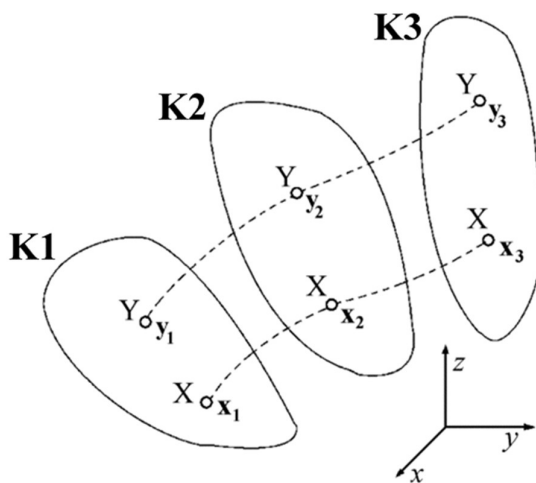


Bevezetés a newtoni mechanika NOLL-féle megalapozásába

Fáy Árpád ¹



2020

¹Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Áramlás- és Hőtechnikai Gépek Tanszéke, nyugdíjas docens

Lektorok

Dr. Szenthe János, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Természettudományi Kar, Matematikai Intézet, professzor emeritusz

Dr. Könözy László, PhD, PhD, okl. gépészmérnök, a Cranfield-i Egyetem (Egyesült Királyság) oktatója és kutatója

Előszó

Ez a tanulmány a lektorok és a szerző barátságából és szakmaszeretetéből született. Szenthe Jánossal 1955-ben együtt végeztünk az Eötvös Lóránd Tudományegyetem matematika-fizika tanári szakán. János később a *differenciálgeometriát* egyetemeken oktatta és fejlesztette, én pedig a GANZ gépgyárban áramlástani számításoknál használtam. **Walter NOLL** cikkére [1] ő hívta fel a figyelmemet, és megtanultam tőle a szereplő matematikai eszközök használatát. A cikk a newtoni kontinuummechanikát a 20. század igényeinek megfelelő szigorúsággal írta le, ami később a mechanika anyagi egyenleteinek széleskörű elméletévé fejlődött [2]. Noll szemlélete megerősítette korábbi mechanikai ismereteimet, és biztos alapot nyújtott GANZ gyári munkámhoz [3]. Noll cikkéről 1996-ban rövid ismertetést írtam a Miskolci Egyetem doktoranduszai részére. Akkori volt tanítványom Dr. Könözy László újabban javasolta, hogy a szöveget ajánljam fel a Magyar Elektronikai Könyvtár részére, ahonnan bárki ingyen letöltheti. Ezért az anyagot a lektorokkal együtt *kibővítve* közreadjuk.

Noll cikkének tanulmányozását megnehezíti, hogy olyan matematikai fogalmakat használ, amelyeket hazánkban kevesen ismernek. Ezért a cikk olyan bemutatását tűztük ki célul, melyben az ismeretlenebb *matematikai fogalmakat* a szövegben az *első előfordulásuk után* definiáljuk. Ez lehetővé teszi a *fizikai törvények* megértését olyanok részére is, akik ezeket a matematikai eszközöket nem ismerik. *Előismeretként* a középiskolai matematika és fizika ismereteire számítunk. A differenciál- és integrálszámítást természetesen nem lehet kihagyni, de ezek a műszaki és természettudományi egyetemek első évének tantárgyai, és megismerhetők a szakirodalomból is [19]. Azok részére akik a fizikai alapfogalmakat bővebben kívánják tanulmányozni, a newtoni kontinuummechanika bevezető ismertetését ajánljuk [3], ami az internetről ingyen letölthető. Azok részére akik a mechanikát jól ismerik, igyekeztünk Noll cikkének eleganciáját megtartani. A mechanika törvényei sok szakembert érdekelnek, és *élményt nyújtanak* az alapok megértésére érzékeny olvasóknak. Ezért Noll cikkének ismertetése után néhány tanulságot is megfogalmazunk.

2020. 08. 13.

Dr. Fáy Árpád

Rövid tartalom:

Oldal

1. fejezet. TEST	3
2. fejezet. TÖMEG	8
3. fejezet. KINEMATIKA	11
4. fejezet. ERŐK	12
5. fejezet. DINAMIKA	15
6. fejezet. TANULSÁGOK	19

1. fejezet. TEST

Noll a *test* fogalmát a **SIMA SOKASÁGOK** elméletére alapozta, ez a fejezet ezt ismerteti.

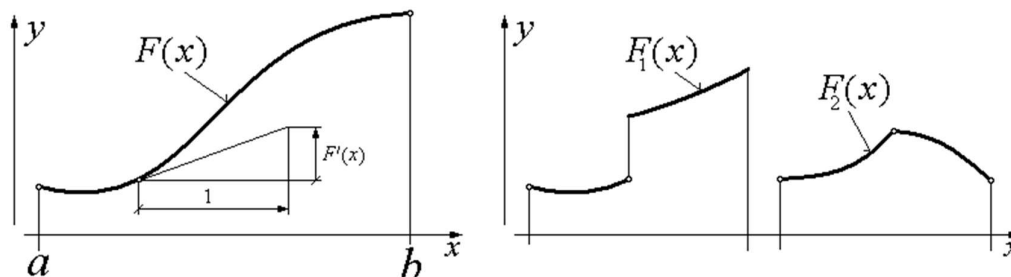
1.1. Jelölések

A racionális természettudományok alapfogalma a *halmaz*. Ebben a tanulmányban a legfontosabb *ponthalmazok*: R_1 a valós számok halmaza (angolul R Real numbers) azaz a számegegyenes, R_2 az euklideszi sík, és R_3 a 3-dimenziós euklideszi tér.

Noll cikkében [1] sok *függvény*, *leképezés* és *hozzárendelés* szerepel, amiket egységesen *leképezésként* kezelünk. A *leképezés* egy *halmaz* aminek minden eleméhez *hozzárendeljük* egy *másik halmaz* egy elemét. Például $z = F(x, y) = x^2 + y^4$ függvény az $a \leq x \leq b$ és $c \leq y \leq d$ valós számokkal adott téglalapnak *minden pontjához* egy *valós számot* rendel. A téglalap a *leképezés értelmezési tartománya*, és ahova a *leképezés* történik az R_1 . A *leképezések* úgy szemléltethetők, hogy az értelmezési tartomány elemeitől egy vonal vezet a másik halmazba. A példa szerinti *leképezés* így jelölhető $F : \{[a,b],[c,d]\} \rightarrow R_1$. Az *értelmezési tartományt* mindig pontosan meg kell adni, mert *minden* eleméhez hozzárendelünk egy elemet. A *leképezés célhalmazát* nem kell részletesen körülírni, az elemeinek elég a *fő típusát* megadni.

Ha α és β két *leképezés*, akkor $\alpha \circ \beta$ az *egymásutániságot* jelöli: $(\alpha \circ \beta)X = \alpha(\beta(X))$, ahol X a β *leképezés értelmezési tartományának* tetszőleges eleme, és $\beta(X)$ az α *leképezés értelmezési tartományának* egy eleme. Ha $\alpha : x \rightarrow y$ *leképezés kölcsönösen egyértelmű*, azaz a két halmaz elemei *egy az egyhez* párba állíthatók, akkor létezik az *inverz* *leképezés*: $y \rightarrow x$, amit α^{-1} jelöl. *Kölcsönösen egyértelmű* *leképezés* esetén az $x \leftrightarrow y$ jelölést is használjuk.

1.2. Sima függvény



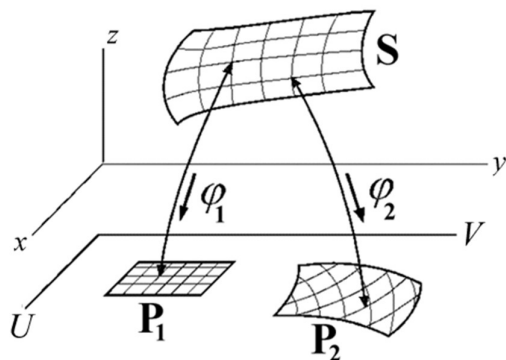
1. ábra. A sima függvény fogalmához

Az $y = F(x)$ függvény (1. ábra) a valós számok $a \leq x \leq b$ intervallumán van értelmezve, és az y értékei is valós számok ($F(x) : [a,b] \rightarrow R_1$). Az $F(x)$ függvényt (vagy *leképezést*) simának mondjuk, ha a görbéje (1. ábra) *folytonos* és *törés nélküli*. Az 1. ábrán $y = F_1(x)$ nem folytonos, és $y = F_2(x)$ töréses, azaz *nem simák*.

Más megközelítésben a *simaságot* az $y = F(x)$ függvény $\frac{dF}{dx} = F'(x)$ *differenciálhányadosával*, azaz az érintő egyenes iránytangensével (1. ábra) szokták értelmezni. Az $y = F(x)$ függvény simá, ha *folytonosan differenciálható*. Ez azt jelenti, hogy az $y = F'(x)$ differenciálhányados függvény létezik az $[a,b]$ intervallum belsejében és kiterjeszthető az intervallum végpontjaira úgy, hogy a függvény folytonos legyen.

A kétváltozós függvények részletes matematikai ismertetését lásd [19]-ben.

1.3. Sima felületdarab



2. ábra. A sima felületdarab fogalmához

A 3-dimenziós euklideszi tér x, y, z koordináta-rendszerében (2. ábra) S egy *felületdarab*². Ez az u_1, v_1 változókkal van paraméterezve, azaz a felület három függvénnyel adható meg:

$$\begin{aligned} x &= f(u_1, v_1) \\ y &= g(u_1, v_1) \\ z &= h(u_1, v_1) \end{aligned} \quad (1a)$$

amelyek az $U - V$ sík P_1 paramétertartományának (2. ábra) tetszőleges (u_1, v_1) pontjához megadják az S felület (x, y, z) pontját. Azt mondjuk, hogy S sima felületdarab, ha az (1a) függvények (mint kétváltozós függvények!) *simák*. Az S felületen meghúzhatjuk az $u_1 = \text{konstans}$ és a $v_1 = \text{konstans}$ paramétervonalakat is, ezek sima görbék. S és P_1 pontjai között az $S \leftrightarrow P_1$ megfeleltetés *kölcsönösen egyértelmű*³. Ez azt jelenti, hogy létezik az inverz leképezés, amit az

$$\begin{aligned} u_1 &= r(x, y, z) \\ v_1 &= s(x, y, z) \end{aligned} \quad (1b)$$

függvények írnak le. Mivel sima függvényekkel szeretünk dolgozni, *megköveteljük*, hogy ezek a függvények is legyenek simák.

Az S felületdarabot természetesen másként is paraméterezhetjük. Például a φ_2 leképezés az (x, y, z) pontokhoz a P_2 paramétertartomány (u_2, v_2) paraméterpárjait rendeli kölcsönösen egyértelmű módon (2. ábra) sima függvényekkel úgy, hogy az inverz leképezés is sima.

Az S ponthalmaz sokféle módon leképezhető ilyen függvényekkel az (u, v) síkra. Tekintsük az S halmaz ilyen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ leképezéseinek egy *halmazát*, amit Φ jelöl (ez véges sok, vagy végtelen sok ilyen leképezést tartalmazhat). Azt mondjuk, hogy az S *felületdarab* a leképezéseinek Φ halmazával együtt sima sokaságot alkot.

A *sokaság* egy halmaz (a példában az S pontjai). A sokaságon értelmezve van egy *struktúra* (a sima leképezések Φ halmaza). Az S halmaz *önmagában* nem *sima sokaság* (mert ha Φ -ben van nem sima leképezés, akkor nem sima sokaság!). A *sima sokaságot* tehát az S, Φ pár (a halmaz és a struktúra) együtt jellemzi.

²A *felületdarab* úgy képzelhető el, mint egy meghajlított papírlap. A gépiparban nagy szivattyúkat készítenek úgy, hogy acéllemezből síkidomokat kívágnak, ezeket meghajlítják, és a görbült *felületdarabokat* összehegesztik. Sokféle gép előállítható ilyen technikával. A *sima felületdarabok* a gépek bonyolult felületeit alkotó *építő elemek*, amelyek matematikailag a 2. ábra szerint *kezelhetők*.

³Minden paraméterezés kölcsönösen egyértelmű. A paramétervonalak pozitív szögek alatt metszik egymást.

1.4. A gömb, mint sima sokaság

Ha egy gömb felületét kívánjuk leképezni egy síkra, például a földgömből térképeket készítenünk, akkor *egyetlen* térképen nem tudjuk a gömb *összes* pontját képpontként feltüntetni. Több térképpel azonban megoldható: Például egyet készítünk az északi féltekéről, egyet a délről (az egyenlítőnél átfedéssel), egyet az északi sark környezetéről, és egyet a déli sark környezetéről. Ez a négy térkép teljesen *lefedi* az egész gömböt. A φ leképezéseket *térképeknek*, és a Φ halmazt *atlasznak* nevezik. Ha a gömb pontjainak leképezése a térképekre olyan **sima függvényekkel** történik melyeknek **az inverze is sima**, akkor azt mondjuk, hogy *a gömb* a térképeit tartalmazó Φ atlaszal együtt sima sokaságot alkot. A térképek közös részein az $(u_1, v_1) \leftrightarrow (u_2, v_2)$ megfeleltetés két kétváltozós *sima* függvénnyel írható le.

Az előbbi S felületdarab és a gömb is 2-dimenziós sima sokaság. Az S és a gömb között lényeges különbség, hogy S már egyetlen leképezéssel megjeleníthető az (u, v) síkon. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy S beágyazható a síkba. A gömb nem ágyazható be a síkba.

A következő részben a *Noll-féle test* konstrukcióját mutatjuk be, ami egy 3-dimenziós sima sokaság. Ez egyúttal példa arra, hogy egy sima sokaság hogyan vezethető be egy elméletbe. Noll megadta a sikeres alkalmazáshoz szükséges összes feltételt. Előbb azonban néhány általános megjegyzést fűzünk a sima sokaság fogalmához.

A *differenciálgeometria* az R_3 térben megjelenő görbék, felületek és testek jellemző paramétereit a differenciál- és integrálszámítás módszereivel számítja. A vizsgált alakzatok (sokaságok) *sokfélék*. 1-dimenziós sokaságok az egyenes vonalak, síkgörbék, térgörbék. 2-dimenziós sokaságok a testek felületén megjelenő tartományok. Ezek között fontosak a síkba beágyazható sokaságok (lásd az 1.3. pontban). Nem beágyazható sokaság például a tórusz is. Ezeken a gömbhöz hasonlóan térképeket értelmезünk, melyek lefedik az egész sokaságot. Ekkor a *sima sokaság* fontos, *meghatározó* tulajdonsága, hogy a térképek közös részein az $(u_1, v_1) \leftrightarrow (u_2, v_2)$ megfelelések *simák*.

A sima sokaságok *definícióját* keresve óriási szakirodalommal szembesülünk [4], [13]. Ez a sokaságok és a feladatok sokféleségének következménye. Bevezetésnek szánt ismertetésünkben azonban megkísérelünk egy szemléletes definíciót (részleteket elhagyva) az eddigi példák alapján, először a 2-dimenziós esetre.

Legyen F egy felület az R_3 térben. *Azt mondjuk*, hogy az F felület 2-dimenziós **sima sokaság**, ha minden pontjának van olyan *környezete*, amit egy síkba leképezve, a *leképezés* és az *inverze* is *sima függvényekkel* történik.

A pont környezete egy térkép. Minden pont legalább egy térképen rajta van, ezért a térképek lefedik az egész F felületet. Mivel az inverz függvények is simák, ezért az $(u_1, v_1) \leftrightarrow (u_2, v_2)$ megfelelések is *simák*.

A definíció átfogalmazható 3-dimenziós sima sokaságra is:

Legyen V egy térfogat az R_3 térben. *Azt mondjuk*, hogy a V térfogat 3-dimenziós **sima sokaság**, ha minden pontjának van olyan *környezete*, amit az R_3 térbe leképezve, a *leképezés* és az *inverze* is *sima függvényekkel* történik.

Most a pont *környezete* egy K térfogat (ez a térkép). A leképezések halmaza $\Phi : K \rightarrow R_3$.

Ez a definíció a *lényegre* mutat: A sima sokaság helyileg (lokálisan) "*hasonló*" egy euklideszi térhez. Matematikailag azonban kiegészítéseket igényel (a környezet bővebb jellemzése, határral rendelkező sima sokaság).

A definíció átfogalmazható k-dimenziós sima sokaságokra is:

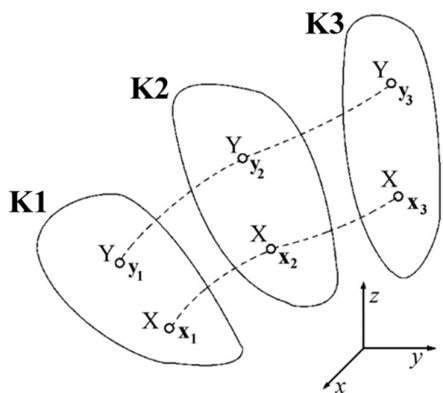
Legyen S az n-dimenziós R_n tér részhalmaza. *Azt mondjuk*, hogy S egy k-dimenziós sima sokaság az R_n térben, ha minden pontjának van olyan *környezete*, amit a k-dimenziós R_k térbe leképezve, a *leképezés* és az *inverze* is *sima függvényekkel* történik.

1.5. A Noll-féle test

Noll szövegének fordítása [kék](#), a magyarázatok feketék.

1. DEFINÍCIÓ: A **TEST** egy olyan B halmaz, amelyen *értelmezve* van:

- a) a $\varphi : B \rightarrow R_3$ *leképezéseinek* olyan Φ halmaza, amely *eleget tesz* az (S1) - (S4) axiómáknak, és
 b) egy olyan valós értékű halmazfüggvény m , ami B összes Borel-féle részhalmazára *értelmezve* van, és *teljesíti* az (M1) - (M3) axiómákat. ([1], 267 oldal, [2], 33. oldal.) Az a) feltételt itt, a b) feltételt a 2.3. részben tárgyaljuk.



3. ábra. A test konfigurációi

A B halmaz (a jelölés az angol "Body" = test szó után) elemei: X, Y, \dots a test **ANYAGI PONTJAI**⁴. A $\varphi : B \rightarrow R_3$ *leképezések* az anyagi pontokat a 3-dimenziós euklideszi térbe viszik (3. ábra):

$$\varphi_1(X) = \mathbf{x}_1, \quad \varphi_2(X) = \mathbf{x}_2, \quad \varphi_3(X) = \mathbf{x}_3. \quad (2)$$

A *leképezések értékkészletei* a **K1, K2, K3** pont-halmazok a térben (3. ábra), ezek a test **KONFIGURÁCIÓI**. Az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ helyvektorok az X anyagi pont **HELYÉT** jelölik ki a **K1, K2, K3** konfigurációban. Az ábrán a pontok mellé oda írtuk, hogy mely anyagi pontoknak a képei. A szaggatott vonalak az anyagi pontok **MOZGÁSÁT** szemléltetik (amit a 3. fejezetben értelmezzünk).

(S1) Minden $\varphi \in \Phi$ *leképezés kölcsönösen egyértelmű*.

Adott konfigurációban az anyagi pontok és a helyvektoraik *egy az egyhez* párba állíthatók (3. ábra). $\varphi \in \Phi$ azt jelenti, hogy a *leképezés* *eleme* a Φ halmaznak.

(S2) Ha $\varphi \in \Phi$ akkor $\varphi(B)$ az R_3 -nak egy olyan *kompakt* tartománya, melynek határa *darabonként sima*.

A *kompakt* tartományok *korlátosak és zártak*. A 3. ábra szerinti $\varphi(B)$ *konfiguráció* tehát nem nyúlhat a végtelenbe (korlátos), és minden határpontja a konfigurációhoz tartozik (zárt). Már itt említjük azt a matematikai tételt, hogy a *kompakt* tartományokon *folytonos* függvények *integrálhatók*. Az axióma tehát a továbbiakban értelmezett függvények integrálhatóságát biztosítja.

Az axióma megköveteli azt is, hogy minden $\varphi(B)$ konfiguráció határa egy *felület*, ami *darabonként sima* (azaz véges sok sima felületdarabból áll). Ez kényelmessé teszi a felületeken végzendő számításokat.

(S3) Ha $\varphi \in \Phi$ és $\psi \in \Phi$ akkor a $\chi = \psi \circ \varphi^{-1} = \varphi(B) \rightarrow \psi(B)$ *leképezés kiterjeszthető* az R_3 önmagára *történő sima homeomorfizmusává*.

A *leképezések között* *egymásutánságot* jelöl, φ^{-1} a φ *inverzét* jelöli, tehát $\varphi^{-1} = \varphi(B) \rightarrow B$, és így a $\chi = \psi \circ \varphi^{-1} = \varphi(B) \rightarrow \psi(B)$ *leképezés* az egyik konfiguráció pontjait egy másik konfiguráció pontjaiba viszi: ez a test **DEFORMÁCIÓJA**. Az ábra szerinti **K1** konfigurációt a **K2**-be vivő $\mathbf{x}_2 = F(\mathbf{x}_1)$ deformáció a koordinátákban három háromváltozós függvényt jelent:

⁴ Az *anyagi pont* elnevezést esetenként *részecskének* fordítják. A magyar szóhasználat szerint azonban a részecske térfogattal is rendelkezik, míg a B halmaz X, Y, \dots elemeinek képei *pontok* (3. ábra), ezért helyesebb az *anyagi pont* elnevezés [3].

$$\begin{aligned}x_{2x} &= f(x_{1x}, x_{1y}, x_{1z}) \\x_{2y} &= g(x_{1x}, x_{1y}, x_{1z}) \\x_{2z} &= h(x_{1x}, x_{1y}, x_{1z})\end{aligned}\quad (3)$$

A sima homeomorfizmus olyan kölcsönösen egyértelmű sima leképezés, amelynek az inverze is sima. Ez tehát egyrészt azt jelenti, hogy a (3) függvények simák, másrészt (a többváltozós valós függvények tana szerint) az inverz létéből következik, hogy a Jakobi determináns

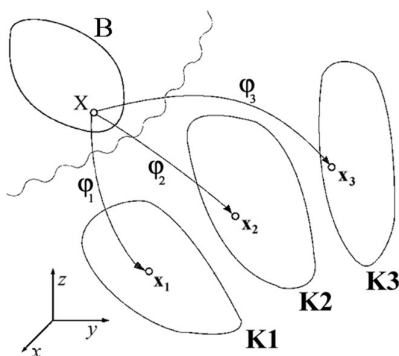
$$D_{\text{Jakobi}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (4)$$

sehol sem zérus. Az axióma azonban azt is megköveteli, hogy a (3) függvények és az inverzeik kiterjeszthetők legyenek sima módon az egész R_3 térre. Ezeket a kiterjesztéseket valójában sohasem végezzük el, de a követelmény biztosítja, hogy a konfigurációk határánál (3. ábra) a kiterjesztett (3) függvények simák, és D_{Jakobi} ott sem zérus. Ez kényelmessé teszi a felületen végzendő számításokat.

(S4) Ha χ az E -nek olyan önmagára történő leképezése, ami sima homeomorfizmus és ha $\varphi \in \Phi$ akkor $\chi \circ \varphi \in \Phi$.

A sima homeomorfizmust és a kört \circ előbb definiáltuk. Az axióma megköveteli, hogy a test bármely $\varphi(B) = K1$ konfigurációjából indulva tetszőleges χ sima homeomorfizmus alkalmazásával lehetséges $K2$ konfigurációhoz jutunk.

Az axiómák alapján a konfigurációk felülete jól számítható, és rajtuk a különféle matematikai műveletek kényelmesen elvégezhetők.



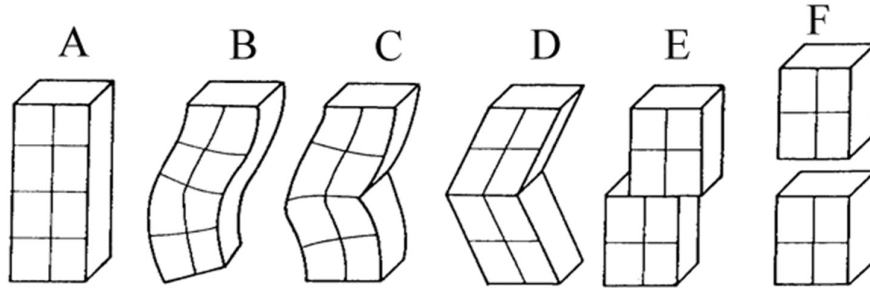
4. ábra. A leképezések szemléltetése

A φ leképezések többféle módon is szemléltethetők. A 4. ábrán az anyagi pontok B halmazát is ábrázoltuk, ez természetesen jelképes. A hullámos vonal a B halmaz és a tér szétválasztását jelképezi. Az X anyagi pontot a leképezések a 3-dimenziós euklideszi térbe viszik.

A B halmaz a tértől függetlenül is kezelhető, de elképzelhetjük egy euklideszi tér pontthalmalaként is, mert az (S1) axióma következtében a test beágyazható a 3-dimenziós euklideszi térbe (mint a felületdarab az 1.3. részben). Például a $K1$ konfigurációt kiválasztva (kezdeti konfigurációnak nevezve) a $B \leftrightarrow K1$ megfeleltetés egy beágyazás. Akinek jobban tetszik, B -t így is elképzelheti.

A beágyazás lehetővé teszi, hogy B -t úgy kezeljük, mint a 3-dimenziós tér halmazát. Például sima felületdarabot is értelmezhetünk B -ben. A B elemeit képező anyagi pontok c halmazára azt mondjuk, hogy sima felületdarab, ha a $K1$ konfigurációban a $\varphi_1(c)$ sima felületdarab. Mivel a deformációk sima görbéket sima görbékbe visznek, a $K2$ -ben is $\varphi_2(c)$ sima felületdarab.

A mechanika megalapozását tehát Noll azzal kezdte, hogy *jellemezte a test összes lehetséges térbeli megjelenési formáját*. A szigorú feltételek több fontos mechanikai feladatot kizárnak.



5. ábra. A és B lehetnek egy Noll-féle test konfigurációi, de C, D, E, F nem.

Az 5. ábrán A és B egy Noll-féle test konfigurációi lehetnek, mert nincs akadálya annak, hogy az $A \rightarrow B$ deformációt sima függvényekkel megvalósítsuk. De C, D, E és F nem lehetnek ugyanazon test konfigurációi, mert az A-ból nyert *deformáció* függvényei legalább egy pontban *nem differenciálhatók*! A Noll-féle testeken tehát nem jelentkezhet *becsípődés*, *megtörés*, *elcsúszás*, vagy *vágás* (5. ábra). Erre Noll is felhívta a figyelmet [1]. Az ilyen anomáliák többsége azonban kezelhető úgy [3], hogy a kellemetlen helyeket kis térfogatokba foglalva kizárjuk, és a kis térfogatokba sima függvényeket helyezve: sima deformációkat nyerünk. Ezzel a trükkel a Noll-féle konstrukció *közelítőleg* alkalmazható C, D, E esetén is, de F-re nem.

A *sima sokaság* fogalmát az 1.3. rész készítette elő. A 2. ábra hasonló a 4. ábrához, csak az előbbi 2-dimenziós, míg az utóbbi 3-dimenziós. Mindkettő szemlélteti a beágyazást.

A newtoni kontinuummechanika alapját képező Noll-féle test fogalma tehát azon alapul, hogy az (S1) – (S4) axiómákból egy sima sokaság képe bontakozott ki:

A Noll-féle test egy 3-dimenziós sima sokaság, ami beágyazható a 3-dimenziós euklideszi térbe.

A *sima sokaságok* elmélete a modern differenciálgeometriában készen áll, így *matematikai szigorúságú* alapvetést nyújt a Noll-féle testeknek.

2. fejezet. TÖMEG

Noll a *tömeg* fogalmát a **MÉRTÉKELMÉLET** alapjaira helyezte.

2.1. A terület, mint mérték

Az euklideszi síkon legyen A egy *sokszög*. Jelölje $T(A)$ az A *területét*. $T(A)$ egy *halmazfüggvény*, mert pontthalmazokhoz rendel valós számokat. $T(A)$ alaptulajdonságai [5]:

- (1) Minden sokszög területe pozitív szám.
- (2) Egybevágó sokszögek területe egyenlő.
- (3) Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, akkor a kettő területének az összege egyenlő az eredeti sokszög területével.
- (4) Az egységnégyzet területe 1.

Ezekkel a tulajdonságokkal Hajós bemutatta [5], hogy minden *sokszöghöz* rendelhető *terület*, valamint a sima görbeszakaszokkal határolt síkidomokat sokszögekkel közelítve, a *síkidomokhoz* is.

A *terület* fogalmának ilyen megalapozása *minta* a véges értékű mérték értelmezéséhez.

2.2. Véges értékű mérték

Először a *Borel-féle halmaztestet* értelmezzük.

Legyen X egy halmaz, és S az X elemeiből alkotott részhalmazok egy rendszere. S -et Borel-féle halmaztestnek nevezzük, ha

- $A, B \in S$ esetén $A - B \in S$
- $A_n \in S, n = 1, 2, \dots$, esetén $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$

Az $A \in S$ azt jelöli, hogy A eleme az S halmaztestnek. Az $A - B$ halmazt úgy kapjuk, hogy A -ból elhagyjuk B elemeit. \bigcup a halmazok egyesítését jelöli. Tehát S csak akkor Borel-féle, ha a különbség-halmazokat és a halmazok egyesítéseit is tartalmazza (végtelen sorozat esetén is). A 3-dimenziós euklideszi tér *józanabb* ponthalmazaira (a konfigurációkra) ez teljesül is (de például a racionális koordinátájú pontok halmazára nem). Akár említjük, akár nem, a továbbiakban 'halmaz' mindig Borel-félét jelent.

Jelölje R_1 a valós számok halmazát. A $\mu: S \rightarrow R_1$ hozzárendelés véges értékű mérték, ha

- az S Borel-féle
- ha $A_n \in S, n = 1, 2, \dots$, páronként közös pont nélküli, akkor $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
- $\mu(\emptyset) = 0$, ha \emptyset az üres halmaz
- $\mu(A) \geq 0$, ha $A \in S$.

Ha R_1 helyett vektorok tere szerepel, akkor vektor értékű mértéket nyerünk (és Σ vektor összeadás).

Legyenek μ és ν véges értékű mértékek *ugyanazon* S Borel-féle halmaztesten. Azt mondjuk, hogy ν teljesen folytonos μ szerint, ha (a függvény folytonosság mintájára) minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan $\delta > 0$ valós szám, hogy $A \in S$ és $\mu(A) < \delta$ esetén $\nu(A) < \varepsilon$.

Alább Noll az axiómákban kiköti, hogy a tömeg legyen *teljesen folytonos* a tér térfogati mértéke szerint. Látni fogjuk, hogy ez a feltétel biztosítja a *sűrűség* függvény létezését.

2.3. A Noll-féle test tömege

A TEST definíciójában (1. DEFINÍCIÓ az 1.4. részben) ez a mondat szerepel:

b) egy valós értékű halmazfüggvény m ami B összes Borel-féle részhalmazára értelmezve van, és teljesíti az (M1) - (M3) axiómákat ([1], 276. oldal):

(M1) Az m halmazfüggvény a B halmaz (azaz a TEST, 4. ábra) összes Borel-féle H részhalmazán értelmezett véges értékű mérték.

A H halmaz a B részhalmaz (6. ábra), $m(H)$ a H részhalmaz **TÖMEGE**. Az $m(B)$ az *egész test* tömege. A B halmaz a 4. ábrán a tértől független. Noll a *tömeget* a tértől *függetlenül* értelmezi! Mivel azonban B beágyazható a térbe, ezért a helyzet *lényegében* olyan, mintha a tömeg a tér ponthalmazain (a konfigurációkon) lenne értelmezve!

(M2) Minden $\varphi \in \Phi$ esetén az m által a $\varphi(B)$ -n indukált $\mu_\varphi = m \circ \varphi^{-1}$ mérték teljesen folytonos $\varphi(B)$ -ben a Lebesgue-féle térfogati mérték szerint. Ebből következik, hogy létezik a ρ_φ sűrűségfüggvény úgy, hogy minden $H \subseteq B$ Borel-féle részhalmazra:

$$m(H) = \int_{\varphi(H)} \rho_{\varphi}(\mathbf{x}) dV. \quad (5)$$

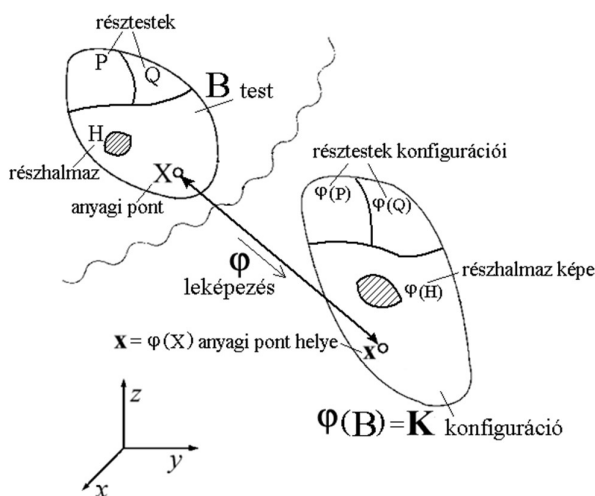
$H \subseteq B$ azt jelenti, hogy H része B -nek, de vele akár egyenlő is lehet. Az anyagi pontok alkotta H halmaz tömegét, az $m(H)$ számot az (M1) axióma értelmezi. Az (M2) axióma viszont a tömeg *térbeli* követelményeit rögzíti. A H halmaz képe $\varphi(H)$, ami egy ponthalmaz a $\varphi(B)$ konfigurációban (6. ábra). A térbeli indukált $\mu_{\varphi} = m \circ \varphi^{-1}$ mértéket a $\varphi(H)$ -ra alkalmazva: $\mu_{\varphi}(\varphi(H)) = m(H)$ mert $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H$ egy *azonosság* (belátható a leképezések elképzelésével) és így az $m(H)$ számot kapjuk. Azaz a térben számított tömeg egyenlő a tértől függetlenül értelmezett tömeggel. (Ez az értelme az (5) egyenletnek is.) Az (M2) axióma azt is követeli, hogy μ_{φ} mint mérték, legyen *teljesen folytonos* a tér Lebesgue-féle térfogati mértéke szerint. Azonban ismerjük a mértékelmélet alapvető *Borel-Lebesgue tételét* (nevezik Heine-Borel tételnek is), miszerint az ilyen mértékeknek *létezik sűrűség függvénye* (egy nulla mértékű halmaz kivételével). A $\rho_{\varphi}(\mathbf{x})$ függvény a **TÖMEG-SŰRŰSÉG** a $\varphi(B)$ konfigurációban.

(M3) Minden $\varphi \in \Phi$ esetén a ρ_{φ} sűrűségfüggvény pozitív és korlátos (és folytonos).

A Borel-Lebesgue tétel biztosítja, hogy a sűrűség függvény létezik. Noll eljárása elegáns, de a gyakorlatban nem szeretünk nulla mértékű halmazokkal kínlódní. Ezért itt az (M3) axiómát *kiegészítettük* azzal, hogy a $\rho_{\varphi}(\mathbf{x})$ függvény legyen **folytonos** a konfigurációban a hely függvényében. Ez Noll megállapításait nem befolyásolja. A gyakorlati számításokat azonban úgyis folytonos függvényekkel végezzük, ezért ez a kiegészítés közelebb viszi az elméletet a gyakorlathoz.

Noll axiómái alapján: **A tömeg az anyagi pontok részhalmazain értelmezett véges értékű mérték**, aminek a térben indukált mértéke **teljesen folytonos** a tér térfogati mértéke szerint, és ezért a térben **létezik a sűrűségfüggvénye**. A *mértékelmélet* így matematikai szigorúságú *megalapozását* nyújtja a Noll-féle testek *tömegének*.

Egy megjegyzést fűzünk a kontinuummechanikai számítások *gyakorlatához* is. A tömeg tértől független értelmezését nem mindenki fogadja el. Erre nincs is szükség, mert a test *beágyazható* a 3-dimenziós térbe. Legyen \mathbf{K} egy kiválasztott konfiguráció (6. ábra). A $B \leftrightarrow \mathbf{K}$ megfeleltetés a tömeget a térbe *beágyazza*. Minden művelet, amit a B -n végzünk, kivitelezhető a \mathbf{K} konfiguráción is, és ennek a fordítottja is igaz. Ezért tulajdonképpen *mindegy*, hogy a testet és a tömegét a tértől függetlenül, vagy a térbe beágyazva kezeljük.



6. ábra. A Noll-féle test elemeinek a szemléltetése

A 6. ábra összefoglalóan szemlélteti az eddigi fogalmakat. Az *anyagi pontok* B halmazán két *struktúra* van értelmezve:

- A térbe vivő φ leképezések sima sokasága.
- Az $m(H)$ halmazfüggvény, ami egy mérték, melynek a térben indukált μ_{φ} mértéke teljesen folytonos a térfogati mérték szerint.

A $B \leftrightarrow \mathbf{K}$ *beágyazás* alapján a test a térben kezelhető. A 6. ábrán *résztesteket* is jeleztünk. P résztest a B test része, az axiómák rá is érvényesek (a térben a határa darabonként sima). A P és Q résztest elkülönült, ha nincs közös belső pontjuk, de lehet közös határjuk.

3. fejezet. KINEMATIKA

2. DEFINÍCIÓ: A B test **MOZGÁSA** alatt a konfigurációinak egy olyan $\{\theta_t\}$ egy-paraméteres családját értjük, $\theta_t \in \Phi$, $-\infty < t < +\infty$, amely teljesíti az alábbi (K1) - (K2) axiómákat ([1], 268. oldal):

(K1) A derivált

$$\mathbf{v}(X, t) = \frac{d}{dt} \theta_t(X) \quad (6)$$

létezik minden $X \in B$ anyagi pontra és minden t -re, folytonos függvénye X és t -nek, és sima függvénye X -nek.

(K2) A derivált

$$\dot{\mathbf{v}}(X, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v}(X, t) = \frac{d^2}{dt^2} \theta_t(X) \quad (7)$$

létezik és folytonos X és t szerint.

A t paraméter az **IDŐ**. A $\theta_t(X) = \mathbf{x}(t)$ egy függvény ami megadja, hogy az X anyagi pont a t időpillanatban a térben hol tartózkodik. Például a 3. ábrán az X anyagi pont útját követve: $t = t_1$ -nél $\theta_{t_1}(X) = \mathbf{x}_1$. A $\mathbf{v}(X, t)$ vektor így az X anyagi pont **SEBESSÉGE** a t időpillanatban (3. ábra), és $\dot{\mathbf{v}}(X, t)$ az X anyagi pont **GYORSULÁSA** a t időpillanatban. Tehát: $\mathbf{v}(X, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ a pálya mentén, és hasonlóan $\dot{\mathbf{v}}(X, t) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$.

Az axióma kimondja, hogy $\mathbf{v}(X, t)$ *folytonos* az X változó függvényében. De X egy anyagi pont, nem térbeli változó. Mivel azonban a B test az (S1) – (S4) axiómák következtében beágyazható az R_3 térbe, ezért az anyagi pontok B halmazán be lehet vezetni a folytonosságot értelmező fogalmakat. Noll ezt természetesnek tekinti. Azonban az eredeti halmaz és a beágyazott halmaz folytonossági viszonyai azonosak. Ezért gyakorlati szempontból egyszerűbb, ha a folytonosságot a térbeli \mathbf{x} változó szerint értjük.

Egy $H \subseteq B$ részhalmaz **IMPULZUSA** a t időpillanatban ([1], 268. oldal) :

$$\mathbf{g}(H, t) = \int_H \mathbf{v}(X, t) dm \quad (8)$$

és az **IMPULZUSNYOMATÉKA** egy $\mathbf{O} \in R_3$ pontra vonatkoztatva:

$$\mathbf{h}(H, t, \mathbf{O}) = \int_H [\theta_t(X) - \mathbf{O}] \times \mathbf{v}(X, t) dm \quad (9)$$

A 3. ábrán a mozgást már szemléltettük, θ_t a t időpontban érvényes konfiguráció, \times a vektoriális szorzás jele. Az \mathbf{O} pont a tér rögzített pontja melyre a nyomatékokat számítjuk (a gyakorlatban rendszerint az origó). Az elnevezések jelzik, hogy a megszokott fogalmakat értelmeztünk.

4. fejezet. ERŐK

3. DEFINÍCIÓ: A B testen értelmezett **TÖMEGERŐK RENDSZERÉNEK** nevezzük (angolul System of Body Forces) az olyan $\{\mathbf{B}_P\}$ vektor értékű halmazfüggvények családját, amelyek eleget tesznek a (B1) - (B3) axiómáknak ([1], 269. oldal):

(B1) A B test minden P résztestére \mathbf{B}_P egy vektor értékű mérték, ami P összes Borel-féle részhalmazára értelmezve van.

(B2) Minden P résztest esetén \mathbf{B}_P abszolút folytonos P résztest m tömegeloszlása szerint. Ennek következtében létezik a sűrűségeloszlása \mathbf{b}_P úgy, hogy bármely $H \subseteq P$ Borel-féle részhalmazra:

$$\mathbf{B}_P(H) = \int_H \mathbf{b}_P(X) dm \quad (10)$$

(B3) A \mathbf{b}_P sűrűség egyenletesen korlátos, azaz létezik olyan k szám, hogy

$$\mathbf{b}_P(X) < k < \infty \quad (11)$$

ahol k független P-től és $X \in P$ -től.

\mathbf{B}_P egy vektor értékű mérték (ahogy 2.2. pontban értelmeztük). Egy vektor értékű mérték *abszolút folytonos* a tér térfogati mértéke szerint akkor, ha a vektor *abszolút értéke* teljesen folytonos a tér térfogati mértéke szerint (2.2. pont). A Borel-Lebesgue tétel szerint ez biztosítja a \mathbf{b}_P sűrűség függvény létezését.

$\mathbf{b}_P(X)$ a **TÖMEGERŐ SŰRŰSÉGE**, vagy **TÉRERŐ**.

A P résztest a B test része (6. ábra), de vele egyenlő is lehet: $P \subseteq B$.

4. DEFINÍCIÓ: A B testen értelmezett **FELÜLETI ERŐK RENDSZERÉNEK** nevezzük (angolul System of Contact Forces) az olyan $\{\mathbf{C}_P\}$ vektor értékű halmazfüggvények családját, amely eleget tesz a (C1) - (C5) axiómáknak ([1], 270. oldal):

(C1) A B test minden P résztestére \mathbf{C}_P egy vektor értékű mérték, ami P összes Borel-féle részhalmazára értelmezve van.

(C2) Ha H Borel-féle részhalmaz P-nek, és \bar{P} jelöli P határát, akkor:

$$\mathbf{C}_P(H) = \mathbf{C}_P(H \cap \bar{P}) \quad (12)$$

(C3) Ha $c \subset \bar{P}$, $c \subset \bar{Q}$ (azaz c a közös határfelület része), és $P \subset Q$ akkor

$$\mathbf{C}_P(c) = \mathbf{C}_Q(c) \quad (13)$$

(C4) Ha $\varphi \in \Phi$ a B tetszőleges konfigurációja és P részteste B-nek, akkor a $\mathbf{C}_P \circ \varphi^{-1}$ indukált mérték megszorítása a $\varphi(\bar{P})$ felületen abszolút folytonos a $\varphi(\bar{P})$ felületi Lebesgue mértéke szerint. Ezért létezik olyan $\mathbf{s}(P, \varphi)$ sűrűség függvénye, hogy bármely $c \subset \bar{P}$ Borel-féle részhalmazra:

$$\mathbf{C}_P(c) = \int_{\varphi(c)} \mathbf{s}(P, \varphi, \mathbf{x}) dA \quad (14)$$

(C5) Az $\mathbf{s}(P, \varphi)$ sűrűség egyenletesen korlátos, azaz létezik olyan l szám, hogy

$$|\mathbf{s}(P, \varphi, \mathbf{x})| < l < \infty \quad (15)$$

ahol l független P-től és $\mathbf{x} \in \varphi(\bar{P})$ -től.

A (C1) axiómában szereplő P résztest ugyanolyan, mint előbb a (B1) axiómánál.

A (C2) axióma biztosítja, hogy \mathbf{C}_P a P határán ad egy vektor értékű mértéket. $H \cap \bar{P}$ a H halmaz és a P határának közös része. Ha ez az üres halmaz (tehát H teljes egészében P belsejében van) akkor az értéke zérus, azaz ekkor P határán *nem hat* felületi erő a H -ra.

A (C3) axióma megköveteli, hogy ez a mérték *csak a felületdarabtól* függ, azaz független a résztesttől. Ha B -ben két P és Q résztest van, és P teljes egészében a Q belsejébe esik, $P \subset Q$, és c sima felületdarab mindkettő határának része, akkor rajta a felületi erők egyenlők kell legyenek.

A (C4) axióma a Borel-Lebesgue tétel alapján biztosítja, hogy a *sűrűség függvény* létezik. Egy függvény **megszorítása** az a függvény, amelynek értelmezési tartománya az eredeti értelmezési tartomány *része*, és értékei *egyeznek* az eredetiével. Az integrálást a c felületdarab térbeli képén kell végezni, és $\mathbf{s}(P, \varphi, \mathbf{x})$ vektor a **FESZÜLTség**, ami a φ konfigurációban, a P résztest határán, az \mathbf{x} helyvektorú helyen, a dA felületelemen hat.

A feszültség fogalmát a mechanikába **Cauchy** vezette be. A 20. század közepéig alapfogalomként kezelték. A Cauchy-féle "feszültség elv" kimondta, hogy a felületi erők a feszültségből integrálhatók. Ezt a törvényt a *tapasztalat alapján* a mechanikusok elfogadták.

Manapság nagyon nehéz a kontinuum mechanika alapjaira újat mondani. *Noll* érdeme, hogy egy általános felületi erő fogalmából (a fenti axiómákból) indulva a korábban alapigazsággként tisztelt feszültség elvet bizonyította (lásd alább a IV. tételt)⁵. Cikkének ez volt az egyik célja. Az $\mathbf{s}(P, \varphi, \mathbf{x})$ vektor itt még bonyolult módon függ a résztesttől, a konfigurációtól és a helytől. A következőkben *Noll* ezt a függést lépésenként egyszerűsíti.

A B -ben levő anyagi felületeket irányítottak⁶ tekintjük. A P résztest \bar{P} határát úgy irányítjuk, hogy a \bar{P} pozitív oldala a P *külseje*.

I. TÉTEL: Létezik egy olyan vektor értékű függvény \mathbf{S} , ami a B -ben levő összes irányított c felületre értelmezve van, amire

$$\mathbf{C}_P(c) = \mathbf{S}(c) \quad (16)$$

érvényes, hacsak c része a P résztest \bar{P} határának. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{S}(c)$ az **IRÁNYÍTOTT c FELÜLETEN HATÓ FELÜLETI ERŐ**. ([1], 271. oldal)

Mivel c része egy résztest P határának, ezért a térbeli $\varphi(c)$ képe darabonként sima. A bizonyítást két részletben végzi, először arra az esetre, amikor c a B belsejében van. Ekkor *választ egy olyan Q résztestet, amelynek c a határán van, és $\mathbf{S}(c)$ -t úgy definiálja, hogy legyen $\mathbf{S}(c) = \mathbf{C}_Q(c)$* . Majd legyen P a B test *tetszőleges* részteste, aminek c a határán van: $c \subset \bar{P}$. Ekkor

$$c \subset \bar{P}, c \subset \bar{Q}, c \subset \overline{Q \cap P}, P \cap Q \subset P, P \cap Q \subset Q.$$

A (C3) axiómát kétszer alkalmazva $\mathbf{C}_P(c) = \mathbf{C}_{P \cap Q}(c)$, $\mathbf{C}_Q(c) = \mathbf{C}_{P \cap Q}(c)$,

Ezért: $\mathbf{C}_P(c) = \mathbf{C}_Q(c) = \mathbf{S}(c)$.

A bizonyítás második részét arra az esetre végzi, amikor c a B határán van. A c irányítását megváltoztatja úgy, hogy a pozitív oldala B belseje felé mutasson. Ekkor a (C4) axióma alapján $\mathbf{S}(c)$ -t a (C4)-ben szereplő integrál szolgáltatja.

⁵ A gyakorlat igényeit a Cauchy-féle feszültség elv tökéletesen kielégíti. Ennek ellenére jó látni, hogy sokkal általánosabb erőfogalomból is következik.

⁶ A 3-dimenziós térben egy felület irányított, ha van pozitív és negatív oldala. A Möbius szalag nem irányítható. Az irányítás valójában a $\varphi(B)$ felületen valósul meg, de Noll (és mi is) a B testre vonatkoztatja (a beágyazás alapján).

5. DEFINÍCIÓ: A B testen értelmezett **ERŐK RENDSZERE** (angolul System of Forces) olyan vektor értékű mértékek $\{F_P\}$ családja, melyben B minden P résztestére F_P a P összes Borel-féle rész-halmazára értelmezve van, és felbontható

$$F_P = B_P + C_P \quad (17)$$

oly módon, hogy $\{B_P\}$ tömegerők rendszere és $\{C_P\}$ felületi erők rendszere. ([1], 272. oldal)

A következő elnevezéseket használjuk ([1], 272. oldal):

Az $F_P(H)$ vektor az **ERŐ**, ami a B test P résztestének H pont-halmazára hat (7. ábra).

Az $F_P(P)$ vektor a P résztestre ható **EREDŐ ERŐ**. P egészére ható térfogati és felületi erő összege.

Legyen P és Q két *elkülönült* részteste B-nek (lásd a 6. és 7. ábrán). Az

$$F_{P,Q} = F_P - F_{P \cup Q} \quad (18)$$

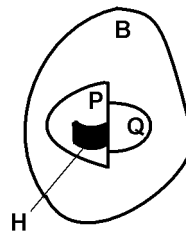
vektor értékű mérték, ami P Borel-féle rész-halmazaira van értelmezve, a **KÖLCSÖNÖS ERŐ**, ami-vel Q hat a P-re (azaz P tetszőleges Borel-féle rész-halmazára).

A B test P résztestének a B-re vonatkozó *komplementerének* (kiegészítő halmazának) lezárása által a P-re gyakorolt kölcsönös erő a P-n ható **BELSŐ ERŐ**.

A B test P résztestére ható **KÜLSŐ ERŐ** pedig F_B *megszorítása* (lásd (C4) magyarázatánál) a P-re.

Az erőfogalmak ugyanígy értelmezhetők külön a tömegerőkre, és külön a felületi erőkre is.

Az $F_P(H)$ vektor a P résztesten kívüli anyag hatása a P-nek H rész-halmazára. Ebben benne van a B-n kívüli anyag hatása, és a B – P halmaz anyagának hatása is a H halmazra. Ha H kiér a P határára akkor $F_P(H)$ a tömegerőn kívül tartalmazza a közös felületen átadódó erőt is. Érthető, hogy $F_P(P)$ vektor az egész P résztestre ható *eredő erő*.



7. ábra. A kölcsönös erő magyarázatához

A *kölcsönös erő*, azaz $F_{P,Q}(H) = F_P(H) - F_{P \cup Q}(H)$ vektor azt jelenti (7. ábra), hogy a P-n kívüli összes anyag erőhatásából levonjuk a P és Q egyesítésével kapott résztesten kívüli anyag hatását. A levonáskor a P-n kívüli összes anyag hatását levonjuk, *kivéve* a Q-ban levő anyag hatását. Az utóbbi megmarad, tehát $F_{P,Q}(H)$ valóban a Q résztestnek a H-ra gyakorolt hatása.

A *belső erőt* úgy kapjuk, hogy a B - P halmazt lezárjuk (azaz a határát is hozzá számítjuk), ekkor ez is egy résztest, és az általa a P-re gyakorolt kölcsönös erő a *belső erő*. (A B testen belül levő anyag hatása a P test tetszőleges H rész-halmazára).

A *külső erő* is érthető. Az F_B mérték az előbbi értelmezés szerint a B-n kívüli anyag hatása (tömegerők és felületi erők összege) a B testen. A P résztest H rész-halmazára ez is erőt gyakorol.

Legyen $\{F_P\}$ a B testre ható erők rendszere, $\varphi \in \Phi$ a B-nek egy konfigurációja, és $O \in E$ az euklideszi tér egy pontja. Ekkor a **NYOMATÉK**, amit a P résztesten ható F_P erők az O pont körül a φ konfigurációban kifejtenek egy vektor értékű mérték $M(F_P, \varphi, O)$, ami a P összes Borel-féle H rész-halmazára értelmezve van és az értéke ([1], 272. oldal):

$$M(F_P, \varphi, O, H) = \int_H [\varphi(X) - O] \times dF_P \quad (19)$$

Az $M(F_P, \varphi, O, H)$ vektor a P-re ható erők **EREDŐ NYOMATÉKA** az O körül.

5. fejezet. DINAMIKA

6. DEFINÍCIÓ: DINAMIKAI FOLYAMATNAK nevezzük a $\{B, \theta, F_{P,t}\}$ hármast, ahol B egy test, θ a test egy mozgása, és $F_{P,t}$ a B testre ható erők rendszerének egy egyparaméteres családja, ha eleget tesznek a következő két axiómának ([1], 272. oldal, [2], 38. oldal):

(D1) **Az impulzus törvénye:** B minden P részére, minden t időpillanatban:

$$\mathbf{F}_{P,t}(P) = \dot{\mathbf{g}}(P, t) \quad (20)$$

ahol \mathbf{g} az előzőekben definiált impulzus. Azaz szavakkal: A P résztestre ható eredő erő egyenlő a P résztest impulzusának idő szerinti deriváltjával.

(D2) **Az impulzusnyomaték törvénye:** B minden P részére, minden t időpillanatban, bármely $\mathbf{O} \in E$ pontra:

$$\mathbf{M}(\mathbf{F}_{P,t}, \theta, \mathbf{O}, P) = \dot{\mathbf{h}}(P, t, \mathbf{O}) \quad (21)$$

ahol \mathbf{h} az előzőekben definiált impulzusnyomaték. Azaz szavakkal: A P résztestre az \mathbf{O} pont körül ható eredő nyomaték egyenlő a P résztest \mathbf{O} pont körüli impulzusnyomatékának idő szerinti deriváltjával.⁷

Az egyszerűség kedvéért a jelölésből elhagyjuk a t időt és a felületi erők sűrűségére $\mathbf{s}(c, \theta, \mathbf{x})$ helyett egyszerűen $\mathbf{s}(c, \mathbf{x})$ -et írunk.

II. TÉTEL (az akció reakció tétele): A B test bármely két elkülönült P és Q résztestére ([1], 273. oldal):

$$\mathbf{F}_{P,Q}(P) = -\mathbf{F}_{Q,P}(Q) \quad (22)$$

azaz a Q által a P -re gyakorolt kölcsönös erő egyenlő a P által a Q -ra gyakorolt kölcsönös erő ellentettjével.

Bizonyítás: Alkalmazzuk (D1) axiómát P , Q és $P \cup Q$ résztestekre:

$$\mathbf{F}_P(P) = \dot{\mathbf{g}}(P), \quad \mathbf{F}_Q(Q) = \dot{\mathbf{g}}(Q), \quad \mathbf{F}_{P \cup Q}(P \cup Q) = \dot{\mathbf{g}}(P \cup Q) \quad (23)$$

$P \cap Q$ -nak nincs tömege az (M2) axióma miatt (az elkülönült résztestek közös része felület), ezért (8) egyenlet alapján

$$\mathbf{g}(P \cup Q) = \mathbf{g}(P) + \mathbf{g}(Q) \quad (24)$$

így (23) alapján

$$\mathbf{F}_P(P) + \mathbf{F}_Q(Q) = \mathbf{F}_{P \cup Q}(P \cup Q). \quad (25)$$

Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{F}_{P \cup Q}(P \cap Q) = 0$ (mert $P \cap Q$ felület). Ezért

$$\mathbf{F}_{P \cup Q}(P \cup Q) = \mathbf{F}_{P \cup Q}(P) + \mathbf{F}_{P \cup Q}(Q) \quad (26)$$

Amiből (18) definíciós egyenlet alapján következik a tétel állítása.

⁷ A (D1) és (D2) axiómák Newton törvényei alapján lényegében Eulertől származnak [7] lásd 6.4 részben.

III. TÉTEL (a reakció elve): A c felületdarabon ható felületi erő a $-c$ felületdarabon ható felületi erő ellentettje ([1], 274. oldal):

$$\mathbf{S}(c) = -\mathbf{S}(-c) \quad (27)$$

A $-c$ felület a c felület fordított irányítással (a negatív oldal lesz pozitív). A tétel bizonyítása: Ha c a B határának része akkor (irányítás váltással) könnyen belátható. Ha c a B belsejében van, akkor c egyik oldalára egy P jelű résztestet, a másik oldalára pedig egy Q jelű résztestet helyez. Az I. tételt és a kölcsönös erők (18) egyenletét alkalmazva, majd P és Q -t a c -re ráhúzza (a tömegük zérushoz tartásával) a tétel bizonyítást nyer.

Egyúttal látható, hogy ha $c = c_1 + c_2$, két darabonként sima irányított felületdarab összetevése (az algebrai topológia értelmében), akkor

$$\mathbf{S}(c_1 + c_2) = \mathbf{S}(c_1) + \mathbf{S}(c_2) \quad (28)$$

ami azt jelenti, hogy \mathbf{S} egy *additív vektor értékű függvény* a B test irányított felületdarabjain. Egyúttal bizonyított az is, hogy a II. tétel (az akció-reakció tétele) igaz külön a *kölcsönös tömegerőkre*, és külön a *kölcsönös felületi erők*re is.

IV. TÉTEL (feszültség elv): Létezik egy olyan vektor értékű $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ függvény, ahol $\mathbf{x} \in \theta_t$, és \mathbf{n} egy egységvektor, oly módon, hogy ([1], 275. oldal):

$$\mathbf{s}(c, \mathbf{x}) = \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (29)$$

valahányszor a $\theta_t(c)$ felületnek az $\mathbf{x} \in \theta_t(c)$ pontban a normál egységvektora \mathbf{n} . A $\theta_t(c)$ irányítását a c irányítása indukálja, és \mathbf{n} a $\theta_t(c)$ pozitív oldala felé mutat.

A kissé hosszadalmas bizonyítás azzal kezdődik, hogy a térben felvesz két felületet, c_1 -et és c_2 -öt úgy, hogy a térbeli képük normál egységvektora \mathbf{n} az \mathbf{x} pontnál. Aztán két körhenger alapú egyenes hengert tekint, melyeknek alkotói párhuzamosak \mathbf{n} -el, és a körrel szemközti oldalon a két felvett felület zárja le. A kis hengeres térfogatokra a (D1) axiómát alkalmazva a henger sugarával zérushoz tartva nyeri a tétel bizonyítását.

Az $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ vektort nevezte Cauchy **FESZÜLTSEGNEK** (angolul *stress*), ami az \mathbf{x} pontban az \mathbf{n} normál egységvektorú felületelemen hat. Az I. tételben szereplő $\mathbf{S}(c)$ függvényre nyilván ([1], 277. oldal):

$$\mathbf{S}(c) = \int_{\theta_t(c)} \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dA \quad (30)$$

és a II. tétel alapján:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{s}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}). \quad (31)$$

Ahhoz, hogy a klasszikus kontinuummechanika megszokott tételei érvényben legyenek, még a következő két pótlólagos feltételt kell tennünk (nevezhetjük pótlólagos axiómáknak is) ([1], 278. oldal):

(a) Az $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ feszültség minden \mathbf{n} -re sima függvénye az $\mathbf{x} \in \theta_t(\mathbf{B})$ -nek.

(b) Majdnem minden $X \in B$ anyagi pontra a határérték⁸:

$$\mathbf{b}(X) = \lim_{P \rightarrow X} \frac{1}{m(P)} \mathbf{B}_P(P) \quad (32)$$

létezik, amikor az X -nek a P környezete az X -re húzódik össze.

⁸ A 'majdnem minden X részecskére' azt jelenti, hogy azon X részecskékre, melyekre az állítás nem teljesül, bármely konfigurációban egy nullmértékű halmazt alkotnak a 3-dimenziós euklideszi tér térfogati mértéke szerint (például egy sima felületdarab is ilyen).

Ezekkel a klasszikus módon bizonyítható, hogy ([1], 278. oldal):

(1) Létezik egy olyan $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ tenzormező, $\mathbf{x} \in \theta_l(B)$, hogy

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) \mathbf{n} . \quad (33)$$

Az $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ tenzort az \mathbf{x} -beli **FESZÜLTÉG TENZORNAK** nevezzük.

(2) Az $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ feszültségtenzor szimmetrikus. (34)

(3) **Cauchy mozgásegyenlete** is érvényes: $\operatorname{div} \mathbf{S} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}$ (35)

ebben \mathbf{S} a feszültségtenzor, ρ a tömeg-sűrűség, $\dot{\mathbf{v}}$ a gyorsulás, és \mathbf{b} az előbbi (b) axiómával értelmezett határérték.

Ezzel eljutottunk a newtoni kontinuummechanika megszokott egyenleteihez.

Noll a cikke végén megfogalmazott két fontos *általános elvet* ([1], 278. oldal).

Az anyagi pontok helyzetét a valóságos fizikai térben *koordinátarendszerben* adjuk meg. Ezt a tér olyan tárgyaihoz rögzítjük, melyeknek egymástól mért távolságai az idő folyamán csak nagyon kicsit változnak, mint például egy laboratórium falai, az állócsillagok, vagy egy körhinta falvai. Ezeket **fizikai vonatkoztatási rendszereknek** nevezzük [3].

A *klasszikus fizika* keretében, ha egy fizikai vonatkoztatási rendszerről egy másik fizikai vonatkoztatási rendszerre áttérünk, akkor az idő és a tér paramétereit olyan képletekkel számítjuk át, melyek a pontok távolságát és az időtartamokat változtatlanul hagyják. A legáltalánosabb ilyen képletek:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c}(t) + Q(t)(\mathbf{x} - \mathbf{O}) , \quad t^* = t + a . \quad (36)$$

ahol $\mathbf{c}(t)$ egy időben változó vektor, $Q(t)$ időben változó ortogonális transzformáció, a egy valós konstans, és \mathbf{O} egyszer s mindenkorra rögzített pontja a térnek. (Lásd a 6.8. pontban.)

Feltételezzük, hogy $\mathbf{c}(t)$ és $Q(t)$ kétszer folytonosan differenciálható. A koordinátarendszer váltás vektorok és tenzorok átszámítását is igényli. Egy \mathbf{u} vektor így számítható át:

$$\mathbf{u}^* = Q(t) \mathbf{u} . \quad (37)$$

Legyen $\{B, \theta_l, \mathbf{F}_{P,t}\}$ egy dinamikai folyamat (lásd az 5. definícióban). Egy koordinátarendszer váltás $\{\mathbf{c}, Q, a\}$, a θ_l mozgást egy új θ'_l mozgásba transzformálja a (36) egyenlet alapján

$$\theta'_l(X) = \mathbf{c}(t - a) + Q(t - a)[\theta_{l-a}(X) - \mathbf{O}] . \quad (38)$$

A két θ_l és θ'_l mozgás sebességei és gyorsulásai általában nem tesznek eleget a vektorok (37) átszámítási képletének. Ezek ugyanis függnék a választott fizikai vonatkoztatási rendszertől. Azt mondjuk, hogy *nem objektívek*. Azonban vannak objektív kinematikai mennyiségek, például a *deformáció sebességek tenzora*.

Ha azt kívánnánk biztosítani, hogy az erők objektívek legyenek, akkor azt kellene követelnünk, hogy $\mathbf{F}_{P,t}(H)$ (erő vektor) a (37) egyenlet szerint transzformálódjon. Azonban, ha ezt a feltevést tesszük, akkor egy dinamikai folyamat nem dinamikai folyamattá transzformálódik mert a (D1) és (D2) axiómák nem teljesülnének, kivéve ha \mathbf{c} lineáris függvénye t -nek és Q állandó. Ez az a nehézség, ami az abszolút tér fogalmához vezetett, és ami oly sok bonyadalmat okozott a mechanika történetében. Végül Einstein tisztázta az általános relativitás elméletében, amelyben a gravitációs erők és a tehetetlenségi erők nem választhatók el egymástól objektív módon. Ha a klasszikus mechanika területén kívánunk maradni, akkor ezt a paradoxont úgy kell feloldanunk, hogy feláldozzuk a külső

térfogati erők objektivitását, míg megtartjuk a felületi erők és a kölcsönös térfogati erők objektivitását. Ezt azáltal tehetjük, hogy feltesszük, hogy az erők a következő alakú törvényszerűség szerint transzformálódnak:

$$\mathbf{F}'_{P,t}(\mathbf{H}) = \mathbf{Q}(t - a)\mathbf{F}_{P,t-a}(\mathbf{H}) + \mathbf{I}(\mathbf{H}, t) \quad (39)$$

ahol $\mathbf{I}(\mathbf{H}, t)$ a TEHETETLENSÉGI ERŐ ami az anyagi pontok \mathbf{H} részhalmazán hat a $\{\mathbf{c}, \mathbf{Q}, a\}$ koordinátarendszer váltás során.

7. DEFINÍCIÓ. Két dinamikai folyamatot, a $\{\mathbf{B}, \theta_t, \mathbf{F}_{P,t}\}$ és a $\{\mathbf{B}, \theta'_t, \mathbf{F}'_{P,t}\}$ folyamatot **EKVIVALENSNEK** nevezünk, ha van egy olyan koordinátarendszer váltás $\{\mathbf{c}, \mathbf{Q}, a\}$, hogy a θ'_t és $\mathbf{F}'_{P,t}$ értékei a θ_t és $\mathbf{F}_{P,t}$ értékekből a (38) és (39) egyenletekkel számíthatók ([1], 279. oldal).

A mozgó koordinátarendszerek klasszikus elmélete bizonyítja, hogy az $\mathbf{I}(\mathbf{H}, t)$ tehetetlenségi erő szükségképpen a következő alakú:

$$\mathbf{I}(\mathbf{H}, t) = \int_{\mathbf{H}} \mathbf{i}(\mathbf{X}, t) dm, \quad (40)$$

$$\text{ahol} \quad \mathbf{i}(\mathbf{X}, t) = \ddot{\mathbf{c}}(t - a) + 2\mathbf{V}(t - a)[\mathbf{v}'(\mathbf{X}, t) - \dot{\mathbf{c}}(t - a)] + \\ + [\mathbf{V}^2(t - a) - \dot{\mathbf{V}}(t - a)][\theta'_t(\mathbf{X}) - \mathbf{c}(t - a)], \quad (41)$$

itt \mathbf{v}' a sebesség a θ'_t mozgásban, és $\mathbf{V}(t)$ definíciója:

$$\mathbf{V}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}(t)^{-1}. \quad (42)$$

Könnyű belátni, hogy az \mathbf{I} tehetetlenségi erő csak a külső térfogati erőhöz jelent hozzájárulást, és a felületi erők, valamint a kölcsönös erők a (37) egyenlet szerint változnak (koordinátarendszer váltás esetén) tehát ezek objektívek. A külső térfogati erők és az inercia erők nem választhatók el egymástól objektív módon. (Lásd [3]-ban Foucault kísérletének magyarázatát.) A tapasztalat azt mutatja, hogy az egész naprendszerből álló test esetében vannak olyan rendszerek melyekben a külső térfogati erő közelítőleg zérus. Ezek a klasszikus Galilei rendszerek (melyek állandó sebességgel mozognak az állócsillagok rendszeréhez képest). Két ekvivalens dinamikai folyamat valójában ugyanahhoz a fizikai folyamathoz tartozik, csak az a különbség, hogy két különböző fizikai vonatkoztatási rendszerből nézzük.

Ahhoz, hogy az axiómák alapján konkrét számításokat tudjunk végezni, ismerni kell, hogy ρ és \mathbf{F} hogyan függ az anyagtól a mozgás során. Ezt sokszor egyenletekkel írjuk le, amelyek ugyanolyan fontosak, mint a minden anyagra érvényes axiómák, de megkülönböztetésül *nem axiómáknak*, hanem ANYAGI EGYENLETEKNEK (angolul: constitutive equations) nevezzük. Ilyen például a lineárisan viszkózus folyadékok Stokes-féle súrlódási törvénye:

$$\mathbf{F} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (43)$$

ahol p a nyomás, λ és μ a viszkozitás konstansai, \mathbf{D} a deformáció sebességek szimmetrizált tenzora, és \mathbf{I} az egységtenzor [3]. Esetenként az anyag viselkedését ideális *feltételek* közelítő teljesítésével jellemezzük. Például feltesszük, hogy a víz áramlása *összenyomhatatlan*. Az ilyen feltételeket ANYAGI FELTÉTELEKNEK nevezzük (angolul: constitutive assumptions). Az anyagi egyenletekkel és anyagi feltételekkel tehát számítani tudjuk ρ és \mathbf{F} változását a mozgás során.

Az anyagi feltételek (és egyenletek) *eleget* kell tegyenek a következő általános korlátozásnak:

OBJEKTIVITÁS ELVE: Ha egy dinamikai folyamatra érvényes egy anyagi feltétel, akkor minden vele ekvivalens folyamat (lásd 7. Definíció) *eleget* kell tegyen ugyanannak az anyagi feltételnek. Más szavakkal: Az anyagi feltételek (és egyenletek) *függetlenek* (invariánsok) *kell* legyenek a koordinátarendszer váltások során ([1], 280. oldal).

Az *objektivitás elve* fontos alaptörvénye a kontinuummechanikának.

6. fejezet. TANULSÁGOK

6.1. A matematikai alapozás haszna

Egy mérnök-matematikus egyszer így sóhajtott: *Bárcsak mechanikai számításomban úgy bízhatnék, mint Pitagorasz tételében!*

Noll elmélete ebből a szempontból *jelentős lépés*. Kiinduló alapfogalma **az anyagi pont** (3. ábra), és a *test* az anyagi pontok halmazán értelmezett **sima sokaság**. A *test tömege* és a rá ható *erőhatások* az anyagi pontok halmazán értelmezett **abszolút folytonos mértékek**. A sima sokaságok és a folytonos mértékek szépen kidolgozott matematikai elméletek. Az axiómákkal

Noll a newtoni kontinuummechanikát a matematika részévé tette!

Az előbb említett mérnök-matematikus vágya így teljesülni látszik. Természetesen ahhoz, hogy a mechanika *ugyanolyan biztonságot* nyújtson, mint a matematika, meg kell győződni arról, hogy *az elmélet kiinduló pontjai: az axiómák teljesülnek-e?* Az axiómák egyik része a matematikai műveletek elvégzését biztosítja, ez célszerű eszközökkel elérhető. Az axiómák másik része *fizikai tartalmú*, a továbbiakban ezeket tárgyaljuk. Az alapfogalmakat szerző egy bevezető jellegű tanulmányban [3] összefoglalta, ami itt kiegészítésként ajánlható.

6.2. Tömegmegmaradás

Newton a mechanikát megalapozó híres könyvét így kezdi [8],[3]: "**Az anyag mértéke a mennyisége.**" Ezt így értjük: Az "anyag" köznapi fogalom, nem szorul definícióra (az elmélet alkalmazásainál majd megmondjuk, hogy milyen anyagról van szó), a mértéke pedig azt jelenti, hogy egy mennyiséget rendelünk hozzá. Majd ezt írta: "... ezt a mennyiséget *testnek* vagy *tömegnek* fogom nevezni." Manapság ezeket a szavakat kicsit másként használjuk: **testnek** az alakzatot nevezzük, **tömegnek** a benne lévő anyag mennyiséget. Newton mondata azonban jelzi, hogy felismerte (a szavakat mai értelemben használva), hogy: **a mozgás során a test tömege nem változik!** *Szilárd testek* esetén ez természetes: az eldobott kő tömege röptében nem változik. *Folyadékok és légnemű testek* esetén is igaz. Ha egy adott pillanatban a folyadék egy részét körülveszük egy felülettel (ezzel kijelölve egy testet), akkor *az anyaggal együtt mozgó felület* változatlan tömeget határol! Ez a **tömegmegmaradás törvénye**. A törvény nem csak *mechanikai folyamatokra*, hanem *termodinamikai és kémiai folyamatokra* is érvényes! (Kémiai folyamat esetén: a reakció utáni össztömeg egyenlő a reakció előtti össztömeggel, amit számos mérés igazolt.)

Hogyan érvényesül a tömegmegmaradás Noll rendszerében? Nála a *tömeg* az anyagi pontok **időtől független halmazán** értelmezett **mérték**. Amikor tehát a P résztest *mozgásban* vesz részt, akkor a tömeg (ugyanazon halmazon ugyanazon mértékkel számítva) a mozgás során *nem változik*. **Noll így biztosítja a tömegmegmaradást.** Érdemes az alábbiakra is figyelni: 1) A P résztest mindig *ugyanazokat az anyagi pontokat* tartalmazza, 2) A P résztest felületén *anyag nem érkezik és nem távozik*, 3) Minden mérték *additív*: "az egész mértéke egyenlő a részek mértékeinek összegével". A *tömeg* esetén ez hétköznapi tapasztalat.

A **tömegmegmaradás** törvényét a **mai atomfizika** is alátámasztja [3]. Az *additivitás* alapján a test tömege a felületén belül levő **elemi részek** tömegeinek az összege. Az elemi részek tömegei ismertek, és **mechanikai, hőtani vagy kémiai folyamatok** során **nem változnak**, ugyanis hőtani folyamatok esetén csak az atomi részek hőmozgása változik, kémiai folyamatoknál pedig csak az elektronhéjak. Tehát, ha a test felületén elemi részek nem érkeznek és nem távoznak, akkor **a tömegmegmaradás teljesül!** Az *atommagokat* érintő folyamatok esetén azonban más a helyzet, *Einstein* $\Delta E = c^2 \Delta m$ képlete alapján a tömeg kissé változik! Ezért a **nukleáris folyamatokat kizárjuk a newtoni kontinuummechanikából** (bár a tömeg változása a képlet alapján számítható).

A tömegmegmaradást Truesdell és Toupin [7] részletesen tárgyalják.

Newton ismerte a **dinamikai tömeg** és a **gravitáló tömeg arányosságát** is: Ha a Föld egy pontján két test súlya egyforma, akkor ugyanazon erővel meglökve a gyorsulásuk is egyforma lesz! Erről Noll egy másik cikkében [10] ezt írta: "Kísérleti tény, hogy az $m_d(P) / m_g(P)$ hányados értéke (ahol P tetszőleges résztest, m_d a dinamikai tömeg és m_g a gravitáló tömeg) nem csak *független* a P résztesttől, de valójában **ugyanaz, a természetben valaha is előfordult testekre**. Megfelelő egységgel: $m_d = m_g = m$."

6.3. Newton axiómái

Egyértelműség kedvéért Newton axiómáit kitűnő fordításából [8] idézzük:

Newton I. axiómája (tehetetlenség törvénye): "Minden test megmarad nyugalmi állapotában vagy egyenes és egyenes vonalú mozgásában, hacsak külső erő nem kényszeríti ennek az állapotnak az elhagyására."

Newton II. axiómája (mozgástörvény): "A mozgás megváltozása arányos a külső, mozgató erővel, és annak az egyenesnek az irányában megy végbe, amelyben ez az erő hat."

Newton III. axiómája (akció-reakció törvénye): "A hatással mindig egyenlő nagyságú és ellentétes visszahatás áll szemben; más szóval: két testnek egymásra gyakorolt kölcsönös hatása mindig egyenlő és ellentétes irányú."

Newton I. axiómája így kezdődik: "Minden test ...". Nem "geometriai", hanem "mechanikai testekről" ([3], 6. és 9. oldal) van szó, amelyekre a *tömegmegmaradás is teljesül*. Ez kitűnik Newtonnak az axiómákat megelőző említett magyarázatából, és például a rakéta mozgásából is, melyből tömeg távozik, és rá az I. axióma nem is teljesül! A "mechanika test" *tömege* tehát a mozgás során *állandó*, mindig ugyanazokat az *anyagi pontokat* tartalmazza, és ezért *anyagi térfogatnak* is nevezhető [3]. Tehát az I. axiómát így is kezdhethetnénk: "Minden mechanikai test ..." és erre vonatkoznak az axióma további fontos tényei: *a magára hagyott (mechanikai) test tehetetlen*, és a *testre* ható **külső erő** az, ami **megváltoztatja** a mozgásállapotát (ha nincs ellensúlyozva).

Newton II. és III. axiómája a newtoni kontinuummechanika legfontosabb része. Ezeket Euler és Cauchy átfogalmazta (lásd alább).

A 6.1. pontban említett mérnök-matematikus egyszer javaslatot tett egy mérőberendezés megvalósítására. Kitűnő gépészmérnök főnöke kétségét fejezte ki a berendezés működésével kapcsolatban. Matematikusként minden tervezési lépést végiggondolva két hét múlva kijelentette: *Ha Newton törvényei igazak, akkor tökéletesen fog működni*. A javaslatot elfogadták. A berendezés elkészült, a GANZ gyárban 40 évig kitűnően működött. Ezt annak bizonyítására említjük, hogy *a mérnöktársadalom nem kételkedik Newton axiómarendszerében*.

6.4. Euler axiómái

A nagy rendszerező Euler általánosította Newton II. axiómáját:

Euler I. axiómája (mozgásegyenlet):
$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{f} = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_j, \quad (45)$$

ahol t az idő és \mathbf{i} az impulzusvektor, amit (8) egyenlet definiál. Az egyenlet jobb oldalán \mathbf{f}_j a V térfogatú *mechanikai testre* (Noll szerint *résztestre*, [3] szerint *anyagi térfogatra*) kívülről ható egyik erő ($j = 1, \dots, n$), n a rá kívülről ható erők száma, és \mathbf{f} a rá kívülről ható *erők eredője*. Az *impulzus deriváltja tehát egyenlő a newtoni testre ható erők eredőjével*. Ebből levezethető az iskolai gyakorlatban megszokott: $m \mathbf{a} = \mathbf{F}$ egyenlet is [3].

Newton II. axiómája csak azt mondja ki, hogy az impulzus megváltozása *arányos* az eredő erővel. Azonban, ha elhatározzuk, hogy mindig SI nemzetközi egységeket (m, kg, s) használunk, és az erőt Newtonban számítjuk ($1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2$) akkor (45) egyenletbe az *egyenlőség* jelét tehetjük.

Euler az akció-reakció törvénye alapján levezette a *nyomatéki egyensúly* egyenletét is. A levezetésben **Newton III. axiómáját úgy értelmezte**, hogy **a hatásvonalak egyezését** is követeli! Ez azt jelenti, hogy bármelyik *akció-reakció párnak* a tér bármely pontjára vonatkozó forgatónyomatéka zérus. A koordináta-rendszer *origójára* vonatkozó **impulzusnyomaték** definíciója:

$$\mathbf{i}_{nyomaték} = \int_M \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV, \quad (46)$$

ahol \mathbf{r} az origótól a dm tömeghez mutató helyvektor, \mathbf{v} és ρ a dm tömegnél a sebesség és a sűrűség, ami megfelel Noll (9) egyenletének is. Erre érvényes:

$$\text{Euler II. axiómája (nyomatéki törvény):} \quad \frac{d\mathbf{i}_{nyomaték}}{dt} = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j, \quad (47)$$

ahol \mathbf{r}_j az origótól az \mathbf{f}_j erő támadási pontjához vezető helyvektor, és n a ható erők száma. Az egyenlet megfelel Noll (D2) axiómájának, a (21) egyenletnek: *Az impulzusnyomaték deriváltja tehát egyenlő a newtoni testre ható erők nyomatékainak összegével.*

Az évszázados mérnöki tapasztalatok igazolták Euler axiómáit is.

6.5. Cauchy axiómái

Cauchy feltételezte, hogy *a testek felületén* ható felületi erők **feszültségekből** integrálhatók. **Euler I. és II. axiómája** így ilyen alakú lett:

$$\text{Cauchy I. axiómája:} \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} d\mathbf{S}, \quad (48)$$

$$\text{Cauchy II. axiómája:} \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S}. \quad (49)$$

ahol t az idő, mint változó és t_1 adott időpont. A bal oldali integrálokat a $V(t)$ időben változó *anyagterfogaton* kell számítani, ρ sűrűség, \mathbf{v} sebesség, \mathbf{r} helyvektor, \times a vektoriális szorzás jele, az integrálok értéke függ az időtől, ezt a függvényt kell differenciálni az idő szerint, és a differenciálhányadost a t_1 értéknél kell kiszámítani. A jobb oldali integrálokat időben változatlan $V(t_1)$ és $S(t_1)$ tartományokon kell számítani, ahol $S(t_1)$ a $V(t_1)$ felülete, \mathbf{g} a fajlagos tömegelő (Földi rendszerben \mathbf{g} a nehézségi gyorsulás [3]), és \mathbf{F} a **feszültségtenzor**.

Cauchy I. és II. axiómája valójában **Euler I. és II. axiómája** kontinuummechanikai változókkal felírva, és a felületi erőket feszültségtenzorral számítva. Az axiómákban az \mathbf{F} feszültségtenzor csak az $S(t_1)$ felületen jelenik meg. *Cauchy* azonban azt is felismerte, hogy *a test belsejében* is ébrednek *feszültségek* (lásd [3]-ban is) és bemutatta, hogy a tér egy \mathbf{r} helyvektorú pontjában a feszültségek egy \mathbf{F} **feszültségtenzorral** számíthatók. *Cauchy* munkásságával kialakult a *newtoni kontinuummechanika* manapság is sűrűn alkalmazott axiómarendszere [7].

Noll (D1) és (D2) axiómája valójában **Cauchy I. és II. axiómája**, azzal az eltéréssel, hogy a térfogati és felületi erőket az általános erőfogalommal írja föl. A bizonyításai révén azonban végül azt látjuk, hogy *egyenértékűek* Cauchy axiómaival.

6.6. Noll rendszere

Noll alapfogalma az ANYAGI PONT, ami a térben mozog (3. ábra), szemben a térben álló pontokkal (amelyek helyvektorokkal vannak adva). Az anyagi pontok halmaza a TEST, és ennek részhalmazai a RÉSZTESTEK (és ezek Borel-féle részhalmazai). A test térbeli megjelenési formái (konfigurációi) *anyagot tartalmazó, felülettel határolt ponthalmazok*. A testek felülete véges sok *sima* felületdarabból áll, amelyeken az integrálok jól számíthatók. A TÖMEGET az anyagi pontok halmazain értelmezett *valós szám értékű* mértékként, az ERŐHATÁSOKAT pedig *vektor értékű* mértékként definiálta.

A térfogati erőhatások (B1) – (B3) axiómái egyszerűen vezettek a TÉRERŐ fogalmához. A felületi erők (C1) – (C5) axiómái hosszabb gondolatmenettel vezettek a FESZÜLTSG fogalmához. Az utóbbi utat érdemes végig követni, mert ez Noll cikkének fő eredménye.

(C1) axióma ugyanúgy értelmezi a C_P **mértéket**, mint (B1) a B_P mértéket. Ekkor tehát még csak annyit tudunk, hogy a P résztest H részhalmazára ható erőhatás (7. ábra) egy vektor: $\mathbf{f} = C_P(H)$, ami természetesen még függ a P résztesttől és a H részhalmaztól.

(C2) követeli, hogy a H -ra ható \mathbf{f} erő a P résztestnek csak a \bar{P} **határától** (felületétől) függ.

(C3) követeli, hogy ha c *sima* felületdarab \bar{P} része, és c egy P -t tartalmazó Q résztest \bar{Q} határának is része, akkor a rajtuk ható erők legyenek *egyenlők*. Tehát ha $H = c$, akkor a P -nél *nagyobb* Q résztesten ugyanaz az erő hat.

(C4) biztosítja, hogy a térbeli ponthalmazon a **feszültség** létezik.

(C5) axióma ésszerű módon **korlátozza** a feszültséget.

Az I. tétel bizonyítja, hogy a felületdarabokon ható erő független a résztesttől.

A II. tétel az *akció-reakció* törvényének *bizonyítása*. Érdekes, hogy a korábban *axiómaként* tisztelt törvény *tételként* jelentkezik. A bizonyítás azon alapul, hogy ha P és Q résztest, akkor $P \cup Q$ is résztest, és erre a háromra alkalmazva Noll (D1) axiómáját, a tétel bizonyítást nyer. A bizonyítás a (D1) axiómán kívül Noll rendszeréből más axiómát nem használ (!), és (D1) elődje *Cauchy* I. axiómája, ami azt jelenti, hogy a bizonyítás Noll axióma rendszerétől független: azaz *Newton*, *Euler* és *Cauchy* megszokott törvényeiből is következik!

Mivel az *akció-reakció törvényét* a múltban is sokszor sikeresen alkalmaztuk, ezt a továbbiakban is megtehetjük, függetlenül attól, hogy axióma-e vagy tétel.

A III. tétel a *reakció elvének* bizonyítása. Ha c egy *sima* felületdarab, és tekintjük a fordított irányítású – c felületdarabot, akkor a c -n ható felületi erő $\mathbf{S}(c)$ (a c pozitív oldalán levő anyag erőhatása a negatív oldalán levő anyagra) valamint az $\mathbf{S}(-c)$ erő (az eredeti c negatív oldalán levő anyag erőhatása a pozitív oldalán levő anyagra) egymás ellentettjei (azaz (27) egyenlet érvényes). Valójában ezt az elvet használtuk a múltban is, az akció-reakció elvének alkalmazásaként.

A III. tételből következik, hogy ha $c = c_1 + c_2$, két darabonként *sima* irányított felület összetevése, akkor

$$\mathbf{S}(c_1 + c_2) = \mathbf{S}(c_1) + \mathbf{S}(c_2) \quad (50)$$

ami azt jelenti, hogy \mathbf{S} valójában egy *additív vektor értékű függvény* a B test irányított felületein ható erő vektora. Evvel egyúttal az is bizonyított, hogy a II. tétel (az akció-reakció tétele) igaz külön a *tömegerőkre*, és külön a *felületi erőkre* is.

A IV. tétel az $\mathbf{s}(c, \mathbf{x})$ feszültséget megszabadítja a c felületdarabtól, azaz egy adott \mathbf{x} pontban a feszültség csak \mathbf{x} -től és a felületelem \mathbf{n} normál egységvektorától függ. Vagyis eljutunk *Cauchy* feszültség elvének $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ kiinduló pontjához. A klasszikus mechanika tankönyveiben megtalálható Cauchy bizonyítása arról, hogy a feszültség az \mathbf{n} normálvektor homogén lineáris függvénye, azaz: $\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ másodrendű tenzor, amit [3]-ban $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ **FESZÜLTSGTENZOR** jelöl. A feszültségtenzor a *nempoláros* kontinuumokban *szimmetrikus* ([3], 34. és 46. oldal), ami azt jelenti, hogy Noll axiómái olyan testekre vannak fölrva, melyekben nincsenek mágnesek.

6.7. Gyakorlati axiómarendszer

Gyakorlati kontinuummechanikai számítások céljára állítottuk össze az alábbi axiómarendszert egy gépipari gyár fejlesztő részlegénél [3]. **Newton** három axiómájának számozását megtartottuk. A következő alapmennyiségeket vezettük be: t idő, \mathbf{r} helyvektor, ρ sűrűség, \mathbf{v} sebesség, \mathbf{g} fajlagos tömegerő, \mathbf{F} feszültségtenzor (amit Noll \mathbf{S} -el jelölt). **Definíció:**

Azt mondjuk, hogy az alábbi axiómák newtoni kontinuum mozgását írják le, ha tetszőleges $V(t)$ időben változó anyagi térfogatra (ami a mozgása során mindig ugyanazokat az anyagi pontokat tartalmazza és $S(t)$ a felülete) bármely t_1 időpillanatban teljesül ([3], 27. oldal):

$$(Ia) \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV \right|_{t=t_1} = 0, \quad (51)$$

$$(IIa) \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{F} d\mathbf{S}, \quad (52)$$

$$(IIIa) \quad \left. \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \right|_{t=t_1} = \int_{V(t_1)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV + \int_{S(t_1)} \mathbf{r} \times \mathbf{F} d\mathbf{S}. \quad (53)$$

Az axiómák és paramétereik ugyanúgy értendők, mint Cauchy axiómái a (49) egyenlet után.

Az **(Ia) axióma** a **tömegmegmaradás** teljesülését követeli: Az integrál a $V(t)$ anyagi térfogat tömege, aminek deriváltja zérus, tehát az integrál maga (a tömeg) időben állandó (a jele azért **(Ia)** mert **Newton I. axiómájának** előfeltétele). A **(IIa)** és **(IIIa) axióma** Noll (D1) és (D2) **axiómája** a (20) és (21) egyenletek, melyeknek történelmi előzményei **Newton II. és III. axiómája**. Az axiómák érvényesek a mozgás teljes időtartama alatt **bármely** $t = t_1$ időpillanatban.

Az axiómák bal oldala hasonló, ami azért előnyös, mert egyformán kezelhetők [3]. Az **(Ia)** axióma kényelmesen használható szakadási feltételek levezetésénél is [3]. A gyakran előforduló Földi rendszerekben \mathbf{g} a nehézségi gyorsulás, ismert. Azzal, hogy a tömegmegmaradást összekötöttük Noll (D1) és (D2) axiómaival lehetővé vált **a newtoni kontinuum definíciója egyetlen mondatban**. Ez összefoglalja az összes fontos tapasztalati tényt amelyeken a newtoni kontinuummechanika alapul.

Az **(Ia) – (IIIa) axiómák csak mechanikai erőhatásokat** vesznek figyelembe. Másfajta hatásokra (villamos, mágneses, stb.) az axiómák kiterjesztései használhatók [3],[7].

Említésre méltó, hogy az **áramlástechnikai forgógépek** (szivattyúk, vízturbinák, gőz- és gázturbinák, ventilátorok, fűvók és turbókompresszorok) **tervezési alapegyenlete** a járókerékre alkalmazott **(IIIa) axióma**. Az első ilyen gépet **Segner János András** tervezte, ami Göttingen mellett működött is. A newtoni törvényekre alapozott számításait *Segner* megküldte *Eulernak*, aki képletbe foglalta (*Euler-Segner* turbina egyenlet [3]). A modernkori alkalmazást *Csanády* [6] mutatta be.

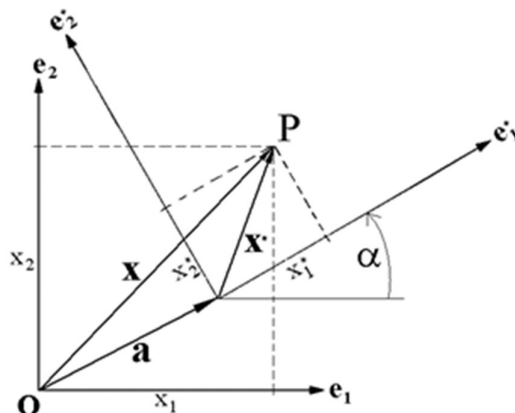
Szilárd *testek* (gépek, épületek, szerkezetek) és *közel összenyomhatatlan folyadékok* (víz, olaj) kontinuummechanikai számításait **hőtan fogalmak nélkül** is el lehet végezni. Ilyen feladatok céljára az **(Ia) – (IIIa) axiómák** (és származékaik) rendelkezésre állnak [3]. Az ilyen számítások alapját képező elméleti mechanikai modellek **3 független fizikai törvényen alapulnak**.

Olyan kontinuummechanikai feladatok esetén azonban, melyeknél a **súrlódás** lényeges (nem hanyagolható el, és nem elég korrekciókkal figyelembe venni) vagy **összenyomható közegek** (gőz és gáz) áramlásának számítása is cél, az **(Ia) – (IIIa) axiómák** rendszerét ki kell egészíteni a **termodinamika első főtétele**vel [3]. Ilyen esetben az elméleti mechanikai modell **4 független fizikai törvényen alapul**.

A kereskedelembe kapható kontinuummechanikai szoftverek ismertetésénél fel szokták tüntetni, hogy a szoftver mely axiómákat alkalmazza. Ezt ismerve elképzelést nyerhetünk arról, hogy használható-e a feladataink megoldására.

6.8. Koordináta-rendszer-váltás

Cikke [1] végén **Noll** definiálta az *ekvivalens dinamikai folyamatokat*, és értelmezte az *objektivitás elvét*. Mindkét fogalom kapcsolatban van a *koordináta-rendszer-váltásokkal*, ezért itt ezeket tárgyaljuk. A *síkbeli* (2-dimenziós) eset ismertetésével kezdjük (8. ábra).



8. ábra. Koordináta-rendszer-váltás a síkban

A 8. ábrán az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ bázisvektorokkal adott koordináta-rendszer \mathbf{O} origóját az $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ vektorral eltoljuk, és utána a koordináta-rendszert elfordítjuk α szöggel (8. ábra), így kapjuk az $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*$ bázisvektorú koordináta-rendszert. Az eredeti koordináta-rendszerben a sík tetszőleges \mathbf{P} pontjának a helyvektora $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ (8. ábra). Az új koordináta-rendszerben ugyanazon \mathbf{P} pont helyvektora $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ (8. ábra). Ha bármi történik a \mathbf{P} pontnál, az eredeti koordináta-rendszert használó megfigyelő az eseményt az (x_1, x_2) koordinátáknál észleli. Ugyanazt az eseményt az új koordináta-rendszert használó az (x_1^*, x_2^*) koordinátáknál rögzíti. Első feladatunk az, hogy ismerve a koordináta-rendszer-váltás paramétereit (az (a_1, a_2) és α adatokat) megállapítsuk, hogy az új koordináták (x_1^*, x_2^*) hogyan számíthatók a régi koordinátákból (x_1, x_2) , azaz a *koordináta-transzformáció* egyenleteit keressük.

A vektorok kifejezhetők a bázisvektorokkal:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{x}^* = x_1^* \mathbf{e}_1^* + x_2^* \mathbf{e}_2^*, \quad \text{és így az}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{x}^* \quad \text{vektoregyenlet:} \quad x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + x_1^* \mathbf{e}_1^* + x_2^* \mathbf{e}_2^*.$$

$$\text{A bázisvektorok (ránézésre)} \quad \mathbf{e}_1^* = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2^* = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2,$$

$$\text{tehát: } x_1 - a_1 = x_1^* \cos \alpha - x_2^* \sin \alpha, \quad x_2 - a_2 = x_1^* \sin \alpha + x_2^* \cos \alpha.$$

Ezekben az egyenletekben felismerhetők a következő *mátrix szorzások*:

$$\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}, \quad \text{azaz vektorosan: } \mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{x}^*,$$

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ami vektorosan: } \mathbf{x}^* = \mathbf{M} (\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

$$\text{ahol } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ az } \alpha \text{ szögű forgatás mátrixa,}$$

\mathbf{M}^{-1} az \mathbf{M} inverze, azaz a $(-\alpha)$ szögű forgatás mátrixa, és ezekre érvényes az

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T \text{ egyenlőség, ahol } \mathbf{M}^T \text{ az } \mathbf{M} \text{ mátrix transzponáltja (főátlóra tükrözöttje).}$$

Az előbbi egyenletek a 2-dimenziós *koordináta-transzformáció* keresett egyenletei.

A **térbeli koordinátarendszer-váltás** egyenleteinek levezetése szerepel [3]-ban, de vázlatosan itt is bemutatjuk. Az általános esetet vizsgáljuk, a térben mozgó koordinátarendszer gyorsulva halad, és gyorsulva forog az állóhoz képest.

A 9. ábrán az *álló* Descartes-féle koordinátarendszert (x,y,z) képviseli, a *mozgó* rendszert (x',y',z') . A mozgó rendszer megfigyelője egy anyagi pont pályáját regisztrálja az (x',y',z') tengelyekhez képest. Annak érdekében, hogy a pálya alakját lássuk, *forgassuk* az (x',y',z') koordinátarendszert olyan helyzetbe, hogy a tengelyei *párhuzamosak legyenek* az álló tengelyekkel. Így nyerjük az (x'',y'',z'') rendszert. A *mozgó megfigyelő által észlelt pálya ebben jelenik meg*. Az alábbi egyenleteknél könnyebbség, ha a forgatás tenzorának az *inverzét* jelöljük \mathbf{M} -el (9. ábra). A mozgó rendszer origójának helyvektora az álló rendszerben \mathbf{r}_0 . A megfigyelt anyagi pont helyvektora az álló rendszerben \mathbf{r} , a mozgó rendszerben \mathbf{r}' , illetve az elforgatottban \mathbf{r}'' .

Az ábra alapján:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' , \quad (54)$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{M} \mathbf{r}'' , \quad (55)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{M} \mathbf{r}'' . \quad (56)$$

Az utóbbi egyenlet a *koordináta-transzformáció egyenlete*. Mind a négy paraméter függ az időtől. A newtoni kontinuum elméletében az idő egyformán múlik a rendszerekben: $t'' = t' = t$. Az (56) egyenlet koordinátáiban:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(x''x') & \cos(y''x') & \cos(z''x') \\ \cos(x''y') & \cos(y''y') & \cos(z''y') \\ \cos(x''z') & \cos(y''z') & \cos(z''z') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} , \quad (57)$$

ahol $(y''x')$ egy szög, a 9. ábrán jelölt y'' tengely és x' tengely szöge (a $''$ -ös rendszer origóját a $'$ -ös rendszer origójához tolva). Az \mathbf{M} tenzor a *forgatás* tenzora, hossztartó, szögtartó⁹, és az inverze a transzponáltja [9] ¹⁰, esetenként *mértéktartó* vagy *ortogonális* tenzornak nevezik.

Az idő szerinti differenciálást ponttal jelöljük.

$$\text{A (54) egyenletből:} \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\mathbf{r}}' ,$$

$$\text{és az (55) egyenletből (szorzat deriváltja):} \quad \dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{M}} \mathbf{r}'' + \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' .$$

$\dot{\mathbf{M}}$ Mértékét [3], [7] és [17] alapján a mozgó koordinátarendszer pillanatnyi forgásának $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektorával fejezzük ki, és így:

$$\text{A sebességek transzformációs képlete [3]:} \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' . \quad (58)$$

$$\text{A gyorsulások transzformációs képlete [3]:} \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'' + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}'' . \quad (59)$$

$$\text{Új jelöléseket bevezetve [3]:} \quad \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}_0 = \ddot{\mathbf{r}}_0, \quad \mathbf{w}' = \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}'', \quad \mathbf{a}' = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}'', \quad (60)$$

ahol a két utóbbit a rögzített bázisvektorú (x'',y'',z'') rendszerből visszaforgatással nyerjük. Ezekkel:

⁹ Tetszőleges \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorra $(\mathbf{M}\mathbf{v})^2 = \mathbf{v}^2$, és $(\mathbf{M}\mathbf{u})(\mathbf{M}\mathbf{v}) = \mathbf{u}\mathbf{v}$.

¹⁰ Az inverz \mathbf{M}^{-1} . Az \mathbf{M}^T transzponált mátrixot az \mathbf{M} mátrix főtenzelyre való tükrözésével kapjuk: $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}' + \mathbf{a}', \quad (61)$$

ahol \mathbf{a} az anyagi pont gyorsulása az álló rendszerben, \mathbf{a}_0 a mozgó rendszer origójának gyorsulása az álló rendszerben, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ a mozgó rendszer forgásának szöggyorsulása az álló rendszerben, majd a centripetális gyorsulás és a Coriolis gyorsulás (-1)-szerese következik, és végül \mathbf{a}' az anyagi pont gyorsulása a mozgó rendszerben.

Példaként nézzük meg, hogyan alakul Cauchy mozgásegyenlete a mozgó rendszerben? Az álló rendszerben Cauchy egyenlete a (35) egyenlet:

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{g} + \text{div} \mathbf{F} . \quad (62)$$

Ebbe \mathbf{a} értékét (61)-ből helyettesítve és átrendezve:

$$\rho \mathbf{a}' = \rho \mathbf{g} - \rho \mathbf{a}_0 - \rho \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - 2 \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}' - \rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \text{div} \mathbf{F} . \quad (63)$$

Ebből látható, hogy ha úgy értelmezzük a mozgó rendszerbeli \mathbf{g}' értékét, hogy:

$$\rho \mathbf{g}' = \rho \mathbf{g} - \rho \mathbf{a}_0 - \rho \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - 2 \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}' - \rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') , \quad (64)$$

akkor Cauchy egyenlete a mozgó rendszerben is érvényben marad:

$$\rho \mathbf{a}' = \rho \mathbf{g}' + \text{div} \mathbf{F} . \quad (65)$$

A (64) egyenlet mutatja, hogy a térfogati erőssűrűséget hogyan kell módosítani ahhoz, hogy Cauchy egyenlete a mozgó rendszerben is teljesüljön. (64) jobb oldalán a $\rho \mathbf{g}$ után a *tehetetlenségi erők* sűrűségei szerepelnek: A $\rho \mathbf{g}$ utáni első két tag a mozgó rendszer gyorsulásából származik, a harmadik a **Coriolis erő** sűrűsége: $\mathbf{f}_{\text{Coriolis}} = -2\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}'$, a negyedik pedig a **centrifugális erő** sűrűsége: $\mathbf{f}_{\text{centrifugális}} = -\rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$. A leggyakrabban előforduló esetben az origó rögzített ($\mathbf{a}_0 = 0$), és a rendszer egyenletesen forog ($\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$), ekkor csak a Coriolis és a centrifugális tag marad az egyenletekben.

Egyébként az is igaz, hogy a külső térfogati erőssűrűségnek a (64) egyenlet szerint módosult értékével a newtoni kontinuummechanika összes axiómái (az (51) – (53) egyenletek) érvényben maradnak [3] (tehát a mozgó rendszer is inerciarendszerként kezelhető!). Ezt Noll is említi a 7. definíciónál a (40) – (42) egyenleteknél. Noll értelmezése szerint **az előbb tárgyalt álló és mozgó koordinátarendszerekben megjelenő mozgások ekvivalens dinamikai folyamatok.**

A (65) egyenletből látható, hogy a feszültségtenzort nem kell módosítani. *A feszültségek és a felületeken ható erők a mozgó rendszerben ugyanazok, mint az álló rendszerben.* Az idő és az anyag sűrűsége is ugyanaz. A mozgó rendszer alaplmenységei: $t, \mathbf{r}', \rho, \mathbf{w}', \mathbf{g}', \mathbf{F}$.

A $\text{div} \mathbf{F}$ vektor kezelésére alább visszatérünk, előbb azonban emlékeztetbe idézzük a *vektorok* szabályait. A **geometriában** az *irányított szakaszokat* (nyilakat) nevezik vektoroknak [5]. Két vektort azonosnak tekintünk, és egyenlőnek mondunk, ha *hosszuk* és *irányuk* megegyezik. A vektort *eltolhatjuk* önmagával párhuzamosan bárhová, ugyanaz marad. Ha egy vektor kezdőpontját egy koordinátarendszer origójába toljuk, akkor a 3-dimenziós euklideszi térben a végpontja a 3 koordinátájával jellemezhető. A **fizikában** a geometriához hasonlóan a *vektorok eltolhatók*. Ennek előnye világosan megmutatkozik, amikor erő diagramok rajzolásakor az erő vektorokat szabadon toljuk a rajz bármely pontjába.

Most tekintsünk egy *fizikai vonatkoztatási rendszert* (az értelmezését lásd a (36) egyenlet előtt), és legyen ebben egy vektor (nyíl), amit \mathbf{v} -vel jelölünk. Ennek fizikai jelentése is lehet, de ennél a gondolatmenetnél ez lényegtelen. Koordinátarendszer még nincs megválasztva, de a \mathbf{v} helyzete a vonatkoztatási rendszert meghatározó testekhez képest adott. Most válasszunk a vonatkoztatási rendszerben *két* koordinátarendszert. A \mathbf{v} vektor koordinátái a vesszős és kétvesszős rendszerben:

$$\mathbf{v} = (v'_1, v'_2, v'_3) = (v''_1, v''_2, v''_3) . \quad (66)$$

A koordináták különböznek, de közéjük tehetjük az egyenlőség jelét, mert ugyanazt a \mathbf{v} vektort képviselik. A \mathbf{v} vektor független a koordinátarendszertől! Akkor is ott van a térben, ha nincs koordinátarendszer. Ha az egyik koordinátarendszerről áttérünk a másikra (és közben \mathbf{v} változatlan!), akkor ezt a (37) egyenlettel tehetjük meg, ami ilyen alakú:

$$\begin{pmatrix} v_1'' \\ v_2'' \\ v_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} \quad \text{ahol} \quad \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \text{ a forgatás mátrixa} \quad (67)$$

Ennek szemléletes értelme az, hogy a vektort eltoljuk az egyik koordinátarendszer origójába és meghatározzuk a koordinátáit, majd eltoljuk a másik origójába és ott is számítjuk a koordinátáit, és a két számhármass között a forgatás ortogonális mátrixa teremti összefüggést! (A forgatás a két koordinátarendszer bázisvektorait is egymásba viszi.) Figyelemre méltó, hogy a mozgó koordinátarendszer origójának *eltolás vektora* (az álló origóhoz képest) *nem szerepel* a képletben (ez annak köszönhető, hogy a vektorok eltolhatók). Ha egy számhármass minden koordinátarendszer váltás esetében a (67) egyenlet szerint transzformálódik, akkor azt mondjuk, hogy olyan **vektort** határoz meg, ami a koordinátaváltások során **invariáns**. Azt is mondják, hogy az ilyen vektorok **objektívek**.

Objektívnek a megfigyelő koordinátarendszerétől független fizikai fogalmakat nevezik. Egyesek az objektív dolgokat *értékesebbnek* tartják, mint a nem-objektíveket. Ennek nincs alapja.

Nem objektívek a *helyvektorok*, mert függnek attól, hogy hol van a koordinátarendszer origója. A helyvektorok átszámítási képlete az (57) egyenlet, ami **nem felel meg** a (67) egyenletnek.

Anyagi pontok mozgásánál a *sebességvektorok* és a *gyorsulásvektorok* nem objektívek, mert az átszámítási képletük az (58) és (61) egyenlet.

A newtoni kotinuummechanikában *nem objektívek* a külső térfogati erők és a belőlük származó sűrűségek, mert az átszámítási egyenletük a (64) egyenlet.

Objektív a Cauchy egyenletében szereplő $\text{div } \mathbf{F}$ vektor.

Objektív minden olyan elem, ami a kiindulásunk fizikai vonatkoztatási rendszerében a koordinátarendszer megválasztása *előtt* értelmezhető. Például egy sima felületdarab, ami a fizikai vonatkoztatási rendszert meghatározó testekhez van erősítve.

Objektív az \mathbf{F} feszültségtenzor is. Egy objektív sima felületdarabon a támaszkodásból vagy nyomásból származó feszültségek a mozgó koordinátarendszerben ugyanazok, mint az álló koordinátarendszerben. Különböző koordinátaváltás esetén az objektív tenzorok mátrixának átszámítási képlete:

$$\mathbf{F}'' = \mathbf{M}\mathbf{F}'\mathbf{M}^{-1}, \quad \text{ahol az inverz } \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T \text{ a transzponált}^{10}. \quad (68)$$

6.9. Ekvivalens dinamikai folyamatok

Noll az *ekvivalens dinamikai folyamatokat* a 7. definícióval értelmezte. Az ott szereplő (36) – (42) egyenletek *helyett* a számítások a tömegek előbb levezetett képleteivel is elvégezhetők.

Ha egy mozgást (testek dinamikai folyamatait) koordinátarendszertől *függetlenül* tudunk értelmezni (skalárokkal, vektorokkal és tenzorokkal), és *két* különböző koordinátarendszerben figyeljük meg (az egyik mozgó, a másik álló) akkor a külső térfogati erő átszámítási képletét is figyelembe véve (azaz a tehetetlenségi erőket) a két leírás *ekvivalens dinamikai folyamatokat* eredményez!

Ha a mozgást nem tudjuk koordinátarendszertől függetlenül értelmezni, akkor a két leírásból csak akkor tudjuk megállapítani, hogy ugyanarról a fizikai folyamatról van-e szó, ha átszámítási képletekkel ezt igazolni tudjuk. Ez általában hosszadalmas.

6.10. Az objektivitás elve

Konkrét kontinuummechanikai feladatokat csak akkor tudunk megoldani, ha megadjuk a szereplő közegek *anyagi egyenleteit* (azaz ρ és \mathbf{F} függését a mozgás többi paraméterétől). Az anyagi egyenletekre Noll megfogalmazta az *objektivitás elvét* (a (43) egyenlet után), ami megköveteli, hogy az anyagi egyenletek *függetlenek* legyenek a koordináta-rendszerektől.

A gyakorlatban sokféle anyagi egyenletet használnak. Ha valaki egy új anyagi egyenletet értelmez, akkor korunkban elvárják az objektivitás bizonyítását.

Ha az anyagi egyenleteket a koordináta-rendszertől *független* paraméterekkel definiálják, akkor az objektivitás természetesen automatikusan teljesül.

Ha az anyagi egyenletekben koordináták is szerepelnek, akkor az objektivitás bizonyítandó.

6.11. Noll elméletének fejleményei

Walter Noll (1925 – 2017) a Charlottenburgi Egyetemen (Nyugat Berlinben) Szabó István tanszékén volt tanársegéd 1952-ben, amikor C. Truesdell meghívta az Indianai Egyetemre (USA) doktorálni. A *doktori értekezése* [11] (1954) matematikus mérnököknek nagyon jó bevezetés az itt ismertetett cikkhez. A második fejezetében kimondja a **FESZÜLTSEG DETERMINÁLT-SÁGÁNAK ELVÉT**: *Az $S(t)$ feszültséget egy anyagi pontnál a t időpillanatban az anyagi pont tetszőlegesen kicsiny környezetének a t időpont előtti mozgása szabja meg.* A feszültség tehát csak a kis környezet múlt történetétől függ, a jövőtől nem. Ez az okság elvének alkalmazása a mechanika folyamataira. Ezt használva különböző függvényekkel jellemzi a *legáltalánosabb* anyagi egyenletet, az *egyszerű anyagok* fogalmát, a *folyadékok* megkülönböztető sajátosságát, és két gyakori anyagfajtát. Ezek a fogalmak azóta elterjedtek a szakmai irodalomban. Később, a tapasztalatok alapján az elméletet kicsit módosította [18], és számos részletkérdést kidolgozott [2].

Noll [1] cikke végén említi az elmélet továbbfejlesztésének igényét szakadások kezelésére (erre [7] ad egyenleteket és [3] is tárgyalja), valamint a termodinamikai általánosításokra (az utóbbit Noll később teljesítette is [10]).

Noll 1974-ig publikált 36 cikkéből Truesdell válogatásában 16 cikket a SPRINGER kiadó megjelentetett egy könyvben [2], ami megkönnyíti Nollnak a klasszikus fizika terén addig megjelent munkáinak áttekintését. Azóta az általa bevezetett fogalmak a mechanika tudományának részét képezik, és bizonyításai hozzájárultak a szerteágazó terület rendezéséhez.

Noll 1974 után publikált munkái hozzáférhetők az interneten [20]. Ötven különféle téma között szerepel egy könyv *a véges-dimenziós terekről*, és jegyzetek a *speciális relativitáselméletéről*.

Irodalom

- [1] Noll, Walter: The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics. Symposium on Axiomatic Method at Berkeley 1957, North Holland Publishing Co., 1959. Megtalálható [2]-ben is.
- [2] Selected papers by W. Noll: The Foundations of Mechanics and Thermodynamics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974. Noll 36 válogatott cikke.
- [3] Fáy Árpád: Bevezetés a newtoni kontinuummechanikába, 2019, <https://mek.oszk.hu/19196>
- [4] Szenthe János: Bevezetés a sima sokaságok elméletébe, 2002, ELTE Eötvös Kiadó
- [5] Hajós György: Bevezetés a geometriába. 1984, Tankönyvkiadó
- [6] Csanady, G.T.: Theory of Turbomachines, McGraw-Hill Co., 1964
- [7] Truesdell, C., Toupin, R.: The classical field theories, Encyclopedia of Physics, III/1, 1960, Springer
- [8] Isaac Newton válogatott írásai, Budapest, 2003, TYPOTEX
- [9] Szentmártony Tibor: Vektor- és tenzorszámítás, 1948, Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai, Matematika 4. füzet
- [10] Noll, Walter: Lectures on the Foundations of Continuum Mechanics and Thermodynamics, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 52, pp. 62 – 92 (1973). Megtalálható [2]-ben is.
- [11] Noll, W.: A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media. Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 2. pp. 197-226, 1958/1959. Megtalálható [2]-ben is.
- [12] Noll, W., Ericksen, J.L. and Truesdell, C.: The non-linear field theories of mechanics. Encyclopedia of Physics III/3, 1963, Springer
- [13] Szenthe János: A mechanika újabb matematikai eszközei, a differenciálható sokaságok elmélete, 1976, Budapesti Műszaki Egyetem Továbbképző Intézete, Budapest
- [14] Béda Gyula, Kozák Imre, Verhás József: Kontinuummechanika. 1985, Műszaki könyvkiadó
- [15] Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, 1979, Műszaki Könyvkiadó
- [16] Pattantyús Á. Géza: Gépész és villamosmérnökök kézikönyve, 1961, Műszaki kiadó
- [17] Synge, J.L.: Classical Dynamics, Encyclopedia of Physics, III/1, 1960, Springer
- [18] Noll, W.: A New Mathematical Theory of Simple Materials, Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 48. pp. 1 - 50, 1972. Megtalálható [2]-ben is.
- [19] Kétváltozós függvények - BME - math, ingyen letölthető.
- [20] www.math.cmu.edu/~wn0g/noll

Tartalom	Oldal
Előszó	2
1. fejezet. TEST	3
1.1. Jelölések	3
1.2. Sima függvény	3
1.3. Sima felületdarab	4
1.4. A gömb, mint sima sokaság	5
1.5. A Noll-féle test	6
2. fejezet. TÖMEG	8
2.1. A terület, mint mérték	8
2.2. Véges értékű mérték	9
2.3. A Noll-féle test tömege	9
3. fejezet. KINEMATIKA	11
4. fejezet. ERŐK	12
5. fejezet. DINAMIKA	15
6. fejezet. TANULSÁGOK	19
6.1. A matematikai alapozás haszna	19
6.2. Tömegmegmaradás	19
6.3. Newton axiómái	20
6.4. Euler axiómái	20
6.5. Cauchy axiómái	21
6.6. Noll rendszere	22
6.7. Gyakorlati axiómarendszer	23
6.8. Koordinátarendszer-váltás	24
6.9. Ekvivalens dinamikai folyamatok	27
6.10. Az objektivitás elve	28
6.11. Noll elméletének fejleményei	28
Irodalom	29
Tartalom	30