

VALÓS SZÁMOK

TOLEDO RODOLFO

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Testek	5
3. 0 karakterisztikájú testek	11
4. Rekurzív módon értelmezett fogalmak	16
5. Rendezett testek	25
6. A teljességi axióma	33
7. Halmazok számossága	44
8. Feladatok	54
Ajánlott irodalom	61
Tárgymutató	62

Valós számok

PDF fájlformátumban megjelent elektronikus tananyag

Szerző: Dr. Toledo Rodolfo Calixto, főiskolai tanár

Készült: 2017. április 24.

Korrektúra: Barsy Anna

Lektorálta: Dr. Gát György, egyetemi tanár, DSc

ISBN 978-963-12-8481-2

Szerzői jogok: Jelen tananyag a **Creative Commons: Nevezd meg! – Így add tovább! 4.0 Nemzetközi Licenc (CC BY-SA 4.0)** feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.

1. Bevezetés

Nincs olyan halmaz, amely olyan fontossággal bírna, mint a valós számok halmaza. A valós számokat lépten-nyomon alkalmazza a természettudomány, de a mindennapi életben is elengedhetetlen a használatuk. A valós számok halmaza „több”, mint egy halmaz abban az értelemben, hogy elemeivel számolunk, rendezzük őket, stb. Valójában a valós számok struktúrája, felépítése elég bonyolult, ha logikai úton szeretnénk korrekt módon definiálni. Fontosságuk miatt alap és középiskolai tanulmányainkban lényeges szerepet kapnak, de csak intuitív módon, a gyakorlati oldalról közelítve, ami természetesen érthető is. Rendkívül fontos a matematikát művelő szakembereknek, hogy tisztán lássák azokat a kérdéseket, amelyek közép-szinten elég „homályosak” maradnak. Gondoljunk például az irracionális számok bevezetésére, vagy arra, hogy miért van mindig két szám között racionális szám.

Jelen tananyag arra vállalkozik, hogy a valós számokat definiáló axiómáktól a következményeikre át odáig vezesse az olvasót, hogy teljes képet kapjon a valós számok struktúrájáról, és ezt képes legyen alkalmazni a további tanulmányaiban. Ezen felül az utolsó rész kiegészíti a „**Halmazok, relációk, függvények**” című tananyagban tanultakat (lásd [10]) a számossággal, a végtelen kettősségével és az ezzel kapcsolatos „furcsának” tűnő állításokkal.

A tananyag fokozatosan építi fel a valós számok struktúráját a korábbi tanulmányainkban kialakult intuitív fogalmak alapján. Először a műveletekre fektetjük a hangsúlyt arra gondolva, hogy a valós számok egyik legfontosabb ismérve az, hogy tudunk velük számolni. Ezért a 2. részben olyan algebrai struktúrákat vizsgálunk, amelyek „jó” tulajdonságokkal bíró, két művelettel rendelkeznek úgy, ahogy a valós számoknál láttuk. Ezek a struktúrák a **testek**. Rögtön rájövünk, hogy a testaxiómák nem elegendőek a valós számok struktúrájának pontos megadására.

Célunkhoz közelebb kerülünk azzal, hogy a pozitív egészeket tanulmányozzuk. Kiderült, hogy az olyan testeken, ahol a 0 nem pozitív egész, már a **racionális elemei** teljesen úgy viselkednek, mint ahogy tőlük elvárható. Az ilyen testeket **0 karakterisztikájú testeknek** hívjuk és tanulmányozásuk a 3. rész célja. Az ilyen testeken már alkalmazható a **teljes indukció**, amivel olyan állításokat igazolhatunk, melyek a pozitív egészekhez kapcsolódnak. Ilyen például a **hatványozás** tulajdonságai vagy a **binomiális tétel**. Ezzel a 4. rész foglalkozik.

A valós számokat egy számegyenesen szoktuk ábrázolni, rájuk vonatkozó egyenlőtlenségeket vizsgálunk, oldunk meg. Ez csak akkor lehetséges, ha a testaxiómák mellett feltételezzük, hogy van egy teljes rendezés, ami „ügyesen” össze van kapcsolva a műveletekkel. Így eljutunk a **rendezett test** fogalmához, melynek tanulmányozása az 5. rész célja. Rendezett testek esetén már az **abszolút érték** fogalmát is bevezethetjük. Ebben a részben az egyenlőtlenségek általános tulajdonságait vizsgáljuk, de nem oldunk meg konkrét egyenlőtlenségeket. Ezt egy későbbi tananyag témája.

Végül a 6. részben összeáll a teljes kép a valós számok struktúráját illetően. Ide olyan fogalmak kerülnek, mint a halmazok **felső határa**, az **irracionális számok** és az **n -edik gyök**, illetve olyan állításokat igazolunk, amelyeket az analízisben

gyakran alkalmazunk bizonyításokban. Ilyen a **Cantor-féle metszet-tétel**, vagy az az állítás, hogy a racionális számok sűrűn helyezkednek el a számegyenesen. Az **utolsó részben** betekintést kapunk Cantor munkásságába, amellyel a halmazelmélet fejlődésnek indult, és mára a matematikai tudományok alapjává vált. Foglalkozunk a halmazok elemszámával, az ún. számossággal. Képesek leszünk e tekintetben különbséget tenni végtelen halmazok között és azt a kérdést vizsgálni, hogy milyen számossággal rendelkeznek a valós számok halmazának különböző részhalmazai.

A tananyag feldolgozásának módszere az

1. **Halmazok, relációk, függvények** [10]

című tananyagban már megismert, a matematikában szokásos négyes tagozódásból áll: definíció, tétel, bizonyítás, alkalmazás (feladatok). A jobb megértést elősegíti, hogy a definíciókat egyszerű példákkal szemléltetjük. A definiált fogalmakra tételeket mondunk ki és precízen bizonyítjuk ezeket. A tananyag teljes elsajátításához több mintafeladatot oldunk meg, néhányat ábrával is illusztrálunk. Az **utolsó részben** feladatokat tűzünk ki megoldás nélkül, melyek a gyakorlati foglalkozások anyagát képezhetik. Megoldásuk előtt javasoljuk a tananyagban megoldott feladatok tanulmányozását és megértését.

2. Testek

Az algebra a matematika olyan tudományága, amely halmazokkal és a rajtuk értelmezett műveletekkel foglalkozik, ún. algebrai struktúrákkal, valamint ezen műveletek tulajdonságait vizsgálja. Az algebrai struktúra pontos definíciójával és különböző példáival algebra kurzusokon találkozhatunk. Egyik ilyen struktúra a test, ami ezen rész vizsgálati témája. A test definíciója előtt szükséges bevezetni a binér művelet fogalmát és tulajdonságait.

1. Definíció. Legyen A egy nem üres halmaz. Egy olyan függvényt, amely $m: A \times A \rightarrow A$, az A halmazon értelmezett **binér műveletnek** nevezzük.

Ilyen művelet a számok körében értelmezett összeadás vagy szorzás. A halmazok körében értelmezett unió és metszet szintén binér művelet. Az a lényeg, hogy a művelet eredménye az adott halmaz eleme legyen. Például a síkbeli vektorok körében az összeadás művelet, míg a skaláris szorzás nem művelet, hiszen az eredménye szám és nem vektor. A binér szó arra utal, hogy a művelet rendezett párokon értelmezett, két elem „között” történik. Vannak nem binér műveletek is, de ezekkel most nem foglalkozunk.

A binér műveleteket szinte minden esetben célszerű egy jellel ellátni. Ha például az A halmazon értelmezett m műveletet a „ \bullet ” jellel látjuk el, akkor ez azt jelenti, hogy

$$a \bullet b := m(a, b) \quad \text{minden } a, b \in A \text{ esetén,}$$

és egyszerűen a „ \bullet ” műveletről beszélünk. A matematikában előfordul, hogy két műveletet ugyanúgy jelölünk, ha ez nem okoz félreértést. Például, ugyanúgy „ $+$ ” jelet használunk számok és vektorok összeadására is.

A következő általános **műveleti tulajdonságokkal** már találkoztunk a középiskolai tanulmányok során.

2. Definíció. Jelölje „ \bullet ” az A halmazon értelmezett binér műveletet. Ekkor azt mondjuk, hogy a művelet

- **asszociatív**, ha minden $a, b, c \in A$ esetén

$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c),$$

- **kommutatív**, ha minden $a, b \in A$ esetén

$$a \bullet b = b \bullet a,$$

- **egységelemes**, ha van olyan $e \in A$ elem, hogy minden $a \in A$ esetén

$$a \bullet e = e \bullet a = a,$$

- **inverzelemes**, ha egységelemes és minden $a \in A$ esetén van olyan a^{-1} -gyel jelölt A -beli elem, amire

$$a^{-1} \bullet a = a \bullet a^{-1} = e,$$

ahol e az egységelem. Ekkor azt mondjuk, hogy a^{-1} az a elem inverz eleme $a \bullet$ művelet szerint.

Például egy halmaz hatványhalmazán értelmezett unió művelet asszociatív, kommutatív és egységelemes (az üres halmaz az egységelem), de nem inverzelemes. Azonban a vektorok összeadása esetén már mind a négy tulajdonság teljesül. Sokszor az egységelemet **neutrális elemnek** vagy **zéruselemnek** mondjuk. Az inverz elemet másképpen is jelölhetik. Ez az adott művelettel áll összefüggésben. Például összeadás esetén zéruselemet mondunk és a $-a$ jelet használjuk az inverz elem jelölésére.

3. Definíció. Legyen F egy nem üres halmaz és értelmezzünk az F halmazon két binér műveletet. Az egyiket összeadásnak nevezzük és a „+” jellel, a másikat szorzásnak és a „ \cdot ” jellel látjuk el. Azt mondjuk, hogy az $\langle F, +, \cdot \rangle$ algebrai struktúra **test**, ha a műveletek teljesítik a következő tulajdonságokat.

- A két művelet asszociatív, azaz minden $x, y, z \in F$ esetén

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

- A két művelet kommutatív, azaz minden $x, y \in F$ esetén

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

- A két művelet egységelemes, az összeadás esetén 0 -val (zéruselem), szorzás esetén 1 -gyel (egységelem) jelöljük az egységelemeket és $0 \neq 1$. Tehát minden $x \in F$ esetén

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

- Az összeadás inverzelemes, az x elem **additív[†] inverzét** $-x$ módon jelöljük. A szorzás viszont csak az $F \setminus \{0\}$ halmazon inverzelemes és az x elem **multiplikatív[‡] inverzét** x^{-1} módon jelöljük. Tehát minden $x \in F$ esetén

$$x + (-x) = 0, \quad x \cdot x^{-1} = 1, \text{ ha } x \neq 0.$$

- A két műveletet összekapcsolja a **disztributivitás**: minden $x, y, z \in F$ esetén

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

[†]additív, vagyis az összeadással kapcsolatos

[‡]multiplikatív, vagyis a szorzással kapcsolatos

A „ \cdot ” műveleti jelet általában el szokás hagyni, ha nem vezet félreértésre, így $x \cdot y$ helyett csak az xy jelölést alkalmazzuk.

Rögtön az jut az eszünkbe, hogy a test fogalmában fellépő tulajdonságokat, az ún. **testaxiómákat**, „magától értetődően” számoláskor alkalmaztuk az eddigi tanulmányaink során. Ezek szerint a valós számok struktúrája test. Így két fontos kérdést kell feltennünk magunknak.

- A testaxiómák elegendőek a valós számok halmazának meghatározására?
- Mi a helyzet a többi egyszerű szabállyal, amelyet számoláskor alkalmazunk?

Az első kérdésre egyszerű a válasz. Nem elegendő! Egyszerű olyan testet megadni, amelynek **csak két eleme van**. Mivel egy testnek legalább két elemének kell lennie, a 0 és az 1, így legyen $F := \{0, 1\}$. A következőképpen, ún. műveleti táblázatokkal adjuk meg a műveleteket.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

\cdot	0	1
0	0	0
1	0	1

A táblázatokból rögtön leolvasható, hogy a fenti két művelet kommutatív (a táblázatok szimmetrikusak) és 0 valóban az összeadás zérus-, 1 a szorzás egységeleme. A táblázatokból a megfelelő inverz elemek leolvashatók ($-0 = 0$, $-1 = 1$, $1^{-1} = 1$). A többi tulajdonság egyszerű helyettesítéssel, a különböző lehetőségek vizsgálatával történik, ezt az olvasóra bízunk.

A következő tétel megmutatja, hogyan lehet további véges testeket „gyártani”. Ehhez szükséges ismerni az egész számokon értelmezett oszthatóság tulajdonságait. A tételt bizonyítás nélkül fogjuk közölni, hiszen a témával algebra kurzusokon foglalkoznak. Valójában számunkra csak a tételből levonható következmény fontos, mégpedig az, hogy a valós számok struktúrájának pontos megadásához a testaxiómáknál több feltételezés szükséges.

1. Tétel. Legyen p egy prím szám, $F := \{0, 1, \dots, p-1\}$. Továbbá legyen „ \oplus ” és „ \odot ” két, az F halmazon értelmezett művelet, amelyre

$$a \oplus b := a + b \bmod p \quad a \odot b := ab \bmod p,$$

ahol $x \bmod p$ jelöli x p -vel való osztásának maradékát. Ekkor $\langle F, \oplus, \odot \rangle$ test.

A második kérdésre a válasz az, hogy a legtöbb számolással kapcsolatos szabály és tulajdonság levezethető a testaxiómákból, ezekkel a következőkben foglalkozunk.

2. Tétel. Egy F testben csak egy zéruselem és csak egy egységelem létezik.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy két különböző zéruselem létezik, 0_1 és 0_2 . Mivel 0_1 zéruselem, így a definíció szerint $0_1 + x = x$ minden $x \in F$ esetén, így ha $x = 0_2$ azt kapjuk, hogy $0_1 + 0_2 = 0_2$. De 0_2 is zéruselem, így az előző gondolatmenetben felcserélhetjük 0_1 és 0_2 szerepét, amiből $0_2 + 0_1 = 0_1$ következik. Tehát

$$0_1 = 0_2 + 0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2,$$

ami ellentmondás. Hasonlóan bebizonyítható, hogy egyetlen egységelem létezik. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

3. Tétel. *Egy F test minden elemének csak egy additív és a zéruselemen kívül csak egy multiplikatív inverze van.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy egy $x \in F$ elemnek két különböző additív inverze létezik, x_1 és x_2 . Az asszociativitás és az inverz elem definíciója szerint azt kapjuk:

$$x_2 = 0 + x_2 = (x_1 + x) + x_2 = x_1 + (x + x_2) = x_1 + 0 = x_1,$$

ami ellentmondás. Hasonlóan bebizonyítható, hogy a zéruselemen kívül egyetlen multiplikatív inverz létezik. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az

$$x + (-x) = 0, \quad \text{és} \quad x \cdot x^{-1} = 1 \quad (x \neq 0)$$

inverz elem fogalmából azonnal következik, hogy a $-x$ elem additív inverze x és az x^{-1} elem multiplikatív inverze szintén x , azaz minden $x \in F$ esetén

$$-(-x) = x, \quad \text{és} \quad (x^{-1})^{-1} = x \quad (x \neq 0).$$

1. Feladat. *Legyen F egy test. A testaxiómákból igazoljuk, hogy*

$$-(x + y) = (-x) + (-y), \quad \text{és} \quad (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad (x, y \neq 0)$$

minden $x, y \in F$ esetén!

Megoldás: Az asszociativitás és a kommutativitás miatt

$$(x + y) + ((-x) + (-y)) = (x + (-x)) + (y + (-y)) = 0 + 0 = 0.$$

Így $(-x) + (-y)$ az az elem, amelyet ha $x + y$ -hoz hozzáadunk 0-át kapunk, azaz $(-x) + (-y)$ az $x + y$ elem additív inverze. A szorzás multiplikatív inverzéről szóló állítás hasonló módon igazolható.

4. Tétel. Egy F test zérusosztómentes vagyis

$$xy = 0 \iff x = 0 \text{ vagy } y = 0$$

minden $x, y \in F$ esetén.

Bizonyítás. Legyen x a testnek egy tetszőleges eleme. Ekkor a disztributivitás miatt

$$0x = (0 + 0)x = 0x + 0x.$$

Az előző egyenlet két oldalához adjuk a $0x$ elem additív inverzét.

$$0x + (-0x) = 0x + 0x + (-0x),$$

és így az asszociativitásból és az inverz elem fogalmából következik, hogy

$$0 = 0x.$$

Ezért, ha egy szorzás valamely tényezője 0, akkor a szorzás eredménye 0.

Fordítva, tegyük fel, hogy x és y a testnek két olyan eleme, amire $xy = 0$, de $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Ekkor y -nak van multiplikatív inverze. Az asszociativitásból következik, hogy

$$x = x(yy^{-1}) = (xy)y^{-1} = 0y^{-1} = 0,$$

ami ellentmondás, hiszen feltételeztük, hogy $x \neq 0$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Két további ún. inverz műveletet is értelmezhetünk.

4. Definíció. Legyen F egy test. A „ $-$ ” jellel a következőképpen értelmezzük egy műveletet, amelyet **kivonásnak** nevezünk el:

$$x - y := x + (-y) \quad \text{minden } x, y \in F \text{ esetén.}$$

Hasonlóan a „ $/$ ” jellel a következőképpen értelmezzük egy műveletet, amelyet **osztásnak** nevezünk el:

$$x/y := xy^{-1} \quad \text{minden } x, y \in F, y \neq 0 \text{ esetén.}$$

Gyakran az x/y helyett az $\frac{x}{y}$ jelölést alkalmazzuk.

További tulajdonságok bizonyíthatók a két új művelet bevezetése után.

2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha x egy test eleme, akkor $-x = (-1)x$.

Megoldás: A disztributivitás miatt

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0x = 0,$$

így $(-1)x$ az x elem additív inverze, azaz $-x = (-1)x$.

3. Feladat. Legyen F egy test. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{xv + uy}{yv} \quad \text{és} \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}$$

minden $x, y, u, v \in F$ és $yv \neq 0$ esetén!

Megoldás: Ha $yv \neq 0$, akkor $y \neq 0$ és $v \neq 0$, hiszen F **zérusosztómentes**. Így a testaxiómák és a tanult tulajdonságok alapján

$$\begin{aligned} \frac{xv + uy}{yv} &= (xv + uy)(yv)^{-1} = xvy^{-1}v^{-1} + uyy^{-1}v^{-1} = \\ &= xy^{-1} + uv^{-1} = \frac{x}{y} + \frac{u}{v}. \end{aligned}$$

Másrészt

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = xy^{-1}uv^{-1} = xuy^{-1}v^{-1} = (xu)(yv)^{-1} = \frac{xu}{yv}.$$

4. Feladat. Legyen F egy test. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$$

minden $x, y \in F$ és $x, y \neq 0$ esetén!

Megoldás: Az előző feladat szerint

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{xy}{yx} = \frac{xy}{xy} = xy(xy)^{-1} = 1.$$

Ezért $\frac{y}{x}$ az $\frac{x}{y}$ elem multiplikatív inverze.

3. 0 karakterisztikájú testek

Az előző részben **beláttuk**, hogy a testaxiómák nem elegendőek a valós számok struktúrájának meghatározására. Felmerül a kérdés, hogy milyen feltételek kelljenek még ahhoz, hogy a valós számok struktúráját kapjuk. Mivel egy testnek két fix eleme van, a 0 meg az 1, nem meglepő, hogy a vizsgálatainkat az 1 elem önmagával vett véges számú összegeivel kezdjük. Jól tudjuk, hogy a valós számok esetén az ilyen összegek a természetes számok halmazát adja, amely egy a 0 elemet nem tartalmazó végtelen halmaz.

5. Definíció. Legyen F egy test. Az $N \subseteq F$ részhalmazt az **F -beli pozitív egészek halmazának** nevezzük, ha teljesülnek az alábbiak:

- a) $1 \in N$,
- b) $n \in N \implies n + 1 \in N$,
- c) ha egy halmaz rendelkezik az előző két tulajdonsággal, akkor tartalmazza az F -beli pozitív egészek halmazát.

Más szavakkal az F -beli pozitív egészek halmaza a „legsűkebb” olyan halmaz, amely rendelkezik az a) és b) tulajdonsággal, és ez éppen az 1 elem véges sokszor önmagával vett összegeinek halmaza. Bár a definícióban megadott fogalom bonyolultabbnak tűnhet, mint sokszor önmagával összeadni az 1 elemet, mégis olyan módszert kínál, melynek alkalmazása a gyakorlatban nagyon praktikus. A módszert **teljes indukciónak** szokás nevezni. Lényege az, hogy ha szeretnénk bebizonyítani, hogy egy tulajdonság teljesül minden F -beli pozitív egész esetén és T -vel jelöljük az összes olyan N -beli elemet, ami a tulajdonságot kielégíti, akkor elegendő bebizonyítani, hogy

- $1 \in T$ (a tulajdonság 1-re igaz),
- $n \in T \implies n + 1 \in T$ (ha a tulajdonság n -re igaz, akkor $n + 1$ -re is igaz),

hiszen így $T = N$ (a tulajdonság teljesül minden N -beli elem esetén).

A következő feladatban megmutatjuk a teljes indukció alkalmazását.

5. Feladat. Legyen F egy test és N az F -beli pozitív egészek halmaza, illetve $n, m \in N$. Bizonyítsuk be, hogy $n + m \in N$ és $nm \in N$.

Megoldás:

- a) Legyen m egy tetszőleges F -beli pozitív egész és

$$T := \{p \in N : p + m \in N\}.$$

$1 \in T$, hiszen $m \in N$ és így $1 + m = m + 1 \in N$.

Tegyük fel, hogy $n \in T$, azaz $n + m \in N$. Ekkor

$$(n + 1) + m = (n + m) + 1 \in N,$$

amiből következik, hogy $n + 1 \in T$.

Ezért $T = N$.

b) Legyen m egy tetszőleges F -beli pozitív egész és

$$T := \{p \in N : pm \in N\}.$$

$1 \in T$, hiszen $1 \cdot m = m \in N$.

Tegyük fel, hogy $n \in T$, azaz $nm \in N$. Ekkor

$$(n + 1)m = nm + n \in N,$$

hiszen az előző pont szerint két pozitív egész összege is pozitív egész, amiből következik, hogy $n + 1 \in T$.

Ezért $T = N$.

Az az elvárás, hogy a pozitív egészek halmaza végtelen halmaz legyen. Ez a kérdés ekvivalens azzal, hogy a 0 elem ne legyen pozitív egész. Tudniillik az N halmaz akkor és csak akkor véges, ha található két különböző, az 1 elem önmagával vett véges számú összege, mely értéke egyenlő, és így ha a több 1-est tartalmazó összegből kivonjuk a másikat, akkor egyrészt véges számú 1-es összeget kapjuk, másrészt az eredmény 0 hiszen a két szám megegyezik, így tehát $0 \in N$.

6. Definíció. Egy test **0 karakterisztikájú**, ha a zéruseleme nem lehet testbeli pozitív egész.

A 0 karakterisztikájú testek esetében a pozitív egészekhez kapcsolódó fogalmak és tulajdonságok már a természetes számokéhoz hasonlítanak. Elemei jelölésére a megszokott tízes számrendszerben felírt alakokat alkalmazhatjuk, azaz

$$2 := 1 + 1, \quad 3 := 1 + 1 + 1, \quad 4 := 1 + 1 + 1 + 1, \quad \text{stb.}$$

Továbbá, ha az

$$N^- := \{-n : n \in N\}$$

módon értelmezzük a **testbeli negatív egészek halmazát**, akkor a 0 elem nem lehet negatív egész, valamint a pozitív és negatív egészek halmaza diszjunkt halmazok. Valóban ha a testnek van olyan n eleme, amire egyszerre $n \in N$ és $n \in N^-$ teljesül, akkor $n \in N$ és $-n \in N$, de ekkor $0 = n + (-n) \in N$, ami nem lehetséges, mert a test karakterisztikája 0, azaz $0 \notin N$.

Fontos hangsúlyozni, hogy az a szó, hogy pozitív vagy negatív nem azt jelenti, hogy nullánál nagyobb vagy kisebb, hiszen még semmiféle rendezés létezését nem tételeztük fel az F test felett. A pozitív vagy negatív szó rendezett testek esetében visszanyeri a megszokott értelmezését.

7. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. A

$$Z := N \cup \{0\} \cup N^-$$

halmazt az **F -beli egészek halmazának** nevezzük.

6. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. Igazoljuk, hogy $n - m \in Z$ minden $n, m \in Z$ esetén!

Megoldás: Először az $n, m \in N$ esettel foglalkozunk. Teljes indukciót fogunk alkalmazni. Legyen m egy tetszőleges F -beli pozitív egész, valamint jelölje $T := \{p \in N : p - m \in Z\}$.

Bizonyítsuk be, hogy $1 \in T$, vagyis $m \in N \implies 1 - m \in Z$. Ez szintén teljes indukcióval történik.

Legyen $T_1 := \{q \in N : 1 - q \in Z\}$.

$1 \in T_1$, hiszen $1 - 1 = 0 \in Z$.

Tegyük fel, hogy $n \in T_1$, azaz $n \in N$ és $1 - n \in Z$. Ekkor

$$1 - (n + 1) = -n \in N^- \subseteq Z,$$

amiből következik, hogy $n + 1 \in T_1$.

Ezért $T_1 = N$.

Így $1 \in T$.

Tegyük fel, hogy $n \in T$, azaz $n - m \in Z$. Ekkor $n + 1$ -re:

$$(n + 1) - m = (n - m) + 1 \in Z,$$

hiszen ha $n - m \in N$, vagy $n - m = 0$, akkor $(n - m) + 1 \in N \subseteq Z$, és ha $n - m \in N^-$, akkor $m - n \in N$, és így az első pont állítása szerint

$$(n - m) + 1 = 1 - (m - n) \in Z.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $n + 1 \in T$.

Ezért $T = N$, így a feladat állítását igazoltuk $n, m \in N$ esetén. A többi eset vizsgálata egyszerűbb.

$n \in N$ és $m = 0 \implies n - m = n \in N \subset Z$.

$n \in N$ és $m \in N^- \implies -m \in N$, így $n - m = n + (-m) \in N \subset Z$.

$n = 0$ és $m \in Z \implies n - m = -m \in Z$.

$n \in N^-$ és $m \in N \implies m - n \in N$, így $n - m \in N^- \subset Z$.

$n \in N^-$ és $m = 0 \implies n - m = n \in N^- \subset Z$.

$n \in N^-$ és $m \in N^- \implies -n \in N$ és $-m \in N$ és így a már igazolt állításunk miatt $n - m = -m - (-n) \in Z$.

7. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. Igazoljuk, hogy $nm \in Z$ minden $n, m \in Z$ esetén!

Megoldás: Legyen $n, m \in Z$. Ha $n = 0$ vagy $m = 0$, akkor $nm = 0 \in Z$.

Ha $n, m \in N$, akkor az 5. Feladat szerint $nm \in N \subset Z$.

Ha $n \in N$ és $m \in N^-$, akkor $-m \in N$, és így $n(-m) \in N$. Azonban

$$n(-m) = n(-1)m = (-1)nm = -nm,$$

ezért $nm \in N^- \subset Z$. Hasonlóan járunk el, ha $n \in N^-$ és $m \in N$.

Ha $n \in N^-$ és $m \in N^-$, akkor $-n \in N$ és $-m \in N$, és így $(-n)(-m) \in N$.

Mivel $(-1)(-1) = 1$ (lásd a 30. Feladatot), így

$$nm = (-1)(-1)nm = (-1)n(-1)m = (-n)(-m) \in N \subset Z.$$

A testbeli egészek halmazán értelmezhetjük az oszthatóságot. Ha $n, m \in Z$ azt mondjuk, hogy n **osztja** m -et, vagy m **osztható** n -nel, ha $\exists k \in Z$, hogy $m = nk$. Ezt $n|m$ módon jelöljük.

Az oszthatósággal együtt értelmet nyernek olyan fogalmak mint a **páros egész** (2-vel osztható egész), **páratlan egész** (2-vel nem osztható egész) és a **prímelem** (olyan pozitív egész, melynek pontosan két különböző pozitív egész osztója van).

8. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. A

$$Q := \left\{ r \in F : \exists p, q \in Z, q \neq 0, \text{ hogy } r = \frac{p}{q} \right\}$$

halmazt az **F -beli racionális elemek halmazának** nevezzük.

8. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. Igazoljuk, hogy $\frac{r}{s} \in Q$ minden $r, s \in Q$ és $s \neq 0$ esetén!

Megoldás: Mivel $r, s \in Q$ és $s \neq 0$, így léteznek $x, y, u, v \in Z$ és $y, u, v \neq 0$, hogy

$$r = \frac{x}{y} \quad \text{és} \quad s = \frac{u}{v}.$$

A 3. és a 4. Feladat szerint

$$\frac{r}{s} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{u}{v}} = \frac{x}{y} \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^{-1} = \frac{x}{y} \cdot \frac{v}{u} = \frac{xv}{yu} \in Q,$$

hiszen a 7. Feladat szerint $xv \in Z$ és $yu \in Z$.

A 3. Feladat állításából következik, hogy Q zárt az F -beli műveletekre nézve és így szintén test. Másrészt lényegében egyetlen Q halmaz létezik. Ez azt jelenti, hogy két különböző 0 karakterisztikájú test estében meg tudjuk feleltetni egymáshoz a racionális elemeit úgy, hogy a műveletek eredménye is a megfeleltetést kövesse. Ezt a „szerkezetileg” egyedi Q testet **racionális számtestnek** nevezzük.

A matematikában két különböző struktúrát „egyformának” tekintünk, ha úgy tudjuk az elemeit egy az egyben egymáshoz megfeleltetni, hogy külön-külön elvégezve a műveleteket, azok eredménye a megfeleltetés szerint azonos marad. Ez jelen esetben azt jelenti, hogy ha $\langle F, +, \cdot \rangle$ és $\langle F^*, \oplus, \odot \rangle$ két 0 karakterisztikájú test, és Q , illetve Q^* a racionális elemeinek halmaza, akkor van olyan $\varphi : Q \rightarrow Q^*$ bijektív leképezés, amelyre

$$\varphi(r + s) = \varphi(r) \oplus \varphi(s) \quad \text{és} \quad \varphi(r \cdot s) = \varphi(r) \odot \varphi(s)$$

minden $r, s \in Q$ esetén. Ekkor azt mondjuk, hogy a két struktúra **izomorf**.

A fenti állítás bizonyítása nem nehéz, de elég hosszadalmas. A φ leképezést a következő módon adjuk meg: legyen $0 \in Q$ és $0^* \in Q^*$ a zéruselemek, illetve $1 \in Q$ és $1^* \in Q^*$ az egységelemek, ekkor

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0^*, \quad \varphi(1) = 1^*, \\ \varphi(n+1) &= \varphi(n) \oplus 1^*, \quad \text{ha } n \in N, \\ \varphi(-n) &= -\varphi(n), \quad \text{ha } n \in N, \\ \varphi(n \cdot m^{-1}) &= \varphi(n) \odot (\varphi(m))^{-1}, \quad \text{ha } n, m \in Z, \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

A bizonyítás úgy történik, hogy egymásután azt igazoljuk, hogy az előző módon értelmezett φ leképezés művelettartó a pozitív egészek, az egészek és a racionális elemek halmazán.

4. Rekurzív módon értelmezett fogalmak

Az előző részben megmutattuk, hogy teljes indukcióval hogyan igazoljuk a pozitív egészekre vonatkozó állításokat. Érdemes a pozitív egészekhez kapcsolódó fogalmakat úgy értelmezni, hogy tulajdonságait is teljes indukcióval tudjuk igazolni.

Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. A fogalmaknak olyan megadási módját, ahol először $n = 1$ -re értelmezzük a fogalmat és ezután megadjuk hogyan származtatjuk a fogalmat egy tetszőleges n pozitív egésztől a „rákövetkező” $n + 1$ egészre, **rekurzív módon értelmezett fogalomnak** hívjuk. Ilyen például a hatványozás fogalma.

9. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test valamint $x \in F$. Ekkor

$$x^1 := x \quad \text{és} \quad x^{n+1} := xx^n,$$

minden $n \in N$ esetén. x^n -et az x **n -edik hatványának** nevezzük.

A következő feladatban teljes indukcióval igazoljuk a hatványozás egyik tulajdonságát. A hatványozás további tulajdonságai a 37. Feladatban találhatók meg, igazolásuk is teljes indukcióval történik.

9. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $x \in F$ és $n, m \in N$. Bizonyítsuk be, hogy $x^n x^m = x^{n+m}$.

Megoldás: Legyen m egy tetszőleges F -beli pozitív egész és

$$T := \{k \in N : x^k x^m = x^{k+m}\}.$$

$1 \in T$, hiszen $x^1 x^m = xx^m = x^{m+1} = x^{1+m}$.

Tegyük fel, hogy $n \in T$, azaz $x^n x^m = x^{n+m}$. Ekkor

$$x^{n+1} x^m = xx^n x^m = xx^{n+m} = x^{n+m+1} = x^{(n+1)+m}$$

amiből következik, hogy $n + 1 \in T$.

Ezért $T = N$.

A hatványozást testbeli egészekre is kiterjeszthetjük.

10. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $x \in F$, $x \neq 0$ és $n \in N$. Ekkor

$$x^0 := 1 \quad \text{és} \quad x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

A definícióból rögtön látható, hogy $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$ minden n testbeli egész esetén.

10. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $x, y \in F \setminus \{0\}$ és $n, m \in \mathbb{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $x^n x^m = x^{n+m}$,

b) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$,

c) $(x^n)^m = x^{nm}$,

d) $(xy)^n = x^n y^n$,

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.

Megoldás: A feladat megoldásában feltételezzük, hogy az olvasó teljes indukcióval igazolta a 37. Feladatban szereplő pozitív egészekre vonatkozó hatványozás tulajdonságait.

a) $x^n x^m = x^{n+m}$

- Ha $n = 0$ vagy $m = 0$ az egyenlőség nyilvánvalóan teljesül, hiszen $x^0 = 1$.
- Ha $n, m \in \mathbb{N}$, akkor az egyenlőség következik a 9. Feladatból.
- Ha $n \in \mathbb{N}$ és $-m \in \mathbb{N}$, akkor három eset lehetséges
 - Ha $n + m \in \mathbb{N}$, akkor $n - (-m) \in \mathbb{N}$ és így alkalmazhatjuk a 37. Feladat a) pontját az $n \in \mathbb{N}$ és $-m \in \mathbb{N}$ elemekre

$$x^n x^m = x^n \frac{1}{x^{-m}} = \frac{x^n}{x^{-m}} = x^{n-(-m)} = x^{n+m}.$$

- Ha $-(n + m) \in \mathbb{N}$, akkor az előző esetben írhatunk n helyett $-m$ -et és m helyett $-n$ -et, hiszen $-m \in \mathbb{N}$, $-(-n) \in \mathbb{N}$ és $-m + (-n) \in \mathbb{N}$. Így azt kapjuk, hogy $x^{-m} x^{-n} = x^{-m+(-n)}$. Ebből

$$x^{n+m} = \frac{1}{x^{-(n+m)}} = \frac{1}{x^{-m+(-n)}} = \frac{1}{x^{-m} x^{-n}} = \frac{1}{x^{-n}} \cdot \frac{1}{x^{-m}} = x^n x^m.$$

- Ha $n + m = 0$, akkor $m = -n$ és így

$$x^n x^m = x^n x^{-n} = x^n \frac{1}{x^n} = 1 = x^0 = x^{n+m}.$$

- Ha $-n \in \mathbb{N}$ és $-m \in \mathbb{N}$, akkor az előző pont miatt

$$x^n x^m = \frac{1}{x^{-n}} \cdot \frac{1}{x^{-m}} = \frac{1}{x^{-n} x^{-m}} = \frac{1}{x^{-n+(-m)}} = \frac{1}{x^{-(n+m)}} = x^{n+m}.$$

b) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

Rögtön megkapjuk az a) pont egyenlőségéből, ha m helyett $-m$ -et írunk.

c) $(x^n)^m = x^{nm}$

- Ha $n = 0$ vagy $m = 0$ az egyenlőség nyilvánvalóan teljesül, hiszen $x^0 = 1$.
- Ha $n, m \in N$, akkor az egyenlőség következik a 37. Feladat b) pontjából.
- Ha $n \in N$ és $-m \in N$, akkor a második (előző) eset alkalmazásával

$$(x^n)^m = \frac{1}{(x^n)^{-m}} = \frac{1}{x^{n(-m)}} = \frac{1}{x^{-nm}} = x^{nm}.$$

- Ha $-n \in N$ és $m \in N$, akkor a második eset és a 37. Feladat d) pontja alkalmazásával

$$(x^n)^m = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)^m = \frac{1^m}{(x^{-n})^m} = \frac{1}{x^{(-n)m}} = \frac{1}{x^{-nm}} = x^{nm}.$$

- Ha $-n \in N$ és $-m \in N$, akkor az előző esetben m helyett $-m$ -et írhatunk, azaz $(x^n)^{-m} = x^{-nm}$, és így

$$(x^n)^m = \frac{1}{(x^n)^{-m}} = \frac{1}{x^{-nm}} = x^{nm}.$$

d) $(xy)^n = x^n y^n$

- Ha $n = 0$ az egyenlőség nyilvánvalóan teljesül, hiszen $x^0 = 1$.
- Ha $n \in N$, akkor az egyenlőség következik a 37. Feladat c) pontjából.
- Ha $-n \in N$, akkor az előző eset alkalmazásával

$$(xy)^n = \frac{1}{(xy)^{-n}} = \frac{1}{x^{-n}y^{-n}} = \frac{1}{x^{-n}} \cdot \frac{1}{y^{-n}} = x^n y^n.$$

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

Rögtön megkapjuk a d) pont egyenlőségéből, ha y helyett $\frac{1}{y}$ -ot írunk.

Adott $n \in N$ az $\{1, \dots, n\}$ halmazt a következő módon értelmezzük.

11. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. Ekkor

$$\{1, \dots, 1\} = \{1\} \quad \text{és} \quad \{1, \dots, n+1\} := \{1, \dots, n\} \cup \{n+1\},$$

minden $n \in N$ esetén.

11. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test és $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m \in \{1, \dots, n\}$, akkor $n + 1 - m \in N$.

Megoldás: Legyen

$$T := \{k \in N : m \in \{1, \dots, k\} \implies k + 1 - m \in N\}.$$

$1 \in T$, hiszen $m \in \{1, \dots, 1\} = \{1\} \implies m = 1$, és így $1 + 1 - 1 = 1 \in N$.
Tegyük fel, hogy $n \in T$, azaz

$$m \in \{1, \dots, n\} \implies n + 1 - m \in N.$$

Legyen

$$m \in \{1, \dots, n + 1\} = \{1, \dots, n\} \cup \{n + 1\},$$

így $m \in \{1, \dots, n\}$ vagy $m = n + 1$. Ha $m \in \{1, \dots, n\}$, akkor

$$(n + 1) + 1 - m = (n + 1 - m) + 1 \in N,$$

hiszen $n + 1 - m \in N$. Ha $m = n + 1$, akkor

$$(n + 1) + 1 - m = n + 1 + 1 - (n + 1) = 1 \in N.$$

Ebből következik, hogy $n + 1 \in T$. Ezért $T = N$.

A továbbiakban az $a_1, \dots, a_n \in F$ vagy másképpen $a_i \in F$ ($i = 1, \dots, n$) jelölést fogjuk alkalmazni, ami formálisan azt jelenti, hogy veszünk n darab F -beli elemet. Teljes precizitással, minden n pozitív egész esetén az $a_1, \dots, a_n \in F$ jelölést úgy értelmezzük, mint egy $a: \{1, \dots, n\} \rightarrow F$ függvényt. Ekkor $a_i := a(i) \in F$ minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén.

Az előző jelölést továbbgondolva eljutunk a sorozat fogalmához. Jelen tananyagban nem foglalkozunk a sorozatok részletes tárgyalásával.

12. Definíció. Egy $a: N \rightarrow F$ függvényt **F -beli sorozatnak** nevezünk. Továbbá az $a_n := a(n) \in F$ jelölést alkalmazzuk minden $n \in N$ esetén, és az $\langle a_n \rangle$ sorozatról beszélünk.

A következőben egy fontos szimbólumot fogunk bevezetni.

13. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. Ekkor

$$\sum_{k=1}^1 a_k := a_1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k,$$

minden $n \in N$ és $a_1, \dots, a_n \in F$ esetén.

A $\sum_{k=1}^n a_k$ szimbólumot úgy olvassuk, hogy **szumma k egyenlő 1-től n -ig** és formálisan az $a_1 + \dots + a_n$ összeget jelenti. Vele a hosszú összegeket rövidíthetjük, például

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k}.$$

Természetesen a k index helyett bármilyen más betűt is használhatunk.

5. Tétel. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $a \in F$ és $n, m \in \mathbb{N}$, továbbá $a_1, \dots, a_n \in F$ és $b_1, \dots, b_m \in F$. Ekkor

$$a) \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k), \quad \text{ha } n = m,$$

$$b) a \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n aa_k,$$

$$c) \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k b_j.$$

Bizonyítás. Az állításokat teljes indukcióval igazoljuk.

- a) Az egyenlőség $n = 1$ -re igaz, hiszen ekkor mindkét oldal $a_1 + b_1$ -gyel egyenlő. Tegyük fel most, hogy $n \in \mathbb{N}$ -re igaz az egyenlőség

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k).$$

Ekkor $n + 1$ -re:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_k + \sum_{k=1}^{n+1} b_k &= \left(a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k \right) + \left(b_{n+1} + \sum_{k=1}^n b_k \right) = \\ &= (a_{n+1} + b_{n+1}) + \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n+1} (a_k + b_k). \end{aligned}$$

Így az állítás teljesül $n + 1$ -re is, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ -re igaz.

- b) Az egyenlőség $n = 1$ -re igaz, hiszen ekkor mindkét oldal aa_1 -gyel egyenlő. Tegyük fel most, hogy $n \in \mathbb{N}$ -re igaz az egyenlőség

$$a \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n aa_k.$$

Ekkor $n + 1$ -re:

$$\begin{aligned} a \sum_{k=1}^{n+1} a_k &= a \left(a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k \right) = \\ &= aa_{n+1} + a \sum_{k=1}^n a_k = \\ &= aa_{n+1} + \sum_{k=1}^n aa_k = \sum_{k=1}^{n+1} aa_k. \end{aligned}$$

Így az állítás teljesül $n + 1$ -re is, tehát minden $n \in N$ -re igaz.

- c) Legyen m egy tetszőleges F -beli elem. Az egyenlőség $n = 1$ -re igaz, hiszen ekkor azt kapjuk, hogy

$$a_1 \sum_{j=1}^m b_j = \sum_{j=1}^m a_1 b_j,$$

ami az előző pont miatt igaz. Tegyük fel most, hogy $n \in N$ -re igaz az egyenlőség

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k b_j.$$

Ekkor $n + 1$ -re:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) &= \left(a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \\ &= a_{n+1} \sum_{j=1}^m b_j + \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^m a_{n+1} b_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k b_j = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{j=1}^m a_k b_j. \end{aligned}$$

Így az állítás teljesül $n + 1$ -re is, tehát minden $n \in N$ -re igaz

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A szummák általánosíthatók testbeli egészekre is. Legyen $p, q \in \mathbb{Z}$ és $q - p + 1 \in \mathbb{N}$. Az előzőekhez hasonlóan az $a_p, \dots, a_q \in F$ jelölést úgy értelmezzük, mint egy $a: \{1, \dots, q - p + 1\} \rightarrow F$ függvényt, ahol $a_{i+p-1} := a(i) \in F$ teljesül minden $i \in \{1, \dots, q - p + 1\}$ esetén. Ekkor

$$\sum_{k=p}^p a_k := a_p, \quad \sum_{k=p}^{q+1} a_k := a_{q+1} + \sum_{k=p}^q a_k,$$

minden $q - p + 1 \in \mathbb{N}$ és $a_p, \dots, a_q \in F$ esetén. Az előző tétel állításai igazak, ha a szummákat testbeli egészekre értelmezzük. Fontos megjegyezni, hogy ha $p, q \in \mathbb{Z}$, de a $q - p + 1 \in \mathbb{N}$ feltétel nem teljesül, akkor q nem kapható meg a p elemből véges sok 1 összeadásával, valamint $p \neq q$. Ekkor „üres” szummáról beszélünk, amely megállapodás szerint 0-val egyenlő.

A szummákhoz hasonlóan értelmezhetjük a produktumot is. Annyi a különbség, hogy összeadás helyett szorzást alkalmazunk.

14. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test. Ekkor

$$\prod_{k=1}^1 a_k := a_1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := a_{n+1} \prod_{k=1}^n a_k,$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_n \in F$ esetén.

A $\prod_{k=1}^n a_k$ szimbólumot úgy olvassuk, hogy **produktum k egyenlő 1-től n -ig**.

A produktumot a szummához hasonlóan értelmezhetjük egész indexekre is, sőt kaphatunk üres produktumokat is, amelyek megállapodás szerint 1-gyel egyenlők.

Egy másik fontos rekurzív módon értelmezett fogalom a faktoriális.

15. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$0! := 1, \quad 1! := 1 \quad \text{és} \quad (n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

$n!$ -t az n elem **faktoriálisának** nevezzük.

Egy n pozitív egész faktoriálisat produktum segítségével is megadható:

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

A faktoriális definíciójából eljutunk a binomiális együttható fogalmához.

16. Definíció. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $n \in N$, illetve $k \in \{0\} \cup \{1, \dots, n-1\}$. Ekkor

$$\binom{0}{0} := 1 \quad \text{és} \quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Az így értelmezett elemet **binomiális együtthatónak** nevezzük.

Az $\binom{n}{k}$ szimbólumot úgy olvassuk, hogy **n alatt a k** . Egyszerű számításokkal igazolhatók a következő azonosságok.

6. Tétel. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $n \in N$ és $k \in \{0\} \cup \{1, \dots, n-1\}$. Ekkor

a) $\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n,$

b) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$

c) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$

d) $\binom{n}{k}$ egy testbeli pozitív elem.

Bizonyítás. Az a) és b) pont nagyon egyszerű számítások eredménye, igazolásukat az olvasóra bízuk. A c) pont esetén

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-(k-1))! \cdot (k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \\ &= \frac{n! \cdot k}{(n-k+1) \cdot (n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \\ &= \frac{n! \cdot k + n! \cdot (n-k+1)}{(n-k+1) \cdot (n-k)! \cdot k!} = \\ &= \frac{n! \cdot (n+1)}{(n+1-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned}$$

A d) pontban szereplő állítás teljes indukcióval igazolható a c) pontban szereplő azonosság segítségével.

Középiskolában tanultuk két tag négyzetre és köbre emelésének szabályát. Nevezetesen

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{és} \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A következő tétel általánosítja az előző szabályokat tetszőleges pozitív egész hatvány esetén.

7. Tétel (Binomiális tétel). *Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $a, b \in F$, $a, b \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}$. Ekkor*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik. Az egyenlőség $n = 1$ -re igaz, hiszen ekkor mindkét oldal $a + b$ -vel egyenlő. Tegyük fel most, hogy $n \in \mathbb{N}$ -re igaz az egyenlőség

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Ekkor $n + 1$ -re

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1} = \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k. \end{aligned}$$

Így az állítás teljesül $n + 1$ -re is, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ -re igaz. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

5. Rendezett testek

A valós számok körében egyenlőtlenségeket szokás vizsgálni, magát a számokat egy számegyenesen ábrázoljuk, és ez csak a valós számokon értelmezett **teljes rendezés** szerint történhet. A teljes rendezés egy olyan rendezési reláció (reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció), amelyre minden a és b elem esetén igaz, hogy a relációban van b -vel vagy b relációban van a -val (lásd a „**Halmazok, relációk, függvények**” című tananyag ekvivalencia- és rendezési relációkról szóló részét).

A testaxiómák mellett ezentúl feltételezzük, hogy az F testen van egy teljes rendezés. Sőt, bizonyos kapcsolat van a rendezés és a műveletek között.

17. Definíció. Egy F testet **rendezett testnek** nevezzük, ha létezik egy az F -n értelmezett „ \leq ” teljes rendezés, amelyre teljesülnek a következők: tetszőleges $x, y \in F$ esetén

$$i) \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z, \text{ minden } z \in F \text{ esetén,}$$

$$ii) \quad 0 \leq x \text{ és } 0 \leq y \implies 0 \leq xy.$$

A fenti állításokat **rendezési axiómáknak** nevezzük.

Rendezett testet alkot a \mathbb{Q} racionális számtest, ha úgy értelmezzük a „ \leq ” rendezést, hogy

$$x \leq y \iff y - x \text{ felírható két pozitív egész hányadosaként}$$

(ami valójában azt jelenti, hogy $y - x$ pozitív, de ezt a fogalmat majd később értelmezzük). Ezért a valós számok struktúrájának megadásához a rendezési axiómák nem elegendők, hiszen az előző rendezéssel \mathbb{Q} egy rendezett test, de nem minden valós szám racionális.

Az $x \leq y$ állítást **egyenlőtlenségnek** nevezzük és úgy olvassuk, hogy **x kisebb vagy egyenlő mint y** . A fordított $x \geq y$ jelölés ugyanazt jelenti, mint az $y \leq x$ és úgy olvassuk, hogy **x nagyobb vagy egyenlő mint y** . Továbbá az $x < y$ vagy $y > x$ módon jelöljük azt az esetet, amikor $x \leq y$, de $x \neq y$. Ezt pedig **szigorú egyenlőtlenségnek** nevezzük.

A rendezés három diszjunkt részre oszt egy rendezett testet. Ezek az

$$F^+ := \{x \in F : x > 0\}$$

pozitív elemekből,

$$F^- := \{x \in F : x < 0\}$$

negatív elemekből, és a zéruselemből álló halmazok.

A következő tétel az egyenlőtlenségek néhány fontos tulajdonságát mutatja.

8. Tétel. Legyen F egy rendezett test és $x, y, u, v \in F$. Ekkor

- a) $x \leq y$ és $u \leq v \implies x + u \leq y + v$,
- b) $x \leq y$ és $0 \leq u \implies xu \leq yu$,
- c) $0 \leq x \leq y$ és $0 \leq u \leq v \implies xu \leq yv$,
- d) $x \neq 0 \implies x^2 > 0$.

Bizonyítás.

- a) Az i) rendezési axióma szerint $x + u \leq y + u$ és $u + y \leq v + y$, így a tranzitivitásból következik az igazolandó állítás.
- b) Az i) rendezési axióma szerint az $x \leq y$ mindkét oldalához hozzáadhatunk $-x$ -et, és így $x - x \leq y - x$, amiből következik, hogy $0 \leq y - x$. Mivel $0 \leq u$, így az ii) rendezési axióma szerint

$$0 \leq (y - x)u, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq yu - xu,$$

amiből az igazolandó állítás következik, ha hozzáadunk xu -t az előző egyenlőtlenség mindkét oldalához.

- c) Az előző pont alapján $xu \leq yu$ és $uy \leq vy$, így a tranzitivitásból következik az igazolandó állítás.
- d) Mivel a „ \leq ” rendezési reláció teljes, így $x \leq 0$ vagy $x \geq 0$. Az első esetben mindkét oldalához hozzáadhatunk $-x$ -et, és így $x - x \leq -x$, amiből

$$0 \leq -x, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq (-x)(-x) = x^2.$$

A második esetben

$$0 \leq x, \quad \text{azaz} \quad 0 \leq x \cdot x = x^2.$$

Ezért minden $x \in F$ esetén $x^2 \geq 0$. Azonban F **zérusosztómentes**, azaz $x^2 = x \cdot x$ csak akkor lehet nulla, ha $x = 0$, amiből következik az igazolandó állítás.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel d) pontjából következik, hogy $1 > 0$, hiszen $1 = 1^2 > 0$. Ebből igazolható, hogy minden pozitív egész egyben pozitív elem is. Ennek precíz igazolását a következő tétel bizonyításában találjuk, amely kimondja, hogy minden rendezett test 0 karakterisztikájú. Ezért minden rendezett test tartalmazza a racionális számtestet és az előző részben tanult rekurzív fogalmak is értelmezhetők.

9. Tétel. Minden rendezett test 0 karakterisztikájú test.

Bizonyítás. Legyen F egy rendezett test. Először igazolni fogjuk, hogy minden F -beli pozitív egész egyben pozitív elem is, vagyis $n \in N \implies n > 0$. A bizonyítás teljes indukcióval történik. Legyen $T := \{p \in N : p > 0\}$. $1 \in T$, hiszen $1 = 1^2 > 0$.

Tegyük fel, hogy $n \in T$, azaz $n > 0$. Ha hozzáadunk 1-t mindkét oldalához azt kapjuk, hogy $n + 1 > 1 > 0$, amiből következik, hogy $n + 1 \in T$.

Ezért $T = N$.

Ezzel igazoltuk, hogy minden F -beli pozitív egész pozitív elem is, de mivel 0 nem lehet pozitív elem, így 0 nem lehet pozitív egész sem, ami pontosan azt jelenti, hogy F egy 0 karakterisztikájú test. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Felmerül a kérdés, hogy minden test rendezhető-e és ezt többféle módon lehet-e megtenni. Habár ez egy alapvetően algebrai kérdés, megpróbálkozunk a teljesség igénye nélkül válaszolni a kérdésre. Az előző tételből következik, hogy ilyen testnek 0 karakterisztikájúnak kell lennie. Másrészt igazolható, hogy egy F test akkor és csak akkor tehető rendezett testté, ha a -1 nem állítható elő testbeli elemek négyzeteinek összegeként. Ez utóbbi állítást Artin-Schreier-tételként ismerjük. Másrészt vannak olyan testek, melyek többféle módon rendezhetőek, de a racionális számtestet csak egyféleképpen lehet rendezni. Rendezett testekről [1]-ben többet olvastunk.

12. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $x, y \in F$. Igazoljuk, hogy

$$xy > 0 \iff x > 0 \text{ és } y > 0, \text{ vagy } x < 0 \text{ és } y < 0.$$

Megoldás: Mivel F **zérusosztómentes**, így $x \neq 0$ és $y \neq 0$. Ezért csak a következő négy eset lehetséges.

- Ha $x > 0$ és $y > 0$, akkor a rendezési axiómák szerint $xy > 0$.
- Ha $x > 0$ és $y < 0$, akkor $-y > 0$ és így a rendezési axiómák szerint $x(-y) > 0$. Mivel $x(-y) = x(-1)y = (-1)xy = -xy$, így $-xy > 0$, azaz $xy < 0$.
- Ha $x < 0$ és $y > 0$, akkor az előző ponthoz hasonlóan igazolható, hogy $xy < 0$.
- Ha $x < 0$ és $y < 0$, akkor $-x > 0$ és $-y > 0$. Ekkor a rendezési axiómák szerint $(-x)(-y) > 0$. Mivel $(-x)(-y) = (-1)x(-1)y = (-1)^2xy = xy$, így $xy > 0$.

Az előző feladat állításából következik, hogy $x > 0$ akkor és csak akkor, ha $x^{-1} > 0$, hiszen $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$.

Rendezett testek esetében az egyenlőtlenség alkalmazásával több állítás kimondása leegyszerűsödik. Például a 11. Feladatban szereplő állítást úgy fogalmazhatjuk át, hogy ha $n, m \in N$ és $m < n$, akkor $n - m \in N$. Teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy

$$\{1, \dots, n\} = \{i \in N : 1 \leq i \leq n\}.$$

Ezentúl az $i \in \{1, \dots, n\}$ helyett az $i = 1, \dots, n$ jelölést alkalmazzuk. Továbbá az $x_i \leq x_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$) egyenlőtlenségeket egyszerűen $x_1 \leq \dots \leq x_n$ módon jelölhetjük (szigorú egyenlőtlenségek esetén $x_1 < \dots < x_n$ írhatunk).

13. Feladat. Legyen F egy rendezett test, $x, y \in F$ valamint $n \in N$. Igazoljuk, hogy ha $0 \leq x \leq y$, akkor $0 \leq x^n \leq y^n$.

Megoldás: A bizonyítás teljes indukcióval történik. Legyen

$$T := \{p \in N : 0 \leq x \leq y \implies 0 \leq x^p \leq y^p \text{ minden } x, y \in F \text{ esetén.}\}$$

Nyilvánvalóan $1 \in T$.

Tegyük fel, hogy $n \in T$, azaz ha $0 \leq x \leq y$, akkor $0 \leq x^n \leq y^n$. A rendezési axiómák és a 8. Tétel szerint az előző két egyenlőtlenség összeszorzásából következik, hogy $0 \leq x^{n+1} \leq y^{n+1}$, azaz $n+1 \in T$.

Ezért $T = N$.

14. Feladat. Legyen F egy rendezett test, $x, y \in F$ valamint $n \in N$. Igazoljuk, hogy ha $x, y \geq 0$, akkor ha $x^n \leq y^n$, akkor $x \leq y$.

Megoldás: Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan $n \in N$ és $x, y \geq 0$ elemek, hogy az $x^n \leq y^n$ tulajdonság mellett $y < x$ teljesül. Azonban az előző feladat szerint

$$0 \leq y < x \implies y^n \leq x^n.$$

Egyszerre $x^n \leq y^n$ és $y^n \leq x^n$ csak akkor teljesülhet, ha $x^n = y^n$. Mivel $x, y \geq 0$ ez csak akkor lehetséges, ha $x = y$ (lásd az 58. Feladatot), ami ellentmond az $y < x$ feltételnek.

Egy elem abszolút értéke már értelmezhető rendezett testek esetén.

18. Definíció. Legyen F egy rendezett test és $x \in F$. Ekkor

$$|x| := \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0, \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Az $|x|$ elemet az x elem **abszolút értékének** nevezzük.

Az abszolút érték a következő tulajdonsággal rendelkezik: ha $y \geq 0$, akkor

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y. \quad (*)$$

Tudniillik ha $x \geq 0$, vagyis $|x| = x$, akkor

$$|x| \leq y \iff 0 \leq x \leq y \iff -y \leq x \leq y,$$

hiszen $x, y \geq 0$. Másrészt ha $x < 0$, vagyis $|x| = -x$, akkor

$$|x| \leq y \iff -x \leq y \iff -y \leq x < 0 \iff -y \leq x \leq y,$$

hiszen $x < 0$ és $y \geq 0$. Az előbbi (*) tulajdonságból a következő állítás igazolható.

10. Tétel. Legyen F egy rendezett test. Ekkor

- i) $|x| \geq 0$, és $|x| = 0 \iff x = 0$,
- ii) $|xy| = |x||y|$,
- iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$, minden $x, y \in F$ esetén.

Bizonyítás.

i) $x \geq 0 \implies |x| = x$, így $|x| \geq 0$.

$x < 0 \implies |x| = -x$ és $-x > 0$, így $|x| > 0$.

Az állítás második része azonnal következik az abszolút érték definíciójából.

ii) Négy esetet különböztetünk meg:

I. $x \geq 0$ és $y \geq 0 \implies |x| = x, |y| = y$ és $|xy| = xy$, mert $xy \geq 0$.

II. $x \geq 0$ és $y < 0 \implies |x| = x, |y| = -y$ és $|xy| = -xy$, mert $xy < 0$.

III. $x < 0$ és $y \geq 0 \implies |x| = -x, |y| = y$ és $|xy| = -xy$, mert $xy < 0$.

IV. $x < 0$ és $y < 0 \implies |x| = -x, |y| = -y$ és $|xy| = xy$, mert $xy \geq 0$.

Mind a négy esetben helyettesítés után az egyenlőség teljesül.

iii) A (*) és a nyilvánvaló $|x| \leq |x|$ és $|y| \leq |y|$ tulajdonságból következik, hogy

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

A két egyenlőtlenség összeadásából adódik, hogy

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

amiből (*) tulajdonság miatt az igazolandó állítás következik.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Egy másik a középiskolából ismert fogalom egy elem előjele vagy szignumuma.

19. Definíció. Legyen F egy rendezett test és $x \in F$. Ekkor

$$\text{sign } x := \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ -1 & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Az $\text{sign } x$ elemet az x elem **előjelének** vagy **szignumának** nevezzük.

Rendezett testek esetében már megadhatjuk az **intervallum** fogalmát. Ha a és b az F rendezett test két különböző eleme és $a < b$, akkor jelölje

$$[a, b] := \{x \in F : a \leq x \leq b\},$$

$$]a, b[:= \{x \in F : a < x < b\},$$

$$[a, b[:= \{x \in F : a \leq x < b\},$$

$$]a, b] := \{x \in F : a < x \leq b\}.$$

Fontos kérdés annak eldöntése, hogy egy rendezett test adott halmazának van-e legnagyobb és legkisebb eleme.

20. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az $A \subseteq F$ halmaznak

- van **legnagyobb eleme** vagy **maximuma**, ha van olyan $b \in A$, hogy $a \leq b$ minden $a \in A$ esetén.
- van **legkisebb eleme** vagy **minimuma**, ha van olyan $b \in A$, hogy $a \geq b$ minden $a \in A$ esetén.

Az A halmaz legnagyobb elemét $\max A$ -val, legkisebb elemét $\min A$ -val jelöljük. Például

$$\max[a, b] = b \quad \text{és} \quad \min[a, b] = a.$$

Nem sokára igazolni fogjuk, hogy az $]a, b[$ intervallumnak nincs sem legnagyobb, sem legkisebb eleme. Ugyanúgy az F^+ pozitív elemek halmazának nincs legkisebb eleme, de

$$\min(F^+ \cup \{0\}) = 0.$$

Nyilvánvaló, hogy minden véges halmaznak van legnagyobb és legkisebb eleme. A pozitív egészek halmazának van legkisebb eleme, mégpedig $\min N = 1$, de nincs legnagyobb eleme.

11. Tétel. Egy F rendezett testben a pozitív egészek bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq N$ egy nem üres halmaz. Ha $1 \in A$, akkor $\min A = 1$, hiszen $1 \leq n$ minden $n \in N$ esetén. Ha $1 \notin A$, akkor legyen

$$B := \{m \in N : m < n \text{ bármely } n \in A \text{ esetén}\}.$$

Ekkor $1 \in B$ és $\exists m_0 \in B$, hogy $m_0 + 1 \notin B$, ellenkező esetben teljes indukcióval igazolható, hogy $B = N$, ami lehetetlen, mert A nem üres halmaz. A B halmaz fogalmából, $m_0 + 1 \notin B \implies \exists n_0 \in A$, hogy $n_0 \leq m_0 + 1$, de $m_0 < n_0$ hiszen $m_0 \in B$. Bebizonyítjuk, hogy $\min A = n_0$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists n \in A$, hogy $n < n_0$. Ekkor $n_0 - n \in N$, így $n_0 - n \geq 1$. Ezért $n \leq n_0 - 1 \leq m_0$, ami ellentmond annak, hogy $m_0 \in B$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az olyan halmazt, amelynek bármely nem üres részhalmazának van legkisebb eleme, **jólrendezett** halmaznak nevezzük. Az előző tétel azt mondta ki, hogy rendezett testben a pozitív egészek halmaza jólrendezett.

21. Definíció. Egy F rendezett testet **archimedesien rendezett testnek** nevezzük, ha minden $x, y \in F$, $x > 0$ esetén van olyan $n \in N$, hogy $nx > y$.

12. Tétel. A racionális számtest archimedesien rendezett test.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy van olyan $x, y \in Q$, $x > 0$, hogy $nx < y$ minden $n \in N$ esetén. Ebből $y > 0$, továbbá ha felírjuk az x és y elemet pozitív egészek hányadosaként, akkor az előző állítás ekvivalens azzal, hogy van olyan $p, q \in N$, hogy $nq < p$ minden $n \in N$ esetén. Rögzített q mellett legyen

$$A := \{k \in N : nq < k \ \forall n \in N\}.$$

Mivel $p \in A$, ezért $A \neq \emptyset$, így a 11. Tétel szerint az A -nak van legkisebb eleme, amelyet p_0 -val jelölünk. Ekkor $p_0 \in A$, vagyis $nq < p_0$, de $p_0 - 1 \notin A$ vagyis $p_0 - 1 \leq nq$ minden $n \in N$ esetén ($p_0 \neq 1$, hiszen $nq \not< 1$, mert pozitív egész). A fentiekből következik, hogy

$$\frac{p_0}{q} - \frac{1}{q} \leq n < \frac{p_0}{q} \quad \forall n \in N,$$

ami nem lehetséges, mert azt jelentené, hogy minden pozitív egész egy $\frac{1}{q} \leq 1$ hosszúságú intervallumban van. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

13. Tétel. Ha F egy archimedesien rendezett test, akkor minden $x, y \in F$, $x < y$ esetén van olyan $r \in Q$, hogy $x < r < y$.

Bizonyítás. A bizonyítás „konstruktív” jellegű, vagyis keresünk két olyan egész elemet, amelynek hányadosa x és y közé ékelődik.

Először a $0 \leq x < y$ esetet vizsgáljuk. Ekkor $y - x > 0$ és $\frac{1}{y - x} > 0$. F archimedesien rendezett test és $1 > 0$, ezért $\exists n_0 \in N$, hogy

$$n_0 = n_0 \cdot 1 > \frac{1}{y - x}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{n_0} < y - x.$$

Ha $x > 0$, akkor $n_0 x > 0$, így a fentiekhez hasonlóan $\exists m \in N$, hogy

$$m > n_0 x, \quad \text{azaz} \quad \frac{m}{n_0} > x.$$

Ha $x = 0$, akkor $m = 1$ már teljesíti a fenti feltételt. Tehát

$$A := \{m \in N : \frac{m}{n_0} > x\}$$

egy nem üres pozitív egészekből álló halmaz, így van legkisebb eleme. Jelölje $m_0 := \min A$. Ekkor

$$\frac{m_0}{n_0} - \frac{1}{n_0} = \frac{m_0 - 1}{n_0} \leq x \quad \text{vagyis} \quad \frac{m_0}{n_0} \leq x + \frac{1}{n_0} < x + (y - x) = y,$$

amiből következik, hogy az $r := \frac{m_0}{n_0} \in Q$ elem x és y között van.

Ha $x < 0 < y$, akkor $r := 0 \in Q$ x és y között van.

Ha $x < y \leq 0$, akkor $0 \leq -y < -x$, így az előzőek szerint $\exists r \in Q$, hogy $-y < r < -x$, amiből $x < -r < y$. Mivel $-r \in Q$, így teljesül az állítás. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételnek számos következménye van. Ezek közül egyet most megmutatunk. Igazolni fogjuk, hogy az F^+ pozitív elemek halmazának nincs legkisebb eleme. Ennek az az oka, hogy ha $a \in F^+$ lenne a halmaz legkisebb eleme, akkor $a > 0$, de az előző tétel szerint van olyan $r \in Q$, hogy $0 < r < a$. Ez azt jelenti, hogy $r \in F^+$, hiszen $r > 0$ és így a nem lehet F^+ legkisebb eleme.

Hasonló módon igazolható, hogy tetszőleges $a < b$ F -beli elemek esetén az $]a, b[$ és $]a, b]$ intervallumoknak nincs legkisebb eleme és az $]a, b[$ és $[a, b[$ intervallumoknak nincs legnagyobb eleme.

6. A teljességi axióma

Az előző részben a halmazok legnagyobb és legkisebb eleméről esett szó. Most azt a kérdéskört vizsgáljuk, hogy van-e olyan testbeli elem, amely nagyobb vagy kisebb egy adott halmaz összes eleménél.

22. Definíció. Legyen F egy rendezett test és $A \subseteq F$.

- Akkor mondjuk, hogy A **alulról korlátos** halmaz, ha $\exists k_1 \in F$, hogy $x \geq k_1$ minden $x \in A$ elem esetén. Ekkor k_1 -t az A halmaz **alsó korlátjának** nevezzük.
- Akkor mondjuk, hogy A **felülről korlátos** halmaz, ha $\exists k_2 \in F$, hogy $x \leq k_2$ minden $x \in A$ elem esetén. Ekkor k_2 -t az A halmaz **felső korlátjának** nevezzük.
- Ha A alulról és felülről is korlátos, akkor **korlátosnak** mondjuk.

Nyilvánvaló, hogy ha egy halmaznak van legnagyobb eleme, akkor felülről korlátos, és ha van legkisebb eleme, akkor alulról korlátos, de ez fordítva nem igaz. Minden $a < b$ elem által határolt intervallum korlátos, de ha a nem tartozik az intervallumhoz, akkor az intervallumnak nincs legkisebb eleme, és ha b nem tartozik az intervallumhoz, akkor az intervallumnak nincs legnagyobb eleme. A 12. Tételből következik, hogy a pozitív egészek halmaza felülről nem korlátos halmaz, hiszen ehhez elegendő az archimedesien rendezett test fogalmát tekinteni $x = 1$ esetén. Az üres halmaz korlátos halmaznak számít.

A következő tétel a korlátossággal ekvivalens állítást mond ki.

14. Tétel. Legyen F egy rendezett test és $A \subseteq F$. Az A halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha van olyan $k \in F$, hogy $|x| \leq k$ minden $x \in A$ esetén.

Bizonyítás. Ha A korlátos halmaz, akkor $\exists k_1, k_2 \in F$, hogy $k_1 \leq x \leq k_2$ minden $x \in A$ esetén. Legyen $k := \max\{|k_1|, |k_2|\}$. Ekkor

$$-k \leq -|k_1| \leq k_1 \leq x \leq k_2 \leq |k_2| \leq k,$$

amiből $|x| \leq k$ következik minden $x \in A$ esetén.

Fordítva, ha $\exists k \in F$, hogy $|x| \leq k$ minden $x \in A$ esetén, akkor $-k \leq x \leq k$, így $k_1 = -k$ A -nak alsó, illetve $k_2 = k$ A -nak felső korlátja. Így A korlátos halmaz. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Nem nehéz belátni, hogy ha egy halmaz korlátos, akkor bármely felső korlátja nagyobb vagy egyenlő bármely alsó korlátjánál. Azt sem nehéz igazolni, hogy egy felső korlátnál nagyobb elem is felső korlát, illetve egy alsó korlátnál kisebb elem

is alsó korlát. Az már érdekesebb kérdés, hogy egy felülről, vagy alulról korlátos halmaznak van-e mindig legkisebb felső korlátja, vagy legnagyobb alsó korlátja.

23. Definíció. Legyen F egy rendezett test és $A \subseteq F$.

- Ha van olyan $\beta^* \in F$, amely teljesíti a következő két feltételt:

- i) β^* felső korlátja A -nak,
- ii) ha β felső korlátja A -nak, akkor $\beta \geq \beta^*$,

akkor azt mondjuk, hogy β^* **felső határa**, **pontos felső korlátja** vagy **szuprémuma** A -nak és $\sup A$ -val jelöljük. Ha A felülről nem korlátos, akkor ezt $\sup A = \infty$ módon jelöljük.

- Ha van olyan $\alpha^* \in F$, amely teljesíti a következő két feltételt:

- (i) α^* alsó korlátja A -nak,
- (ii) ha α alsó korlátja A -nak, akkor $\alpha \leq \alpha^*$,

akkor azt mondjuk, hogy α^* **alsó határa**, **pontos alsó korlátja** vagy **infimuma** A -nak és $\inf A$ -val jelöljük. Ha A alulról nem korlátos, akkor ezt $\inf A = -\infty$ módon jelöljük.

Az előző definíció értelmében ha egy halmaz felülről korlátos és van felső határa, akkor a felső határ a legkisebb az összes felső korlát közül. Ha egy halmaznak van legnagyobb eleme (maximuma), akkor ez felső határa (szuprémuma) is egyben. Egy halmaz felső határa nem feltétlenül eleme a halmaznak, azaz nem mindig a legnagyobb eleme. Például a negatív elemek halmazának felső határa 0. Hasonló állítások mondható ki felülről korlátos halmazok esetére az alsó korlátok, legkisebb eleme (minimuma) és az alsó határa (infimuma) vonatkozásában.

Fontos megjegyezni, hogy az előző definícióval két fontos szimbólumot vezettük be, a **végtele**nt és a **mínusz végtelen**t, azaz a ∞ és a $-\infty$ jeleket. Azt szimbolizálják, hogy a halmaz elemei „az adott irányban akármekkora” lehetnek. Pontosabban, ha $\sup A = \infty$, akkor $\forall x \in F$ esetén $\exists y \in A$, hogy $y > x$, és fordítva, ha $\inf A = -\infty$, akkor $\forall x \in F$ esetén $\exists y \in A$, hogy $y < x$.

A végtelen és a mínusz végtelen szimbólumok segítségével egy praktikus jelölést vezetünk be, amivel az ún. végtelen intervallumokat jelölhetjük, nevezetesen ha $a \in F$, akkor

$$\begin{aligned} [a, \infty[&:= \{x \in F : x \geq a\}, \\]a, \infty[&:= \{x \in F : x > a\}, \\]-\infty, a] &:= \{x \in F : x \leq a\}, \\]-\infty, a[&:= \{x \in F : x < a\}. \end{aligned}$$

$A]-\infty, \infty[$ az egész F rendezett testet jelöli.

15. Tétel. Legyen F egy rendezett test és $A \subseteq F$. Ekkor az A halmaznak legfeljebb egy felső és egy alsó határa lehet.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A -nak két felső határa van, α_1 és α_2 , továbbá $\alpha_1 < \alpha_2$. Mivel α_2 felső határa és α_1 felső korlátja A -nak, így a definíció ii) pontja alapján $\alpha_1 \geq \alpha_2$, ami ellentmondás. Az állítás hasonlóan igazolható alsó határ esetére is. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Jegyezzük meg, hogy az üres halmaz korlátos, de nincs se alsó se felső határa.

15. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $A, B \subseteq F$. Bizonyítsuk be, hogy ha A -nak és B -nek van felső határa, akkor az $A \cup B$ -nek is van felső határa és

$$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

Megoldás: A felső határ fogalma alapján elegendő azt bebizonyítani, hogy $\alpha^* := \max\{\sup A, \sup B\}$ felső korlátja $A \cup B$ -nek, és kisebb bármely más felső korlátnál.

Igaz, hogy $\alpha^* \geq \sup A$ és $\alpha^* \geq \sup B$. Legyen $x \in A \cup B$, ekkor $x \in A$ vagy $x \in B$.

$$x \in A \implies x \leq \sup A \leq \alpha^* \quad \text{és} \quad x \in B \implies x \leq \sup B \leq \alpha^*.$$

Ezért $x \leq \alpha^*$ minden $x \in A \cup B$ esetén, vagyis α^* felső korlátja $A \cup B$ -nek. Ha α tetszőleges felső korlátja $A \cup B$ -nek, akkor $x \leq \alpha$ minden $x \in A \cup B$ esetén, de $A, B \subseteq A \cup B$. Ezért $x \leq \alpha$ minden $x \in A$ és $x \in B$ esetén, vagyis α felső korlátja A -nak és B -nek. Így $\alpha \geq \sup A$ és $\alpha \geq \sup B$, amiből következik, hogy $\alpha \geq \max\{\sup A, \sup B\} = \alpha^*$.

Hasonló állítás igazolható, ha az előző feladatban szuprémum helyett infimumot, maximum helyett minimumot írunk.

Egy rendezett testnek lehet olyan felülről korlátos halmaza, amelynek nincs felső határa. Vegyük például a racionális számtestet és legyen $A := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$. Az A halmaz felülről korlátos, hiszen nem nehéz igazolni, hogy a 2 elem a halmaz felső korlátja. Tegyük fel, hogy A -nak van felső határa, amelyet α -val jelölünk. Ekkor három esetet különböztethetünk meg, és igazolni fogjuk, hogy egyik eset sem lehetséges.

- $\alpha^2 = 2$.

α felírható p/q „leegyszerűsített tört” alakban, vagyis feltételezzük, hogy p és q közül az egyik páratlan elem. Négyzetre emelés és átrendezés után azt kapjuk, hogy $2q^2 = p^2$, így p^2 páros elem, azaz p páros elem. Ekkor $\exists p_1 \in \mathbb{N}$, hogy $p = 2p_1$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $q^2 = 2p_1^2$, így q^2 páros elem, azaz q páros elem. Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy az egyik szám páratlan elem volt.

- $\alpha^2 < 2$.

Induljunk ki az

$$\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \alpha^2 + \frac{2\alpha + 1}{n}$$

összefüggésből. Mivel a racionális számtestben a pozitív egészek halmaza felülről nem korlátos halmaz, így van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$n_0 > \frac{2\alpha + 1}{2 - \alpha^2} \in \mathbb{Q} \quad \implies \quad \left(\alpha + \frac{1}{n_0}\right)^2 < 2,$$

azaz $\alpha + \frac{1}{n_0} \in A$. Mivel $\alpha < \alpha + \frac{1}{n_0}$ így α nem lehet felső határ.

- $\alpha^2 > 2$.

Induljunk ki az

$$\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} > \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n}$$

összefüggésből. Mivel a racionális számtestben a pozitív egészek halmaza felülről nem korlátos halmaz, így van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$n_0 > \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2} \in \mathbb{Q} \quad \implies \quad \left(\alpha - \frac{1}{n_0}\right)^2 > 2,$$

azaz $\alpha - \frac{1}{n_0}$ az A halmaz felső korlátja. Mivel $\alpha > \alpha - \frac{1}{n_0}$ így α nem lehet felső határ.

24. Definíció. Egy rendezett testet **teljesen rendezett testnek** nevezzük, ha minden felülről korlátos nem üres halmazának van felső határa. Ezt **teljességi axiómának** mondjuk.

A fenti fogalomból az is következik, hogy egy teljesen rendezett test minden alulról korlátos halmazának van alsó határa. Tudniillik, ha A alulról korlátos, akkor $-A := \{-a : a \in A\}$ felülről korlátos, így lesz α^* felső határa, amiből igazolható, hogy $-\alpha^*$ alsó határa A -nak.

A racionális számtesthez hasonlóan igazolható, hogy lényegében egyetlen teljesen rendezett test létezik, melyet valós számok halmazának nevezünk.

25. Definíció. **Valós számok halmazának** nevezünk egy teljesen rendezett testet. Ezt az \mathbf{R} szimbólummal jelöljük.

Az előző részben megadtunk olyan φ művelettartó bijektív leképezést, mely két 0 karakterisztikájú test racionális elemeit kapcsolja össze. Adott két $\langle F, +, \cdot, \leq \rangle$ és $\langle F^*, \oplus, \odot, \preceq \rangle$ teljesen rendezett test, a szóban forgó φ leképezést úgy terjeszthetjük ki nem racionális elemekre, hogy

$$\varphi(x) := \sup\{\varphi(r) : r \in Q, r < x\}$$

teljesüljön. Igazolható, hogy az így kapott $\varphi: F \rightarrow F^*$ leképezés bijektív és művelettartó, illetve

$$x \leq y, \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \preceq \varphi(y),$$

amiből következik, hogy lényegében egyetlen teljesen rendezett test létezik.

Különböző modellek születtek annak igazolására, hogy egyetlen rendezett test létezik. Ezek közül említhetjük a Dedekind-, a Cantor- és a Weierstrass-féle modellt.

A valós számok testében található pozitív egészek, egészek és racionális elemek halmazát **természetes**, **egész**, és **racionális számoknak** nevezzük. Ezeket rendre az \mathbf{N} , \mathbf{Z} és \mathbf{Q} szimbólumokkal jelöljük.

A következőkben két fontos tételt bizonyítunk, melyek a teljességi axiómából következnek. Az első azt állítja, hogy a valós számok halmaza egy archimedesien rendezett test, amiből következik, hogy a természetes számok halmaza nem korlátos halmaz \mathbf{R} -ben. Továbbá az is következik, hogy két valós szám között mindig van racionális szám (lásd a 13. Tételt).

16. Tétel. *A valós számok halmaza archimedesien rendezett test.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy \mathbf{R} egy nem archimedesien rendezett test, azaz van olyan $x, y \in \mathbf{R}$ úgy, hogy $x > 0$ és $nx \leq y$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ekkor $n \leq y/x$, azaz y/x felső korlátja lenne a természetes számok halmazának. Tehát \mathbf{N} korlátos halmaz, de ekkor a teljességi axióma szerint van szuprémuma, amit α -val fogunk jelölni.

Mivel $\alpha - 1$ már nem felső korlátja \mathbf{N} -nek, így van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy

$$\alpha - 1 < n_0, \quad \text{de ekkor} \quad \alpha < n_0 + 1 \in \mathbf{N},$$

ami nem lehetséges, hiszen $\alpha = \sup \mathbf{N}$, azaz nagyobb, mint bármely természetes szám. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A második állítás, ami Cantor-féle metszet-tételként ismert, azt állítja, hogy egymásba „skatulyázott” zárt intervallumok metszete nem üres.

17. Tétel (Cantor-féle metszet-tétel).

Legyen $\langle a_n \rangle: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, $\langle b_n \rangle: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ két valós sorozat és

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_n \geq b_{n+1}, \quad a_n \leq b_n$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ekkor

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Bizonyítás. Az $A := \{a_n: n \in \mathbf{N}\}$ halmaz nem üres és felülről korlátos, hiszen a feltételekből azonnal következik, hogy $a_n \leq b_m$ minden $n, m \in \mathbf{N}$ esetén. Valóban, ha $n \leq m$, akkor $a_n \leq a_m < b_m$, míg ha $n \geq m$, akkor $a_n < b_n \leq b_m$.

Ekkor a teljességi axióma szerint A -nak van felső határa, amit α -val fogunk jelölni. α egyrészt nagyobb vagy egyenlő A minden eleménél, azaz $\alpha \geq a_n$ ($n \in \mathbf{N}$), másrészt kisebb vagy egyenlő A minden felső korlátjánál, azaz $\alpha \leq b_n$ ($n \in \mathbf{N}$). Így $\alpha \in [a_n, b_n]$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, amiből következik, hogy a metszetüknek eleme. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Igazolható, hogy ha egy rendezett test archimedesien rendezett és érvényes rá a Cantor-féle metszet-tétel, akkor a teljességi axióma teljesül. Vannak olyan szerzők, akiknél a teljességi axióma az archimedesien rendezettségéből és a Cantor-féle metszet-tételből áll.

Mivel a racionális számok halmaza nem teljes, így lennie kell olyan valós számnak, amely nem racionális.

26. Definíció. Az $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ halmaz elemeit **irracionális számoknak** nevezzük.

Két irracionális szám összege és szorzata lehet akár racionális, akár irracionális. Más a helyzet a „vegyes” összegekkel és szorzatokkal.

16. Feladat. Legyen $r \in \mathbf{Q}$ és $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Igazoljuk, hogy $r + x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, továbbá, ha $x \neq 0$, akkor $rx \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Megoldás: Indirekt módon tegyük fel, hogy $r + x \in \mathbf{Q}$. Ekkor

$$x = (r + x) - r \in \mathbf{Q},$$

ami ellentmondás, hiszen két racionális szám különbsége racionális. Hasonlóan igazolható az állítás a szorzás esetében.

Az irracionális számok szintén sűrűn helyezkednek el.

18. Tétel. Minden $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$ esetén van olyan z irracionális szám, hogy $x < z < y$.

Bizonyítás. Legyen i egy irracionális szám. Mivel két valós szám között mindig van racionális, ezért van olyan $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, hogy

$$x < q_1 < q_2 < y \quad \text{és} \quad i - 1 < r_1 < i < r_2 < i + 1$$

teljesül. Ekkor az előző tétel miatt a

$$z := \frac{i - r_1}{r_2 - r_1}(q_2 - q_1) + q_1$$

szám irracionális és $x < q_1 < z < q_2 < y$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Ebben a részben **igazoltuk**, hogy nincs olyan r racionális szám, amelyre $r^2 = 2$. Jogos a kérdés, hogy van-e egyáltalán olyan x valós szám, amire $x^2 = 2$ teljesül. A következő tétel megválaszolja az előző kérdést.

19. Tétel. Minden $a \geq 0$ valós és n természetes szám esetén egyetlen olyan $\alpha > 0$ valós szám létezik, amire $\alpha^n = a$ teljesül.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló $a = 0$ vagy $n = 1$ esetén. Legyen $a > 0$, $n > 1$ és jelölje

$$A := \{x \in \mathbf{R} : x > 0, x^n < a\}.$$

A nem üres halmaz, hiszen $0 < \frac{a}{a+1} < 1$ és így

$$0 < \left(\frac{a}{a+1}\right)^n < \frac{a}{a+1} < a, \quad \text{azaz} \quad \frac{a}{a+1} \in A.$$

A korlátos halmaz, hiszen $(a+1)$ felső korlátja. Valóban ha $x > a+1$, akkor

$$x^n > (a+1)^n > a+1 > a,$$

így $x \notin A$. Mivel A korlátos halmaz, így a teljességi axióma szerint A -nak van felső határa, melyet α -val fogunk jelölni. Igazolni fogjuk, hogy $\alpha^n = a$.

Tegyük fel, hogy $\alpha^n < a$ és legyen $m \in \mathbf{N}$. A binomiális tétel miatt

$$\begin{aligned} \left(\alpha + \frac{1}{m}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\alpha^{n-k}}{m^k} \leq \alpha^n + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \alpha^{n-k} = \\ &= \alpha^n + \frac{1}{m}((\alpha+1)^n - \alpha^n). \end{aligned} \tag{1}$$

Válaszuk ki az m_0 természetes számot úgy, hogy $m_0 > \frac{(\alpha + 1)^n - \alpha^n}{a - \alpha^n}$, amiből következik, hogy

$$\alpha^n + \frac{1}{m_0}((\alpha + 1)^n - \alpha^n) < a.$$

Ekkor (1) miatt a kiválasztott m_0 szám mellett $\left(\alpha + \frac{1}{m_0}\right)^n < a$ teljesül.

Ezért ha $z := \alpha + \frac{1}{m_0}$, akkor $z^n < a$, azaz $z \in A$, illetve $z > \alpha$, amiből következik, hogy α nem felső korlátja A -nak, és ez ellentmond annak, hogy α az A halmaz szuprémuma.

Tegyük fel, hogy $\alpha^n > a$. Ekkor $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n < \frac{1}{a}$. Ha az $\alpha^n < a$ megcáfolására alkalmazott előző gondolatmenetben az α számot $\frac{1}{\alpha}$ -val és hasonlóan az a számot $\frac{1}{a}$ -val helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy van olyan z szám, amire azt teljesül, hogy $z^n < \frac{1}{a}$ és $z > \frac{1}{\alpha}$, azaz $a < \left(\frac{1}{z}\right)^n$ és $\frac{1}{z} < \alpha$. Ebből következik, hogy az $\frac{1}{z}$ szám felső korlátja A -nak, tudniillik minden $x \in A$ esetén teljesül, hogy $x^n < a < \left(\frac{1}{z}\right)^n$ azaz $x < \frac{1}{z}$ (lásd a 14. Feladatot), másrészt $\frac{1}{z} < \alpha$ miatt α nem a legkisebb felső korlátja A -nak. Ez ellentmond annak, hogy α az A halmaz szuprémuma.

Mivel az $\alpha^n < a$ vagy $\alpha^n > a$ eset nem lehetséges, csak az $\alpha^n = a$ egyenlőség teljesülhet.

Az egyértelműség abból következik, hogy két különböző pozitív szám n -edik hatványa is különböző (lásd az 58. Feladatot).

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel lehetővé teszi a következő fogalom bevezetését.

27. Definíció. Legyen $a \geq 0$ egy valós szám és n egy természetes szám. Azt az $\alpha \geq 0$ valós számot, amelynek n -edik hatványa a , az a szám ***n -edik gyökének*** nevezzük. Jele $\sqrt[n]{a}$ vagy $a^{\frac{1}{n}}$.

Fontos megjegyezni, hogy ha n páros és $a > 0$, akkor még egy olyan szám létezik, amelynek n -edik hatványa a és ez $-\sqrt[n]{a}$ -val egyenlő. Az n -edik gyökvonás kiterjeszthető negatív számokra, ha n páratlan. Ekkor $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

17. Feladat. Legyen $0 \leq x < y$ és $n \in \mathbf{N}$. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

Megoldás: Indirekt módon tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{x} \geq \sqrt[n]{y}$. Mivel $\sqrt[n]{y} \geq 0$, így a 13. Feladat állításából következik, hogy $x \geq y$, ami ellentmondás.

A következő két feladat megoldása mutatja, hogyan tudunk tulajdonságokat igazolni n -edik gyökvonás esetén.

18. Feladat. Legyen $a, b > 0$ és $n \in \mathbf{N}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}.$$

Megoldás: Mivel a gyökvonás egyértelműen meghatározott, elég igazolni, hogy a két oldal pozitív és n -edik hatványa ab -vel egyenlő. Ez a hatványozás tulajdonságaiból azonnal következik (lásd. a 37. Feladatot).

19. Feladat. Legyen $a, b > 0$ és $n, m \in \mathbf{N}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Megoldás: Mivel a gyökvonás egyértelműen meghatározott, elég igazolni, hogy a baloldal nm -edik hatványa a -val egyenlő. Ez a hatványozás tulajdonságaiból azonnal következik (lásd. a 37. Feladatot), hiszen

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{nm} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

20. Feladat. Legyen $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$ és $p, q \in \mathbf{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^q = \sqrt[n]{a^{pq}}.$$

Megoldás: Mivel a gyökvonás egyértelműen meghatározott, elég igazolni, hogy a baloldal n -edik hatványa a^{pq} -val egyenlő. Ez az egész kitevős hatványra vonatkozó hatványozás tulajdonságaiból azonnal következik (lásd. a 10. Feladatot), hiszen

$$\left(\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^q\right)^n = \left(\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^n\right)^q = (a^p)^q = a^{pq}.$$

A gyökvonás segítségével általánosíthatjuk a hatványozást **racióális kitevőjű hatványokra** is.

28. Definíció. Legyen $a > 0$ egy valós szám, $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$. Az a szám p/q -adik hatványa

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p}.$$

A fenti fogalom jól definiált abban az értelemben, hogy a kapott érték nem függ a konkrét p és q értékektől, csak a hányadosuktól. Valóban, ha $n \in \mathbf{N}$, akkor a 19. Feladat és a hatványozás tulajdonság alapján (lásd. a 37. Feladatot)

$$a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[qn]{a^{pn}} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^p}^n} = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}.$$

A következő feladat általánosítja a 10. Feladatban található egész kitevős hatványozás tulajdonságait bármely racionális kitevő hatványra.

21. Feladat. Igazoljuk, hogy minden $x, y > 0$ és $r, s \in \mathbf{Q}$ esetén igazak a következő tulajdonságok:

a) $x^r x^s = x^{r+s},$

b) $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s},$

c) $(x^r)^s = x^{rs},$

d) $(xy)^r = x^r y^r,$

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}.$

Megoldás: Ha $r, s \in \mathbf{Q}$, akkor az egyszerűség kedvéért írjuk fel őket közös nevezővel rendelkező törtek alakjában, azaz

$$r = \frac{p}{n}, \quad s = \frac{q}{n},$$

ahol $p, q \in \mathbf{Z}$ és $n \in \mathbf{N}$. Az igazolni kívánt tulajdonságokat már bebizonyítottuk egész kitevős hatványokra (lásd a 10. Feladatot), ezért alkalmazhatjuk őket p és q kitevőjű hatványok esetén.

a) $x^r x^s = x^{r+s}$

A 18. Feladat eredményének alkalmazásával

$$x^r x^s = x^{\frac{p}{n}} x^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{x^p} \sqrt[n]{x^q} = \sqrt[n]{x^p x^q} = \sqrt[n]{x^{p+q}} = x^{\frac{p+q}{n}} = x^{\frac{p}{n} + \frac{q}{n}} = x^{r+s}.$$

b) $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

Rögtön megkapjuk az a) pont egyenlőségéből, ha s helyett $-s$ -et írunk.

c) $(x^r)^s = x^{rs}$

A 19. és a 20. Feladat eredményének alkalmazásával

$$(x^r)^s = \left(x^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{q}{n}} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{x^p}\right)^q} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{pq}}} = \sqrt[n^2]{x^{pq}} = x^{\frac{pq}{n^2}} = x^{\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}} = x^{rs}.$$

d) $(xy)^r = x^r y^r$

A 18. Feladat eredményének alkalmazásával

$$(xy)^r = (xy)^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{(xy)^p} = \sqrt[n]{x^p y^p} = \sqrt[n]{x^p} \sqrt[n]{y^p} = x^{\frac{p}{n}} y^{\frac{p}{n}} = x^r y^r.$$

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

Rögtön megkapjuk a d) pont egyenlőségéből, ha y helyett $\frac{1}{y}$ -ot írunk.

22. Feladat. Legyen $a > 0$, $r, s \in \mathbf{Q}$ és $r < s$. Bizonyítsuk be, hogy

- ha $a > 1$, akkor $a^r < a^s$,
- ha $a < 1$, akkor $a^r > a^s$.

Megoldás: Először azt fogjuk igazolni, hogy ha $a > 1$, akkor minden r pozitív racionális szám esetén $a^r > 1$ teljesül. Valóban, ha $r = n$ egy pozitív egész szám, akkor az 57. Feladat a) pontjából következik, hogy $a^n > 1^n = 1$. Másrészt, ha $r = \frac{p}{n}$, ahol p és n két pozitív egész szám, akkor $a^p > 1$, és így

$$a^r = a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p} > 1,$$

különben ha $\sqrt[n]{a^p} < 1$, akkor szintén az 57. Feladat a) pontja miatt azt kapnánk, hogy $\left(\sqrt[n]{a^p}\right)^n < 1^n = 1$.

Ezután úgy oldjuk meg a feladatot, hogy alkalmazzuk az előző feladatban igazolt racionális kitevős hatványokra vonatkozó tulajdonságokat. Ha $r < s$, akkor $s - r > 0$, és így

- ha $a > 1$, akkor $1 < a^{s-r} = \frac{a^s}{a^r} \implies a^r < a^s$,

- ha $a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$, és így az előző eset szerint

$$\frac{1}{a^r} = \left(\frac{1}{a}\right)^r < \left(\frac{1}{a}\right)^s = \frac{1}{a^s} \implies a^r > a^s.$$

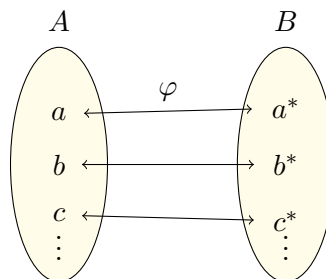
7. Halmazok számossága

Ez a rész azzal a kérdéskörrel kíván foglalkozni, hogy hány eleme van egy halmaznak. Ez első hallásra nem tűnik olyan nehéz dolognak, hiszen ha egy halmaz elemeit meg tudjuk számolni, akkor annyi eleme van, mint amennyit számoltunk. Ha nem tudjuk megszámlálni, akkor a halmaz végtelen. De valóban minden végtelen halmaz elemszáma megegyezik? Ugyanannyi természetes szám van, mint valós szám?

Ahhoz, hogy válaszolni tudjunk a fenti kérdésekre, tisztázni kell mit értünk azon, hogy két halmaznak „ugyanannyi” az elemszáma. Ezt matematikai nyelven úgy mondjuk, hogy a két halmaz azonos számosságú.

29. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok **ekvivalensek**, vagy **azonos számosságúak**, ha létezik egy $\varphi: A \rightarrow B$ leképezés, ami bijektív. Jele $A \sim B$.

A fenti definíció tényleg azt sugallja, hogy a két halmaz elemszáma megegyezik, hiszen a bijektív leképezés párba állítja a két halmaz elemeit.



Nem nehéz igazolni, hogy a halmazok közötti ekvivalencia tetszőleges halmazrendszeren ekvivalencia relációt alkot. Valóban

- $A \sim A$, hiszen az identikus leképezés bijektív (reflexív),
- Ha $A \sim B$, akkor $\varphi: A \rightarrow B$ bijektív leképezés inverze $\varphi^{-1}: B \rightarrow A$ is bijektív leképezés és így $B \sim A$ (szimmetrikus),
- Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor a $\varphi_1: A \rightarrow B$ és $\varphi_2: B \rightarrow C$ leképezések összetett függvénye bijektív leképezés, $\varphi_2 \circ \varphi_1: A \rightarrow C$ és így $A \sim C$ (transzitiv).

Ekkor a halmazok körében egy osztályozás jön létre, amellyel el tudjuk majd nevezni a különböző számosságtípusokat.

30. Definíció. Akkor mondjuk, hogy az A nem üres halmaz **véges számosságú** és **elemszáma n** , ha van olyan $n \in \mathbf{N}$, hogy $A \sim \{1, \dots, n\}$. Ekkor az elemszámot $|A|$ -val jelöljük.

Az üres halmaz is véges számosságúnak számít, de elemszáma 0. Egy halmazt **végtelen számosságúnak** mondunk, ha nem véges számosságú. Sokszor a rövidség kedvéért egyszerűen végesnek vagy végtelennek mondjuk a halmazt.

A végtelen olyan fogalom, amely csak gondolati síkon és nem tapasztalat útján közelíthető meg. Foglalkozik vele a filozófia és a matematika valamint egy érdekes „kettősséggel” rendelkezik, amely Arisztotelész idejében már ismert volt. Az első, az ún. „potenciális végtelen”, amikor például egy nem véges halmaznak keressük a szuprémumát és egyre nagyobb és nagyobb halmazbeli elemeket vizsgálunk, amelyek egyre jobban „megközelítik” a keresett értéket, azaz egy folyamat korlátlan továbbfolytathatóságáról szól. Sőt azt a tényt, hogy az értékek nőttek nőhetnek szintén a ∞ szimbólummal jelöljük.

A másik végtelenről most esett szó. Az ún. „aktuális végtelen”, amikor nem folyamatra gondolunk, hanem egy már „lezárt”, „befejezett” egységre. Nem a halmaz növekedő elemeire, hanem magára a halmazra. A két végtelen között lényeges különbség van, de az utóbbi nehezen elfogadható volt a matematikában, hiszen látni fogjuk, hogy ebből a fogalomból szokatlan állítások következnek.

Nyilvánvaló, hogy \mathbf{N} nem lehet véges, különben korlátos halmaz lenne. Ezért a vele ekvivalens halmazok külön számosságot alkotnak.

31. Definíció. Akkor mondjuk, hogy A **megszámlálhatóan végtelen halmaz**, ha $A \sim \mathbf{N}$.

A fenti definíció értelmében, ha az A halmaz megszámlálhatóan végtelen, akkor azt a φ bijektív leképezést, amely összekapcsolja a természetes számokat az A elemeivel egy sorozatként foghatjuk fel, így $A = \{\varphi(n) : n \in \mathbf{N}\}$, ahol minden $\varphi(n)$ elem egymástól különböző. A következő példa egy „furcsaságot” rejt a végtelen halmazokkal kapcsolatban. Előfordul, hogy egy halmaz ekvivalens egy valódi részhalmazával. Ezt jól illusztrálja a következő feladat.

23. Feladat. Legyen P a pozitív páros számok halmaza. Bizonyítsuk be, hogy P megszámlálhatóan végtelen!

Megoldás: Az állítás abból következik, hogy a $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow P$, $\varphi(n) := 2n$ leképezés bijektív.

A fenti viselkedés jellemző a végtelen halmazokra, azaz egy halmaz végtelen akkor és csak akkor, ha ekvivalens egy valódi részhalmazával (lásd a következő két feladatot). Azonban az igazsághoz tartozik, hogy csak akkor tudunk ilyet állítani, ha feltételezzük, hogy minden nem üres halmazokból álló halmazrendszer esetén, van olyan halmaz, amelynek a halmazrendszer minden elemével pontosan egy közös eleme van. Az előbbi feltételt, amit **kiválasztási axiómának** nevezünk, itt és az analízis tantárgy során, igaznak tekintjük.

24. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza!*

Megoldás: Legyen A egy végtelen halmaz és válasszuk ki egy $x_1 \in A$ tetszőleges elemét. Az $A_1 := A \setminus \{x_1\}$ halmaz végtelen, így válasszuk ki egy $x_2 \in A_1$ tetszőleges elemét. Hasonlóan az $A_2 := A_1 \setminus \{x_2\}$ halmaz végtelen.

Folytatjuk az eljárást minden $n \in \mathbb{N}$ esetén: az A_n végtelen halmazból válasszuk ki egy $x_{n+1} \in A$ elemét. Az

$$A_{n+1} := A_n \setminus \{x_{n+1}\}$$

halmaz végtelen, és így tovább.

Az $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ halmaz megszámlálhatóan végtelen és $X \subseteq A$.

25. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy egy halmaz végtelen akkor és csak akkor, ha ekvivalens egy valódi részhalmazával!*

Megoldás: Legyen A egy végtelen halmaz. Az előző feladat szerint van egy $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. Ekkor a $\varphi : A \rightarrow A \setminus \{x_1\}$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} x_{n+1} & \text{ha } x \in X \text{ és } x = x_n, \\ x & \text{ha } x \in A \setminus X \end{cases}$$

leképezés bijektív. Így $A \sim A \setminus \{x_1\}$.

Az állítás megfordításához oldjuk meg a [76. Feladatot](#).

Az előző feladat megoldásában olyan módszert alkalmaztunk, amely hasonlít a híres „Hilbert szálloda” paradoxonához. Képzünk el egy szállodát, amelynek végtelen sok szobájában van és minden szoba ajtaján ott áll a szobaszám, amely egy egyedi természetes szám. A szállodához vendég érkezik, de minden szoba foglalt. Meglepő módon az új vendéget el fogjuk tudni szállásolni anélkül, hogy valamely régi vendéget el kelljen küldenünk. A megoldás az, hogy megkérünk minden vendéget arra, hogy költözzön át abba a szobába, melynek száma követi a jelenlegi szobaszámát. Ilyen módon az első szoba kiürül, ahová az új vendég beköltözhet.

Jogos a kérdés, hogy van-e a természetes számok halmazának olyan végtelen részhalmaza, amely nem megszámlálhatóan végtelen. A válasz az, hogy nincs.

20. Tétel. *Legyen $A \subseteq \mathbf{N}$. Ekkor A véges vagy megszámlálhatóan végtelen.*

Bizonyítás. Ha $A \subseteq \mathbf{N}$ és $A \neq \emptyset$, akkor A -nak van legkisebb eleme (lásd a 11. Tételt), amelyet x_1 -gyel jelöljük, továbbá $A_1 := A \setminus \{x_1\}$. Ha $A_1 = \emptyset$, akkor A véges és elemszáma 1. Ha $A_1 \neq \emptyset$, akkor van legkisebb eleme, amelyet x_2 -gyel jelöljük, továbbá $A_2 := A_1 \setminus \{x_2\}$. Ha $A_2 = \emptyset$, akkor A véges és elemszáma 2. Ha $A_2 \neq \emptyset$, akkor van legkisebb eleme, és így tovább.

Az eljárást úgy folytatjuk, hogy ha $n \in \mathbf{N}$, amire az $A_n \subseteq \mathbf{N}$, $A_n \neq \emptyset$ halmaz már ismert, akkor jelölje x_{n+1} a halmaz legkisebb elemét, és legyen $A_{n+1} := A_n \setminus \{x_{n+1}\}$. Ha A_{n+1} üres, akkor A véges és elemszáma $n+1$. Ha A_{n+1} nem üres, akkor megyünk tovább.

Ha A végtelen, akkor az eljárás soha nem ér véget, de az A halmaz egyenlő a fenti módon „kiválasztott” elemekből álló $X := \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ halmazzal, hiszen egyrészt X az A halmaz pontjaiból áll, azaz $X \subseteq A$, másrészt ha $a \in A$, de $a \notin X$, akkor minden X -beli elem kisebb, mint a , de ez nem lehetséges, mert X egy természetes számokból álló végtelen halmaz. Ezért A megszámlálhatóan végtelen. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Azt mondjuk, hogy egy halmaz megszámlálható, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az előző tétel azt mondja ki, hogy a természetes számok halmazának minden részhalmaza megszámlálható. Ebből következik, hogy egy megszámlálható halmaz minden részhalmaza szintén megszámlálható.

A következőkben megvizsgáljuk a nevezetes számhalmazok számosságát. Az egész számok halmazával kezdünk.

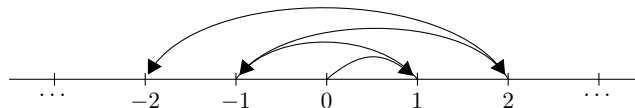
21. Tétel. *\mathbf{Z} megszámlálhatóan végtelen halmaz.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$,

$$\varphi(n) := \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 1, \\ \frac{n}{2} & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{1-n}{2} & \text{ha } n > 1 \text{ páratlan} \end{cases}$$

leképezés bijektív. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételt egy olyan bijektív leképezés konstruálásával igazoltuk, amely váltakozóan veszi a pozitív és a negatív számokat.



Hasonló elvvel igazolható, hogy két megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható!

Az a tény, hogy az egész számok halmaza megszámlálható a 23. Feladat ismeretében nem volt annyira meglepő, annál inkább a következő állítás, hiszen azt várnánk, hogy „lényegesen több” racionális szám van mint természetes szám, mert a racionális számok sűrűn helyezkednek el a számegyenesen.

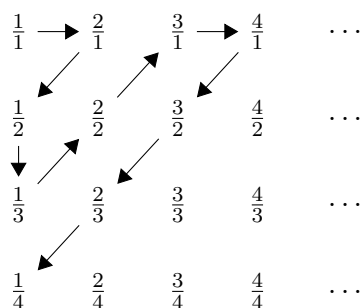
22. Tétel. \mathbb{Q} megszámlálhatóan végtelen halmaz.

Bizonyítás. Elegendő bebizonyítani, hogy a pozitív racionális számok halmaza megszámlálható, mert így a negatív racionális számok halmaza is megszámlálható és ekkor

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$$

is megszámlálható.

Helyezzük el a pozitív racionális számokat a következő táblázatban!



A nyilak mentén haladva a természetes számokhoz rendeljük a racionális számokat úgy, hogy ha a soron következő racionális szám már volt (pl. $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$), akkor ezt kihagyjuk! Ezzel a módszerrel sikerül olyan bijektív leképezést konstruálni, amely a racionális számokat a természetes számokra viszi át. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A fenti bizonyításban alkalmazott módszer Cantor-féle diagonális eljárásnak ismert. Hasonló elvvel igazolható, hogy két megszámlálható halmaz Descartes-féle szorzata is megszámlálható, így a „dimenzió” növelés nem feltétlenül befolyásolja a számosságot. A tételnek van egy másik ügyes bizonyítása, amely azon alapszik, hogy minden p/q pozitív racionális számhoz rendeljük a $2^p(2q+1)$ természetes számot, és az így módon kapott leképezés bijektív.

Georg Cantor (1845-1918) Oroszországban született matematikus, de élete nagy részében Németországban élt. Cantor előtt a matematika azt az álláspontot követte, hogy a végtelenek között nem lehet értelmesen különbséget tenni. 1874-ben jelent meg egy cikke, melyet a modern halmazelmélet születésének tekinthetünk.

Cantor vezette be a halmazok közötti ekvivalencia, a megszámlálhatóan végtelen és kontinuum számosság fogalmát. Rendezést adott a számosságok között és igazolta, hogy mindig van „nagyobb számosságú” halmaz. Bár Cantor új fogalmai nem voltak hiányosságoktól mentesek és több korabeli híres matematikus nem ismerte el, korszerű gondolatai jelentették a matematika XX. századi nagy forradalmának kezdetét. Az idő őt igazolta.

23. Tétel. $[0, 1]$ nem megszámlálható halmaz.

Bizonyítás. Állításunkat a Cantor-féle metszet-tétellel igazoljuk (lásd a 17. Tételt). Tegyük fel, hogy a $[0, 1]$ egy megszámlálhatóan végtelen halmaz. Ekkor van olyan $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow [0, 1]$ leképezés, ami bijektív. Így $[0, 1] = \{\varphi(n) : n \in \mathbf{N}\}$. Harmadoljuk a $[0, 1]$ intervallumot. A

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

intervallumok közül van olyan, amely nem tartalmazza a $\varphi(1)$ elemet és ezt $[a_1, b_1]$ -gyel jelöljük. Tehát $\varphi(1) \notin [a_1, b_1]$. Harmadoljuk az $[a_1, b_1]$ intervallumot. Az

$$\left[a_1, a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3}\right], \quad \left[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{3}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{3}\right], \quad \left[b_1 - \frac{b_1 - a_1}{3}, b_1\right]$$

intervallumok közül van olyan, amely nem tartalmazza a $\varphi(2)$ elemet és ezt $[a_2, b_2]$ -gyel jelöljük. Tehát $\varphi(1), \varphi(2) \notin [a_2, b_2]$.

Folytassuk az előző eljárást! Ha ismert a $\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n)$ számok egyikét sem tartalmazó $[a_n, b_n]$ intervallum, akkor harmadoljuk ezt, és válasszuk $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ -nek az

$$\left[a_n, a_n + \frac{b_n - a_n}{3}\right], \quad \left[a_n + \frac{b_n - a_n}{3}, b_n - \frac{b_n - a_n}{3}\right], \quad \left[b_n - \frac{b_n - a_n}{3}, b_n\right]$$

intervallumok közül azt, amely nem tartalmazza a $\varphi(n+1)$ elemet.

Ekkor minden $k \in \mathbf{N}$ esetén

$$\varphi(k) \notin \bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n],$$

de a Cantor-féle metszet-tétel miatt

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset,$$

így van olyan $[0, 1]$ -beli szám, amely nem eleme a $\{\varphi(n) : n \in \mathbf{N}\}$ halmaznak, ami ellentmondás. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Cantor úgy igazolta a fenti állítást, hogy alkalmazta a számok tizedes tört alakját, amivel mi még nem foglalkoztunk, de középiskolában már tanultuk. Ha sorozatba írhatnánk a valós számokat az

$$x_1 = 0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots$$

$$x_2 = 0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots$$

$$x_3 = 0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots$$

...

módon, akkor egy olyan $[0, 1]$ -beli számot is fel tudnánk írni, amelyet úgy kapnánk meg, hogy a fődiagonális számjegyeiből álló $0, \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} \dots$ szám minden számjegyét kicseréljük egy másik nem 0 számjegyre. Nyilván a kapott új szám nem lehet tagja a fenti sorozatnak. A fenti bizonyítási gondolat neve: **Cantor-féle második diagonális eljárás.**

Az előző állításból következik, hogy a $[0, 1]$ intervallum nem ekvivalens egyetlen egy eddig vizsgált halmaztípussal sem, ezért vezetjük be egy új számosságtípust.

32. Definíció. Akkor mondjuk, hogy A **kontinuum számosságú halmaz**, ha $A \sim [0, 1]$.

26. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy minden intervallum kontinuum számosságú halmaz.

Megoldás: Tegyük fel, hogy $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Ekkor a

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [0, 1], \quad \varphi(x) := \frac{x - a}{b - a}$$

leképezés bijektív. Így $[a, b] \sim [0, 1]$.

Tekintsük az $[a, b[$ esetet. A $\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b]$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} a + \frac{b-a}{n+1} & \text{ha } \exists n \in \mathbf{N}, \text{ hogy } x = a + \frac{b-a}{n}, \\ x & \text{egyébként} \end{cases}$$

leképezés bijektív. Így $[a, b[\sim [a, b]$. Hasonlóan járunk el korlátos intervallumok esetén, így mindegyik kontinuum számosságú. Tekintsük az $[a, \infty[$ esetet. A

$$\varphi: [a, \infty[\rightarrow [1, \infty[, \quad \varphi(x) := x + 1 - a$$

leképezés bijektív. Így $[a, \infty[\sim [1, \infty[$. Továbbá a

$$\varphi: [1, \infty[\rightarrow]0, 1], \quad \varphi(x) := \frac{1}{x}$$

leképezés bijektív. Így $[1, \infty[\sim]0, 1]$. Ezért minden $[a, \infty[$ intervallum kontinuum számosságú. Hasonlóan járunk el nem korlátos intervallumok esetén.

24. Tétel. \mathbf{R} kontinuum számosságú halmaz.

Bizonyítás. Állításunk abból következik, hogy a

$$\varphi: \mathbf{R} \rightarrow]-1, 1[, \quad \varphi(x) := \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ \frac{1}{x-1} & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

leképezés bijektív. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A fenti eredmények miatt jogos a kérdés, hogy van-e olyan valós számokból álló halmaz, amely nem megszámlálható és nem kontinuum számosságú. Mit tudunk mondani az irracionális számok halmazáról? A következő tételből következik, hogy $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \sim \mathbf{R}$ és így **az irracionális számok halmaza kontinuum számosságú halmaz.**

25. Tétel. Legyen A egy nem megszámlálható, B egy megszámlálható halmaz. Ekkor $A \setminus B \sim A$.

Bizonyítás. Mivel $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ és $A \cap B$ megszámlálható, így $A \setminus B$ nem lehet megszámlálható, mert akkor A is az volna. $A \setminus B$ -nek van egy X megszámlálhatóan végtelen részhalmaza (lásd a 24. Feladatot). Így $(A \cap B) \cup X$ is megszámlálhatóan végtelen. Mivel $X \sim (A \cap B) \cup X$, így van olyan φ_X bijektív leképezés, amely az X halmaz elemeihez az $(A \cap B) \cup X$ halmaz elemeit rendeli. Ekkor a $\varphi: A \setminus B \rightarrow A$,

$$\varphi(x) := \begin{cases} x & \text{ha } x \in (A \setminus B) \setminus X, \\ \varphi_X(x) & \text{ha } x \in X \end{cases}$$

leképezés bijektív. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Vannak-e egyáltalán más fajta számosságok? Erre választ ad a következő tétel.

26. Tétel (Cantor-tétel). Egy halmaz nem lehet ekvivalens a saját hatványhalmazával, azaz $A \not\sim \mathcal{P}(A)$.

Bizonyítás. Legyen A egy tetszőleges halmaz és indirekt módon tegyük fel, hogy $A \sim \mathcal{P}(A)$. Ekkor van egy $\varphi: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ leképezés, ami bijektív. Jelölje $B := \{x \in A: x \notin \varphi(x)\}$ és mivel a φ leképezés bijektív, akkor $\exists y \in A$, hogy $\varphi(y) = B$. A B halmaz definíciója miatt erre az y elemre teljesülne a

$$y \in B \iff y \notin \varphi(y) = B$$

állítás, ami ellentmondás. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A Cantor-tételből következik, hogy végtelen sok számosság van, hiszen egy halmaz hatványhalmaza is halmaz, amelynek van hatványhalmaza, és így tovább. Az is következik, hogy az összes halmazból álló halmazrendszer nem létezik, hiszen ennek lenne hatványhalmaza, ami nála „nagyobb” számosságú. Ez utóbbi precíz jelentését a következő definíció adja.

33. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb vagy egyenlő mint a B halmaz számossága, ha van B -nek olyan részhalmaza, amely A -val ekvivalens. Jele: $A \preceq B$. Ha még az is teljesül, hogy A és B nem ekvivalens, akkor azt mondjuk, hogy az A halmaz számossága kisebb, mint a B halmaz számossága. Jele: $A \prec B$.

Értelemszerűen, ha $A \preceq B$, akkor azt is mondjuk, hogy a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő mint az A halmaz számossága, illetve $A \prec B$ esetén azt, hogy a B halmaz számossága nagyobb mint az A halmaz számossága. Az új jelöléssel a Cantor-tétel állítását úgy is írhatjuk, hogy $A \prec P(A)$ tetszőleges A halmaz esetén.

A kiválasztási axióma teljesülése mellett igazolható, hogy két tetszőleges A és B halmaz esetén az egyik halmaz számossága mindig kisebb vagy egyenlő mint a másik halmaz számossága, azaz $A \preceq B$ vagy $B \preceq A$. Ha pedig egyszerre teljesül, hogy $A \preceq B$ és $B \preceq A$, akkor $A \sim B$. Ez utóbbi állítást Bernstein-Schröder-tételként ismerjük.

Az eredeti problémánk tehát az, hogy van-e olyan A halmaz, melynek számossága nagyobb mint a megszámlálható számosság, de kisebb mint a kontinuum számosság, azaz $\mathbb{N} \prec A \prec \mathbb{R}$. A Cantor-tétel értelmében szóba jöhet az $A = P(\mathbb{N})$ halmaz, azaz a természetes számok összes részhalmazából álló halmaz, de sajnos a számossága nem kisebb mint a valós számok számossága.

27. Tétel. $P(\mathbb{N})$ kontinuum számosságú halmaz.

Bizonyítás. A $P(\mathbb{N})$ halmaz ekvivalens az olyan sorozatok halmazával, amelyek csak a 0 vagy az 1 értéket vehetik fel. Valóban, az a leképezés, amely minden természetes számokból álló halmazhoz azt a sorozatot rendeli, amely az n -edik helyen 1 áll, ha n a halmaznak eleme, és 0 ha n a halmaznak nem eleme, bijektív.

Másrészt a $[0, 1[$ intervallum ekvivalens az olyan sorozatok halmazával, amelyek csak 0 vagy 1 értéket vehetnek fel, de nincs olyan elemük, amitől kezdve a sorozatok csupa 1-esekből állnak. Az előbbi állítás igazolására minden $x \in [0, 1[$ számhoz egy $\langle x_n \rangle$ sorozatot fogunk rendelni a következők szerint. Felezzük meg a $[0, 1[$ intervallumot a következők módon:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right[\quad \text{és} \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Jelölje $[a_1, b_1[$ az előző két intervallum közül azt, amely tartalmazza az x értéket, illetve legyen $x_1 := 0$, ha x az első intervallumban van és $x_1 := 1$, ha x a másodikban van. Majd hasonlóan megfelezzük az $[a_1, b_1[$ intervallumot:

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right[\quad \text{és} \quad \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right[.$$

Jelölje $[a_2, b_2[$ az előző két intervallum közül azt, amely tartalmazza az x értéket, illetve legyen $x_2 := 0$, ha x az első intervallumban van és $x_2 := 1$, ha x a másodikban van. Az $[a_2, b_2[$ intervallumot újra megfelezzük, hasonlóan meghatározzuk az $[a_3, b_3[$ intervallumot és az x_3 elemet, és az eljárást tovább folytatjuk. Az eljárásból egyértelműen kapott $\langle x_n \rangle$ sorozat csupa 0 és 1 értékekből áll, de nincs olyan eleme, amitől kezdve a sorozat csupa 1-esekből áll. Fordítva, egy ilyen $\langle x_n \rangle$ sorozat egyértelműen meghatározza az a_n és b_n számokat és nem nehéz igazolni, hogy $x = \sup\{a_n : n \in \mathbf{N}\}$.

Ha X -szel jelöljük az olyan természetes számokból álló halmazok halmazát, amelyek véges sok szám kivételével tartalmazzák az összes természetes számot, akkor X ekvivalens az olyan sorozatok halmazával, amelyek csak a 0 vagy az 1 értéket vehetik fel, de nincs olyan elemük, amitől kezdve a sorozatok csupa 1-esekből állnak. A fentiek szerint azt igazoltuk, hogy

$$[0, 1] \sim \mathcal{P}(\mathbf{N}) \setminus X,$$

de nem nehéz igazolni, hogy x megszámlálható halmaz. Ezért a 25. Feladat állítása szerint $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ kontinuum számosságú halmaz. Ezzel a tételt állítását igazoltuk.

Így még mindig nyitott kérdés, hogy van-e a megszámlálható és a kontinuum számosság között más számosság. Ezt a kérdést először Cantor vetette fel, és úgy vélte, hogy ilyen számosság nincsen. Azóta bebizonyították, hogy az előző állítás, amely **kontinuumhipotézisként** vált ismertté, a mai elfogadott halmazelmélet axiomatikus felépítésben se nem igaz, se nem hamis és a kiválasztási axiómától is független. A kontinuumhipotézis azt állítja tehát, hogy a valós számok minden részhalmaza megszámlálható vagy kontinuum számosságú.

A probléma, amiből a kontinuumhipotézis született, miszerint van-e számosság a megszámlálható és a kontinuum számosság között, a matematika egyik nevezetesebb megoldatlan problémái közé tartozott. Fontosságát mutatja, hogy **Hilbert nevezetes problémái** közül az első helyen említette. A problémára adott meglepő válasz, tehát az, hogy az állítást nem lehet sem igazolni, sem megcáfolni, **Paul Joseph Cohen** (1934-2007) amerikai matematikus eredménye.

A kontinuumhipotézisnek van egy általánosított alakja, amely kimondja, hogy egy végtelen halmaz számossága és hatványhalmazának számossága között nem létezik más számosság.

8. Feladatok

27. Feladat. Legyen x, y és z egy test elemei. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$x + y = x + z \quad \text{vagy} \quad xy = xz \quad (x \neq 0),$$

akkor $y = z$!

28. Feladat. Legyen y és z egy test elemei. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen x testbeli elem létezik, amelyre $x + y = z$!

29. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy test minden nem zéruselem multiplikatív inverze nem lehet zéruselem!

30. Feladat. Legyen x, y egy test elemei. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $(-x)y = x(-y) = -(xy),$

(b) $(-1)(-1) = 1$, így (-1) multiplikatív inverze önmaga,

(c) $(-x)(-y) = xy.$

31. Feladat. Legyen x, y, u, v egy test elemei. Bizonyítsuk be, hogy

(a) $\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y},$

(b) $\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y},$

(c) $\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{xu}{yv},$

(d) $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{u}{v}\right)} = \left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{v}{u}\right).$

32. Feladat. Legyen F egy test és $n, m \in N$. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha $n \neq 1$, akkor $n - 1 \in N$,

(b) ha $n \neq m$, akkor $n - m \in N$ vagy $m - n \in N$.

33. Feladat. Legyen F egy test és $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \in N$, akkor $-n \in N$!

34. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test valamint $n, m \in Z$. Bizonyítsuk be, hogy $n + m \in Z$!

35. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test és \preceq az egész számokon értelmezett reláció, amelyre

$$n \preceq m \quad \Longleftrightarrow \quad m - n + 1 \in N.$$

Lássuk be, hogy \preceq egy teljes rendezés!

36. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test valamint $r, s \in Q$. Bizonyítsuk be, hogy $r + s \in Q$, $r - s \in Q$, $rs \in Q$ és $r/s \in Q$!

37. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $x, y \in F$ és $n, m \in N$. Bizonyítsuk be, hogy

a) ha $x \neq 0$ és $n - m \in N$, akkor $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$,

b) $(x^n)^m = x^{nm}$,

c) $(xy)^n = x^n y^n$,

d) ha $y \neq 0$, akkor $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.

38. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha F egy 0 karakterisztikájú test, akkor az előző feladat állításai kiterjeszthetők testbeli egészekre is!

39. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $x \in F$ és $n \in Z$. Bizonyítsuk be, hogy $(-x)^n = x^n$, ha n páros és $(-x)^n = -x^n$, ha n páratlan!

40. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $a \in F$ és $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^n a = na.$$

41. Feladat. Legyen $n, m \in N$. Jelentse

$$a_{ij} \in F \quad (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$$

egy

$$a: \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \rightarrow F$$

függvényt, ahol $a_{ij} := a(i, j)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij}.$$

42. Feladat. Legyen $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}.$$

43. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $a, b \in F$, $a, b \neq 0$ és $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1}.$$

44. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $a, b \in F$, $a, b \neq 0$ és $n \in N$ páratlan. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^n + b^n = (a + b) \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} a^{n-i} b^{i-1}.$$

45. Feladat. Legyen F egy 0 karakterisztikájú test, $q \in F$, $q \neq 1$ és $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

46. Feladat. Teljes indukcióval igazoljuk a következő egyenlőségeket minden $n \in N$ karakterisztikájú testbeli pozitív egész esetén

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, & b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, & d) \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2, \\ e) \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}, & f) \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}, \\ g) \sum_{k=1}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1, & h) \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}. \end{array}$$

47. Feladat. A binomiális tétel segítségével számoljuk ki a következő összegeket.

$$\begin{array}{ll} (a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, & (b) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \\ (c) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}, & (d) \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}. \end{array}$$

48. Feladat. Határozzuk meg a binomiális tétel alapján a következő kifejezés azon tagját, amely nem tartalmaz x -t!

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2\sqrt[4]{x^3} \right)^{17}$$

49. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $x, y, u, v \in F$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{array}{l} a) x \leq y \iff 0 \leq y - x, \\ b) x \leq y \iff -y \leq -x, \\ c) x \leq y \text{ és } u \leq 0 \implies yu \leq xu. \end{array}$$

50. Feladat. Igazoljuk az előző feladat állításait szigorúan kisebb reláció esetén!

51. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $x, y \in F$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{array}{l} (a) \text{ az } x < y, x = y \text{ vagy } x > y \text{ esetek közül egy és csak egy teljesül (trichotomia),} \\ (b) x < y \implies x + z < y + z, \text{ minden } z \in F \text{ esetén,} \\ (c) x > 0 \text{ és } y > 0 \implies xy > 0. \end{array}$$

52. Feladat. Igazoljuk, hogy egy rendezett test egész elemeinek halmaza csak egyféleképpen rendezhető!

53. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $x, y \in F$. Bizonyítsuk be, hogy

$$0 < x \leq y \quad \implies \quad \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}.$$

54. Feladat. Igazoljuk, hogy a racionális számtest csak egyféleképpen rendezhető, hogy rendezett test legyen!

55. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $x, y, u, v \in F$. Bizonyítsuk be, hogy

$$x \leq y \leq u \leq v \quad \implies \quad u - y \leq v - x.$$

56. Feladat. Legyen F egy rendezett test valamint $a_i, b_i \in F$ ($i = 1, \dots, n$). Bizonyítsuk be, hogy ha $a_i \leq b_i$ teljesül minden $i = 1, \dots, n$ esetén, akkor

a) $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i,$

b) ha még van olyan $j \in \{1, \dots, n\}$, amelyre $a_j < b_j$, akkor $\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i.$

57. Feladat. Legyen F egy rendezett test, $x, y \in F$ valamint $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $0 \leq x < y \implies 0 \leq x^n < y^n,$

b) $x \leq y \leq 0$ és n páros $\implies 0 \leq y^n \leq x^n,$

c) $x \leq y \leq 0$ és n páratlan $\implies x^n \leq y^n \leq 0.$

58. Feladat. Legyen F egy rendezett test, $x, y \in F$ valamint $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy

a) $x^n = y^n$ és n páratlan $\implies x = y,$

b) $x^n = y^n$ és n páros $\implies x = y$ vagy $x = -y.$

59. Feladat. Legyen F egy rendezett test. Bizonyítsuk be, hogy minden $x, y \in F$ esetén

i) $|-x| = |x|,$

ii) ha $y \neq 0$, akkor $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},$

iii) $||x| - |y|| \leq |x| + |y|.$

60. Feladat. Legyen F egy rendezett test valamint $a_i \in F$ ($i = 1, \dots, n$). Bizonyítsuk be, hogy

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

61. Feladat. Legyen F egy rendezett test. Bizonyítsuk be, hogy minden $x, y \in F$ esetén

- i) $|x| = x \operatorname{sign} x$,
- ii) $x = |x| \operatorname{sign} x$,
- iii) $\operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{sign} y$.

62. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $x_1, \dots, x_n \in F$. Bizonyítsuk be, hogy az $A := \{x_1, \dots, x_n\}$ halmaznak van legkisebb és legnagyobb eleme!

63. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $x, y \in F$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} \max\{x, y\} &= \frac{1}{2}(x + y + |x - y|), \\ \min\{x, y\} &= \frac{1}{2}(x + y - |x - y|). \end{aligned}$$

64. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $n \in N$. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan $m \in N$, hogy $n < m < n + 1$.

65. Feladat. Legyen F egy rendezett test, $x \in F$, de $x \notin Z$. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in N$ esetén $x + n \notin Z$!

66. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $A \subseteq F$. Bizonyítsuk be, hogy ha A -nak van alsó és felső határa, akkor $\inf A \leq \max A$!

67. Feladat. Legyen F egy rendezett test, $A \subseteq F$ valamint $-A := \{-a : a \in A\}$. Bizonyítsuk be, hogy

- a) ha A -nak van alsó határa, akkor $-A$ -nak van felső határa és $\sup -A = \inf A$,
- b) ha A -nak van felső határa, akkor $-A$ -nak van alsó határa és $\inf -A = \sup A$,
- c) ha $\inf A = -\infty$, akkor $\sup -A = \infty$, és ha $\sup A = \infty$, akkor $\inf -A = -\infty$.

68. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $A \subseteq F$ olyan halmaz, amelyhez $\exists k \in F^+$, hogy $x > k$ minden $x \in A$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy ha A -nak van alsó határa, akkor az $A^{-1} := \{a^{-1} : a \in A\}$ halmaznak van felső határa és $\sup A^{-1} = (\inf A)^{-1}$.

69. Feladat. Legyen F egy rendezett test, $A, B \subseteq F$ valamint $A \subseteq B$. Bizonyítsuk be, hogy ha A -nak és B -nek van alsó határa, akkor $\inf A \geq \inf B$. Ha A -nak és B -nek van felső határa, akkor $\sup A \leq \sup B$.

70. Feladat. Legyen F egy rendezett test és $A, B \subseteq F$. Bizonyítsuk be, hogy ha A -nak és B -nek van alsó határa, akkor az $A \cup B$ -nek is van alsó határa és

$$\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

71. Feladat. Teljes indukció alkalmazásával igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

$$a) 2^n > n^2, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3, 4\}, \quad b) n! > 2^n, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2, 3\},$$

$$c) n^n > n!, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}, \quad d) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} < \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1\},$$

$$e) \sum_{k=0}^{n^2-n} \frac{1}{n+k} > 1, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}, \quad f) \frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2\},$$

$$g) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}, \quad n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}, \quad h) \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)^2}{(2k)^2} < \frac{1}{3n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

72. Feladat. Legyen $a, b \in \mathbf{R}^+$, $n, m \in \mathbf{N}$ és $k \in \mathbf{Z}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

$$b) \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k,$$

$$c) \text{ ha } n \text{ páros, akkor } \sqrt[n]{a^n} = |a|, \text{ és ha } n \text{ páratlan, akkor } \sqrt[n]{a^n} = a.$$

73. Feladat. Legyen p egy prímszám. Bizonyítsuk be, hogy \sqrt{p} irracionális szám!

74. Feladat. Általánosítsuk a hatványozás tulajdonságait racionális kitevőjű hatványok esetére!

75. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy \mathbf{R} minden véges számosságú halmaza korlátos!

76. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $n, m \in \mathbf{N}$, akkor

$$\{1, \dots, n\} \sim \{1, \dots, m\} \iff n = m.$$

77. Feladat. Legyen A és B két véges halmaz. Bizonyítsuk be, hogy

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

78. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy a természetes számok minden véges részhalmazainak halmaza megszámlálható!

79. Feladat. Legyen A egy megszámlálható, B egy végtelen halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $A \cup B \sim B$!

80. Feladat. Legyen Γ megszámlálható halmaz, továbbá az $\{A_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ halmazrendszer minden eleme megszámlálható. Bizonyítsuk be, hogy a $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ halmaz megszámlálható!

81. Feladat. Mutassuk meg, hogy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok páronként diszjunkt intervallumot lehet megadni a számegyenesen!

82. Feladat. Igazoljuk, hogy a sík azon pontjainak halmaza, melynek mindkét koordinátája egész szám, megszámlálható!

83. Feladat. Igazoljuk, hogy az egész számokból álló mátrixok halmaza megszámlálható!

84. Feladat. Adjunk meg több olyan bijektív leképezést, amellyel a pozitív számok halmazához hozzárendeli a valós számok halmazát!

85. Feladat. Adjunk meg több olyan bijektív leképezést, amellyel a $]0, 1]$ intervallumhoz hozzárendeli az $[1, \infty[$ intervallumot!

86. Feladat. Adjunk meg olyan bijektív leképezéseket, amellyel igazolhatók a következő állítások!

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $[0, 1[\sim [0, \infty[$, | b) $[0, 1[\sim]0, \infty[$, |
| c) $[0, 1[\sim [1, \infty[$, | d) $] - \infty, 1[\sim [1, \infty[$, |
| e) $]0, 1[\sim \mathbf{R}$, | f) $] - 1, \infty[\sim \mathbf{R}$. |

87. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ kontinuum számosságú halmaz!

88. Feladat. Adjunk meg olyan bijektív leképezést, amellyel az irracionális számokhoz hozzárendeli a valós számokat!

89. Feladat. Adjunk meg olyan bijektív leképezést, amellyel a zárt egységnegy-zethez hozzárendeli a $[0, 1]$ intervallumot!

90. Feladat. Adjunk meg olyan bijektív leképezést, amellyel az egy sugarú körlaphoz hozzárendeli a $[0, 1]$ intervallumot!

91. Feladat. Igazoljuk, hogy azon síkbeli háromszögek halmaza, melyeknek a területe egész szám, kontinuum számosságú!

92. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B nem üres halmazok, és van olyan $f: A \rightarrow B$, hogy $R_f = B$, akkor $B \lesssim A$.

Ajánlott irodalom

- [1] Fried Ervin: *Algebra II. – Algebrai struktúrák*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [2] Gecse Frigyes: *Matematikai alapok*, Z-press Kiadó Kft, Miskolc, 2013.
- [3] Halmos Paul: *Naive Set Theory*, Princeton, NJ: D. Van Nostrand Company, 1960. Reprinted by Springer-Verlag, New York, 1974.
- [4] Hamilton, Norman T: *Set theory and the structure of arithmetic*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1961.
- [5] Kósa András: *Matematika – Halmazok, valós számok, függvények*, LSI Omak Alapítvány, 1990.
- [6] Leindler László – Schipp Ferenc: *Analízis I*, Tankönyvkiadó, 1985.
- [7] Rimán János: *Matematikai analízis I*, Liceum, Eger, 2004.
- [8] Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I-II*, Liceum, Eger, 2004.
- [9] Rudin Walter: *A Matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [10] Toledo Rodolfo: *Halmazok, relációk, függvények*, elektronikus tananyag, 2016.
<http://bit.ly/toledo-tananyag-halmazok>

Tárgymutató

0 karakterisztikájú test, 12, 25

abszolút érték, 26

alsó határ, 32

archimedesien rendezett test, 29, 35

binér művelet, 5

binomiális együttható, 20

binomiális tétel, 22

Cantor-féle diagonális eljárás, 44

Cantor-féle metszet-tétel, 36

Cantor-tétel, 47

egész számok, 35, 43

egységelem, 5, 7

faktoriális, 20

felső határ, 32

halmazok

 ekvivalenciája, 40

 jólrendezett, 29

 korlátos, 31

 legkisebb eleme, 28

 legnagyobb eleme, 28

 számossága, 40

 véges, 40

 végtelen, 40

hatványozás, 16, 17, 26, 39

infimum, 32

intervallumok, 45

inverz elem, 6, 8

irracionalis számok, 36

izomorf struktúrák, 15

kiválasztási axióma, 41, 49

kontinuum számosság, 46

kontinuumhipotézis, 49

műveleti tulajdonságok, 5

maximum, 28

megszámlálhatóan végtelen számosság, 41

minimum, 28

n -edik gyök, 38

neutrális elem, 6

oszthatóság, 14

produktum, 20

racionalis számok, 35, 44

racionalis számtest, 15, 23, 24, 29

rendezési axiómák, 23

rendezett test, 23

sorozat, 17, 41

számosságok összehasonlítása, 48

szignum, 28

szumma, 18

szuprémum, 32

teljes indukció, 11, 16

teljességi axióma, 34

természetes számok, 35, 41

testaxiómák, 6

testbeli

 egészek, 13

 negatív egészek, 12

 pozitív egészek, 11

 racionalis elem, 14

véges számosság, 40

véges testek, 7

valós számok halmaza, 34

zéruselem, 6, 7

zérusosztómentes, 9