik, amelyek közül csak az egyik a két nap közti tényleges napok számával történő kalkuláció. A fenti példában az éves kamatot egyszerűen elosztottuk négygyel, holott egy adott negyedév nem feltétlenül pontosan egy év negyede, mivel van 89, 90, 91 és 92 napos negyedév is.

Speciális kamatozású kötvények

A fenti példák mellett léteznek speciális, alternatív kamatozású kötvények is. A kamatozás lehet például „*step-up*” kamatozás. Ez annyit jelent, hogy a kamat mértéke előre rögzített (fix), de mértéke a futamidő alatt nem állandó. Például az első évben 2 százalék, a másodikban 2,20 százalék, a harmadikban 2,4 százalék stb.

A változó kamatozás speciális esete például, ha a kamat szintjének előre meghatározott maximuma (*cap*) vagy minimuma (*floor*) van. Emellett vannak ún. *inverz* kamatozású kötvények is, amikor a referenciakamat változásával ellentétes irányba változik a kötvény kamatozása (pl. 10% – LIBOR).

2.2. Kibocsátó

A kibocsátó fajtái szerint is csoportosíthatjuk a kötvényeket. A kibocsátó lehet az állam, egy vállalat, egy önkormányzat, egy nemzetek felett álló ún. szupranacionális intézmény, egy állami ügynökség stb.

Minden kötvénypiacon központi helyet foglal a szuverén vagy állami kibocsátó. Ennek oka, hogy saját devizában az állam számít az ún. hitelkockázat-mentes kibocsátónak, ezáltal pedig viszonyítási alapot jelent, ún. benchmark szerepet tölt be a többi kibocsátó kötvényeinek értékelése során. Mi garantálja ugyanis, hogy a kötvény értékelése során megállapított pénzáramlást ténylegesen meg is kapjuk? Az állami kibocsátó esetében az, hogy az állam például az adóztatás jogával élve bármikor képes az államkötvények tőketör-

lesztéséhez szükséges pénzt előteremteni, és a kötvényszerződésben foglalt kötelezettségének eleget tenni. Erre más kibocsátók nem képesek, mert nem rendelkeznek az ehhez szükséges jogosítványokkal, hatalommal.

Egy másik aspektus, ami miatt az államkötvények piaca központi szerepet tölt be minden ország tőkepiacán, a piac likviditása. A legtöbb országban az állam a legnagyobb kibocsátó, de legalábbis jelentős kibocsátó. A költségvetés folyó finanszírozása és az államadósság refinanszírozása miatt az állam rendszeresen, általában előre publikált, megtervezett kibocsátási programmal lép piacra. A kibocsátási program figyelembe veszi a finanszírozási szükséglet mellett például a kötvénybefektetők lejáratí igényeit is, és kimondott célja szokott lenni a piacépítés: a teljes futamidő spektrum (hozamgörbe) mentén nagy kibocsátási méretű, nagy forgalmú, likvid piac biztosítása, ami valóban referenciapontként szolgálhat a tipikusan kisebb, kockázatosabb kötvények értékeléséhez.

2.3. Törlesztés módja

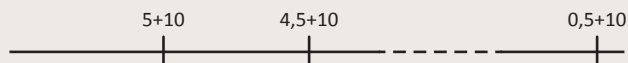
A kötvényszerződésben foglalt kötelezettségek a kamat fizetésére és a tőke visszafizetésére vonatkoznak. A kötvény futamideje addig tart, amíg a tőke teljes visszafizetésére sor nem kerül. Ennek egyik és talán legegyszerűbb módja, hogy a kötvény a teljes névértéket lejáratkor egy összegben törleszti (*bullet* struktúra).

Ennek alternatívája, hogy a tőke részleges törlesztése, és ezzel a névérték csökkenése valamilyen előre meghatározott szabály szerint a futamidő alatt megkezdődik. Ekkor ún. amortizálódó struktúráról beszélünk. A tőke amortizációja történhet a futamidő alatt egyenletes ütemben. Ilyen, amikor egy 10 éves futamidejű kötvény minden évben a tőke 10 százalékát törleszti, vagy egy türelmi periódust (*grace period*) követően, pl. 5 év után a második 5 évben évente a tőke 20 százalékát törleszti. Az amortizálódó tőke esetén ugyan a kötvénykupon rátája nem változik, de mivel ezt a rátát a névértékre vetítjük, ezért az évente fizetett kamat összege folyamatosan csökken. Például amennyiben évente 10 százalék az amortizáció mértéke, akkor a második évben a kamatot már csak az eredeti névérték 90 százalékára kell vetíteni. 5 százalék kuponráta

és eredetileg 100 Ft névérték mellett a fizetendő kamat összege a második évben már csak 4,5 Ft lesz.

3. ábra

Amortizálódó kötvény pénzáramlása



A tőke amortizációja történhet nem egyenletes ütemben is. Az ún. eszközfedezett értékpapírok (*asset-backed securities*) esetében például a tőketörlesztés a mögöttes eszközök (pl. jelzáloghitelek) tőketörlesztéséhez kapcsolódhat, így a tőke visszafizetésének ütemére vonatkozóan további feltételezésekkel kell élnünk, amikor a kötvényértékeléshez annak pénzáramlását kívánjuk meghatározni. Ekkor a kötvény pénzáramlásának előrejelzése általában modell alapon történik.

2.4. Lejárat

A kötvény lejáratakor esedékes a kötvény utolsó pénzáramlásának a visszafizetése. Ez tulajdonképpen a kötvény „életének” a végét jelenti. Lejárat tekintetében is változatos struktúrákat találunk.

A legegyszerűbb eset a fix lejárat, amikor a lejárat egy előre meghatározott időpontban történik. Ehhez képest egy speciális eset, amikor a kötvénynek nincs lejárat, a kamatfizetés tulajdonképpen határozatlan ideig folytatódik (*perpetuity*).

Végül a későbbi összefüggések megértése miatt megemlíjtük, hogy a kötvényszerződés tartalmazhat olyan elemeket, amelyek bizonytalanná teszik a kötvény lejáratát. Egy kötvény lehet például visszahívható (*callable*). A visszahívás joga a kötvény kibocsátóját illeti meg, egy opciót biztosít számára (*optionality*), hogy a kötvényt előre meghatározott időpontban vagy időpontokban, egy előre meghatározott árfolyamon még a végső lejárat dátum előtt visszahívja, azaz visszavásárolja. Hasonlóképpen, egy kötvény lehet visszaváltható

(*putable*). Ekkor a kötvény tulajdonosa (a hitelező) rendelkezik azzal a joggal, hogy a kötvényt egy előre meghatározott árfolyamon és előre meghatározott időpon(ok)ban visszadja (eladja) a kibocsátónak.

Egy igen speciális eset az ún. átváltható kötvények csoportja (*convertible*). Itt a kötvénytulajdonos olyan jogosultsággal rendelkezik, hogy bizonyos feltételek fennállása esetén a kötvényt adott számú részvényre váltsa át. Ekkor a kötvény megszűnik létezni, és innentől a vállalat szempontjából az adósság típusú finanszírozásból lejárat nélküli részvényfinanszírozás lesz, míg a kötvény tulajdonosa a vállalat hitelezőjéből a vállalat résztulajdonosává változik.

2.5. Fedezettség

Fedezettség szempontjából beszélhetünk ún. fedezet nélküli (*unsecured*) vagy fedezettel bíró kötvényekről (*secured*). A fedezet nélküli értékpapírok esetében a kibocsátó általános kötelezettségvállalása, ha úgy tetszik, ígérete áll a kötvény mögött.

Fedezett kibocsátások esetén viszont valami előre definiált fedezet biztosítja majd azt a pénzáramlást, amiből a kötvénykötelezettségeknek a kibocsátó eleget fog tudni tenni. Ilyen fedezet lehet egy projekt (pl. egy fizetős autópálya) vagy egy portfólió (pl. jelzáloghitel-portfólió).

3. Kamatszámítás

3.1. Egyszerű kamatszámítás

Az egyszerű kamatszámítás esetén azzal a feltételezéssel élünk, hogy a tőkebefektetés után kapott kamat nem kerül tőkésítésre, nem kerül újrabefektetésre, azaz a kamat nem kamatozik tovább. Ezt a kamatszámítási módszert tipikusan éven belüli pénzügyi instrumentumok esetén alkalmazzák.

Ilyen pénzügyi eszköz például a kamatozó lekötött betét, amely fix kamatozással meghatározott értéknapon jár le. Futamidő 1 naptól több évig terjedhet, de általában 1 év alatti. A kamat kifizetésére lejáratkor kerül sor.

$$FV = PV \cdot (1 + r \cdot n)$$

1. példa: Bankbetét kamatozása

Mennyi lesz a megtakarításunk értéke, ha 100 Ft induló összeget lekötünk bankbetétben 1 évre, és a betéti kamat mértéke 5%?

$$FV = 100 \cdot (1 + 0,05 \cdot 1) = 105$$

Mennyi lesz a megtakarítás értéke, ha 2 évre kötjük le pénzünket?

$$FV = 100 \cdot (1 + 0,05 \cdot 2) = 110$$

A befektetés időhossza természetesen nem csak egész év lehet. Éven belül a kamatszámítás arányosítással kerül meghatározásra a befektetési időtartam és az év napjai számának arányában. Különböző piacokon különböző konvenciók élnek arra vonatkozóan, hogy hogyan határozzák meg a részperiódus, illetve a teljes év hosszát.¹

Az egyszerűbb számíthatóság kedvéért korábban a legelterjedtebb napszámítási konvenció az ún. 30/360-as konvenció volt. Itt minden évet 360 naposnak

¹ Bővebben lásd: https://en.wikipedia.org/wiki/Day_count_convention

és minden hónapot 30 naposnak tekintünk. Ennek az egyszerűsítésnek az IT-forradalom előtt nyilvánvaló okai voltak, hiszen fejben lényegesen könnyebb így egyrészt a teljes periódus hosszát, másrészt az időszakos kamatot kiszámolni. Negyedéves kamatfizetési periódus esetében például 90 napot kell az év teljes, 360 napos hosszához viszonyítani, ami pont egynegyed.

A ma leginkább elterjedt pénzügyi konvenció az ún. ACT/360-as napszámítási módszer. Itt az angol *actual* szóból származó ACT rövidítés a tényleges napok számát jelöli, míg az év hosszát 360 napnak tekintjük.

$$FV = PV \cdot \left[1 + r \cdot \left(\frac{\text{days}}{\text{yr}} \right) \right]$$

2. példa: Bankbetét-kamatozás éven belüli lejáráttal

Mennyi lesz a megtakarításunk értéke, ha 100 Ft induló összeget lekötünk bankbetétben 2015. május 11. és 2015. augusztus 11. között, és a betéti kamat mértéke 5%?

$$FV = 100 \cdot \left[1 + 0,05 \cdot \left(\frac{92}{360} \right) \right] = 101,278$$

Figyeljük meg, hogy mennyivel egyszerűbb a 30/360-as módszerrel fejben erre a 2. példában használt 3 hónapos futamidőre az éves 5 forintnyi kamat egynegyedét kiszámolni! Egy negyedév a valóságban lehet 89, 90, 91 vagy 92 napos, attól függően, hogy mely hónapokat öleli fel, vagy hogy éppen szökőévet írunk-e.

3.2. Kamatos kamatszámítás

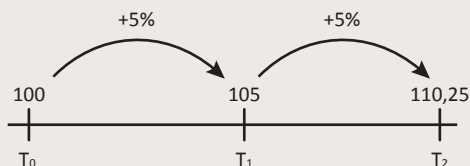
A kamatos kamatszámítás esetén azzal a feltételezéssel élünk, hogy az adott eszköz pénzáramlása ugyanazon kamat mellett kerül újrabefektetésre.

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n$$

3. példa: Kamatos kamat

Mennyi lesz a megtakarításunk értéke, ha 100 Ft induló összeget 2 évre kötünk le, a betéti kamat mértéke 5%, és kamatos kamatozást használunk?

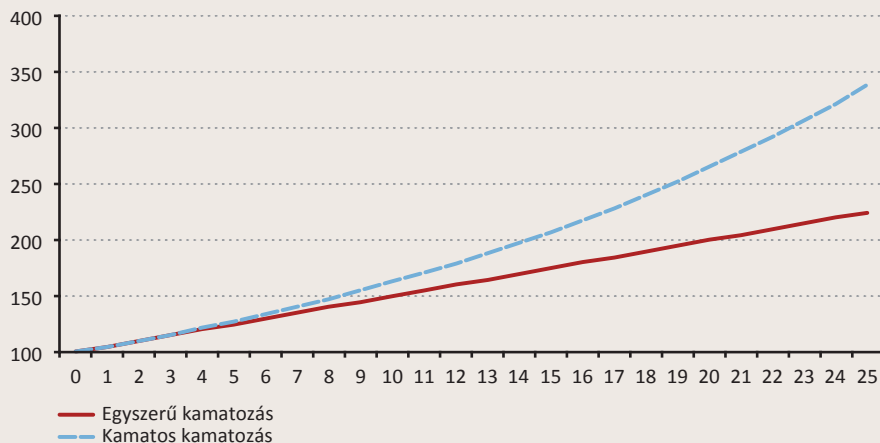
$$FV = 100 \cdot (1 + 0,05)^2 = 110,25$$



Megfigyelhetjük, hogy az egyszerű kamatozással szemben az első évben kapott 5 Ft kamat már a második évben 1 évre lekötésre kerül, és azon is keresünk további kamatot.

4. ábra

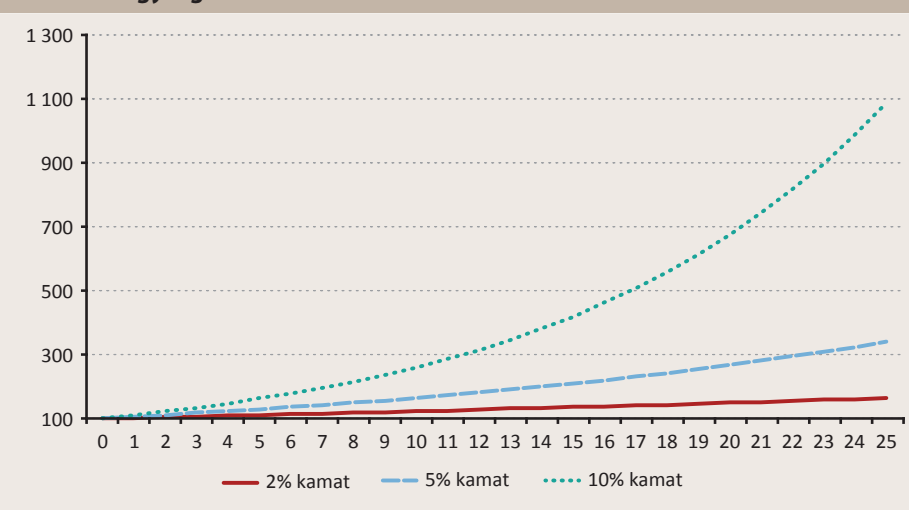
Az egyszerű és kamatos kamatozás hatása a befektetés értékére



A differencia mértéke a kamat nagyságával és a befektetési időtartam hosszával növekszik, mégpedig exponenciális arányban.

5. ábra

A kamat nagyságának hatása a befektetés értékére



A kamatozás periódusa nem csak 1 év lehet. Az amerikai kötvénypiacon például az általános piaci konvenció a féléves kamatfizetési gyakoriság. A fenti példánál maradva, a 100 Ft, illetve az USA piacain 100 dollár névértékre fizetett 5 százalékos kamat két részletben kerül kifizetésre: félévkor 2,50 dollár, majd év végén újabb 2,50 dollár. Értelmszerűen, az évközben kapott kamat már az év második felében is befektethető, és további hozam realizálható.

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{nm}$$

4. példa: Kamatos kamat féléves kamatfizetés mellett

Mennyi lesz a megtakarításunk értéke, ha 100 Ft induló összeget 2 évre kötünk le, a betéti kamat mértéke 5%, amely féléves gyakorisággal kerül kifizetésre?

$$FV = 100 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^{2 \cdot 2} = 110,38$$

A kamatfizetés gyakorisága persze tovább is növelhető. Amennyiben a fenti példában negyedéves kamatfizetési gyakoriságot feltételezünk, akkor már

110,45 forintra nő a megtakarításunk értéke a második év végére. A kamatfizetés történhetne akár naponta is, és akkor az első napra kapott kamatot már a második nap újra be tudnánk fektetni. A gondolatmenetet továbbgondolva eljutunk a folytonos kamatozás koncepciójához. Ekkor tulajdonképpen azt feltételezzük, hogy minden időpillanatban (folytonosan) sor kerül egy kicsi kamat kifizetésére. Maga a kamatfizetés természetesen a mindennapi életben nem kivitelezhető, azonban a folytonos kamatozás koncepciójának nem csak elméleti haszna van, ugyanis számos pénzügyi termék (pl. opciók) árazásánál használják.

$$FV = PV \cdot e^{m \cdot 2}$$

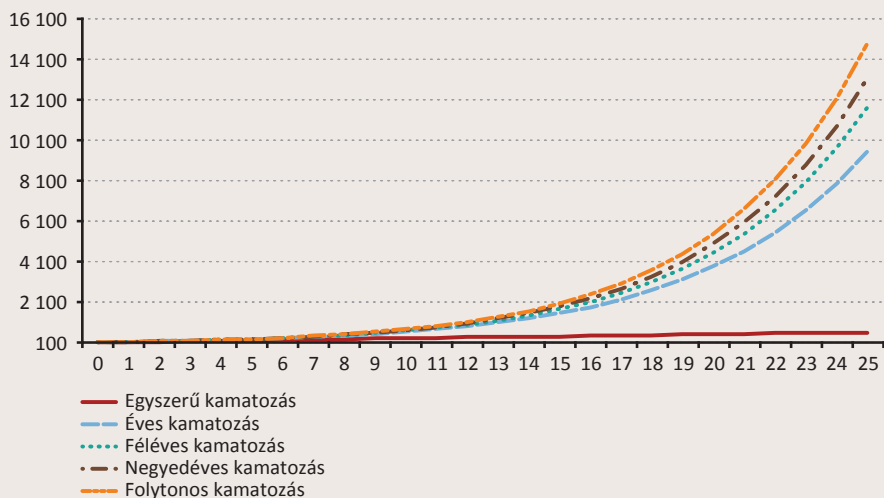
5. példa: Folytonos kamatfizetés

Mennyi lesz a megtakarításunk értéke, ha 100 Ft induló összeget 2 évre kötünk le, a betéti kamat mértéke 5%, és folytonos kamatfizetést feltételezünk?

$$FV = 100 \cdot e^{0,05 \cdot 2} = 110,517$$

6. ábra

A kamatfizetés gyakoriságának hatása a befektetés értékére



² Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$.

4. Jelenérték-számítás

4.1. A jelenérték számítása

Két különböző időpontban érkező cash flow értéke nem feltétlenül egyezik meg egymással. Egy jövőben kapott összeget ma nem tudunk befektetni, így elesünk a jövőbeli időpontig potenciálisan felhalmozható hozamoktól. Így egy jövőbeli pénzáramlás esetén úgy kell gondolkodnunk, hogy mekkora hozamot kereshetnénk meg azon a befektetett tőkén, ha ma rendelkezésünkre állna. Egy jövőbeli pénzáramlás T_0 időpontra, vagyis a mai napra számolt értéke a jelenérték. Magát a jelenérték-számítást diszkontálásnak is nevezzük.

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n}$$

6. példa: Jelenérték-számítás

Mekkora egy 1 év múlva érkező 100 Ft pénzáramlás jelenértéke, ha a kamatláb 5%?

$$PV = \frac{100}{(1+0,05)^1} = 95,24$$

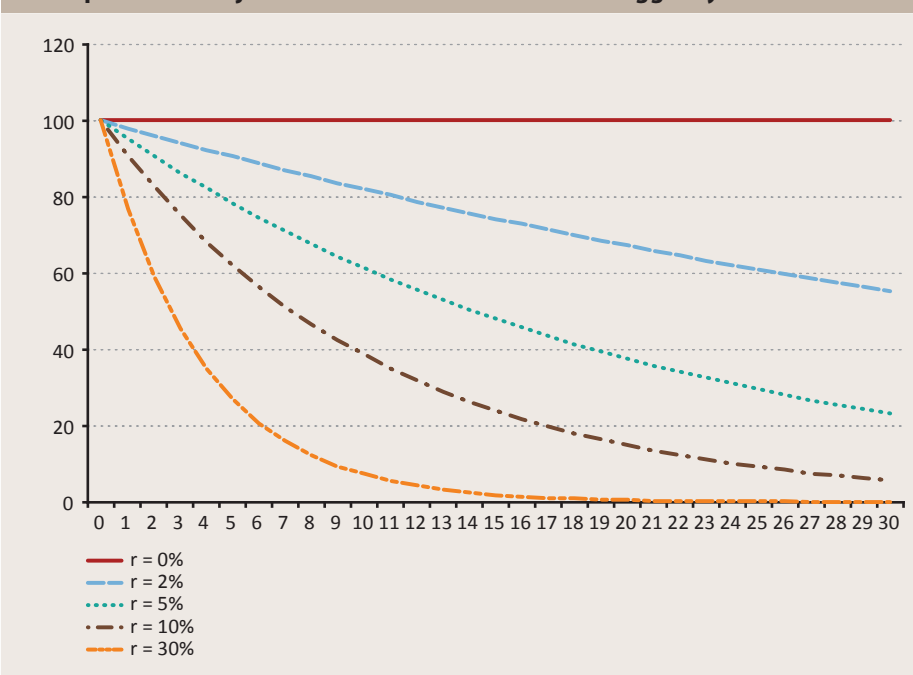
Mekkora egy 2 év múlva érkező 100 Ft pénzáramlás jelenértéke, ha a kamatláb 5%?

$$PV = \frac{100}{(1+0,05)^2} = 90,703$$

Adott kamatláb mellett minél távolabbi egy pénzáramlás, annál kisebb a jelenértéke, és adott időtáv mellett pedig minél nagyobb a kamatláb, annál kisebb a jelenérték.

7. ábra

100 Ft pénzáramlás jelenértéke az idő és a kamatláb függvényében



A 7. ábra szemlélteti a fenti összefüggést, hogy hogyan alakul egy jövőbeli 100 Ft cash flow jelenértéke annak függvényében, hogy időben milyen távoli pénzáramlásról beszélünk, és hogy milyen kamatlábat használunk a diszkontáláshoz. Értelemszerűen nullaszázalékos kamatláb mellett egy jövőbeli pénzáramlás jelenértéke megegyezik a pénzáramlás nominális értékével.

Éven belüli pénzáramlás esetén egyszerű kamatozást alkalmazunk a jelenérték számításához.

$$PV = \frac{FV}{\left(1 + r \cdot \frac{\text{days}}{\text{yr}}\right)}$$

7. példa: Jelenérték-számítás éven belüli pénzáramlás esetén

Mekkora egy 3 hónap múlva érkező 100 Ft pénzáramlás jelenértéke, ha a kamatláb 5%?

$$PV = \frac{100}{\left(1 + 0,05 \cdot \frac{90}{360}\right)} = 98,765$$

A jelenérték-számítás képletében a tényezőt, ami a jelenértéket (PV) és a jövőértéket (FV) összeköti, diszkontfaktornak nevezzük. Erre tekinthetünk úgy is, hogy mennyi egy adott jövőbeli időpontban esedékes 1 Ft cash flow jelenértéke. Értelemszerűen bármilyen cash flow jelenértéke ezzel a számmal megszorozva kiszámítható.

$$DF = \frac{1}{(1+r)^n}$$

1. táblázat

Diszkontfaktor – 1 Ft jelenértéke

| | | Kamatláb | | | | | | | | | | | | | | |
|------|----|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | | 1% | 2% | 3% | 4% | 5% | 6% | 7% | 8% | 9% | 10% | 11% | 12% | 13% | 14% | 15% |
| Évek | 1 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,96 | 0,95 | 0,94 | 0,93 | 0,93 | 0,92 | 0,91 | 0,90 | 0,89 | 0,88 | 0,88 | 0,87 |
| | 2 | 0,98 | 0,96 | 0,94 | 0,92 | 0,91 | 0,89 | 0,87 | 0,86 | 0,84 | 0,83 | 0,81 | 0,80 | 0,78 | 0,77 | 0,76 |
| | 3 | 0,97 | 0,94 | 0,92 | 0,89 | 0,86 | 0,84 | 0,82 | 0,79 | 0,77 | 0,75 | 0,73 | 0,71 | 0,69 | 0,67 | 0,66 |
| | 4 | 0,96 | 0,92 | 0,89 | 0,85 | 0,82 | 0,79 | 0,76 | 0,74 | 0,71 | 0,68 | 0,66 | 0,64 | 0,61 | 0,59 | 0,57 |
| | 5 | 0,95 | 0,91 | 0,86 | 0,82 | 0,78 | 0,75 | 0,71 | 0,68 | 0,65 | 0,62 | 0,59 | 0,57 | 0,54 | 0,52 | 0,50 |
| | 6 | 0,94 | 0,89 | 0,84 | 0,79 | 0,75 | 0,70 | 0,67 | 0,63 | 0,60 | 0,56 | 0,53 | 0,51 | 0,48 | 0,46 | 0,43 |
| | 7 | 0,93 | 0,87 | 0,81 | 0,76 | 0,71 | 0,67 | 0,62 | 0,58 | 0,55 | 0,51 | 0,48 | 0,45 | 0,43 | 0,40 | 0,38 |
| | 8 | 0,92 | 0,85 | 0,79 | 0,73 | 0,68 | 0,63 | 0,58 | 0,54 | 0,50 | 0,47 | 0,43 | 0,40 | 0,38 | 0,35 | 0,33 |
| | 9 | 0,91 | 0,84 | 0,77 | 0,70 | 0,64 | 0,59 | 0,54 | 0,50 | 0,46 | 0,42 | 0,39 | 0,36 | 0,33 | 0,31 | 0,28 |
| | 10 | 0,91 | 0,82 | 0,74 | 0,68 | 0,61 | 0,56 | 0,51 | 0,46 | 0,42 | 0,39 | 0,35 | 0,32 | 0,29 | 0,27 | 0,25 |

Például 1 év múlva esedékes 1 Ft jelenértéke 1 százalékos kamatláb mellett 99 fillér, míg 15 év múlva esedékes 1 Ft jelenértéke 15 százalékos kamatláb mellett már csak 25 fillér. Egy cash flow időbeli távolodása és a kamatláb emelkedése gyorsuló mértékben csökkenti a jelenértéket.

4.2. Diszkontszámítás

Vannak olyan instrumentumok is, amelyek esetében nem a kamatlábat, hanem az ún. diszkontlábat jegyzik. A jelenértéket pedig úgy kapjuk, hogy a jövőértékből levonásra kerül a diszkont mértéke.³

$$PV = FV \cdot (1 - d)$$

Mivel ezek tipikusan éven belül lejáró pénzüpi instrumentumok (pl. amerikai diszkont kincstárjegy, *T-bill*), ezért egyszerű kamatszámítást alkalmazva a futamidőre arányosítjuk a diszkontot.

$$PV = FV \cdot \left(1 - d \frac{\text{days}}{\text{yr}}\right)$$

8. példa: Diszkontláb alkalmazása

Egy 100 dollár névértékű amerikai diszkont kincstárjegyet 2,53 százalékos diszkontlábbal jegyeznek. A lejáratig hátralévő idő 83 nap. Mennyi a papír ára?

$$PV = 100 \cdot \left(1 - 0,0253 \cdot \frac{83}{360}\right) = 99,417$$

4.3. Kötvényárfolyam-számítás

A kötvény típusú eszközök árfolyamának kiszámításához az előzőekben tárgyalt jelenérték-számítást használjuk. Tulajdonképpen bármilyen eszköz esetében felmerül az értékelés során, hogy az adott eszköz milyen jövőbeli pénzáramlást biztosít, még akkor is, ha egy eszköz értékét nemcsak ezek a pénzáramlások határozzák meg. Egyes eszközök (pl. műtárgyak) esetén nincs is pénzáramlás, amit diszkontálhatnánk, az eszköznek mégis van értéke, időnként gazdát is cserél, és nem nulla áron.

³ Hasonlóan ahhoz, ahogy a kiskereskedelmi forgalomban a mindennapokban szembesülünk vele.

Egy eszköznek lehet használati, esztétikai stb. értéke, de a pénzügyi eszközök piacán lényegében csak az számít, hogy mikor és mekkora pénzáramlásra számítunk, illetve hogy milyen kamatlábat használunk az adott pénzáramlás diszkontálásához. A pénzügyi eszközökön belül pedig a *fixed income* típusú eszközök a legegyszerűbben értékelhető eszközök, mivel a pénzáramlás előre ismert, vagy legalábbis előre ismert szabályok vonatkoznak rá.⁴

A legegyszerűbb instrumentum az ún. zéró-kupon kötvény, amelynek egyetlen cash flow-ja van. Az éven belül lejáró értékpapírok esetében egyszerű, míg az éven túl lejáró papírok esetében kamatos kamatozást tételezünk fel a diszkontálás során.

9. példa: Zéró-kupon kötvény ára

Mi az ára egy 92 nap múlva lejáró, 100 Ft névértékű diszkont kincstárjegynek, ha a diszkontáláshoz használta kamatláb 2,15%?

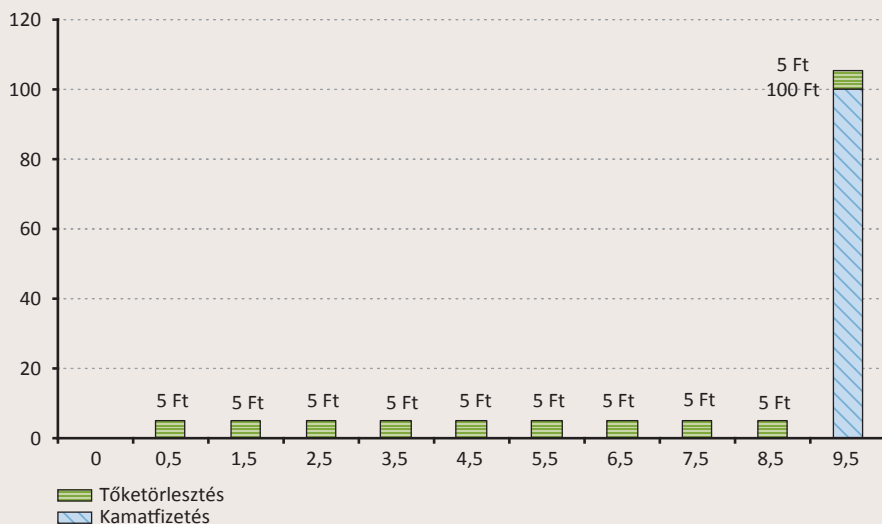
$$P_0 = \frac{100}{\left(1 + 0,0215 \cdot \frac{92}{360}\right)} = 99,4536$$

Mi történik, ha nem egyetlen cash flow-t kell lediszkontálni? A kötvények úgynevezett kamatozó instrumentumok, és a kamatok kifizetésére rendszeres időközönként kerül sor a lejárat előtt, majd lejáratkor történik a tőke törlesztése.

⁴ Az árfolyamszámítás elveinek és folyamatának megértéséhez jelentős egyszerűsítésekkel élünk. Egyrészt a beérkező pénzáramlással kapcsolatban bizonyosságot tételezünk fel. Az biztos, hogy egy 100 Ft névértékű és 5 százalékos kuponú kötvény évente 5 Ft kupont kell, hogy fizessen egészen a lejáratig, de még a kockázati szempontból egyébként biztonságosnak tekintett szuverén kibocsátók is hordoznak nem fizetési kockázatot, vagyis a gyakorlatban abban azért nem lehetünk teljesen biztosak, hogy az 5 Ft kupont évente és a 100 Ft névértéket lejáratkor meg is kapjuk. A másik egyszerűsítő feltételezés, amivel ezen a ponton élünk, hogy ugyanazt a kamatlábat (*r*) használjuk minden jövőbeli cash flow diszkontálásához.

8. ábra

Egy 5% fix, éves kuponú, 10 éves futamidejű, 100 Ft névértékű kötvény pénzáramlása



Erre a 10 elemű pénzáramlásra tekinthetünk úgy, mintha 10 darab különálló cash flow lenne, és egyenként diszkontálnánk le őket. Majd a 10 darab jelenértéket összegezzük, és megkapjuk, hogy a teljes pénzáramlásnak mennyi a jelenértéke.

A kalkulációhoz használható lehető legáltalánosabb képlet a következő:

$$P_0 = \sum_{n=1}^N \frac{CF_n}{(1+r)^n}$$

Egy kötvény esetében elkülöníthetjük a kuponfizetéseket és a tőketörlesztést. Figyeljük meg, hogy egy zéró-kupon kötvény esetében a kuponfizetések értéke nulla, és nem marad más, mint a lejáratkor esedékes tőketörlesztés!

$$P_0 = \frac{CF_1}{(1+r)} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \frac{CF_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{CF_N}{(1+r)^N} + \frac{M}{(1+r)^N} = \sum_{n=1}^N \frac{CF_n}{(1+r)^n} + \frac{M}{(1+r)^N}$$

Továbbá az ún. fix kamatozású kötvények esetében az évente esedékes kupon összege nem változik, ezért:

$$P_0 = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \dots + \frac{C}{(1+r)^N} + \frac{M}{(1+r)^N}.$$

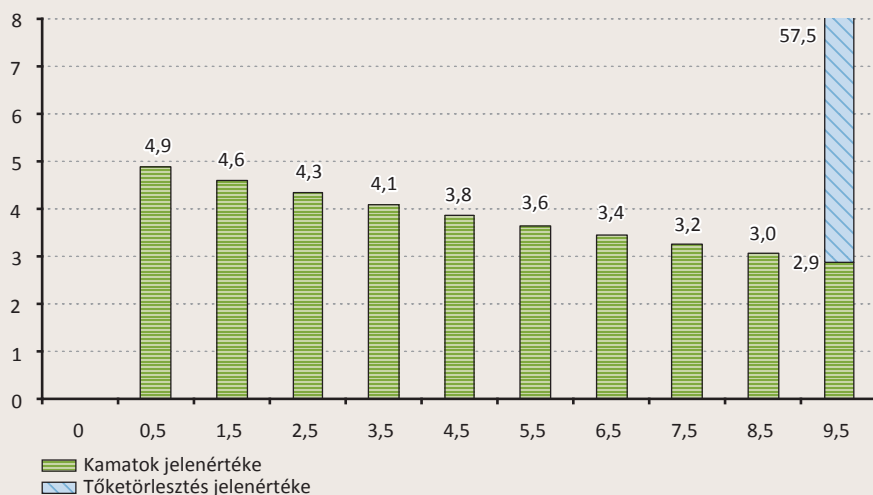
10. példa: Fix kuponú kötvény árfolyama

Mennyi az ára egy 5 százalékos fix, éves kuponú, 10 éves futamidejű, 100 Ft névértékű kötvénynek 6%-os kamatláb mellett?

$$P_0 = \frac{5}{(1+0,06)} + \frac{5}{(1+0,06)^2} + \frac{5}{(1+0,06)^3} + \dots + \frac{5}{(1+0,06)^{10}} + \frac{100}{(1+0,06)^{10}} = 4,7 + 4,4 + 4,2 + 4,0 + 3,7 + 3,5 + 3,3 + 3,1 + 3,0 + 2,8 + 55,8 = 92,6$$

9. ábra

Az egyes pénzáramlások jelenértéke 6% kamatláb mellett



5. Hozamszámítás

A hozam a befektető haszna. Ez a tényleges eredmény – jó esetben nyereség –, amit egy befektetésen elérünk. Ebben az értelemben nem feltétlenül van közvetlen kapcsolat a kamat és a hozam között. A kamatot a névértékre vetítve számoljuk (kupon), és egy befektetés végső eredménye ezzel nem feltétlenül azonos.

Amikor beruházásokról gondolkodunk, akkor azt a döntést kell meghozni, hogy megéri-e elindítani azt. Például megéri-e megvásárolni egy gépet, hogy aztán az azzal gyártott eszközök értékesítésével nyereségre tegyünk szert. A projekt értékeléséhez készített pénzügyi terv figyelembe veszi, hogy mennyi lesz a várható nettó bevétel, azaz a projektből származó pénzáramlás, mekkora a kezdeti beruházás értéke, illetve hogy mekkora a projekt finanszírozásának költsége. Ez utóbbi a pénzáramlás diszkontálásához használt kamatláb.

5.1. Nettó jelenérték

Tulajdonképpen minden befektetés vagy beruházás esetében az eszközből vagy projektből származó pénzáramlás jelenértékét hasonlítjuk össze a befektetés kezdeti értékével. A kettő közötti differencia a nettó jelenérték. Amennyiben a nettó jelenérték pozitív, azaz nagyobb, mint nulla, akkor érdemes a befektetést eszközölni. Amennyiben negatív, akkor nem.

$$NPV = CF_0 + \sum_{n=1}^N \frac{CF_n}{(1+r)^n}$$

11. példa: Beruházás nettó jelenértéke

Egy beruházás értékelésénél a következő információk állnak rendelkezésre. A megvásárolni kívánt gép értéke 250 Ft. A géppel gyártott áruk értékesítése a gyártási és értékesítési költségek levonása után rendre nettó 80, 100 és 120 Ft adózás utáni eredményt ad a következő 3 évben. Kérdés, hogy megéri-e elindítani ezt a beruházást, ha a diszkontáláshoz használt kamatláb 6 százalék.

$$NPV = \left(-250 + \frac{80}{(1+0,06)} + \frac{100}{(1+0,06)^2} + \frac{120}{(1+0,06)^3} \right) = 15,2$$

Mivel a nettó jelenérték nagyobb, mint nulla ($NPV > 0$), azért a válasz az, hogy igen, a beruházás megéri.

5.2. Belső megtérülési ráta

A fenti képletet elemezve belátható, hogy ahogy nő a diszkontáláshoz használt kamatláb, úgy csökken az egyes pénzáramlások jelenértéke, és ezzel együtt a teljes projekt nettó jelenértéke. Van egy pont, ahol a nettó jelenérték pontosan nulla. Az ehhez tartozó kamatlábat nevezzük belső megtérülési rátának (IRR , *internal rate of return*).

$$NPV = CF_0 + \sum_{n=1}^N \frac{CF_n}{(1+IRR)^n} = 0$$

A belső megtérülési rátára egyfajta break-even rátaként tekinthetünk, amely további információval szolgál egy befektetés értékelésekor a nettó jelenértéken túl. A nettó jelenérték ugyanis „csak” egy nominális érték, önmagában nem sokat mond. Nehéz megítélni, hogy a fenti példában kapott 15,2 Ft végeredmény milyen minőséget takar, vagyis hogy ez mennyire „jó” eredmény, sok vagy kevés.

12. példa: Beruházás belső megtérülési rátája

Egy beruházás értékelésénél a következő információk állnak rendelkezésre. A megvásárolni kívánt gép értéke 250 Ft. A géppel gyártott áruk értékesítése a gyártási és értékesítési költségek levonása után rendre nettó 80, 100 és 120 Ft éves adózás utáni eredményt ad a következő 3 évben. Mennyi a projekt belső megtérülési rátája?

$$0 = (-250) + \frac{80}{(1+IRR)} + \frac{100}{(1+IRR)^2} + \frac{120}{(1+IRR)^3}$$
$$IRR = 0,0905$$

Azaz a projekt megtérülési rátája 9,05%.

A belső megtérülési rátát a projekt tőkeköltségéhez hasonlítva tehát újabb támpontot kapunk. A pozitív nettó jelenértékkel ekvivalens állítás, hogy a projektet megéri elindítani, amennyiben a projekt belső megtérülési rátája magasabb a tőkeköltségnél (jelen példában 9,05 százalék a 6 százalékkal szemben). A kapcsolat irányán túl azonban annak mértéke is beszédes, nem mindegy ugyanis, hogy mennyivel nagyobb a megtérülési ráta a becsült tőkeköltségnél.⁵

5.3. Lejáratig számított hozam

A pénzügyi befektetések értékelését is hasonló keretrendszer támogatja. Van egy megfigyelt piaci ár, ahol megvásárolhatunk egy eszközt, és kell, hogy legyen feltételezésünk az eszköz által generált pénzáramlásra, valamint a tőkeköltségre (lehetőség költség) nézve. A pénzáramlásra és a diszkontáláshoz használt kamatlábra vonatkozó becslésből származtatható az eszköz becsült értéke, amit a piaci árhoz viszonyítva eldönthetjük, hogy megéri-e az adott eszközbe fektetni. Másként fogalmazva: kiszámolhatjuk az eszköz belső meg-

⁵ A különbség minőségi értékelése meghaladja az anyag kereteit. Az értékelés természetesen nem független a kontextustól (pl. a piaci környezettől), tudnunk kell, hogy miért és milyen feltételezésekkel élünk például a pénzáramlások vagy a tőkeköltség becslésénél.

térülési rátáját, és aztán ezt viszonyíthatjuk alternatív befektetési eszközökön elérhető hozamhoz.

Egy kötvény esetében a fenti képletben használt belső megtérülési rátát lejáratig számított hozamnak (YTM, *yield to maturity*) nevezzük.

$$P_0 = \sum_{n=1}^N \frac{CF_n}{(1+YTM)^n} + \frac{M}{(1+YTM)^N} = \frac{C}{(1+YTM)} + \frac{C}{(1+YTM)^2} + \dots + \frac{C}{(1+YTM)^N} + \frac{M}{(1+YTM)^N}$$

A kötvény árát a kezdeti beruházásnak (CF_0) tekintve, a lejáratig számított hozam mellett lesz a befektetés nettó jelenértéke nulla. Tulajdonképpen az eddig használt „kamatláb” (r) a lejáratig számított hozamnak felel meg.

13. példa: Lejáratig számított hozam

Mennyi a lejáratig számított hozama egy 100 Ft névértékű, 5 százalékos éves kuponú, 10 éves futamidejű kötvénynek, amelynek árfolyama ma 92,64 Ft?

$$92,64 = \frac{5}{(1+YTM)} + \frac{5}{(1+YTM)^2} + \dots + \frac{105}{(1+YTM)^{10}}$$

$$YTM = 0,06, \text{ azaz } 6\%$$

Amikor egy kötvény hozamáról beszélünk (amire a piaci jegyzések is vonatkoznak), akkor erről a lejáratig számított hozamról van szó. Azonban nagyon fontos megjegyezni, hogy a kötvény megvásárlásakor jegyzett hozam nem feltétlenül azonos a befektetés lejáratáig ténylegesen realizált hozammal (teljes hozam). Ebből a szempontból megtévesztő lehet, hogy lejáratig számított hozamról beszélünk, mert a valóságban elért hozam ettől akár lényegesen is eltérhet.⁶

Ennek az egyik legfontosabb oka, hogy a fenti képletben azt feltételezzük, hogy a futamidő alatt realizált cash flow-k újrabefektetése is ezen a rátán, vagyis a lejáratig számított hozamon történik. Márpedig a valóságban semmi nem biztosítja, hogy valóban ugyanolyan piaci körülmények lesznek a futamidő alatt, mint voltak a befektetés pillanatában.

⁶ Több okból is eltérhet, például azért, mert időközben a kibocsátó csődbe megy, de itt most a technikai okokra koncentrálnak a kötvényárazás matematikájának megértése érdekében.

5.4. Teljes hozam

A teljes hozam (*holding period return*, HPR) a tartási periódus alatt realizált összes hozamot jelenti. Ez a befektető tényleges hozama.

$$HPR = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

14. példa: Teljes hozam kalkulációja

A befektető év elején vásárol egy 2 éves futamidejű kötvényt 97,50 Ft-ért, ami a 2. év végi lejáratkor a 100 Ft-os névértéket fizeti ki. Feltéve, hogy a futamidő alatt a kötvényből nem származott más cash flow, mennyi volt a befektető teljes hozama az időszak alatt?

$$HPR = \frac{100 - 97,50}{97,50} = 0,0256$$

A befektető teljes hozama 2,56% volt.

A fenti példa nem veszi figyelembe, hogy milyen hosszú volt a befektetési időtáv. A befektetés időtartama lehetett volna 5 év is, akkor is ugyanennyi lett volna a teljes hozam. Ahhoz, hogy a különböző befektetéseket össze tudjuk hasonlítani („almát az almával”), a tartási periódus alatt elért hozamok egyenértékesét kell alapul vennünk. Ez az egyenértékes pedig az évesített hozam.

$$(1 + HPR) = (1 + r)^n$$

15. példa: Évesített teljes hozam

A fenti példa adatait használva mennyi a befektetés évesített hozama?

$$1 + 0,0256 = (1 + r)^2$$

$$r = 0,0127$$

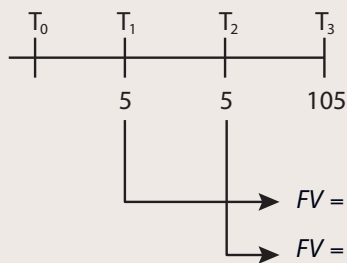
A befektetés éves hozama 1,27% volt.

A teljes 2 év alatt 2,56 százalék hozamot értünk el, ami azzal ekvivalens, mintha mindkét évben rendre 1,27 százalék lett volna a hozamunk. Hasonlóképpen számolunk akkor is, amikor egy nem zéró-kuponú papír teljes hozamát akarjuk meghatározni. Vesszük a futamidő alatt kapott cash flow-kat, kiszámoljuk, hogy adott újrabefektetési ráta mellett mennyi lesz a befektetésünk teljes értéke a futamidő végén, majd ezt az összeget vetítjük az induláskori befektetés értékére. Végül évesítjük a kapott teljes hozamot.

16. példa: Évesített teljes hozam számítása

Vegyünk egy 3 éves futamidejű, évente 5 százalék kuponú, 100 Ft névértékű kötvényt. Mekkora a futamidő alatt elért teljes évesített hozam 2, 5 és 8 százalék újrabefektetési ráta mellett, ha az induláskori árfolyam 100 Ft volt?

| Év | Cash flow | Future value (CFi) | | |
|----|--------------------|--------------------|---------|---------|
| | | 2% | 5% | 8% |
| 0 | -100,00 | | | |
| 1 | 5,00 | 5,20 | 5,51 | 5,83 |
| 2 | 5,00 | 5,10 | 5,25 | 5,40 |
| 3 | 105,00 | 105,00 | 105,00 | 105,00 |
| | Teljes FV (Σ) | 115,302 | 115,763 | 116,232 |
| | HPR | 15,30% | 15,76% | 16,23% |
| | Évesített hozam, r | 4,86% | 5,00% | 5,14% |



$$HPR = \frac{115,30 - 100}{100} = 0,1530$$

$$(1 + 0,1530) = (1 + r)^3$$

$$r = 0,0486, \text{ azaz } 4,86\%$$

$$FV = 5 \cdot (1 + 0,02)^2 = 5,20$$

$$FV = 5 \cdot (1 + 0,02) = 5,10$$

Mint látható, a különböző újrabefektetési ráták mellett pénzünk különböző mértékben kamatozik fel. Természetesen az egyes években az újrabefektetési ráta is változhat, ahogy egy gazdaságban változik a hozamkörnyezet.

5.5. A hozam-ár kapcsolat

Ár fel, hozam le. Vagyis egy kötvény ára és hozama között inverz, azaz fordított kapcsolat van. Ahogy azt korábban megállapítottuk: amennyiben magasabb kamatot használunk a jövőbeli pénzáramlás diszkontálásához, akkor annak jelenértéke alacsonyabb lesz (ld. 7. ábra).

17. példa: Kötvény árfolyamának alakulása a hozam függvényében

Számítsa ki egy 10 év futamidejű, 5 százalékos éves kuponú kötvény árárt 3,00%, 4,00%, 4,98%, 4,99%, 5,00%, 5,01%, 5,02%, 6,00% és 7,00% hozamok mellett!

| Hozam | Ár |
|-------|--------|
| 3,00% | 117,06 |
| 4,00% | 108,11 |
| 4,98% | 100,15 |
| 4,99% | 100,08 |
| 5,00% | 100,00 |
| 5,01% | 99,92 |
| 5,02% | 99,85 |
| 6,00% | 92,64 |
| 7,00% | 85,95 |

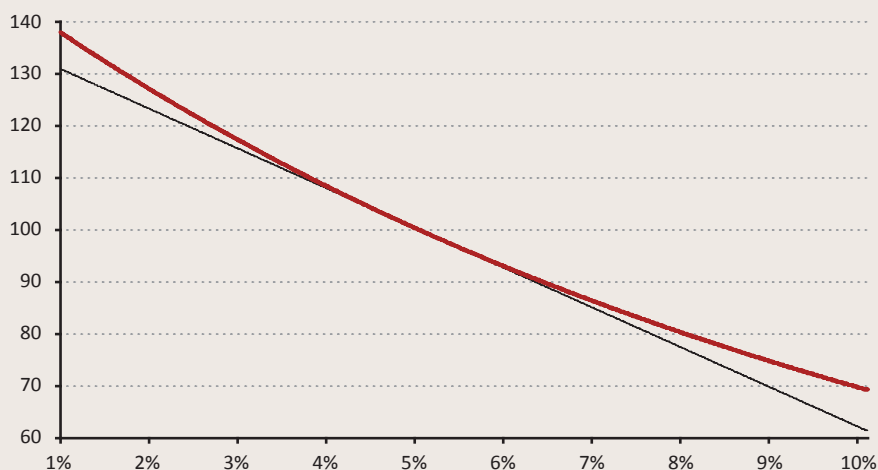
A fenti kalkulációból nemcsak azt olvashatjuk ki, hogy a hozam emelkedésekor csökken az ár, illetve a hozam csökkenésekor emelkedik az ár (vagyis hogy ez a kapcsolat inverz), hanem azt is, hogy a változás mértéke nem egyenletes. Matematikai kifejezéssel: nem lineáris.⁷ Vagyis egységnyi hozam csökkenésre

⁷ Egy lineáris függvény (összefüggés) esetében a magyarázó változó egységnyi változására a függő változó mindig ugyanolyan mértékben változik. A valóságban kevés ilyen összefüggés létezik, de sokszor két változó kapcsolata jól leírható lineáris egyenlettel (*lineáris regresszió*). Mint a későbbiekben látni fogjuk, a hozam és ár kapcsolata a hozam kismértékű változása esetén jól közelíthető lineáris módszerrel is, de fontos megérteni, hogy ebben a kapcsolatban nemcsak a változás mértéke számít (ezt hívjuk a függvény első deriváltjának), hanem a változás mértékének változása is (ezt hívjuk a függvény második deriváltjának).

az ár egyre gyorsabban növekszik, míg egységnyi hozam emelkedésre az ár egyre lassabban csökken.

Például amennyiben a hozam 5 százalékról 4 százalékra csökken, akkor az ár 8,11 Ft-tal emelkedik (100-ról 108,11-re), és további 1 százalékpontos hozam-csökkenésre az ár már 8,95 Ft-tal nő (108,11-ről 117,06-ra). Hozamemelkedés esetén az ár egyre kisebb és kisebb mértékben esik: 1 százalékpontos változásra előbb 7,36, majd 6,69 Ft-tal. Tehát a változás üteme is változik, növekedés esetén gyorsuló ütemben nő, csökkenés esetén pedig lassuló ütemben csökken.

10. ábra
A hozam és ár változásának kapcsolata

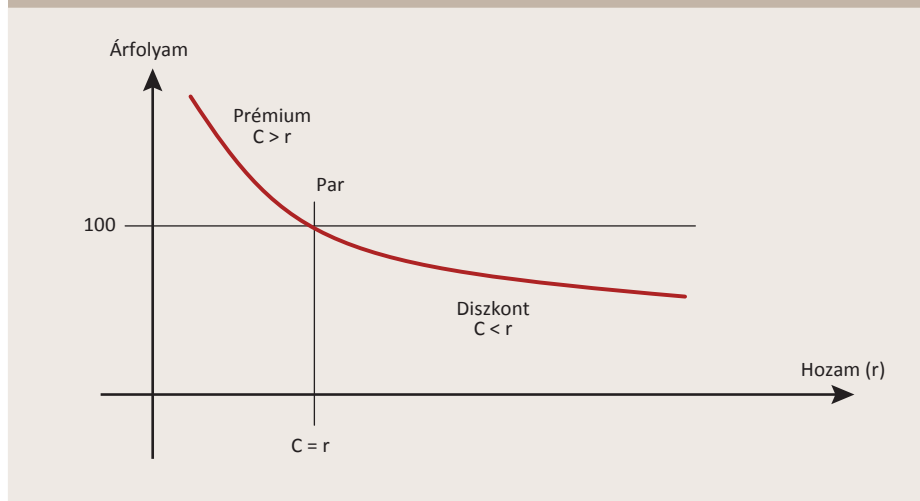


A 10. ábra a hozam-ár görbe mellett illusztrációs céllal tartalmazza a képzeletbeli lineáris egyenest is, amihez képest érzékelhető, hogy „nyílik az olló”, hogyan nő a különbség a lineáris árváltozás feltételezése és a korábban bevezetett képlet alapján kalkulált ár között.

Az ábrából még egy összefüggés kiolvasható. Amikor a kötvény lejáratig számított hozama (vagyis a pénzáramlás diszkontálásához használt kamatláb) egyenlő a kötvénykupon rátájával (ebben az esetben 5 százalék), akkor a kötvény árfolyama pontosan megegyezik a névértékkel, ami jelen esetben 100.

Ezt hívják *par* árfolyamnak. Amennyiben a kötvény árfolyama a névérték felett van, akkor a kötvény *prémiummal* kereskedik, amikor pedig a névérték alatt, akkor a kötvény *diszkonttal* kereskedik.⁸

11. ábra
Diszkont, par, prémium



5.6. „Pull-to-par”

Minden eszköz esetén alapvetően két forrásból származik az eszköz teljes hozama, és az eszköz értékelése során ezekből a forrásokból származó pénzáramlásokat kell beazonosítanunk. Az egyik forrás lehet a befektetés által biztosított jövedelem, mint egy ingatlan esetén a bérleti díj vagy egy részvény esetén az osztalék. A hozam másik forrása az adott eszköz árfolyamában bekövetkező árfolyamváltozás.

Ennek megfelelően egy kötvény teljes hozama is két részből áll: 1) a rendszeres időközönként fizetett kupon és 2) az árfolyamváltozás, ami lejáratig

⁸ Ezen a ponton érdemes tisztázni, hogy a „diszkont kötvény” kifejezés két jelentést is takar. Az egyik a diszkontlábbal vagy diszkonttal jegyzett kötvény (például az amerikai diszkont kincstárjegy), ahol a jelenérték számításához nem a hozammal osztunk, hanem a névértékből a diszkontot vonjuk ki. A másik pedig a *par* alatti árfolyamú kötvény, ami független attól, hogy az történetesen kupon nélküli (zéró-kupon) vagy rendszeres kupont fizető kötvényről van szó.

történő tartás esetén az induló árfolyam és a lejáratkori kifizetett névérték differenciája.⁹

$$r = C + \Delta P$$

Utóbbit legegyszerűbb megérteni egy zéró-kupon kötvény árának alakulásával, ahol nincs kupon, és a hozam egyetlen forrásból származik.¹⁰

18. példa: Zéró-kupon kötvény árának alakulása

Számolja ki egy 5 éves zéró-kupon kötvény árát 5, 4... stb. év hátralévő futamidővel 5 százalékos hozam mellett!

| Hátralévő futamidő (év) | Árfolyam |
|-------------------------|----------|
| 5 | 78,35 |
| 4 | 82,27 |
| 3 | 86,38 |
| 2 | 90,70 |
| 1 | 95,24 |
| 0 | 100,00 |

Változatlan piaci hozamszint mellett is, pusztán az idő múlásával a kötvény árfolyama folyamatosan emelkedik, és közelít a névérték felé. Ez az emelkedés mechanikusan következik be azért, hogy időben egyre közelebb kerülünk a kötvény által biztosított egyetlen cash flow-hoz, aminek így a jelenértéke folyamatosan emelkedik. Ez a *pull-to-par*, vagyis az árfolyam névértékhez történő közeledésének („húzás”) jelensége.

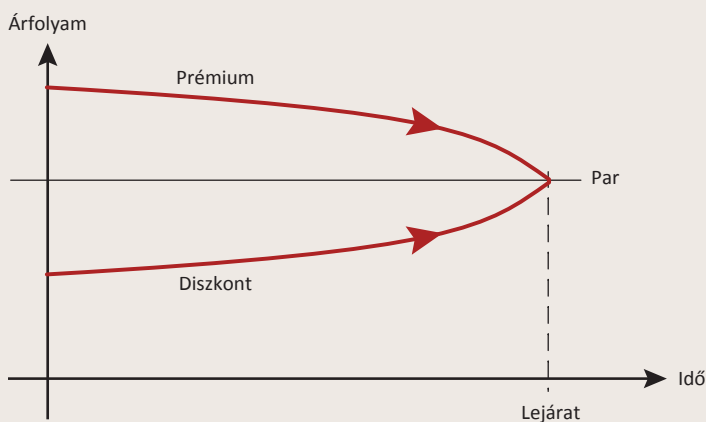
A *pull-to-par* jelenség ugyanígy működik a kuponos kötvényeknél is, azzal a különbséggel, hogy ott a kuponráta és a lejáratig számított hozam viszonya befolyásolja, hogy az árfolyam névértékhez történő közeledése pozitívan

⁹ Az utoljára kifizetett névérték jelenértéke a kifizetés előtti időpillanatban megegyezik a névértékkel, mivel $n=0$ esetén $(1+r)^0=1$. Továbbá itt nem foglalkozunk egy esetleges csödeseménnyel, amikor a kibocsátó nem teljesíti a kötvényszerződésben vállalt kötelezettségeit.

¹⁰ $C = 0$, ezért $r = \Delta P$.

vagy negatívan járul hozzá a teljes hozamhoz. A diszkonttal kereskedő papírok esetén a diszkont rész hozzáad a kupon jelentette hozamhoz ($\Delta P > 0$), a prémium erodálódása pedig „elvesz”, kiegyenlíti a lejáratig számított hozamszintnél magasabb kuponhozamot ($\Delta P < 0$).

12. ábra
A pull-to-par jelenség



5.7. Felhalmozott kamat

Az eddig használt jelenérték képlete tulajdonképpen mindig a kuponfizetés napjára számolja a kötvény árfolyamát, tehát mindig egész kuponperiódusokat vesz alapul. A képlet némi módosítást kíván ahhoz, hogy a valósághoz közelebb álló képet kapjunk. A valóságban a kötvényekkel ugyanis két kuponfizetés között is kereskednek, viszont a kuponfizetésre akkor nem kerül sor. Kuponfizetés mindig csak előre meghatározott napokon történik, pl. évente egyszer, és a kupon összegét az aktuális tulajdonosnak utalják. Kérdés, hogy a teljes kupon a legutolsó tulajdonost illeti-e meg, akkor is, ha az a kuponfizetés előtti napon vásárolta meg a kötvényt. A válasz az, hogy nem, a kupont arányosan kell „megosztani” a régi és az új tulajdonos között, mégpedig egyenletes, lineáris felhalmozódást feltételezve.

$$AI = C \cdot \frac{\text{legutolsó kupon fizetés óta eltelt napok száma}}{\text{kuponperiódus hossza}}$$

Az eladó kapja a legutóbbi kuponfizetés óta eltelt napokra eső kamatot, míg a kötvény vásárlójának a vásárlás után kezd el felhalmozódni a kamat. Erre az elszámolásra az adás-vétel pillanatában kerül sor, a vevő lényegében kifizeti az eladónak az addig felhalmozott kamatot, amit majd a legközelebbi kuponfizetéskor kap meg a kötvény kibocsátójától.

A piaci konvenció szerint a kötvényre jegyzett ár a felhalmozott kamat nélküli ár, az ún. nettó ár (*clean price*, azaz „tisztá” ár). Az elszámolásnál ehhez kerül hozzáadásra az addig felhalmozott kamat, és végül ez az összeg kerül átutalásra a kötvényért cserébe. Ez az ún. bruttó ár (*dirty price*, azaz „piszkos” ár).

A jelenérték-számítás során használt képlet általános alakja tetszőleges napra megadja a teljes cash flow jelenértékét, ami tartalmazza a felhalmozott kamatot, vagyis ez tulajdonképpen a bruttó ár.

$$P_0 = \frac{C}{(1+r)^1} + \frac{C}{(1+r)^{1+i}} + \frac{C}{(1+r)^{2+i}} + \dots + \frac{C}{(1+r)^{N-1+i}} + \frac{M}{(1+r)^{N-1+i}}$$

$$i = \frac{\text{legutolsó kuponfizetés óta eltelt napok száma}}{\text{kuponperiódus hossza}}$$

A kötvény pénzáramlásának jelenértéke két okból változik, illetve változhat egyik napról a másikra: 1) változik a lejáratig hátralévő futamidő (ez biztos), vagy 2) változik a hozam, azaz a diszkontáláshoz használt kamatláb (ez nem biztos). Az idő múlásának ütemét és mértékét pontosan ismerjük előre, könnyen kiszámítható, hogyan alakul ennek függvényében a kötvény árfolyama (a cash flow-k jelenértéke), így az is kiszámítható, hogy melyik nap mennyi lesz a felhalmozott kamat. Amiben nem lehetünk biztosak, hogy hogyan változik a piaci környezet, mennyi lesz a kötvénytől elvárt hozam, és hogy ennek következtében hogyan változik a kötvény nettó ára.

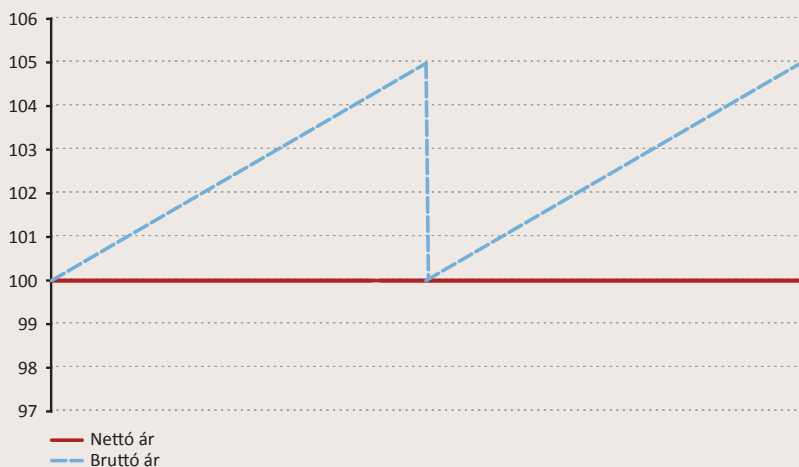
Pontosan ezért az a szokvány a kötvénypiacokon, hogy az árjegyzés a nettó árra vonatkozik, mert ebben fejeződik ki minden, ami bizonytalan. A könnyebb megértés kedvéért tegyük fel, hogy van egy állampapír, aminek a lejáratig számított hozama és kupon rátája megegyezik. Ekkor a kötvény árfolyama *par*.¹¹

¹¹ Egészen pontosan vagy a nettó ár lesz *par*, vagy a kuponforduló pillanatában lesz a nettó és a bruttó ár is *par*, mivel akkor a felhalmozott kamat nulla.

Ha ennek az állampapírnak a hozama nem változik egyik napról a másikra, mert például nem változnak olyan fundamentális tényezők, mint például a növekedési kilátások, infláció vagy egy ország hitelkockázatosságának mértéke, akkor nem változik a „tisztá” ára sem. Fontos megemlíteni, hogy amennyiben nem *par* kötvényről van szó, akkor a *pull-to-par* jelenség miatt mechanikusan változna a tiszta árfolyam is, de most így ettől a hatástól eltekinthetünk.

19. példa: A bruttó és nettó ár alakulása

Ábrázoljuk egy 2 év futamidejű, éves 5 százalékos fix kuponú kötvény bruttó és nettó árának alakulását, ha a 2 év folyamán a kötvény lejáratig számított hozama nem változik, és végig 5 százalék marad!



Lényegesen egyszerűbb az árjegyzés is, hiszen a „tisztá” ár, illetve annak változása kifejezi a hozam változását is egyben. A 19. példa mutatja, hogy a változatlan hozam változatlan „tisztá” árat jelent, ami jól kifejezi a fundamentumok változatlanságát, stabilitását is. Ezzel szemben a felhalmozott kamatot is tartalmazó „piszkos” árfolyam folyamatosan változik, miközben ez a változás mindössze a jelenérték-képlet mechanikus alkalmazását és kiszámítható alakulását takarja.

6. Kamatlábckockázat

A nettó és bruttó ár megértése után már csak arra koncentrálnunk, ami nem előre kalkulálható, ahol bizonytalansággal szembesülünk. A kötvény teljes értékét változtató tényezők közül kizárólag a kamatlábbal és annak hatásaival foglalkozunk.

Kamatlábckockázat alatt azt értjük, hogy a kamatláb változása miatt változik a kötvény árfolyama, illetve – mivel a kötvényeknél általánosabban is beszélhetünk kamatkockázatról – változik a befektetésünk értéke. Ezt a bizonytalanságot hívjuk kockázatnak. Ebben az értelemben a kockázat egy szimmetrikus tulajdonság, mivel semlegesek vagyunk abból a szempontból, hogy a kötvény értéke nő vagy csökken.¹² Azt vizsgáljuk, hogy mennyivel változik az érték adott feltételek mellett.

A pénzügyi instrumentumok árára többféle kockázati faktor hat, és ez elmondható a kötvényekre is. Azonban a kötvényeknél a leghangsúlyosabb kockázati faktor a kamatkockázat. Ha nagyon leegyszerűsítjük, akkor a jelenérték-képletben ez az egyetlen, kiszámíthatatlan módon mozgó „alkatrész”.¹³

A kockázatok mennyiségi meghatározásakor mindig azt nézzük, hogy az adott kockázati elem egységnyi változásakor mennyivel változik az eszköz ára, vagyis mennyire érzékeny az adott eszköz ára az adott kockázati tényezőre nézve. A kamatlábckockázat esetén ez azt jelenti, hogy a kamatláb egységnyi változásakor mennyivel változik a kötvény árfolyama. Tulajdonképpen a 10. ábrával illusztrált hozam és ár közötti nem lineáris kapcsolatot próbáljuk „megfogni”.

¹² A kockázat koncepciója, illetve a különböző pénzügyi kockázati definíciók nem képezik az anyag tárgyát. Az anyag a kötvényárfolyam-változás matematikai leírására fókuszál.

¹³ Ez az állítás természetesen túlzottan egyszerűsítő, mivel ennyire letisztult formában csak a kötvények nagyon szűk körére igaz. Sőt még azon belül is, csak az állampapírok szűk körére igaz, mégpedig a legfejlettebb országok legjobb hitelminősítésű papírjaira (pl. az amerikai vagy a német állampapírokra). Továbbá a vállalati kötvények esetében a hitelkockázati, míg az amerikai jelzálogpapírok (*mortgage-backed securities*) esetében az ún. előtörlesztési (*pre-payment*) kockázati komponens lehet a meghatározóbb. De még ezen esetekben is megjelenik a kamatkockázat, mint a kötvények árfolyamára ható kockázati faktor.

6.1. Duration

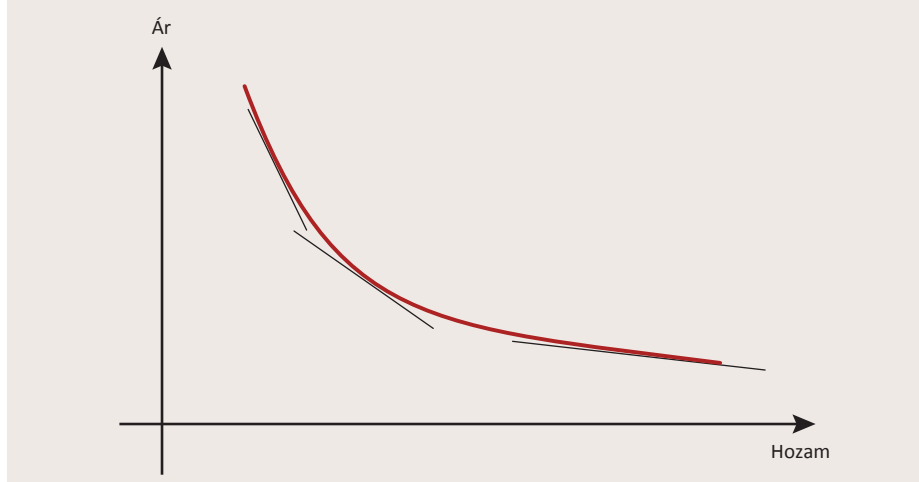
A kötvények kamatláb-kockázatának vagy kamatláb-érzékenységének „mérőszáma” az ún. *duration*. Sajnos a koncepciót jól megragadó magyar kifejezés még nem született, leggyakrabban *átlagidő* néven hivatkoznak rá, de a lényegét ez sem fejezi ki teljesen.

Korábban a leggyakrabban használta mérőszám a futamidő volt. Vagyis minél nagyobb egy kötvény futamideje, annál nagyobb a kamatláb-érzékenysége. Minden más paraméter (kupon, hozam) változatlansága mellett ez igaz, viszont ez a mérőszám egyetlen cash flow elemet vesz figyelembe (az utolsó cash flow-t), miközben nem veszi figyelembe a pénz időértékét. Például egy 11 éves futamidejű 8 százalékos kuponú kötvény kockázatosabb, mint egy 10 éves futamidejű 1 százalékos kuponú? A *duration* sokkal alkalmasabb arra, hogy almát az almával hasonlíthassunk össze.

A *duration* háromféle értelmezése él a szakirodalomban. Az első szerint a *duration* a hozam-ár görbe egy adott pontján mért meredeksége, vagyis a görbéhez illesztett érintő meredeksége. Talán így lehet a legjobban illusztrálni a hozam és ár közötti inverz kapcsolatot. A hozam emelkedésével az ár egyre kisebb mértékben csökken, ahogy a görbe egyre inkább laposodik, vagyis ahogy egyre csökken a meredeksége.

13. ábra

A hozam-ár görbe meredeksége a görbe különböző pontjain



A második értelmezés a jelenértékkel súlyozott átlagos futamidő, ami évben fejezi ki a kamatlábckockázatot.¹⁴ Ez az értelmezés figyelembe veszi, hogy a kötvénynek van a futamidő előtt is cash flow-ja, továbbá tekintettel van a pénz időértékére is.

$$DUR = \sum_{n=1}^N \frac{PV(CF_n) \cdot n}{P} = 1 \cdot \frac{PV(CF_1)}{P} + 2 \cdot \frac{PV(CF_2)}{P} + \dots + N \cdot \frac{PV(CF_N)}{P}$$

A képlet¹⁵ tulajdonképpen az egyes cash flow elemek jelenértékét viszonyítja a teljes jelenértékhez (vagyis a kötvény árához), és ezeket súlyozza be az egyes cash flow elemek futamidejével. Ha úgy tetszik, azt próbáljuk meghatározni, hogy milyen gyorsan „jutunk a pénzünkhöz”.¹⁶

20. példa: Duration számítása

Számolja ki egy 5 éves futamidejű, 5 százalékos éves kuponú kötvény durationját 8 százalékos lejáratig számított hozam mellett!

| <i>n</i> | <i>CF_n</i> | <i>PV(CF_n)</i> | <i>PV(CF_n)/P</i> | <i>n*(PV(CF_n))</i> |
|--------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1 | 5 | 4,63 | 5,3% | 0,05 |
| 2 | 5 | 4,29 | 4,9% | 0,10 |
| 3 | 5 | 3,97 | 4,5% | 0,14 |
| 4 | 5 | 3,68 | 4,2% | 0,17 |
| 5 | 105 | 71,46 | 81,2% | 4,06 |
| Összesen (P) | | 88,02 | Összesen (DUR) | 4,51 |

A kötvény durationje 4,51 év.

¹⁴ Talán a **duration** magyarosítására használt átlagidő kifejezés is erre az értelmezésre utal leginkább.

¹⁵ A változást matematikailag ún. differenciálegyenlettel írjuk le. A differenciálás, vagyis a változás mértékének leírása olyan összefüggéseknél (függvény) használható, amelyek jól közelíthetők lineáris függvénnyel, azaz a függvény grafikonja adott pontban tetszőlegesen választott hibahatáron belül nem különbözik egy egyenestől. Utóbbi a görbe érintője, amit az első megközelítésnél illusztráltunk. Olyan folyamatok leírásánál használjuk, amelyek nem diszkrét lépésekben változnak, hanem pillanatról pillanatra folytonosan (pl. nem törnek meg). Mérnöki problémák megoldásánál vagy a közgazdaságtanban sokszor kerülnek így megfogalmazásra a különféle folyamatok.

¹⁶ Nem mindegy ugyanis, hogy 100 Ft jelenértékből 90 érkezik már egy év múlva, és 10 csak később, vagy fordítva.

A fentiekből következik, hogy minél nagyobb a kupon, azaz minél nagyobb cash flow elem érkezik a futamidő előtt, annál nagyobb is lesz annak súlya. A 20. példa esetén az első 5 Ft kupon például 5,3 százalékos súlyt képvisel, míg a második már csak 4,9 százalékot. A fenti feltételek mellett még továbbra is az 5. év végén kapott utolsó kupon és tőke adja a jelenérték legnagyobb részét (81,2 százalék), de nem annyit, mintha a pénz időértékét nem vennénk figyelembe, és csak a nominális értékekkel számolnánk.

Minél nagyobb a kupon, annál kisebb a *duration*. Ez természetesen fordítva is igaz, minél kisebb a kupon, annál nagyobb a *duration*. Nulla százalék kupon, vagyis egy zéró-kupon kötvény esetén a *duration* megegyezik a futamidővel, hiszen a teljes jelenértéket egyetlen cash flow adja.

Továbbá az is megállapítható, hogy minél nagyobb a diszkontáláshoz használt kamatláb, annál nagyobb a korábban érkező cash flow-k szerepe, mert a növekvő kamatláb hatványozottan csökkenti a későbbi cash flow-k jelenértékét. A 20. példában használt kötvény esetében 30 százalék hozam mellett például az első 5 Ft kupon súlya már 9,8 százalékra nő (ahogy az utolsó cash flow súlya 72,3 százalékra csökken), a *duration* pedig 4,22 évre csökken. Mindez természetesen egybevág azzal, hogy a hozam-ár görbe meredeksége fokozatosan csökken, vagyis emelkedő hozam mellett az ár csökkenésének üteme egyre csökken.

2. táblázat

A *duration* változása a kötvény egyes paramétereinek függvényében

| | |
|------------|------------|
| Futamidő ↑ | Duration ↑ |
| Kupon ↑ | Duration ↓ |
| Hozam ↑ | Duration ↓ |

A *duration* fenti értelmezését *Macaulay-duration*nek nevezik. Tulajdonképpen azt fejezi ki, hogy „átlagosan” – ahol az átlagoláshoz a súlyokat a cash flow-k jelenértékeiből kalkuláljuk – mikor fizeti ki a kötvény a pénzáramlását.

A harmadik megközelítés azt próbálja megragadni, hogy adott hozamváltozás mellett mennyivel változik a kötvény árfolyama. Ezt fejezi ki az ún. módosított *duration* (*modified duration*).

$$DUR_{\text{mod}} = \frac{DUR}{(1+r)}$$

A kérdés itt úgy merül fel, hogy ha 1 százalékponttal változik a kötvény hozama, akkor hány százalékkal változik az ára. Ez fejezi ki tulajdonképpen a legletisztultabb formában a kamatláb-érzékenység vagy kamatlábkockázat fogalmát.

$$\frac{\Delta P}{P} = (-) \cdot DUR_{\text{mod}} \cdot \Delta r$$

21. példa: Kötvényárfolyam-változás számítása

Mennyivel változik egy kötvény árfolyama 0,50 százalékos hozamemelkedéskor, ha a kötvény módosított durationje 4,28 év, az árfolyama pedig 95 Ft?

$$\frac{\Delta P}{P} = (-) \cdot 4,28 \cdot 0,005 = -0,0214 = -2,14\%$$

$$\Delta P = 95 \cdot -0,0214 = -2,033 \text{ Ft}$$

A kötvény árfolyama 2,033 Ft-tal csökken, vagyis az új árfolyam 92,967 Ft lesz.

6.2. DV01

A kötvények hozama ritkán változik 1 százalékponttal, különösen nem napon belül. Így a gyakorlatban a változást sokszor a jegyzés legkisebb egységében, ún. *bázispont*ban fejezzük ki. Egy bázispont a százalék egyszázad része (0,01%).

Az 1 bázispont hozamváltozásra jutó árfolyamváltozást a bázispont árfolyamértékének nevezzük (*price value of a basis point*, PVBP), vagy másként a bázispont dollár értékének (*dollar value of a basis point*, DV01). Mindkét kifejezés jól mutatja, hogy mire vagyunk kíváncsiak: mennyit változik a befektetésünk (akár egy kötvény vagy egy egész kötvényportfólió) értéke, ha a hozam egy bázisponttal változik.

A DV01 gyakorlati alkalmazásának fő területe az ún. *duration* semleges pozíciók kialakítása. Mindegyik esetben a cél az, hogy az alapvetően két instru-

mentumból kialakított kombinált pozíció összértéke ne változzon a kamatláb változása során. Attól semleges, hogy a kamatláb változása ugyanannyi hatást gyakorol mindkét instrumentum értékére, de mivel az egyiket vesszük, míg a másikat eladjuk, a kombinált pozíció értéke nem változik. Fedezeti ügyletek kötésének alapelve, hogy a fedezni kívánt és a fedezésre használt instrumentumokat úgy kombináljuk, hogy a kételemű portfólió értéke már ne változzon.¹⁷

A mérőszám fontosságát mutatja, hogy a kötvénykereskedők, bankközi árjegyzők, kötvényportfólió-kezelők esetében a leggyakrabban ebben fejezik ki a vállalható kockázat nagyságát. Egyfajta kockázatekvivalensként szolgál, ez adja az összehasonlítás alapját. Egy 2 éves kamatláb-instrumentum¹⁸ kamatláb-érzékenysége kisebb, mint egy 10 éves instrumentumé, így előbbiből nominálisan nagyobb pozíció vállalható ahhoz, hogy ugyanakkora kamatláb-kockázatot „fussunk”.

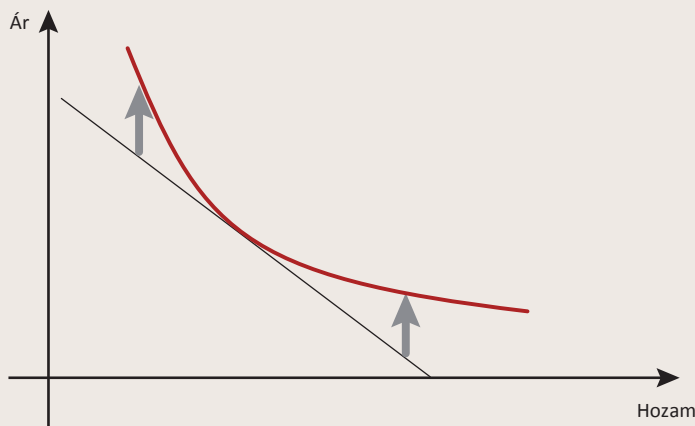
6.3. Konvexitás

A *duration* segítségével becsült árváltozás hátránya, hogy egy lineáris összefüggéssel próbál közelíteni egy alapvetően nem lineáris összefüggést (ld. 21. példa). Egy adott pontból kiindulva, minél nagyobb hozamváltozást veszünk alapul, annál nagyobb lesz a különbség a lineáris egyenlettel becsült érték (az érintő) és a nem lineáris képlettel számolt tényleges árfolyam között (görbe). Kis változást feltételezve még pontos a becslés, de nagyobb változásnál egyre nő a „hiba”, hiszen a hozam növekedésénél az árfolyam csökkenésének üteme csökken, a hozam csökkenésekor viszont az árfolyam növekedésének üteme folyamatosan emelkedik.

¹⁷ Természetesen ez csak egy adott időpillanatra igaz, hiszen a *duration*, így a *DV01* is változik a hozam változásakor vagy akár csak az idő múlásával. Ritka az, amikor két kötvény kamatláb-érzékenysége ugyanannyi marad hosszabb időn keresztül, így a fedezeti arányokon időben dinamikusan változtatni kell.

¹⁸ Legyen az egy állampapír, egy kamatláb-csereügylet (*interest rate swap*) vagy állampapír határidős ügylet (*government bond futures*).

14. ábra A kötvényárfolyam-változás becslése durationnel



A fenti növekvő pontatlanság kiigazítását szolgálja az ún. konvexitás (*convexity*), ami a kamatláb-érzékenység változását mutatja a hozam változásának függvényében.¹⁹ A hozam változásakor nemcsak az árfolyam változik, hanem a változás üteme is. A hozam újabb egységnyi változásakor az árváltozás mértéke már más lesz (hozam növekedése esetén csökken és fordítva). A konvexitás tulajdonképpen a görbe pontosabb közelítésére szolgál, a *duration* pontatlanságát korigálja.

$$\frac{\Delta P}{P} = (-) \cdot DUR_{\text{mod}} \cdot \Delta r + \frac{CONV}{2} \cdot (\Delta r)^2$$

Fontos megérteni, hogy a fenti egyenlet „korrekciós” része mindig pozitív értéket vesz fel. A hozam-ár görbe meredeksége ugyanis a hozam emelkedésével folyamatosan csökken, így a *duration*nel becsült csökkenést felfele kell korigálni. Hasonlóképpen, a hozam csökkenésekor az árgörbe meredeksége nő, így szintén felfelé kell korigálni.²⁰

¹⁹ Matematikai fogalommal ez a hozam-ár görbe második deriváltja. Az első derivált a változás (a görbe érintőjének meredeksége), a második derivált a változás változása (az érintő meredekségének változása).

²⁰ Ez az opcionalitással nem rendelkező kötvényekre igaz. Egy visszahívható kötvény esetében az árgörbének van konkáv szakasza, ahol a konvexitás negatív értéket vesz fel (ld. 6.4 fejezet).

A konvexitás mértéke pozitív kapcsolatban áll a pénzáramlás szóródásával. Minden más változatlansága mellett minél jobban szóródnak időben egy kötvény cash flow-i, annál nagyobb lesz a konvexitása. Ennek az a jelentősége a gyakorlatban, hogy egy nagyobb konvexitású kötvény ára kisebb mértékben esik a hozamok növekedése esetén. Tehát a kötvénybefektetők számára a konvexitás értéket képvisel. Hogy mekkora értéket, az aktuális hozamszint és a várt piaci volatilitás függvényében változik. Amikor egy piaci szereplő a jelenleginél nagyobb volatilitást, azaz az árfolyamok és hozamok nagyobb mozgására számít, akkor a konvexitás értéke megnő.

6.4. Negatív konvexitás

A konvexitás fogalmának bevezetésekor kizárólag opcionalitást nem tartalmazó, fix kamatozású kötvények árazási képletét vettük alapul. Az ún. visszahívható (*callable*) kötvények esetén ugyanakkor a kibocsátó rendelkezik azzal a joggal, hogy visszavásárolhatja a kötvényt egy előre meghatározott időpontban egy előre meghatározott áron.²¹ Ez a kibocsátót illető addicionális jog hatással lesz a kötvény árfolyamára, illetve annak dinamikájára.

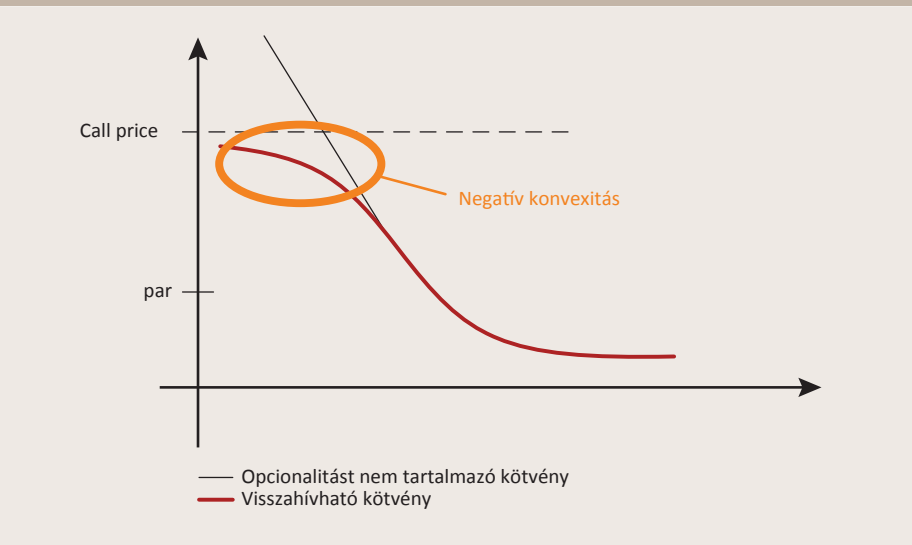
A kibocsátó a kötvényt általában egy, a kibocsátási árfolyamnál magasabb árfolyamon (*call price*) vásárolhatja vissza. Kibocsátáskor a kuponráta általában közel van a piaci hozamhoz, vagyis a kibocsátáskori árfolyam közel van a *par*-hoz. Egy fix kuponú kötvény esetében a kibocsátó a kötvény lejáratáig befizételi a finanszírozási hozamot. Egy esetleges hozamcsökkenés esetén azonban jó lehetőség kínálkozna alacsonyabb hozamon kötvényt kibocsátani, és így alacsonyabb finanszírozási rátát, alacsonyabb tőkefelhasználást elérni. Amennyiben a vállalat visszahívható kötvényt bocsát ki, akkor hozamcsökkenésnél, amikor a kötvényárak növekednek, lehetősége lesz a kötvényt visszavásárolni, és új, most már alacsonyabb hozamú kötvényt kibocsátani.²²

²¹ Itt is számtalan kombináció képzelhető el. A visszavásárlási jog vonatkozhat egyetlen időpontra, több diszkrét időpontra (pl. minden évben a kuponfizetés időpontjában), de lehet folyamatos is, vagyis bármikor gyakorolható vételi jog.

²² Természetesen ez a jog nincs ingyen, ennek kompenzációja a kötvény hozamában jelentkezik majd. Azonban az opciós díj vagy prémium tárgyalása meghaladja az anyag kereteit.

15. ábra

Opcionalitást nem tartalmazó és visszavásárolható kötvény árgörbéje



Mivel a kibocsátó előre megállapított árfolyamon vásárolhatja vissza a kötvényt, ezért annak ára a hozamok további csökkenésekor sem fog tovább emelkedni. A visszahívható kötvény hozam-ár görbéje ezáltal egy ponton el fog térülni az opcionalitást nem tartalmazó (*option-free*) kötvény hozam-ár görbétől, és ahelyett, hogy gyorsuló ütemben emelkedne, tovább visszahajlik, és ellaposodik a visszahívási árfolyam magasságában. Ez a visszahajlás azt jelenti hogy a további hozamcsökkenés esetén nemhogy gyorsuló ütemben emelkedne az ár, hanem egyre lassuló ütemben fog tovább emelkedni. Ez a negatív konvexitás.²³

²³ A negatív konvexitás megfigyelhető például az amerikai jelzálogleveleknél (mortgage backed securities) is. Itt a visszavásárlási jog tulajdonképpen a jelzáloglevelek fedezeteként szolgáló lakossági jelzálog-hitelek esetében áll fenn a hitelfelvevő vonatkozásában. Ez praktikusban abban nyilvánul meg, hogy az Egyesült Állomokban a piaci szokvány az, hogy a lakásvásárló bármikor tetszőlegesen mértékben törlesztheti elő a lakáshitelét.

7. Hozamgörbe

A hozamgörbe (*yield curve*) a különböző futamidejű kötvények évesített hozamait ábrázolja a futamidő függvényében. Más néven a hozamgörbe a kamatlábak lejárat szerkezete (*term structure of interest rates*). A koncepció maga rendkívül egyszerű, mert semmi más nem történik, mint a különböző futamidejű papírok aktuálisan megfigyelt hozamait ábrázoljuk a futamidő-hozam térben. Ezen túl azonban számos kérdés felmerül, amelyeket tisztázni kell azelőtt, hogy a hozamgörbéről bármilyen megállapítást tehessünk, vagy a hozamgörbét a gyakorlatban (pl. diszkontálás során) használhassuk.

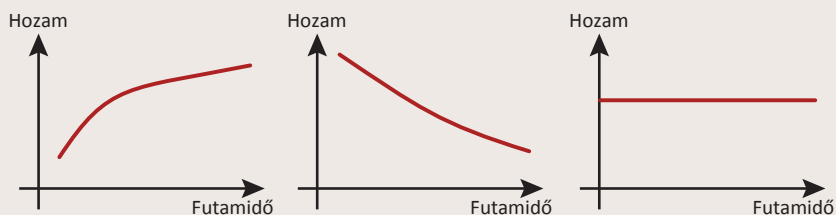
Amikor hozamgörbéről beszélünk, akkor mindig hasonló hitelkockázatú kötvények csoportjára gondolunk. Így rögtön megkülönböztetjük például az állampapír-piaci hozamgörbét, amely kiemelt jelentőséggel bír. Ennek oka, hogy minden országban az állampapírok testesítik meg a hitelkockázat-mentes befektetést.²⁴ Ehhez képest egy vállalati kötvény már addicionális (hitel-) kockázatot hordoz, így annak tükröződnie kell a vállalat által fizetendő hozamban, ami emiatt egy másik hozamgörbét jelent majd.²⁵

A hozamgörbe „normális” alakja egy felfelé ívelő, pozitív meredekségű görbe. Ennek oka, hogy amennyiben hosszabb időre adjuk kölcsön a pénzünket (hosszabb időre „kötjük le”), akkor azért általában magasabb kamatot várunk is el. Ehhez képest a valóságban – legalábbis bizonyos időszakokban – egészen változatos formákat lehet megfigyelni. A hozamgörbe alakja lehet invertált is, amikor a hozamgörbe elején megfigyelt hozamok nagyobbak, mint a hozamgörbe végén, vagyis a hozamgörbe meredeksége negatív.

²⁴ Az állam olyan jogosítványokkal rendelkezik (adókievetés, pénznyomtatás), amelyek miatt feltételezhetjük, hogy saját devizában bármikor helyt tud állni elsősorban nominális kötelezettségeiért, így egy állampapír kamat- és tőketörlesztéseiért.

²⁵ A vállalati kötvénypiac sem homogén, az egyes vállalatok (kibocsátók) esetében is beszélhetünk csak az adott vállalatra jellemző hozamgörbéről.

16. ábra
Normális, invertált és lapos hozamgörbék



7.1. Spot hozamgörbe

Gyakorlati szempontból az állampapír-piac hozamgörbe referenciapontként szolgál más eszközök (pl. kötvények, hitelek) árazásához. Ez a kiindulópont akkor, amikor egy tetszőleges pénzáramlás jelenértékét meg akarjuk állapítani. Ebből a szempontból mindegy, hogy egy kötvény kuponfizetéséről vagy egy projekt által generált cash flow-ról beszélünk, szükségünk van egy kamatlábra, amivel a követelés pénzáramlását diszkontálni tudjuk.

Ugyanakkor eddig a jelenérték-számítás képletében egyetlen kamatlábat használtunk a diszkontáláshoz, tehát a különböző időpontokban érkező pénzeket nem különböztettük meg lejárat szerint. Mindegy volt, hogy az adott cash flow egy év múlva vagy tíz év múlva érkezik meg, mintha mindegy lenne, hogy egy vagy tíz évre fektetünk be. Márpedig nem mindegy, ezért van szükségünk egy hozamgörbére, amiből a különböző időpontokban érkező cash flow-k jelenértékének számításához használt, futamidőnként eltérő kamatlábat származtathatjuk.

Ehhez azonban nem elegendő, hogy az állampapír-piaci hozamgörbét használjuk. Egyrészt elképzelhető, hogy két hasonló futamidejű állampapír hozama eltér egymástól, mert például eltérő kuponrátával rendelkeznek,²⁶ másrészt a kötvények megfigyelt (jegyzett) hozama egy lejáratig számított hozam (*yield to maturity*), amiben az a feltételezés testesül meg, hogy a futamidő alatt

²⁶ Amely következtében eltér a kötvények konvexitása.

érkező pénzáramlás a futamidő végéig a lejáratig számított hozamon kerül újrabefektetésre.

Az nyilvánvaló, hogy ez túl erős feltételezés ahhoz, hogy ezt a hozamgörbét használjuk a különböző időpontban érkező cash flow-k kiértékeléséhez. Olyan kamatlábra van szükségünk, amely nem él ezzel a feltételezéssel. Ez pedig a zéró-kupon kötvény lejáratig számított hozama, vagy más néven zéró-kupon hozam vagy *spot hozam* (*spot rate*, S_n).

A zéró-kupon kötvény kupon rátája nulla, a lejárat előtt nincs cash flow-ja, nincs mit újra befektetni, így nem kell semmilyen feltételezéssel élnünk az újrabefektetési rátára vonatkozóan. A zéró-kupon hozamokból konstruált hozamgörbét zéró-kupon hozamgörbének vagy spot hozamgörbének hívjuk (*spot curve*).

Az államadósság-kezelő központok szerte a világon változatos futamidőkkel bocsátanak ki állampapírokat.²⁷ Az éven belül lejáró papírok tipikusan zéró-kupon kötvények (diszkont kincstárjegyek),²⁸ míg az évnél hosszabb futamidővel rendelkező papírok kuponos kötvények. A zéró-kupon papírok hozama maga a spot hozam, de a kuponos papírok lejáratig számított hozamát „át kell alakítanunk” ahhoz, hogy az egyes lejáratokra érvényes spot hozamot, majd mindezekből egy spot hozamgörbét kapjunk.

Minden kötvényre, illetve a kötvény minden cash flow-jára (kuponok és tőke) tekinthetünk úgy, mintha az zéró-kupon kötvények összessége lenne. A hozamgörbe elején megfigyelt spot hozamok, illetve a kuponos kötvények piaci árából a hozamgörbe mentén felfelé haladva fokozatosan visszafejthető az egyes lejáratokra vonatkozó spot hozam. A spot hozamok ismeretében pedig bármely pénzáramlás jelenértékét ki tudjuk számítani a megfelelő futa-

²⁷ A görbe hosszú végén a 30 éves lejárat még fontos szerepet tölt be („long bond”), de például a francia és a brit állam rendszeresen lép piacra 50 éves papírral, illetve van példa 100 éves futamidejű kibocsátásra is.

²⁸ Illetve annak tekinthető minden olyan papír, aminek lejáratig már nincs több cash flow-ja. Az nem számít, hogy lejáratkor csak névértéket fizet vagy névértéket és az utolsó kupont.

midőre vonatkozó hozamok alkalmazásával. Ezt a módszert nevezzük *bootstrapping*-nek.²⁹

$$P_0 = \frac{C}{(1+S_1)} + \frac{C}{(1+S_2)^2} + \frac{C}{(1+S_3)^3} + \dots + \frac{C}{(1+S_N)^N} + \frac{M}{(1+S_N)^N}$$

22. példa: A spot hozamgörbe meghatározása

Tegyük fel, hogy a piacon az alábbi éves kuponfizetésű kötényeket figyelhetjük meg. Határozza meg a spot hozamgörbét!

| Futamidő | Kuponráta | Hozam (ytm) | Árfolyam |
|----------|-----------|-------------|----------|
| 1 év | 0,00% | 2,00% | 98,04 |
| 2 év | 3,00% | 2,50% | 100,96 |
| 3 év | 2,00% | 3,00% | 97,17 |

Az első kötvény egy 1 év múlva lejáró zéró-kupon kötvény. Ennek hozama egy spot hozam, ami tulajdonképpen az 1 éves spot hozam lesz:

$$S_1 = 2,00\%$$

A második kötvény árfolyama ismeretében:

$$100,96 = \frac{3}{(1+0,02)} + \frac{103}{(1+S_2)^2}$$

$$S_2 = 2,51\%$$

A harmadik kötvény árfolyama ismeretében:

$$97,17 = \frac{2}{(1+0,02)} + \frac{2}{(1+0,0251)^2} + \frac{102}{(1+S_3)^3}$$

$$S_3 = 3,014\%$$

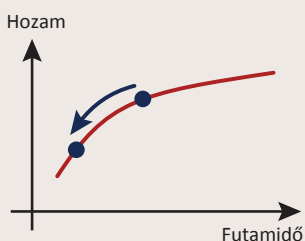
²⁹ A módszer gyakorlati működéséhez szükség van arra, hogy a kötények cash flow-ival egyenként is lehessen kereskedni, vagyis a kötvény cash flow-i „szétdarabolhatóak”, illetve újra „összecsomagolhatóak” legyenek. Így biztosítható az, hogy a zéró-kupon kötvényként kezelt egyedi cash flow-k jelenértékeinek összege egyenlő legyen a „teljes” kötvény piaci árával. Erre példa az Egyesült Államok állampapírpiaca, ahol STRIPS (*separate trading of registered interest and principal of securities*) néven hivatkoznak az egyedi cash flow elemek kereskedésére.

7.2. „Roll-down”

A spot hozamgörbe meghatározása után tehát képesek vagyunk minden cash flow-t a megfelelő, újrabefektetési feltételezésektől mentes kamatlábbal diszkontálni. Ugyanakkor annak a dinamikának a megértése is fontos, hogy mi történik egy kötvény árfolyamával az idő múlásával a hozamgörbe változatlansága mellett. A pull-to-par jelenség esetében is ezt a dinamikát vizsgáltuk, de ott további feltételezéssel éltünk, miszerint a hozamgörbe lapos. Tehát nemcsak hogy nem változik, de a következő időszakban is ugyanazt a hozamot használjuk a jelenérték-számítás során. Most egy lépéssel tovább megyünk: azt vizsgáljuk, hogy tetszőleges hozamgörbe mellett mi történik a kötvény árfolyamával.

Egy „normális”, pozitív meredekségű hozamgörbe esetén például a kötvény árfolyama nemcsak a pull-to-par jelenség miatt fog változni, hanem azért is, mert az idő múlásával más hozamot használunk a jelenérték számításához. Pozitív meredekségű görbe esetén ahogy csökken a kötvény hátralévő futamideje, úgy csökken a diszkontáláshoz használt kamatláb is, és ez egy addicionális hatást jelent a kötvény árfolyamára nézve. Ezt nevezzük *roll-down* hatásnak, ahogy a papír legördül, „lecsorog” a hozamgörbe mentén („*rolling down the yield curve*”).

17. ábra
„Roll-down” a hozamgörbe mentén



23. példa: A roll-down hatás

Hogyan változik egy 2 éves zéró-kupon kötvény árfolyama egy év alatt, ha az 1 és 2 éves spot hozamok rendre 4,00 és 5,00 százalék, és ez nem változik az időszak alatt? Mennyi lesz ennek a kötvénynek a teljes hozama ez alatt az 1 év alatt? Mennyi lesz a hozama a második év alatt?

$$P_0 = \frac{100}{(1+0,05)^2} = 90,7029$$

$$P_1 = \frac{100}{(1+0,04)} = 96,1538$$

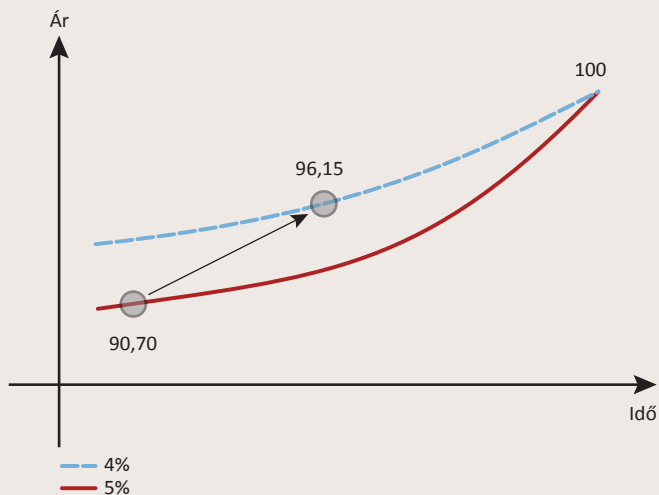
$$HPR_1 = \frac{96,1538 - 90,7029}{90,7029} = 0,0601 \text{ azaz } 6,01\%$$

$$HPR_2 = \frac{100 - 96,1538}{96,1538} = 0,0400 \text{ azaz } 4,00\%$$

Az alacsonyabb diszkontláb magasabb kötvényárfolyamot, és ezáltal magasabb adott időszakra jutó teljes hozamot jelent. Ha két évben keresztül (lejáratig) tartjuk a 23. példában szereplő papírt, akkor éves 5 százalékos hozamot

18. ábra

A 4 és 5 százalékos hozamhoz tartozó pull-to-par görbék és a roll-down hatás



realizálunk rajta. Azonban a hozamgörbe görbülete miatt ezt a hozamot nem egyenlő mértékben realizáljuk. Az első évben 6,01 százalék lesz a teljes hozamunk, míg a második évben 4 százalék.

A roll-down hatás természetesen a hozamgörbe bármelyik pontján, és bármilyen alakja mellett érvényesül. Inverz hozamgörbénél a hatás fordított, mert akkor a futamidő rövidülése mellett emelkedő hozammal szembesülünk, ami alacsonyabb árfolyamot, és alacsonyabb teljes hozamot eredményez („roll-up”).

7.3. Forward hozamok

A hozamgörbe, illetve kötvénybefektetések jobb megértéséhez azonban szükséges még az ún. forward hozam meghatározása. A forward hozam tulajdonképpen egy, a spot hozamgörbéből származtatható jövőbeli hozam, amely egy jövőben induló időszakra vonatkozó hozamvárakozást fejez ki.

Első körben tegyük fel, hogy két lehetséges befektetés között választhatunk. Az *A* esetben 2 teljes évre tudunk befektetni a 2 éves spot hozam mellett, míg a *B* esetben előbb 1 évre tudunk befektetni az 1 éves spot rátán, majd a második évben újabb 1 évre tudunk befektetni, de ma még ismeretlen hozamszinten.

Hogyan tudunk a két befektetési lehetőség között választani? A válasz attól függ, hogy mik a várakozásaink az egy év múlva kialakuló 1 éves spot ráta, és így a 2 évre elérhető teljes hozam tekintetében. A válasz tehát szubjektív. A kérdést azonban úgy is feltehetjük, hogy mi az az 1 éves spot ráta, amely mellett 1 év múlva közömbösek leszünk, hogy melyik lehetőséget választjuk. Nyilván akkor leszünk közömbösek, ha a két befektetési lehetőség ugyanazt a teljes hozamot nyújtja a tartási periódus, vagyis a teljes 2 év alatt. Azt a hozamot pedig, ami a két befektetés hozamegyenlőségét ma biztosítja, *forward* vagy *határidős hozamnak* nevezzük.

$$\begin{aligned}HPR(A) &= HPR(B) \\ (1+S_2)^2 &= (1+S_1) \cdot (1+F)\end{aligned}$$

24. példa: Forward hozam számítása

Tegyük fel, hogy az 1 és 2 éves spot hozamok rendre 4,00 és 5,00 százalék! Mennyi az 1 év múlva esedékes 1 éves forward hozam?

$$(1+0,05)^2 = (1+0,04) \cdot (1+F)$$

$$F = \frac{(1+0,05)^2}{(1+0,04)} - 1$$

$$F = 0,0601, \text{ azaz } 6,01\%$$

Úgy is meg lehet a problémát fogalmazni, hogy ha ma garantálni lehet, hogy 1 év múlva ezt a 6,01 százalékos spot rátát fogja kapni, akkor mi közömbösek leszünk a két befektetési lehetőség tekintetében. Ez a forward hozam pedig a spot görbe által *implikált* 1 év múlva érvényes 1 éves forward hozam (*1 year 1 year forward rate*).³⁰

Vegyük észre, hogy a 23. példában az első periódusra számolt teljes hozam (*HPR1*) megegyezik a 24. példában számolt 1 év múlva érvényes 1 éves forward hozammal! Tulajdonképpen ebben az első évben ezt a forward hozamot (6,01 százalékos) keressük meg, ez lesz a befektetésünk időszaki hozama. Ezért is hívják implikált forward hozamnak, mert a jelenlegi (spot) hozamgörbéből ez következik az adott időszakra. Továbbá ez igaz bármelyik időszakra. Amennyiben a hozamgörbe változatlan szintén és alakban marad, akkor a forward hozamot fogjuk megkeresni.

Hasonlóképpen, a spot hozamgörbéből tetszőleges időszakra kiszámolható a tetszőleges periódusú implikált forward hozam. Tehát ahogy például az 1, 2... 10 év múlva érvényes 1 éves forward hozam, úgy az 1, 2... 10 év múlva érvényes 2 éves forward hozam, vagy az 5 év múlva érvényes 2, 3... 10 éves

³⁰ Piaci jelölése lehet még 1y1yr vagy 1y1y, esetleg 1*1.

forward hozam is kalkulálható a következő általános képlettel, ahol az m év múlva érvényes $(n-m)$ éves forward hozamot szeretnénk kiszámolni $(F_{m,n})$.³¹

$$(1+F_{m,n})^{n-m} \cdot (1+S_m)^m = (1+S_n)^n$$

$$F_{m,n} = \sqrt[n-m]{\frac{(1+S_n)^n}{(1+S_m)^m}} - 1$$

25. példa: Forward hozam számítása különböző periódusokra

Tegyük fel, hogy az 1, 2 és 3 éves spot hozamok rendre 4,00 5,00 és 5,50 százalék! Mennyi az 2 év múlva esedékes 1 éves forward hozam $(F_{2,3})$? Mennyi az 1 év múlva esedékes 2 éves forward hozam $(F_{1,3})$?

$$(1+0,055)^3 = (1+0,05)^2 (1+F_{2,3})$$

$$F_{2,3} = \frac{(1+0,055)^3}{(1+0,05)^2} - 1$$

$$F_{2,3} = 0,0651, \text{ azaz } 6,51\%$$

$$(1+0,055)^3 = (1+0,04) \cdot (1+F_{1,3})$$

$$F_{1,3} = \sqrt{\frac{(1+0,055)^3}{(1+0,04)}} - 1$$

$$F_{1,3} = 0,0626, \text{ azaz } 6,26\%$$

³¹ Az irodalomban többféle jelölés él. Az $F_{m,n}$ jelölés például vonatkozhat az n év múlva esedékes m éves forward hozamra is. Az itt használt jelölés logikája az, hogy melyik két spot hozam (m és n) közötti forward hozamról beszélünk. Tehát ez a hozamgörbe két pontjára hivatkozik, és a forward periódus hossza ebből származtatható $(n-m)$.

7.4. Hozamgörbe-elméletek

A hozamgörbe alakjának és annak változásának magyarázatára számos elmélet született. Alapvetően három tényező hat a hozamgörbére, és időben változik a dinamikája, hogy éppen melyik tényező hat erősebben, illetve hogy a hozamgörbe adott pontján éppen melyik hat erősebben.

Az első hatás a piaci várakozások alakulása. Ez alapvetően egy fundamentális megközelítés, hiszen a pénz árának (kamat) egyik meghatározója maga a pénz kibocsátója, a jegybank. Tehát a monetáris politikára vonatkozó várakozások fontos mozgatórugói a hozamgörbe alakulásának mindegyik gazdaságban.

A várakozási elméletek egyik változata az ún. tiszta várakozások elmélete (*pure expectations theory*). Eszerint a határidős (forward) hozam semmi mást nem tükröz, mint a várható jövőbeli azonnali (spot) hozamot. A teljes hozamgörbe semmi mást nem tükröz, mint a piaci várakozásokat a jövőbeli rövid hozamok tekintetében. Ebben a keretrendszerben az emelkedő hozamgörbe azt jelenti, hogy a rövid lejáratú hozamok a piac szerint várhatóan emelkedni fognak, mégpedig pusztán a forward hozam számításának képletéből következően. Egy lapos hozamgörbe a rövid hozamok változatlanóságát jelöli, az invertált hozamgörbe pedig a hozamok csökkenését vetíti előre. Továbbá nemcsak a hozam szintjére vonatkozhatnak a piaci várakozások, hanem a hozamgörbe meredekségre is. A meredekségre vonatkozó várakozás a mai görbe görbületében tükröződik.

A várakozási hipotézis egyik következménye, hogy a befektetési időtáv hosszától függetlenül biztosak lehetünk az adott időtávra jutó hozamban, és pedig a kötvény futamidejétől függetlenül. A hosszabb futamidejű magasabb hozamot nem realizálja a befektető, mert az emelkedő hozamgörbe által jelzett hozamemelkedésen keresztül a realizált hozamok kiegyenlítődnek.

A tapasztalat természetesen mást mutat. A hozamgörbe magyarázatában a várakozási elméleteket a kockázati prémium elméletek (*risk premium*) egészítik ki. Ezek azon alapulnak, hogy a kötvényárak nemcsak várakozásokat, hanem kockázatokat is tükröznek, és így a kockázatmentes hozamon felül

valamilyen prémiumot kell kínálniuk ahhoz, hogy a befektetők hajlandóak legyenek befektetni.

Változatos elméletek születtek, amelyek eltérő módon magyarázzák, hogy mi a prémium hatásának iránya (pozitív vagy negatív), mik a prémiumot meghatározó tényezők, és hogy a magyarázó tényezők és a prémium közt fennálló kapcsolat időben mennyire állandó.

A likviditási preferencia elmélete (*liquidity premium theory*) például abból indul ki, hogy a bizonytalan jövő miatt a befektetők szívesebben kötik le tőkéjüket rövidebb, mint hosszabb időtávra, tehát a hosszabb futamidejű kötvényeket csak magasabb hozam mellett, ún. likviditási prémiummal együtt lesznek hajlandók megvásárolni. Az elmélet ezzel magyarázza, hogy a hozamgörbe általában miért emelkedő: a hosszabb lejáratokhoz tartozó hozamok likviditási prémiumot tartalmaznak. Ebben a keretrendszerben tehát az emelkedő hozamgörbe nem feltétlenül jelenti a rövid hozamok emelkedő pályáját, az emelkedés csak a hosszabb papírok magasabb kockázatát tükrözi.

Idetartozik a preferált lejáratok elmélete (*preferred habitat theory*), amely pedig úgy érvel, hogy a kockázati prémium akár még csökkenhet is a futamidő növekedésével, mivel a hosszú kötelezettségekkel rendelkező befektetők (pl. nyugdíjalapok) számára pont a hosszabb papírok jelentik az alacsonyabb kockázatot, és ezek a befektetők pont a rövidebb papírok tartása esetén várnak el likviditási prémiumot. Akkor lesznek hajlandók a hozamgörbe rövid végén befektetni, ha a magasabb prémium formájában kompenzációt kapnak a vállalt kockázatért.

Más hatások beazonosítása is lehetséges. Egy példa erre a konvexitás hatás (*convexity bias*). A pozitív konvexitás egy kívánatos tulajdonság, hiszen ennek hatására emelkedő hozamok mellett egyre csökkenő mértékben csökken a kötvény ára, míg csökkenő hozamkörnyezetben egyre gyorsabb ütemben emelkedik, így pozitív hatással van a realizált hozamra. A piaci várakozások függvényében, nevezetesen hogy mekkora volatilitást várnak a piaci szereplők, a konvexitás értéke nőhet, a konvexebb kötvények magasabb áron, vagyis alacsonyabb hozam mellett cserélnek gazdát.

A gyakorlatban a fenti tényezők általában nem külön-külön, hanem egyszerre befolyásolják a hozamgörbe alakulását, így egy elmélet ritkán képes pontos magyarázatot adni a hozamgörbe aktuális alakjára. Tulajdonképpen a fenti elméletek együtt „élnek”. Egyrészt inkább csak együtt képesek interpretálni a változásokat, másrészt pedig adott pillanatban a görbe különböző szegmenseire eltérő elmélet lehet igaz. Például a hozamgörbe rövid végét alapvetően a rövid kamatok változása mozgatja, azaz a monetáris politikára vonatkozó várakozások, ott kevésbé érvényesülnek a különböző kockázati prémiumok, mint mondjuk a hozamgörbe hosszú végén, ahol meg gyakrabban szembesülünk azzal, hogy adott időszakra jellemző kereslet-kínálati viszonyok dominálják a piaci mozgásokat.

8. Kereskedés a hozamgörbe mentén

A hozamgörbe mozgása hatással van a kötvények árfolyamára, és ezáltal a befektetők által realizált hozamra. Alapvetően három paraméter változásáról beszélhetünk, amelyek a gyakorlatban külön-külön és egyszerre, bármilyen kombinációban előfordulhatnak. Változhat a hozamgörbe szintje (*level*), a görbe meredeksége (*slope*) és a görbülete (*curvature*).

A befektetők a várakozásaik függvényében mindhárom típusú változásból tudnak profitálni, amennyiben várakozásaik beigazolódnak. A lehetséges pozíciók bemutatásához a következőkben három amerikai állampapírt, a 2, 5 és 10 éves *on-the-run* állampapírokat³² fogjuk használni.

| 3. táblázat On-the-run amerikai állampapírok | | | | | |
|---|---------------|--------|-------|----------|-------|
| Név | Futamidő (év) | Kupon | Hozam | Duration | DV01 |
| T 0% 11/17 | 2 | 0,875% | 0,94% | 1,978 | \$198 |
| T 1% 11/20 | 5 | 1,625% | 1,67% | 4,782 | \$477 |
| T 2% 11/25 | 10 | 2,250% | 2,23% | 8,879 | \$890 |

* A DV01 1 millió dollár névértékre vonatkozik

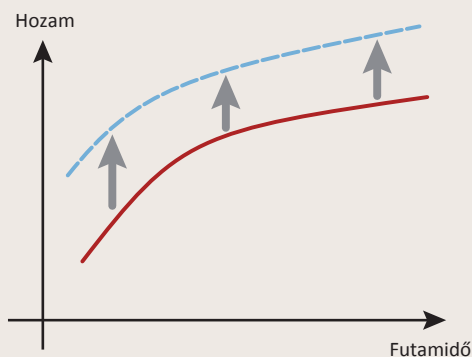
8.1. A hozamgörbe szintjének változása

A hozamgörbe szintjének változásán egészen pontosan azt értjük, hogy a hozamgörbe párhuzamosan tolódik el, mégpedig vagy felfele, vagy lefele. Amennyiben a görbe párhuzamosan felfele tolódik, vagyis általános hozam-emelkedéssel szembesülünk, akkor a kötvényárak esnek.³³ Ha a görbe lefele tolódik, vagyis a hozamok csökkennek, akkor a kötvényárak emelkednek.

³² 2015. november.

³³ A változás pontos mértéke nélkül nehéz megmondani, hogy ez a negatív hatás ellensúlyozza-e például a kötvény napi kamathozamát.

19. ábra
A hozamgörbe párhuzamos eltolódása



Ennek megfelelően hozamcsökkenés esetén hosszú (*long*) pozíciót veszünk fel, vagyis megvásároljuk a kötvényeket, míg hozamemelkedés esetén pedig rövid (*short*) pozíciót veszünk fel, vagyis eladjuk a kötvényeket.³⁴ *Long* pozíció esetén az árfolyam emelkedésével nyerünk, illetve csökkenésével veszünk, míg *short* pozíció esetén fordítva, az árfolyam csökkenésekor nyerünk, és annak emelkedésekor veszünk.

Tekintettel arra, hogy a hozamgörbe teljes hosszában egyenlő mértékben változik, így mindegy, hogy a görbe rövid vagy hosszú végén vesszük fel a pozíciót. Az számít, hogy a nagyobb futamidejű kötvény kamatláb-érzékenysége (*duration*) magasabb, így amennyiben ugyanannyi névértéknyi kötvényt vásárolunk, akkor a hosszabb futamidejű kötvény esetében több kockázatot vállalunk. Illetve megfordítva a gondolatmenetet, amennyiben ugyanannyi kamatláb-kockázatot szeretnénk vállalni, akkor a hosszabb futamidejű papírból kevesebbet kell megvennünk.

$$\text{Nominális pozíció} = \frac{\text{Megcélzott kockázat mennyisége (DV01)}}{1 \text{ mio USD névértékre jutó DV01}}$$

³⁴ Az anyagban eltekintünk attól, hogy ez ún. *outright* vételt vagy eladást jelent, vagy egy benchmark elleni pozíció megvalósítását. A cél a matematikai összefüggések megértése.

26. példa: Pozicionálás a hozamgörbe párhuzamos eltolódására

A hozamgörbe párhuzamos lefele tolódására számítunk. Az általunk vállalható maximális kamatláb kockázat $DV01 = 100.000$ dollár. Mekkora a maximális nominális összeg, amit a különböző futamidejű állampapírokból vásárolhatunk (ld. 3. táblázat)?

| Név | DV01 | Maximális nominális pozíció (mio USD) |
|------------|-------|---------------------------------------|
| T 0% 11/17 | \$198 | 505 |
| T 1% 11/20 | \$477 | 210 |
| T 2% 11/25 | \$890 | 112 |

Ráadásul mivel csak a vállalt kamatláb kockázat mennyisége számít, a kockázatot nemcsak hogy a hozamgörbe bármely pontján vállalhatjuk, de annak bármilyen kombinációja is elképzelhető. Amikor a pozíció egy pontra koncentráldódik, akkor azt ún. *bullet* pozíciónak hívják. Például megvehetjük közvetlenül az 5 éves papírt. Ezt a kamatláb kockázatot azonban „ki lehet keverni” egy rövid és egy hosszú futamidejű kombinációjával is. Ezt ún. *barbell* stratégiának nevezzük. A megfelelő súlyokkal a 2 és a 10 éves kötvény megvásárlása pontosan ugyanakkora kamatláb kockázatot fog jelenteni.

27. példa: Bullet és barbell pozíciók

Mekkora névértékű 5 éves papírt kell vásárolnunk, ha egy 25 ezer dollár $DV01$ *long* pozíciót szeretnénk? Mennyit kell vennünk a 2 és a 10 éves papírból, ha ezt 50-50 százalékban (egyenlő névértékekkel) megosztott *barbell* struktúrában kívánjuk megvalósítani? (A számításhoz használjuk a 26. példa adatait!)

$$\frac{25000}{477} \approx 52,5 \text{ mio USD}$$

$$\frac{25000}{198 + 890} \approx 23 \text{ mio USD}$$

Tehát vagy 52,5 millió dollárnyi 5 éves papírt veszünk, vagy 23-23 millió dollár névértéknyi 2 és 10 éves papírt vásárolunk.

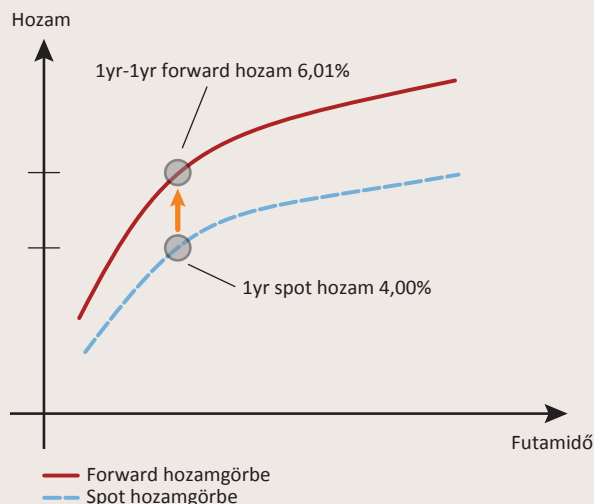
Amikor kamatláb-kockázati pozíciót vállalunk, és arról döntünk, hogy hosszú vagy rövid pozíciót vállaljunk, akkor a forward hozamokat hívjuk segítségül a döntés meghozatalához. Az egyes forward hozamokra ugyanis tekinthetünk úgy, mint *break-even* rátára. Tegyük fel, hogy 2 befektetés között választhatunk: vagy az 1 éves vagy a 2 éves papírt vásároljuk meg. A 24. példa adatai alapján kiszámoltuk, hogy a következő 1 évben mennyi lesz a befektetésünk hozama, amennyiben nem történik változás a piaci viszonyokban. Az 1 éves papír hozama szimplán 4 százalék lesz, a 2 éves papíron pedig a forward hozamot fogjuk megkeresni, ami 6,01 százalék. Ha ez a várakozásunk, akkor elég egyszerű a döntés: a 2 éves papírt kell megvenni, megéri „kimenni” a görbén és a nagyobb kamatkockázatot vállalni.

Mennyi lesz a hozam, ha a forward rátában implikált piaci várakozás valósul meg? Ekkor mindkét papír esetében pontosan 4 százalék lesz az első évre jutó hozam. Ez egyébként megfelel a tiszta várakozások hipotézis állításának, miszerint mindegy, hogy milyen hosszú papírba fektetünk, ugyanakkora befektetési időtávon ugyanazt a hozamot fogjuk realizálni.

Megfogalmazhatjuk azonban fordítva is a problémát: mikor éri meg a 2 éves helyett az 1 éves kötvényt vásárolni, vagyis kisebb kamatláb-kockázatot vállalni, „rövidíteni” a pozíciót (csökkentetni a kamatláb-érzékenységet, a *duration*-t). Ha nem történik változás a hozamgörbében a befektetési időszak alatt, akkor egyértelműen veszteséget szenvedünk el, mert 6,01 százalék helyett csak 4 százalékos hozamot realizálunk. Viszont amennyiben hozamemelkedés következik be, akkor már a 2 éves papír hozama alacsonyabb lesz (az 1 éves papíré biztos 4 százalék lesz, mert azt lejáratig tartjuk).

A kérdés tehát az, hogy meddig kell emelkednie a 2 éves hozamnak ahhoz, hogy a két befektetés realizált hozama egyenlő legyen. Vagyis mi az ún. *break-even* ráta? A válasz nyilvánvalóan az, hogy 6,01 százalékig emelkedhet az 1 éves hozam (a jelenlegi 4 százalékról). Vagyis egy rövid pozíció esetén az 1 éves hozamnak 200 bp-nál is többet kell emelkednie ahhoz, hogy megérje rövid pozíciót vállalni, mert ennyi emelkedés már „be van árazva”. Ekkora emelkedés már a piaci várakozás része.

20. ábra A spot és forward hozamgörbe



Ez egy fontos momentum. Nem az a fontos, hogy abszolút értelemben mit várunk (csökkenő vagy növekvő hozamok), hanem az a fontos, hogy mit várunk még ahhoz képest, ami már be van árazva. A fenti példánál maradva, a piac már beárzott több mint 200 bázispont jegybanki kamatemelést a következő egy évre. Nekünk azt kell eldöntenünk, hogy mi ehhez képest mennyi kamatemelést várhatunk. Ha többet, akkor rövid pozíciót kell vállalni, mert a 2 éves papír realizált hozama a forwardnál is nagyobb hozamemelkedés miatt alacsonyabb lesz, mint az 1 éves papír realizált hozama, ha pedig kevesebbet, akkor hosszú pozíciót kell vállalni, mert a 2 éves papír hozamelőnye kompenzálni fog minket az egyébként emelkedő hozamszint árfolyamot negatívan befolyásoló hatásával szemben.

8.2. A hozamgörbe meredekségének változása

A hozamgörbe meredekségének változása alatt azt értjük, hogy a hozamgörbe két pontja közti hozamkülönbség változik. Ez két tetszőleges pont lehet, tehát pontosítani szükséges, hogy melyik két pontról beszélünk. Amikor a hozamgörbe meredekségéről általában beszélünk, akkor tipikusan a 2 éves és a 10 éves hozam különbségére gondolunk. Továbbá mivel „normális” állapotban

a hozamgörbe pozitív meredekségű, ezért a meredekséget úgy fejezzük ki, hogy a 10 éves hozamból kivonjuk a 2 éves hozamot. A példaként használt állampapírok esetében a 2-10 éves meredekség például 1,30 százalékpont, azaz 130 bázispont.³⁵

Amennyiben ez a hozamkülönbség nővekszik, akkor a görbe meredekebbé válik, amennyiben csökken, akkor pedig a görbe laposodik. Ennek megfelelően lehet a görbe meredekségének növekedése esetén nyereséges ún. *steepener*, illetve a laposodás esetén nyereséges ún. *flattener* pozíciót felvenni. Ebből a szempontból nem számít, hogy a hozamkülönbség melyik tagja (vagy akár mindkettő) változik, a lényeg a relatív változás.

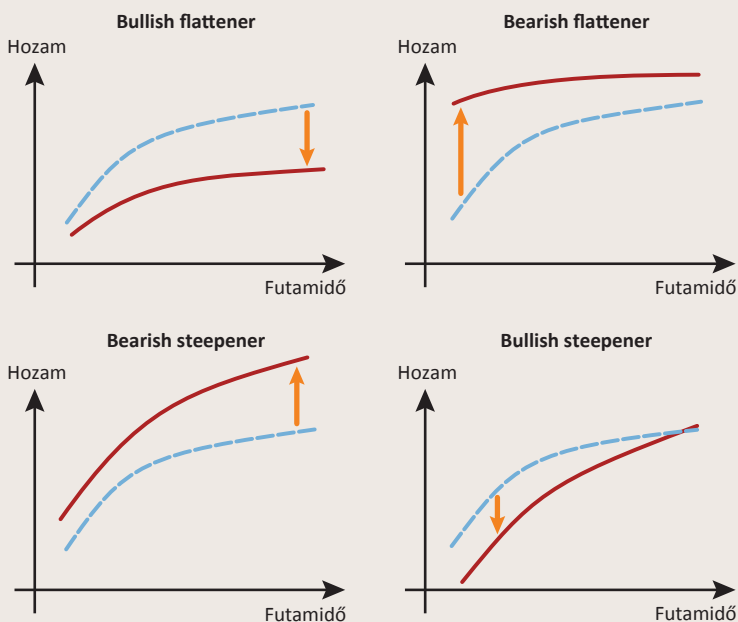
| 4. táblázat Relatív hozamváltozások: a hozamgörbe laposodásának esetei | |
|---|------------------|
| 10 éves hozam | 2 éves hozam |
| csökken | változatlan |
| csökken | emelkedik |
| csökken | kevésbé csökken |
| változatlan | emelkedik |
| emelkedik | jobban emelkedik |

A *flattener* pozíció esetén arra számítunk, hogy a 10 éves kötvény hozama relatíve jobban csökken majd, mint a 2 éves kötvényé. Hozamcsökkenéskor *long* pozíciót tartunk, míg hozamemelkedéskor *short* pozíciót, ezért a 2 éves kötvényt adjuk el, és a 10 éves kötvényt vesszük. A *steepener* pozíció esetén fordítva történik minden, ekkor a 10 éves hozam relatív emelkedése miatt a 10 éves kötvényt adjuk el (*short*), míg a 2 éves kötvényt vásároljuk (*long*).

Mint említettük, a hozamgörbe különböző változásaira egyszerre is sor kerülhet. Tehát előfordulhat, hogy nemcsak a görbe meredeksége változik, hanem a szintje is. Amennyiben a meredekség változására csökkenő hozamkörnyezetben kerül sor, akkor *bullish flattener*ről és *bullish steepener*ről beszélünk, emelkedő hozamgörbe esetén pedig *bearish flattener*ről és *bearish steepener*ről beszélhetünk.

³⁵ Természetesen bármelyik két pont között számítható a meredekség, de azért van egy-két kiemelt jelentőségű szakasz. A „2-10 év” mellett például a hozamgörbe hosszú végére fókuszáló befektetők, mint a nyugdíjalapok számára a 10-30 éves szakasz bír nagyobb jelentőséggel.

21. ábra A hozamgörbe meredekségének változásai



Amikor azonban kimondottan csak a hozamgörbe meredekségének változására pozicionáljuk magunkat, akkor nem számít, hogyan változik a hozamgörbe szintje. Pontosabban úgy kell pozicionálni magunkat, hogy az ne számítson. Ehhez valamilyen formában semleges pozíciót kell, hogy felvegyünk. Mégpedig ebben az esetben ún. *duration semleges* pozíciót veszünk fel, mert a cél az, hogy a kombinált pozíció kamatláb-érzékenysége zéró legyen.

Mivel az egyik pontban rövid, a másokban hosszú pozíciót veszünk fel, ezért ezek nagyságát úgy kell kalibrálni, hogy a hosszú pozíció kamatláb-érzékenysége egyenlő legyen a rövid pozíció kamatláb-érzékenységével. Ekkor a hozamgörbe párhuzamos elmozdulásakor mindkét pontban ugyanakkora mértékben változik a hozam (tehát a különbség nem változik), és mivel a két pozíció kamatláb-érzékenysége egyenlő, ezért mindkét pozíció értéke ugyanannyival fog változni. Például hozamemelkedésnél mindkét kötvény árfolyama

csökken, viszont a rövid pozíción az árfolyam csökkenésével nyerünk, míg a hosszú pozíción veszünk, és a két változás kioltja egymást.

28. példa: Pozicionálás a hozamgörbe meredekségének változására

Egy 2-10 éves *duration*-semleges *flattener* pozíciót szeretnénk felvenni. Mekkora névértékű állampapírt kell eladni és megvenni a hozamgörbe 2 és 10 éves pontjain, ha az egyes lábakon maximum 20000 dollár DV01 pozíciót tarthatunk?

$$\frac{20000}{198} \approx 101 \text{ mio USD}$$

$$\frac{20000}{890} \approx 22,5 \text{ mio USD}$$

A *duration*-semleges *flattener* pozícióhoz 101 millió dollár névértékű 2 éves papírt kell eladnunk, míg 22,5 millió dollár névértékű 10 éves papírt kell vásárolnunk.³⁶

Ahogy a kamatláb-érzékenység tárgyalásánál jeleztük, a *duration* mérőszám alapvetően itt is kismértékű hozammozgás esetén becsli csak megfelelően a tényleges árfolyamváltozás mértékét. Tekintettel arra, hogy a hozam változására változik a *duration* értéke is, ezáltal a két pozíció kamatláb-érzékenysége is változni fog. Az pedig nem valószínű, hogy a 2 és 10 éves papír *duration*-je ugyanolyan dinamikát fog követni, így a pozíció kalibrálását időnként újra el kell végezni. Ráadásul az idő múlásával, ahogy rövidül a kötvények hátralévő futamideje, úgy csökken majd a kamatláb-érzékenységük is. Tehát még ha a hozamgörbe nem is változik, a görbepozíció egyre kevésbé lesz *duration*-semleges.

³⁶ A maradék 77,5 millió dollár ún. *cash* instrumentumba, nagyon rövid futamidejű, így zero kamatláb-érzékenységű eszközbe (pl. 1 napos betét) kerül befektetésbe.

8.3. A hozamgörbe görbületének változása

A hozamgörbe görbületének meghatározásához már nem elegendő két pont a görbén. Két pont csak a hozamgörbe (adott szakaszának) meredekségét definiálja. A görbület definiálásához három pontra lesz szükségünk. Itt tulajdonképpen azt fejezzük ki, hogy a hozamgörbe két pontja között milyen a görbe alakja. A meredekséghez hasonlóan ebben az esetben is akármilyen kombináció elképzelhető a görbe mentén, de a 2-5-10 év és a 2-10-30 év kombinációk kiemelt fontosságúak.

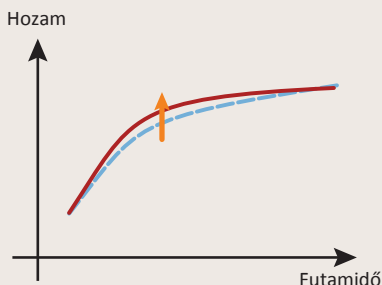
A görbület változása azt jelenti, hogy a két szélső pont között görbültebb vagy egyenesebb lesz a hozamgörbe alakja. Felbonthatjuk ezt a változást két szakasz meredekségének változására is. Például nézhetjük a 2-5-10 éves görbületet úgy, mintha az egy 2-5 éves és egy 5-10 éves szakaszból állna, és a görbületre úgy tekintünk, mint ami a 2-5 éves és az 5-10 éves meredekség relatív változása. Például a hozamgörbe egyenesebbé válása azt jelenti, hogy a 2-5 éves szakasz laposabb lesz, az 5-10 éves szakasz pedig meredekebb.

Pozicionáltság tekintetében itt tulajdonképpen egy *bullet* és egy *barbell* stratégia kombinációjáról van szó, ahol a szakasz középpontja a *bullet* pozíció (*body*), a *barbell* pedig a két szárnya (*wing*). Éppen ezért hívják ezt a kombinációt *butterfly* pozíciónak is. Ha az a várakozás, hogy a görbe még görbültebb lesz, akkor például eladásra kerül a görbe közepe, mivel itt fog a hozamszint emelkedni (relatív) a szárnyakhoz képest, amelyek pedig megvétellel kerülnek.

Úgy is gondolkodhatunk a *butterfly* stratégiáról, hogy összerakható két görbe pozícióból is. Ekkor például egy *steepener* pozíció (2 év vétel + 5 év eladás), valamint egy *flattener* pozíció (5 év eladás + 10 év vétel) kerül kialakításra. Látható, hogy a fenti két módszer ekvivalens eredményt ad: a görbe közepét adjuk el, a széleit pedig vesszük.

Továbbá a *butterfly* stratégiát többféle konstrukcióban is meg lehet valósítani, azonban a meredekség stratégiákhoz hasonlóan ebben az esetben is tipikus a *duration* semleges megközelítés. Természetesen itt is igaz, hogy csak a kis párhuzamos hozammozgások esetén lesz a stratégia kamatláb-érzékenysége zéró.

22. ábra A hozamgörbe görbületének változása



29. példa: Duration semleges görbület pozíció

Milyen arányban kell a 2, 5 és 10 éves pontokat adni és venni ahhoz, hogy duration semleges görbületi pozíciót kapjunk?

$1 \cdot 477 = w_{10} \cdot 890 + w_2 \cdot 198$, ahol w_{10} és w_2 a 10 és 2 éves papírok súlyai

$$w_{10} + w_2 = 1$$

$$w_{10} \approx 0,40 \text{ és } w_2 \approx 0,60$$

Azaz például 100 millió dollár 5 éves papír eladása mellett 60 millió dollár 2 éves és 40 millió dollár 10 éves papírt kell vásárolni.

Figyeljük meg, hogy a 29. példa görbületi pozíciója nemcsak *duration* semleges, hanem *cash* semleges is. Ugyanakkor azt is észrevehetjük, hogy a különböző szegmensek nem ugyanakkora kamatláb-érzékenységgel rendelkeznek. A 2-5 éves *steepener* pozíció is *duration* semleges, de a lábankénti DV01 1 millió dollár névértékre csak $0,6 \times 198 \approx 119$ dollár, míg az 5-10 éves *flattener* pozíció esetében a lábankénti DV01 $0,4 \times 890 \approx 356$ dollár. Ebből az is következik, hogy ez a stratégia ugyan hordoz magában görbületi elemet, de döntően egy 5-10 éves *flattener* pozíciót jelent.

Amennyiben korrigálni szeretnénk ezt a torzítást, hogy közelebb legyünk a tiszta görbületi pozícióhoz, akkor ugyanakkora *duration*-t kell a 2-5 éves és az 5-10 éves meredekség pozíciókra allokálni. Tehát amennyiben eladunk 477 dollár DV01 5 éves papírt, akkor $477/2=238,5$ dollárnyi kamatláb-kockázatot kell a két „szárnyon” megvenni. Ekkor a pozíció természetesen már nem lesz *cash* semleges: 100 millió dollár névértékű 5 éves papír eladása mellett 120 millió 2 éves és 27 millió 10 éves papírt kell vásárolni, amihez szükség van még 47 millió *cash* eladásra (hitelfelvételre).

Tiszta görbületi pozíció alatt azt értjük, hogy tényleg csak a görbület változása hat a pozíció eredményére. Akkor kapunk teljesen tiszta görbületi pozíciót, ha a két szárny *duration*-je ugyanolyan messze van a *bullet duration*-tól (jelen esetben az 5 éves pont *duration*-jától). Bármilyen aszimmetria vagy *steepening* vagy *flattening* torzítást visz a pozícióba, mint a 29. példában. Esetünkben a 2-5 év *duration* differencia 2,8 év, míg az 5-10 év *duration* differencia 4 év, így az aszimmetria nem jelentős, de a tiszta görbületi pozícióhoz még így is módosítani kell némileg a „szárny” és a *cash* pozíción: 138 millió dollár 2 éves és 23 millió dollár 10 éves papír megvételéhez 61 millió dollár *cash* eladását kell megvalósítani a 100 millió dollár 5 éves rövid pozíció mellé.

9. Ajánlott irodalom

Adams, A., Booth, P., Bowie, D., Freeth, D.: *Investment Mathematics*; Wiley, 2003.

Choudry, M.: *Fixed-income Securities and Derivatives Handbook*; Bloomberg Press, 2005.

Choudry, M.: *The Bond and Money Markets: Strategy, Trading, Analysis*; Butterworth-Heinemann, 2001.

Day, A.: *Mastering Financial Mathematics in Microsoft® Excel*; Prentice Hall, 2010, 2nd ed.

Fabozzi, F. ed.: *The Handbook of Fixed Income Securities*; McGraw-Hill, 2005, 7th ed.

Fabozzi, F., Focardi, S.: *The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management*; Wiley, 2004.

Place, J.: *Basic Bond Analysis*; Centre for Central Banking Studies, Bank of England, 2000.

Steiner, R.: *Mastering Financial Calculations*; Prentice Hall, 1998.

Zipf, R.: *Fixed Income Mathematics*; Academic Press, 2003.

OKTATÁSI FÜZETEK
KÖTVÉNYMATEMATIKA

Nyomda: Prospektus–SPL konzorcium
8200 Veszprém, Tartu u. 6.

