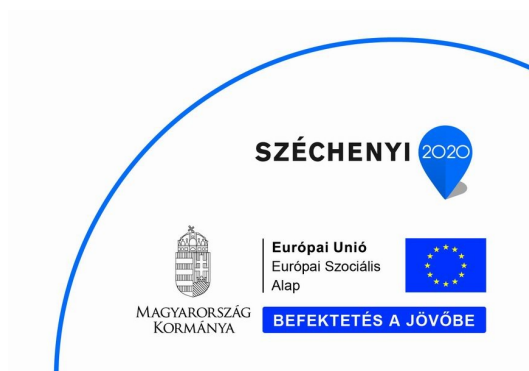


SZÁMSOROZATOK ÉS TULAJDONSÁGAIK

TOLEDO RODOLFO



Számsorozatok és tulajdonságaik

PDF fájlformátumban megjelent elektronikus tananyag

Szerző: Dr. Toledo Rodolfo Calixto, főiskolai tanár

Nyíregyházi Egyetem

Matematika és Informatika Intézet

Készült: 2018. szeptember 30.

Korrektúra: Barsy Anna

Lektorálta: Dr. Blahota István, főiskolai tanár

ISBN 978-615-6032-06-5

Készült az alábbi pályázati projekt támogatásával:

EFOP-3.5.1-16-2017-00017 „NYE-DUÁL- Új utakon a duális felsőoktatással a Nyíregyházi Egyetemen, az Északkelet-Magyarországi térség felemelkedéséért”



Szerzői jogok: Jelen tananyag a **Creative Commons: Nevezd meg! – Így add tovább! 4.0 Nemzetközi Licenc (CC BY-SA 4.0)** feltételeinek megfelelően szabadon felhasználható.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	4
2. A valós számok metrikus tulajdonságai	6
3. Sorozatok főbb tulajdonságai	25
4. Kidolgozott feladatok	36
5. Részsorozatok	42
6. Tágabb értelemben vett konvergencia	50
7. Torlódási pontok	54
8. Felső és alsó határértékek	58
9. Cauchy-sorozatok	67
10. Feladatok	70
Ajánlott irodalom	74
Tárgymutató	75

1. Bevezetés

A sorozat a matematikai analízis egyik legfontosabb, de mégis jól érthető és használható fogalma. Sorozatot kapunk, amikor egy halmazból egymás után kiválasztunk elemeket úgy, hogy ugyanaz az elem többször is kiválasztható. Ha csak véges sok elemet választunk ki, akkor véges sorozatról beszélünk. Azonban az analízisben kizárólag végtelen sorozatokkal foglalkozunk, azaz amikor végtelen sok elem kerül kiválasztásra. Természetesen, ez utóbbi nem valósítható meg a gyakorlatban, ezért végtelen sok elem kiválasztásán egy olyan szabályt értünk, amivel meg tudjuk mondani, hogy az n -edik lépésben melyik elem kerül kiválasztásra. Ezért a sorozatokat függvényként érdemes értelmezni, amelyet a pozitív egész számokhoz hozzárendeli a szóban forgó halmaz elemeit.

Az előző szemléletes értelmezést nem nehéz megérteni. Olyannyira, hogy a valós számokból álló sorozatok, az ún. valós számsorozatok a középiskolai tananyagnak fontos részét képezik. Bár ekkor zömmel két speciális sorozattípussal foglalkozunk, a számtani és a mértani sorozatokkal, a sorozatokat már helyesen értelmezik, elmentésben más intuitív módon megadott fogalmakkal, mint a függvény vagy valós számok halmazának fogalma. Egyszerű értelmezésük ellenére az alkalmazási területük igen széles. Több olyan matematikai fogalom és számítás van, amely visszavezethető sorozatokra. Ezt látni is fogjuk majd későbbi tananyagokban, de ehhez szükséges a sorozatokat és azok tulajdonságainak alapos megismerését.

Középiskolai tanulmányainkban már megismerkedtünk a számsorozatok két fontos tulajdonságával, a korlátossággal és a monotonitással. Ezekhez most jön a konvergencia, amin azt értjük lényegében, hogy a sorozat elemei egyre közelebb tudnak kerülni egy értékhez (ún. határértékhez) úgy, hogy egy idő után alig tapasztalható különbség a sorozat elemeinek értéke és a határérték között. Az előző értelmezés természetesen nem lehet a konvergencia definíciója, hiszen az „egy idő után” és az „alig tapasztalható különbség” kifejezésekre nem lehet precíz matematikai fogalmakat építeni. Így a matematikai analízis egyik legfontosabb feladata, hogy pontos értelmet adjon a határértéknek, illetve használható matematikai eszközöket adjon annak kiszámításához.

A konvergenciával számos geometriai és fizikai jelenség magyarázható. Olyan fogalmak esetén kell konvergenciát alkalmazni, melyek „szabályos” vagy „elemi” objektumokon természetszerűen értelmezhetőek és fokozatos közelítéssel ki tudjuk terjeszteni más objektumokra is. Például területszámítás esetén, ahol az elemi alakzatok a téglalapok, területük természetesen két szomszédos oldaluk szorzata, azonban más síkbeli alakzat területét úgy számíthatjuk ki, hogy fokozatosan egymásba nem nyúló téglalapokat helyezünk az alakzat belsejébe és az egyre növekvő téglalap-összterületnek vesszük a határértékét. Hasonló fogalmak még az érintő, a pillanatnyi sebesség, a térfogat, a súlypont, stb. Az előző fogalmak gyakorlati fontossága azt eredményezte, hogy sokáig a matematikusok nem tudtak elszakadni a konvergencia geometriai eredetétől és csak a 19. század közepén sikerült először Cauchy-nak és utána teljes precizitással Weierstrass-nak a határérték olyan fogalmát megalkotni, ami már analitikus jellegű, ahogyan ez a tananyagunkban is szerepel.

A matematika fejlődésével a konvergenciát minden olyan téren értelmezik, ahol távolság megadható. Mi a távolságot a valós számok halmazán fogjuk először értelmezni, ahol két szám közötti természetes távolság a különbségük abszolút értéke. Így a tananyagot nem rögtön a konvergencia fogalmával kezdjük, hanem egy olyan résszel, ahol megadjuk a távolság pontos matematikai fogalmát és megalapozzuk a vele kapcsolatos ismereteket. Ilyen például a környezet és egy halmaz belső, külső, határ- és torlódási pontjainak fogalma.

A 3. Részben már a konvergencia fogalmát vizsgáljuk a sorozatok két másik tulajdonságával együtt, azaz a monotonitással és a korlátossággal. Itt már találkozunk konkrét példákkal, de vizsgálataink inkább a definíción alapszanak, és még nem mutatunk be hatékony eszközt a határérték kiszámítására. Ennek a módszernek a teljes kidolgozása a következő tananyagunk célja. Az 5. Részben megismerjük a részsorozat fogalmát, és megtanuljuk hogyan érdemes néhány sorozatot diszjunkt részsorozatokra bontani ahhoz, hogy meg tudjuk vizsgálni az eredeti sorozat a monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából.

A tananyag utolsó részeiben a konvergencia szigorú követelményén próbálunk valamelyest gyengíteni. Először kiterjesztjük a határértéket a végtelen és a mínusz végtelen felé. Ezután a határérték fogalmát azzal gyengítjük, hogy végtelen (és nem egy index után minden) sorozatbeli elem legyen egy érték körül. Így kapjuk meg a sorozat torlódási pontjának fogalmát. A torlódási pontok segítségével bevezetjük az alsó és felső határértékek fogalmát, és részletesen foglalkozunk ezek kiszámításával divergens sorozatok esetén. Végül a tananyag utolsó részében egy a konvergenciával ekvivalens tulajdonsággal találkozunk, a Cauchy-sorozat fogalmával.

A tananyag feldolgozásának módszere a már kidolgozott

1. **Halmazok, relációk, függvények** [10]
2. **Valós számok** [11]
3. **Valós függvények** [12]

című tananyaghoz hasonló, azaz a matematikában szokásos négyes tagozódásból áll: definíció, tétel, bizonyítás, alkalmazás (feladatok). A jobb megértést elősegíti, hogy a definíciókat egyszerű példákkal szemléltetjük. A definiált fogalmakra tételeket mondunk ki, és precízen bizonyítjuk ezeket. A tananyag teljes elsajátításához több mintafeladatot oldunk meg, néhányukat ábrával is illusztrálunk. Az **utolsó részben** feladatokat tűzünk ki megoldás nélkül, melyek a lehetséges gyakorlati foglalkozások anyagát képezhetik. Megoldásuk előtt javasoljuk a tananyagban megoldott feladatok tanulmányozását és megértését.

A fejezetben **N**, **Z** és **R** szimbólumokkal jelöljük a természetes, egész és valós számok halmazát. Ha külön nem jelöljük, akkor az előforduló betűk (latin, görög) mindig valós számokat jelentenek.

2. A valós számok metrikus tulajdonságai

A valós számok halmazával a „Valós számok” című tananyagban foglalkoztunk részletesen. Megmutattuk, hogy a valós számok egy „elég összetett” struktúra, melynek három axiómarendszernek kell megfelelnie, a test-, a rendezési és a teljességi axiómáknak. Ezek az axiómák garantálják azokat a tulajdonságokat és nevezetes átalakításokat, amelyeket számításaink során teljes természetességgel alkalmazni szoktunk.

Korábbi tanulmányainkban számos tulajdonságot igazoltunk, amely jellemzi a valós számokat és a belőlük alkotott halmazokat. Ebben a részben egy másik aspektusból vizsgáljuk a valós számokat, mégpedig a köztük levő távolság szemszögéből. **Két valós szám távolságát**, tekintettel a számegyenesen való természetes elhelyezkedésükkel úgy kapjuk meg, hogy a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket. Más szavakkal vesszük a két szám különbségének abszolút értékét. Ennek figyelembevételével tekintsük a következő függvényt:

$$d(x, y) := |x - y| \quad (x, y \in \mathbf{R}),$$

amelyet metrikának vagy távolságfüggvényének nevezzünk. Ez a függvény teljesíti a következő tulajdonságokat.

1. Tétel. $d: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ úgy, hogy minden $x, y, z \in \mathbf{R}$ esetén teljesül

- (i) $d(x, y) \geq 0$ és $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (szimmetria),
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (háromszög egyenlőtlenség).

Bizonyítás. Nyilvánvalóan d egy két változós valós függvény, amely tetszőleges két valós számhoz egy valós számot rendel, azaz $d: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. A „Valós számok” című tananyagban igazoltuk az abszolút érték következő tulajdonságait: minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén igaz, hogy

(a) $|x| \geq 0$, és $|x| = 0 \iff x = 0$,

(b) $|xy| = |x||y|$,

(c) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

A fenti tulajdonságokból azonnal következik, hogy

(i) $|x - y| \geq 0$ és $|x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$,

(ii) $|x - y| = |(-1)(y - x)| = |(-1)||y - x| = |y - x|$,

(iii) $|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$,

amelyek a tétel állításait igazolják.

A következőekben látni fogjuk, hogy számos, a távolságot érintő állítás van, amely közvetlenül az előző tételben szereplő tulajdonságokból következik, és nem a konkrét távolságfüggvényt definiáló $d(x, y) = |x - y|$ képletből. Így ezek az állítások érvényesek maradnak olyan függvények esetén, amelyek eleget tesznek ezeknek a tulajdonságoknak, de más a definiáló képletük. Nem nehéz igazolni például, hogy

$$d(x, y) := \sqrt{|x - y|} \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

egy ilyen függvény, de számos más példa is megadható. Ez lehetőséget biztosít arra, hogy a matematikai analízisben általánosítsuk a távolságfüggvény fogalmát. Nevezeten, minden két változós nem negatív függvény, amely kizárólag akkor nulla, ha egy pont önmagától vett távolságáról van szó, továbbá szimmetrikus és teljesíti a háromszög egyenlőtlenséget, azaz érvényesek rá az 1. Tételben szereplő tulajdonságok, távolságfüggvénynek tekinthető. A távolságfüggvényekkel ellátott struktúrákkal, az ún. **metrikus terekkel**, egy későbbi tananyagban foglalkozunk. Jelen tananyagban az x és y elemek távolsága kizárólag az $|x - y|$ értéket jelenti.

A távolság ismeretével értelmezhetjük egy valós szám környezetének fogalmát. Ez olyan halmaz, amely elemeinek távolsága a szóban forgó valós számtól kisebb, mint egy adott szám.

1. Definíció. Legyen a és $r > 0$ két valós szám. Ekkor a

$$K(a, r) := \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < r\}$$

halmazt az a **középpontú r sugarú környezetnek** nevezzük.

Mivel

$$|x - a| < r \quad \Longleftrightarrow \quad -r < x - a < r \quad \Longleftrightarrow \quad a - r < x < a + r,$$

ezért

$$K(a, r) =]a - r, a + r[.$$

Ezért valójában a környezetek olyan véges hosszúságú nyílt intervallumok, amelyeknek középpontja megegyezik a környezet középpontjával, és hossza a környezet sugarának kétszerese. Fordítva, minden véges hosszúságú nyílt intervallum középpontjának környezete.

Például, a $K(3, 1)$ környezet nem más, mint a $]2, 4[$ intervallum, illetve a $] - 1, 5[$ intervallumot $K(2, 3)$ módon is jelölhetjük.

A környezetekre a következő, ún. Hausdorff-féle tulajdonságok érvényesek.

2. Tétel (Hausdorff-féle tulajdonságok).

(a) Minden szám saját környezetének eleme:

$$\forall a \in \mathbf{R} \text{ és } \forall r > 0 \text{ esetén } a \in K(a, r).$$

(b) Ugyanannak a számnak két környezete tartalmazza a szám egy környezetét:

$$\forall a \in \mathbf{R} \text{ és } \forall r_1, r_2 > 0\text{-hoz } \exists r > 0, \text{ hogy } K(a, r) \subseteq K(a, r_1), \text{ illetve } K(a, r) \subseteq K(a, r_2).$$

(c) Minden környezet tartalmazza tetszőleges elemének egy környezetét.

$$\forall a \in \mathbf{R}, \forall r > 0 \text{ és } \forall b \in K(a, r)\text{-hez } \exists r_1 > 0, \text{ hogy } K(b, r_1) \subseteq K(a, r).$$

(d) Minden két különböző szám szeparálható két diszjunkt környezettel:

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, a \neq b\text{-hez } \exists r_1, r_2 > 0, \text{ hogy } K(a, r_1) \cap K(b, r_2) = \emptyset.$$

Bizonyítás. A bizonyításban alkalmazzunk a távolságfüggvény tulajdonságait (lásd az 1. Tételt).

(a) Igaz, mert $|a - a| = 0 < r$.(b) $r := \min\{r_1, r_2\}$ -re az állítás nyilvánvalóan teljesül.(c) Legyen $r_1 := r - |a - b|$ és $x \in K(b, r_1)$. Ekkor $|x - b| < r_1$ és a háromszög egyenlőtlenség szerint

$$|x - a| \leq |x - b| + |b - a| < r_1 + |b - a| = r,$$

azaz $|x - a| < r$, amiből $x \in K(a, r)$ következik.(d) Legyen $r_1 := r_2 := \frac{|a-b|}{2}$. Tegyük fel, hogy $x \in K(a, r_1)$ és $x \in K(b, r_2)$. Ekkor $|x - a| < r_1$ és $|x - b| < r_2$, és így a háromszög egyenlőtlenség szerint

$$|a - b| \leq |x - a| + |x - b| < r_1 + r_2 = |a - b|.$$

Mivel egy szám nem lehet saját magánál kisebb, így ellentmondáshoz jutottunk.

Ezzel a tétel állításait igazoltuk.

A Hausdorff-féle tulajdonságok azért fontosak, mert ahogy a távolságnál nem a távolságfüggvényt definiáló képleten, hanem a tulajdonságokon múlik az állítások igazolása, a környezet lényegét a Hausdorff-féle tulajdonságok adják, és ezzel a környezet fogalma is általánosítható.

Korábbi tananyagunkban már tanultunk a halmazok korlátosságáról. Definíciója a következő:

2. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbf{R}$.

- Akkor mondjuk, hogy A **alulról korlátos** halmaz, ha $\exists k_1 \in \mathbf{R}$, amire igaz, hogy $x \geq k_1$ minden $x \in A$ elem esetén. Ekkor a k_1 számot az A halmaz **alsó korlátjának** nevezzük.
- Akkor mondjuk, hogy A **felülről korlátos** halmaz, ha $\exists k_2 \in \mathbf{R}$, amire igaz, hogy $x \leq k_2$ minden $x \in A$ elem esetén. Ekkor a k_2 számot az A halmaz **felső korlátjának** nevezzük.
- Ha A alulról és felülről korlátos, akkor **korlátosnak** mondjuk.

A korlátosság olyan fogalom, amely a távolsághoz kapcsolódik. Lényegében egy halmaz korlátos, ha része a tér valamely környezetének. Valóban, az előző definíció szerint egy halmaz korlátos, ha része egy véges hosszúságú intervallumnak, ami mindig egy véges hosszúságú nyílt intervallumba helyezhető. Ez utóbbiak pedig a tér környezetei.

1. Feladat. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából a következő halmazokat!

(a) $A := \{x \in \mathbf{R} : x^2 + 5x - 6 < 0\}$,

(b) $B := f([1, \infty[)$, ahol $f(x) := \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

(c) $C := \{(-1)^n n : n \in \mathbf{N}\}$.

Megoldás:

- (a) Az $f(x) = x^2 + 5x - 6$ másodfokú függvény főegyütthatója pozitív, és két gyöke van: $x_1 = -6$ és $x_2 = 1$. Ekkor a másodfokú egyenlőtlenségekről tanultak figyelembe véve az egyenlőtlenség megoldása $-6 < x < 1$, azaz $A =]-6, 1[$. Ezért A korlátos halmaz.
- (b) Az exponenciális függvényről tanultak alapján $B = \left]0, \frac{1}{2}\right]$, ezért korlátos.
- (c) Ha n páros, akkor $(-1)^n n = n$, ami felülről nem korlátos. Ha n páratlan, akkor $(-1)^n n = -n$, ami alulról nem korlátos. Ezért C se felülről, se alulról nem korlátos.

A valós számok axiómarendszerében lévő teljességi axióma azt mondja ki, hogy ha egy nem üres halmaz felülről korlátos, akkor a halmaz felső korlátai közül van legkisebb. Ezt felső határnak vagy **szuprémumnak** nevezzük. A felső határ lehet a halmaznak eleme, például zárt intervallumok esetében. Ekkor ez lesz a halmaz legnagyobb eleme, és szuprémum helyett a **maximum** kifejezést is használhatjuk. Ha a felső határ a halmaznak nem eleme, például nyílt intervallumok esetében, akkor a szuprémum „tetszőleges pontossággal megközelíthető” halmazbeli elemekkel. Ekkor a halmaz elemei „sűrűsödnek” a szuprémum baloldalán.

Az előző állítások hasonlóan megfogalmazhatók alulról korlátos halmazok esetén. A halmaz alsó korlátai közül mindig van legnagyobb, amit alsó határnak vagy **infimumnak** nevezünk. Ha az infimum a halmaznak eleme, akkor ez lesz a halmaz legkisebb eleme, és infimum helyett a **minimum** kifejezést is használhatjuk. Ha az alsó határ a halmaznak nem eleme, akkor az infimum „tetszőleges pontossággal megközelíthető” halmazbeli elemekkel és a halmaz elemei „sűrűsödnek” az infimum jobboldalán.

A következő fogalom pontosan értelmezi mit értünk azon, hogy elemek sűrűsödnek egy szám körül.

3. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbf{R}$ és $a \in \mathbf{R}$. Azt mondjuk, hogy az a szám **torlódási pontja** az A halmaznak, ha $\forall r > 0$ -hoz $\exists x \in A$, $x \neq a$, hogy $|x - a| < r$. Az A halmaz torlódási pontjaiból álló halmazt A^* -gal jelöljük.

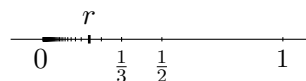
Más szavakkal, az a szám torlódási pontja az A halmaznak, ha a minden környezete tartalmaz tőle különböző A -beli elemet, tehát

$$a \in A^* \iff \forall r > 0 \text{ esetén } (K(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

A torlódási pontot másképpen **sűrűsödési pontnak** is szokás nevezni.

Lássunk néhány példát!

$$\text{Legyen } A := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}.$$



Az ábrán látható, hogy a halmaz elemei sűrűsödnek a 0 szám jobboldalán. Valóban, minden $r > 0$ esetén van olyan n_0 természetes szám, hogy $n_0 > \frac{1}{r}$. Ezért $0 < \frac{1}{n} < r$ minden $n > n_0$ esetén, azaz $\frac{1}{n} \in K(0, r)$. Így a 0 torlódási pontja az A halmaznak. Mivel több torlódási pontja nincsen, így $A^* = \{0\}$.

Legyen $B :=]0, 1]$. Nyilvánvalóan minden $0 < x < 1$ szám torlódási pontja B -nek, hiszen ha $r := \min\{x, 1 - x\}$, akkor a $K(x, r)$ környezet minden eleme B -beli elem is. Azonban 0 és 1 is torlódási pont, mert a 0 minden környezetének jobboldali része, és az 1 minden környezetének baloldali része tartalmaz B -beli elemet. Ez mutatja, hogy a torlódási pontok lehetnek halmazbeli és nem halmazbeli elemek is. Mivel több torlódási pontja nincsen, így $B^* = [0, 1]$.

Nem nehéz igazolni a következő, a torlódási pont fogalmával ekvivalens állítást.

3. Tétel. Legyen $A \subseteq \mathbf{R}$ és $a \in \mathbf{R}$. Az a szám akkor és csak akkor torlódási pontja az A halmaznak, ha a minden környezete tartalmaz végtelen sok A -beli elemet.

Bizonyítás. Ha a minden környezete tartalmaz végtelen sok A -beli elemet, akkor lesz köztük olyan, amely nem a -val egyenlő, ezért a torlódási pontja A -nak.

Fordítva, legyen a torlódási pontja A -nak és $r > 0$. A definíció értelmében $\exists x_1 \in K(a, r)$, hogy $x_1 \in A$ és $x_1 \neq a$. Jelölje $r_1 := |x_1 - a|$. Ugyanígy $\exists x_2 \in K(a, r_1)$, hogy $x_2 \in A$ és $x_2 \neq a$. Mivel $|x_2 - a| < |x_1 - a|$, így $x_2 \neq x_1$. Jelölje $r_2 := |x_2 - a|$.

Az előző eljárást folytatva, ha már kiválasztottunk az x_1, x_2, \dots, x_{n-1} elemeket, akkor $\exists x_n \in K(a, r_{n-1})$, hogy $x_n \in A$ és $x_n \neq a$. Mivel

$$|x_n - a| < |x_{n-1} - a| < \dots < |x_1 - a|,$$

ezért minden x_1, \dots, x_n elem különböző. Az $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ halmaz, amelynek elemeit az előbbi eljárással kaptuk, egy olyan végtelen, A elemeiből álló halmaz, amely a $K(a, r)$ környezetnek részhalmaza. Ezzel a tételt állítását igazoltuk.

Az előző tételből következik, hogy csak végtelen halmaznak lehet torlódási pontja. Nyilvánvalóan az állítás megfordítása nem igaz, azaz nem minden végtelen halmaznak van torlódási pontja. Erre a természetes számok halmaza jó ellenpélda.

A következő tétel azt állítja, hogy ha egy végtelen halmaz korlátos, akkor az elemei valahol sűrűsödnek.

4. Tétel (Bolzano–Weierstrass-tétel). *A valós számok minden korlátos, végtelen részhalmazának van torlódási pontja.*

Bizonyítás. A tétel bizonyításában a Cantor-féle metszet-tételt fogunk alkalmazni. Ezt a tételt a „Valós számok” című tananyagban igazoltuk, és azt állítja, hogy egymásba „skatulyázott” zárt intervallumok metszete nem üres. Pontosabban, ha $\langle a_n \rangle : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ és $\langle b_n \rangle : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ két valós sorozat úgy, hogy

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad b_n \geq b_{n+1}, \quad a_n < b_n$$

teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, akkor

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Legyen A egy valós számokból álló korlátos, végtelen halmaz. Jelölje a_1 és b_1 az A halmaz alsó és felső korlátját. Ekkor $A \subseteq [a_1, b_1]$.

Felezzük meg az $[a_1, b_1]$ intervallumot! Ekkor az

$$\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2} \right], \quad \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1 \right]$$

intervallumok közül az egyik biztosan tartalmaz végtelen sok A -beli elemet, hiszen A végtelen halmaz, és előáll a két intervallum A -beli elemei uniójaként, így mindkettő nem tartalmazhat csak véges sok A -beli elemet. Ha mindkettő végtelen sok A -beli elemet tartalmaz, akkor tetszőleges módon válasszunk egyet a kettő közül. Jelölje $[a_2, b_2]$ az így kiválasztott intervallumot. Ezt újra megfelezzük, és az eljárást úgy folytatjuk, hogy ha az $[a_n, b_n]$ intervallumot már kiválasztottuk, akkor jelölje $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ a

$$\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right], \quad \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right]$$

intervallumok közül azt, amely végtelen sok A -beli elemet tartalmaz. Nyilvánvalóan az $[a_n, b_n]$ ($n \in \mathbf{N}$) intervallumok kielégítik a Cantor-féle metszet-tétel feltételeit. Jelölje tehát a az intervallumok metszetének egy elemét.

Legyen $r > 0$ tetszőleges szám. Mivel az intervallumok felezési eljárással készültek, ezért $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Mivel a a metszet eleme, így minden intervallumon megtalálható, azaz $a_n \leq a \leq b_n$, és így

$$a - a_n \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \quad b_n - a \leq \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Legyen $n_0 \in \mathbf{N}$ olyan, amire teljesül

$$n_0 > \log_2 \frac{b_1 - a_1}{r} + 1,$$

azaz $\frac{b_1 - a_1}{2^{n_0-1}} < r$. Ekkor az $]a - r, a + r[$ környezet tartalmazza az $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ intervallumot, ami végtelen sok A -beli elemet tartalmaz. Így a torlódási pontja az A halmaznak. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A Bolzano–Weierstrass-tétel a matematikai analízis egyik fontos tétele. A tételt először **Bernard Bolzano** (1781-1848) cseh matematikus és filozófus igazolta. A prágai egyetemen vallástörténet professzora volt, de állásából elmozdították és minden nyilvános szerepléstől eltiltották, mert a cseh nemzeti önállóság eszméjét hirdette az osztrák elnyomással szemben. Így matematikai eredményeit sem közölhette, pedig Bolzano több matematikai fogalmat írt le és tételt igazolt olyan matematikai szigorral, amivel több neves matematikust megelőzött. Sajnos több kéziratát csak a halála után találták meg. Így fordulhatott elő, hogy Weierstrass nem ismerte Bolzano munkáját, de ő is igazolta a tételt, ami ma mindkét matematikus nevét viseli.

A Bolzano–Weierstrass-tétel bizonyításából látható, hogy a létező torlódási pont eleme az $[a_1, b_1]$ zárt intervallumnak, amely maga az A halmazt is tartalmazza. A következő állítás megadja az előző állítás általános megfogalmazását.

5. Tétel. Legyen A egy valós számokból álló halmaz, valamint $a, b \in \mathbf{R}$. Ha $A \subseteq [a, b]$, akkor $A^* \subseteq [a, b]$.

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy x torlódási pontja az A halmaznak, de $x \notin [a, b]$.

- Ha $x < a$, akkor legyen $r := a - x$. Ekkor a $K(x, r)$ környezet nem tartalmaz A -beli elemet,
- Ha $x > b$, akkor legyen $r := x - b$. Ekkor a $K(x, r)$ nem tartalmaz A -beli elemet.

Ezek szerint mindkét esetben találunk x -nek olyan környezetét, ahol nincs A -beli elem, ami ellentmond annak az állításnak, hogy x torlódási pontja az A halmaznak. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Már láttuk, hogy egy torlódási pont lehet halmazbeli vagy nem halmazbeli elem is. Ha egy halmazbeli elem nem torlódási pontja a halmaznak, akkor van olyan környezete, ahol egyedül csak ő eleme a halmaznak.

4. Definíció. Legyen $A \subseteq \mathbf{R}$ és $a \in A$. Azt mondjuk, hogy a **izolált pontja** az A halmaznak, ha a nem torlódási pontja A -nak.

Egy A halmaz izolált pontjai tehát azok az $a \in A$ elemek, amelyekhez van olyan $r > 0$, hogy $K(a, r) \cap A = \{a\}$. Például az $A := [0, 1] \cup \{2\}$ halmaz esetében 2 az egyedüli izolált pont.

2. Feladat. Adjunk példát olyan valós számokból álló végtelen halmazra, amelynek

- nincs torlódási pontja,
- pontosan 1 torlódási pontja van,
- pontosan két torlódási pontja van,
- torlódási pontjainak halmaza \mathbf{R} ,
- nincs izolált pontja,
- pontosan 1 izolált pontja van,
- végtelen sok izolált pontja van.

Megoldás:

- (a) \mathbf{N} , hiszen két természetes szám távolsága legalább 1.
- (b) $A := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$ torlódási pontja csak a 0. Valóban, $A \in [0, 1]$ tehát az 5. Tétel szerint, ha a torlódási pontja A -nak, akkor $0 \leq a \leq 1$. Azonban ha $a > 0$, akkor $\exists n_0 > \frac{2}{a}$, azaz $\frac{1}{n} < \frac{a}{2}$ minden $n > n_0$ esetén. Ezért a $K(a, \frac{a}{2})$ környezet nem tartalmazhat végtelen sok A -beli elemet, azaz nem torlódási pont.
- (c) $B := \left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$ torlódási pontjai -1 és 1 , hiszen
- $$(-1)^n \frac{n-1}{n} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páros,} \\ -1 + \frac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$
- Ekkor az előző feladathoz hasonlóan igazolható, hogy csak a -1 és 1 torlódási pontja a halmaznak.
- (d) \mathbf{Q} , hiszen két valós szám között mindig van racionális.
- (e) Minden intervallum.
- (f) $A [0, 1] \cup \{2\}$ halmaznak egyetlen izolált pontja a 2 .
- (g) Ha egy végtelen halmaznak nincs torlódási pontja, akkor minden eleme izolált, ezért az \mathbf{N} természetes számok halmaza újra a feladat megoldása.

3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$!

Megoldás: Először azt igazoljuk, hogy $(A \cup B)^* \subseteq A^* \cup B^*$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\exists a \in \mathbf{R}$, hogy $a \in (A \cup B)^*$, de $a \notin A^* \cup B^*$, azaz $a \notin A^*$ és $a \notin B^*$. Továbbá,

$$a \notin A^* \iff \exists r_1 > 0, \text{ hogy } (K(a, r_1) \setminus \{a\}) \cap A = \emptyset.$$

$$a \notin B^* \iff \exists r_2 > 0, \text{ hogy } (K(a, r_2) \setminus \{a\}) \cap B = \emptyset.$$

Ekkor $r := \min\{r_1, r_2\}$ -re $(K(a, r) \setminus \{a\}) \cap (A \cup B) = \emptyset$, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy $a \in (A \cup B)^*$, azaz annak, hogy a torlódási pontja $A \cup B$ -nek.

Most az $A^* \cup B^* \subseteq (A \cup B)^*$ állítást fogjuk igazolni. Ha $a \in A^* \cup B^*$, akkor $a \in A^*$ vagy $a \in B^*$. Másrészt,

$$a \in A^* \iff \forall r > 0 \text{ esetén } (K(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset \implies$$

$$\implies (K(a, r) \setminus \{a\}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \implies a \in (A \cup B)^*.$$

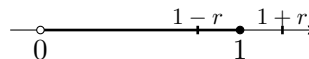
Ha $a \in B^*$, akkor az előbbihez hasonlóan igazolható, hogy $a \in (A \cup B)^*$.

A távolság ismeretében egy adott halmaz három különböző részre bontja a valós számegegyenest.

5. Definíció. Legyen A egy valós számokból álló halmaz és $a \in \mathbf{R}$.

- Azt mondjuk, hogy a **belső pontja** az A halmaznak, ha van olyan $r > 0$, hogy $K(a, r) \subseteq A$. Az A halmaz összes belső pontjainak halmazát $\text{int } A$ -val jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy a **külső pontja** az A halmaznak, ha van olyan $r > 0$, hogy $K(a, r) \subseteq \bar{A}$. Az A halmaz összes külső pontjainak halmazát $\text{ext } A$ -val jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy a **határpontja** az A halmaznak, ha minden $r > 0$ esetén $K(a, r) \cap A \neq \emptyset$ és $K(a, r) \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Az A halmaz összes határpontjainak halmazát $\text{mar } A$ -val jelöljük.

Más szavakkal, a belső pontja az A halmaznak, ha A tartalmazza az a pontot egy környezetével együtt. Ekkor nyilván $a \in A$, de nem feltétlenül minden A -beli elem belső pontja lesz az A halmaznak. Például, ha $A :=]0, 1]$, akkor $\text{int } A =]0, 1[$. $x = 1$ halmazbeli pont, de nem belső pontja a halmaznak, mert minden környezetének jobboldala „kilóg” a halmazból.



Hasonlóan a külső pontja A -nak, ha \bar{A} tartalmazza az a egy környezetét. Ekkor $a \notin A$, ezért nincs olyan pont, amely belső és külső pont lenne egyszerre. Például, ha $A :=]0, 1]$, akkor $\text{ext } A =]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$. Hasonlóan $x = 0$ nem külső pontja a halmaznak, mert minden környezetének jobboldala tartalmaz halmazbeli elemet.

Végül a határpontja A -nak, ha se nem belső, se nem külső pontja. Például, ha $A :=]0, 1]$, akkor $\text{mar } A = \{0, 1\}$.

Az előzők alapján látjuk, hogy minden A halmaz esetén az

$$\{\text{int } A, \text{ext } A, \text{mar } A\}$$

halmazrendszer egy osztályozása a valós számok halmazának, azaz az $\text{int } A$, $\text{ext } A$ és $\text{mar } A$ halmazok páronként diszjunktak, és uniójuk \mathbf{R} .

4. Feladat. Igazoljuk, hogy az $\text{int } A = \text{ext } \bar{A}$ egyenlőség igaz minden A halmaz esetén!

Megoldás: Mivel $A = \bar{\bar{A}}$, így $a \in \text{int } A \iff \exists r > 0$, hogy $K(a, r) \subseteq A \iff \iff \exists r > 0$, hogy $K(a, r) \subseteq \bar{\bar{A}} \iff a \in \text{ext } \bar{A}$.

Az előző feladat állításából következik, hogy $\text{ext } A = \text{int } \bar{A}$ és $\text{mar } A = \text{mar } \bar{A}$.

5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $A \subseteq B$, akkor $\text{int } A \subseteq \text{int } B$!

Megoldás: $a \in \text{int } A \implies \exists r > 0$, hogy $K(a, r) \subseteq A$. Mivel $A \subseteq B$, így $K(a, r) \subseteq B$, azaz $\exists r > 0$, hogy $K(a, r) \subseteq B$. Ezért $a \in \text{int } B$.

6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi halmazok torlódási, belső, külső és határpontjait!

$$(a) A := [-5, -2] \cup [-1, 2] \cup \{3\}, \quad (b) \mathbf{Q},$$

$$(c) B := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}, \quad (d) \mathbf{N}.$$

Megoldás: Csak a végeredményeket közöljük, ezek igazolását az olvasóra bízjuk.

$$(a) A^* = [-5, -2] \cup [-1, 2], \quad \text{int } A =]-5, -2[\cup]-1, 2[, \\ \text{ext } A =]-\infty, -5[\cup]2, -1[\cup]2, 3[\cup]3, \infty[, \\ \text{mar } A = \{-5, -2, -1, 2, 3\}.$$

$$(b) \mathbf{Q}^* = \text{mar } \mathbf{Q} = \mathbf{R}, \quad \text{int } \mathbf{Q} = \text{ext } \mathbf{Q} = \emptyset.$$

$$(c) B^* = \{0\}, \quad \text{int } B = \emptyset, \quad \text{mar } B = B \cup \{0\}, \quad \text{ext } B = \overline{B \cup \{0\}}.$$

$$(d) \mathbf{N}^* = \text{int } \mathbf{N} = \emptyset, \quad \text{mar } \mathbf{N} = \mathbf{N}, \quad \text{ext } \mathbf{N} = \overline{\mathbf{N}}.$$

Az $A :=]a, b[$ nyílt intervallumok egyik tulajdonsága az, hogy $\text{int } A = A$, azaz a nyílt intervallumok minden eleme belső pontja lesz az intervallumnak. Ez a tulajdonság nem csak nyílt intervallumokra igaz, például két diszjunkt nyílt intervallum uniójára is teljesül. Azok a halmazok, amelyeknek minden pontja belső pont fontos szerepet töltenek be távolságfüggvénnyel ellátott terekben.

6. Definíció. Egy halmazt **nyíltnek** nevezzük, ha minden eleme belső pontja a halmaznak.

Mivel egy halmaz eleme csak belső vagy határpont lehet, így egy halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha nem tartalmazza határpontjait.

A környezetek nyílt halmazok, hiszen nyílt intervallumok. A $] - \infty, a[$ és $]b, \infty[$ intervallumok is nyílt halmazok. A 6. feladatban szereplő halmazok közül egyik sem nyílt halmaz. A definíció segítségével úgy igazoljuk, hogy egy A halmaz nyílt, ha tetszőleges a elemét véve igazolni tudjuk, hogy

$$\exists r > 0, \text{ hogy } K(a, r) \subseteq A.$$

A következő állítások teljesülnek nyílt halmazok esetén.

6. Tétel.

- (a) \emptyset és \mathbf{R} nyílt halmaz,
- (b) nyílt halmazok uniója nyílt,
- (c) véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.

Bizonyítás.

- (a) Mivel minden A halmaz esetén $\text{int } A \subseteq A$, így $\text{int } \emptyset \subseteq \emptyset$, azaz $\text{int } \emptyset = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy \emptyset nyílt halmaz. Másrészt $\forall x, r \in \mathbf{R}, r > 0$ esetén $K(x, r) \subseteq \mathbf{R}$, azaz \mathbf{R} minden eleme belső pontja \mathbf{R} -nek. Ez azt jelenti, hogy \mathbf{R} nyílt halmaz.
- (b) Legyen $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ egy nyílt halmazokból álló halmazrendszer. Ha $a \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, akkor $\exists \gamma_0 \in \Gamma$, hogy $a \in A_{\gamma_0}$. Mivel A_{γ_0} nyílt halmaz, így a belső pontja A_{γ_0} -nak, azaz $\exists r > 0$, hogy $K(a, r) \subseteq A_{\gamma_0}$. Azonban $A_{\gamma_0} \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, azaz $K(a, r) \subseteq \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, amiből következik, hogy a belső pontja az $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ halmaznak. Mivel a tetszőleges volt, ezért $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ csupa belső pontokból áll, azaz nyílt halmaz.
- (c) Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $\{A_1, \dots, A_n\}$ egy nyílt halmazokból álló halmazrendszer. Ha $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, akkor $a \in A_i$ minden $i = 1, \dots, n$ esetén. Mivel minden A_i halmaz nyílt, minden $i = 1, \dots, n$ -hez $\exists r_i > 0$, hogy $K(a, r_i) \subseteq A_i$. Jelölje $r := \min\{r_i : i = 1, \dots, n\}$. Ekkor

$$K(a, r) \subseteq K(a, r_i) \subseteq A_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

így $K(a, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$, amiből következik, hogy a belső pontja a $\bigcap_{i=1}^n A_i$ halmaznak. Mivel a tetszőleges volt, ezért $\bigcap_{i=1}^n A_i$ csupa belső pontokból áll, azaz nyílt halmaz.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel végtelen sok nyílt halmaz metszetéről nem állít semmit, hiszen ez lehet nyílt és nem nyílt halmaz is. Például $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, \frac{1}{n}\right[= \emptyset$, azaz nyílt halmaz, de

$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-1, \frac{1}{n}\right[=]-1, 0]$, ami nem nyílt halmaz.

A következő állítás jellemzi a nyílt halmazokat.

7. Tétel. Minden nyílt, nem üres halmaz egyértelműen előállítható megszámlálhatóan sok, páronként diszjunkt nyílt intervallum uniójaként.

Bizonyítás. Legyen x a kérdéses A nyílt halmaznak egy eleme. Mivel x belső pontja A -nak, $\exists r > 0$, hogy $x \in]x - r, x + r[\subseteq A$. Tekintsük az összes olyan $]a, b[$ intervallumot, amelyre igaz, hogy $x \in]a, b[\subseteq A$, és jelölje α az összes ilyen a szám infimumát és β az összes ilyen b szám szuprémumát. Ekkor $x \in]\alpha, \beta[\subseteq A$, azaz $] \alpha, \beta[$ a legtágabb x -et tartalmazó intervallum, amely része A -nak. Vegyük észre, hogy α lehet mínusz végtelen és β lehet végtelen, azaz az $] \alpha, \beta[$ nyílt intervallum lehet végtelen hosszúságú.

Az $A \setminus] \alpha, \beta[$ halmaz nyílt, hiszen az előbbi halmaz minden y eleme a nyílt A halmaz is eleme, így $\exists s > 0$, hogy $y \in]y - s, y + s[\subseteq A$. Azonban

$$]y - s, y + s[\cap] \alpha, \beta[= \emptyset,$$

mert ellenkező esetben $]y - s, y + s[\cup] \alpha, \beta[$ egy x -et tartalmazó nyílt intervallum lenne, amely része A -nak, és így $] \alpha, \beta[$ nem lenne a legtágabb ilyen feltételeket teljesítő intervallum.

Mivel $A \setminus] \alpha, \beta[$ nyílt halmaz, az előző eljárás folytatható. Végül az A halmaz szétesik diszjunkt nyílt intervallumokra, amiből megszámlálhatóan sok van, hiszen az eljárás egymásután generálja őket. Az előállítás egyértelmű, hiszen diszjunkt intervallumokról van szó. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Olyan halmazok is igen fontos szerepet töltenek be, amelyek bizonyos szempontból „ellentétesek” a nyílt halmazok sajátságaival. Ezek az ún. zárt halmazok.

7. Definíció. Egy halmazt **zártnak** nevezzük, ha komplementere nyílt halmaz.

Az ellentétes sajátosság nem olyan értelemben értendő, hogy egy zárt halmaz nem lehet nyílt (látni fogjuk, hogy \emptyset és \mathbf{R} nyílt és zárt is egyszerre) vagy egy halmaz nyíltnak vagy zártnak kell lennie (az $[a, b[$ intervallumok se nem nyíltak és se nem zártak), hanem a következő értelemben.

8. Tétel. Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha tartalmazza minden határpontját.

Bizonyítás. Legyen A egy valós számokból álló halmaz. Tudjuk, hogy egy halmaznak és komplementerének közös határpontjai vannak, ami azt jelenti, hogy $\text{mar } A = \text{mar } \bar{A}$. Azt is tudjuk, hogy egy halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha határpontjai nem elemek a halmaznak. Ezért A zárt $\iff \bar{A}$ nyílt $\iff (\text{mar } \bar{A}) \cap \bar{A} = \emptyset \iff (\text{mar } A) \cap \bar{A} = \emptyset \iff \text{mar } A \subseteq A$.

Az előző tétel következtében minden zárt intervallum zárt halmaz, de zártak a véges halmazok is. A 6. Feladatban szereplő halmazok közül csak az \mathbf{N} halmaz zárt. Az

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\}$$

halmaz is zárt.

Zárt halmazok esetén ki tudunk mondani egy a 6. Tételhez hasonló, de bizonyos értelemben ellentétes állítást.

9. Tétel.

- (a) \emptyset és \mathbf{R} zárt halmaz,
- (b) zárt halmazok metszete zárt,
- (c) véges sok zárt halmaz uniója zárt.

Bizonyítás.

- (a) Mivel $\overline{\emptyset} = \mathbf{R}$ és $\overline{\mathbf{R}} = \emptyset$ nyílt halmazok, ezért a két halmaz zárt.
- (b) Legyen $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ egy zárt halmazokból álló halmazrendszer. Ekkor $\overline{A_\gamma}$ nyílt minden $\gamma \in \Gamma$ esetén. A De Morgan azonosságok miatt

$$\overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma},$$

ami a 6. Tétel szerint nyílt halmaz, azaz a komplementere $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ zárt halmaz.

- (c) Legyen $n \in \mathbf{N}$ és $\{A_1, \dots, A_n\}$ egy zárt halmazokból álló halmazrendszer. Ekkor $\overline{A_i}$ nyílt minden $i = 1, \dots, n$ esetén. A De Morgan azonosságok miatt

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i},$$

ami a 6. Tétel szerint nyílt halmaz, azaz a komplementere $\bigcup_{i=1}^n A_i$ zárt halmaz.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételben nem állítottunk semmit végtelen sok zárt halmaz uniójáról. Az

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-2 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n} \right] =] -2, 2[\quad \text{és} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right] = [-3, 3]$$

példákból látható, hogy az eredmény lehet nyílt vagy zárt halmaz.

7. Feladat. Legyen A egy nyílt, B pedig egy zárt halmaz. Igazoljuk, hogy $A \setminus B$ nyílt és $B \setminus A$ zárt halmaz.

Megoldás: Az állítás rögtön következik a 6. és a 9. Tételből az

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}, \quad B \setminus A = B \cap \overline{A}$$

átalakítással, hiszen \overline{A} zárt, \overline{B} pedig nyílt halmaz. Azt alkalmazunk, hogy két nyílt halmaz metszete nyílt és két zárt halmaz metszete zárt.

A zárt halmazokra nem érvényes olyan jellemző előállítás, mint amit a 7. Tétel biztosít a nyílt halmazokra, azaz nem minden zárt halmaz esik szét diszjunkt zárt intervallumokra. Sőt előfordul, hogy egy zárt halmaz nem tartalmaz egyetlen intervallumot sem. Ez történik a véges halmazok, a természetes számok halmaza, valamint az $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{0\}$ halmaz esetében.

A következőekben kapcsolatot keresünk az eddig vizsgált metrikus fogalmak között. Először megjegyezzük, hogy egy halmaz belső pontja torlódási pont is egyben, Ez azért igaz, mert a környezetek intervallumok, azaz végtelen halmazok, és ha a belső pontnak van olyan környezete, amely csupa halmazbeli pontokból áll, akkor ez érvényes az annál kisebb sugarú környezetere is. Ebből az következik, hogy ha egy halmazbeli elem nem torlódási pont, azaz izolált pont, akkor nem belső pont, azaz határpont. Ezért ha egy halmaz minden pontja izolált és több határpontja nincs, akkor a halmaz zárt. Ez a helyzet a véges halmazok és a természetes számok halmaza esetében.

Érdekes, hogy az $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}$ halmaz szintén izolált elemekből áll, de nem zárt. Ha hozzáadjuk megmaradt határpontját, a 0-át, akkor zárt lesz. A 0 egyben torlódási pont. A következő állítás szerint, ha egy halmazhoz hozzáadjuk a torlódási pontjait, akkor zárt halmazt kapunk.

10. Tétel. *Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha tartalmazza minden torlódási pontját.*

Bizonyítás. Legyen A egy zárt halmaz, és indirekt módon tegyük fel, hogy van A -nak olyan a torlódási pontja, amely nem eleme a halmaznak, azaz $\exists a \in A^*$, hogy $a \in \overline{A}$. Mivel \overline{A} nyílt, ezért $\exists r > 0$, hogy $K(a, r) \subseteq \overline{A}$. Ez ellentmond annak, hogy a torlódási pontja A -nak, mivel van olyan környezete, amely nem tartalmaz A -beli elemet.

Legyen most A olyan halmaz, amely minden torlódási pontját tartalmazza, azaz $A^* \subseteq A$, és legyen a az A halmaznak egy határpontja. Ekkor $\forall r > 0$ esetén $K(a, r)$ tartalmaz A -beli elemet, és ha még igaz lenne, hogy $a \in \overline{A}$, akkor ez azt jelentené, hogy a torlódási pontja az A halmaznak, hiszen ekkor a minden környezete tartalmaz tőle különböző A -beli elemet. Azonban a nem lehet torlódási pontja az A halmaznak, mert feltételezésünk szerint A tartalmazza az összes torlódási pontját, azaz $a \in A$. Az előbbi okfejtésből következik, hogy A minden határpontja az A halmaznak eleme, ezért A zárt halmaz.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel szerint az $A^* \subseteq A$ feltétel azonos azzal, hogy A zárt halmaz. Nyilván egy zárt halmaznak lehetnek még izolált pontjai, és ekkor $A^* \subset A$. Ez történik az

$$A := [0, 1] \cup \{2\}$$

példánál, ahol $A^* = [0, 1]$ és a 2 eleme izolált.

Mit mondhatunk egy halmazról, amelynek nincsenek izolált pontjai, azaz teljesül az $A \subseteq A^*$ fordított reláció? Ilyen halmazok például az intervallumok, melyek lehetnek nyíltak, zártak, vagy egyik sem, de a racionális számok halmaza is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal pedig tudjuk, hogy megszámlálható halmaz.

8. Definíció. Az A halmazt **perfektnak** nevezzük, ha zárt és nincsenek izolált elemei, azaz $A^* = A$.

A zárt intervallumok perfektnak, de az $[a, \infty[$ és $] - \infty, b]$ intervallumok szintén azok. Az üres halmaz is perfektnak.

11. Tétel. Egy nem üres perfektnak halmaz nem megszámlálható.

Bizonyítás. Állításunkat a Cantor-féle metszet-tétellel igazoljuk. Indirekt módon tegyük fel, hogy A egy perfektnak, de megszámlálható halmaz. A nem lehet véges, mert van torlódási pontja. Ha A megszámlálhatóan végtelen halmaz, akkor A felírható az $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ módon. A minden eleme torlódási pontja a halmaznak, azaz $\forall a \in A$ és $\forall r > 0$ esetén a $K(a, r)$ környezet végtelen sok A -beli elemet tartalmaz.

Legyen y_1 egy x_1 -től különböző A -beli elem és $r_1 := |y_1 - x_1|$. A $K(y_1, r_1)$ környezet végtelen sok A -beli elemet tartalmaz, de nem tartalmazza az x_1 -et. Legyen $y_2 \in K(y_1, r_1)$ egy, az y_1 -től és x_2 -től különböző A -beli elem, továbbá r_2 olyan pozitív szám, hogy $K(y_2, r_2) \subset K(y_1, r_1)$, és a $K(y_2, r_2)$ ne tartalmazza az y_1 és x_2 elemeket. Ekkor $r_2 < \frac{r_1}{2}$.

Folytassuk az előző eljárást! Minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, ha ismertek az y_1, \dots, y_n A -beli elemek és az r_1, \dots, r_n pozitív számok, akkor válasszunk a $K(y_n, r_n)$ környezetből egy olyan A -beli elemet, amelyet y_{n+1} -gyel jelölünk, és y_n -től és x_{n+1} -től is különbözik. Ilyen elem mindig van, hiszen y_n torlódási pontja A -nak, azaz $K(y_n, r_n)$ végtelen sok A -beli elemet tartalmaz. Legyen r_{n+1} olyan pozitív szám, hogy $K(y_{n+1}, r_{n+1}) \subset K(y_n, r_n)$, és a $K(y_{n+1}, r_{n+1})$ ne tartalmazza az y_1, \dots, y_n elemeket, sem az x_1, \dots, x_{n+1} elemeket. Ekkor $r_{n+1} < \frac{r_n}{2}$. Mivel az eljárás során

$$r_n < \frac{r_{n-1}}{2}, \quad r_{n-1} < \frac{r_{n-2}}{2}, \quad \dots, \quad r_2 < \frac{r_1}{2}$$

is teljesült, ezért

$$r_{n+1} < \frac{r_1}{2^n}.$$

Az $[y_n - r_n, y_n + r_n]$ intervallumok kielégítik a Cantor-féle metszet-tétel feltételeit, így $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [y_n - r_n, y_n + r_n] \neq \emptyset$. Jelölje a a metszetnek egy elemét, és legyen $r > 0$ egy tetszőleges szám. Ekkor a minden intervallumban megtalálható, azaz

$$y_n - r_n \leq a \leq y_n + r_n.$$

Legyen $n_0 \in \mathbf{N}$ olyan, amire teljesül, hogy $n_0 > \log_2 \frac{r_1}{r} + 2$, vagyis

$$2r_{n_0} < 2 \cdot \frac{r_1}{2^{n_0-1}} = \frac{r_1}{2^{n_0-2}} < r.$$

Ekkor a $K(a, r)$ környezet tartalmazza a $K(y_{n_0}, r_{n_0})$ környezetet, hiszen a $K(a, r)$ környezet sugara nagyobb, mint a $K(y_{n_0}, r_{n_0})$ környezet átmérője. De ez utóbbi környezet végtelen sok A -beli elemet tartalmaz, és így $K(a, r)$ szintén végtelen sok A -beli elemet fog tartalmazni. Ezért a torlódási pontja A -nak, de $A = A^*$, így $a \in A$. Mivel $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, ezért $\exists m \in \mathbf{N}$, hogy $a = x_m$, de ez lehetetlen, mert $a \in K(y_n, r_n)$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén és $x_m \notin K(y_n, r_n)$, ha $n \geq m$. Ezzel ellentmondáshoz jutunk.

A zárt intervallumok kontinuum számosságúak és perfekthalmazok. A következőben egy tanulságos példával fogunk olyan perfekthalmazt bemutatni, amely egyetlen teljes intervallumot sem tartalmaz. Ehhez induljunk ki a $[0, 1]$ zárt intervallumból, és hagyjuk el belőle az $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ nyílt középső harmadát. Az eredmény az

$$E_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

halmaz, ami két zárt intervallum uniója. Az előző két zárt intervallumból szintén elhagyjuk a nyílt középső harmadukat, amiből az

$$E_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

négy zárt intervallum unióját kapjuk. Az E_2 halmazban szereplő zárt intervallumaiból elhagyjuk a középső harmadukat, ezzel az E_3 halmazt kapjuk, és így tovább. Az eljárás folytatásával sorra kapjuk az $E_1, E_2, E_3, E_4, \dots$ halmazokat, amelyekre nyilvánvalóan $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset E_4 \supset \dots$ teljesül. Ezért az eljárás minden határon túli folytatása után megmaradó halmaz megegyezik az

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

halmazok metszetével, amit **Cantor-féle triadikus halmaznak** nevezzük.

Az E_n halmazok előállnak 2^n darab, $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú zárt intervallum uniójaként. Ezeknek a zárt intervallumoknak a határait nem hagyjuk el az eljárás során, ezért az E halmaz nem üres. Az E_n halmazok zártak, mert előállnak véges sok zárt intervallum uniójaként, és így E is zárt halmaz, mert előáll zárt halmazok metszeteként (lásd a 9. Tételt!).

Most igazolni fogjuk, hogy az E halmaznak nincs izolált pontja. Ehhez vegyük $a \in E$ a halmaznak egy tetszőleges pontját, és legyen $r > 0$ egy tetszőleges szám.

Mivel a az E_n halmazok metszetének egyik eleme, ezért $a \in E_n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Válasszuk olyan n_0 számot, amire teljesül hogy

$$\frac{1}{3^{n_0}} < r.$$

Mivel $a \in E_{n_0}$, így megtalálható az egyik zárt intervallumban, melynek hossza $\frac{1}{3^{n_0}}$, tehát része a $K(a, r)$ környezetnek. Másrészt tudjuk, hogy a zárt intervallum mindkét határa az E halmaz eleme. Ez azt jelenti, hogy $K(a, r)$ tartalmaz egy a -tól különböző E halmazbeli pontot, azaz a torlódási pontja az E halmaznak. Mivel a egy tetszőleges E halmazbeli pont volt, így E csupa torlódási pontokból áll, egyik sem izolált. Összefoglalva E zárt és nincs izolált pontja, azaz perfekt halmaz.

A Cantor-féle triadikus halmaz azért nem tartalmazhat egy teljes intervallumot sem, mert az eljárásból látható, hogy minden $n \in \mathbf{N}$ és $k = 0, 1, \dots, 3^n - 1$ esetén a

$$\left] \frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right[$$

nyílt intervallumok nem tartalmazzák E -nek egyetlen egy pontját sem. Azonban minden $]\alpha, \beta[\subset [0, 1]$ nyílt intervallum tartalmaz egy, a fenti alakba írható intervallumot. Valóban, ha n_0 olyan pozitív egész szám, amire

$$\frac{1}{3^{n_0}} < \frac{\beta - \alpha}{4}$$

teljesül, akkor van olyan k , amire igaz, hogy

$$\frac{3k+1}{3^{n_0}} > \alpha. \quad (1)$$

Ilyen például a $k = 3^{n_0-1} - 1$ szám, hiszen

$$\begin{aligned} \frac{3k+1}{3^{n_0}} &= \frac{3(3^{n_0-1} - 1) + 1}{3^{n_0}} = \frac{3^{n_0} - 2}{3^{n_0}} = 1 - \frac{2}{3^{n_0}} > \\ &> 1 - 2 \cdot \frac{\beta - \alpha}{4} = 1 - \frac{\alpha + \beta}{2} + \alpha > \alpha, \end{aligned}$$

tudniillik $\frac{\alpha+\beta}{2}$ az $]\alpha, \beta[$ intervallum középvértéke, amely nyilvánvalóan kisebb, mint 1. Ha k_0 az a legkisebb pozitív egész szám, amire (1) teljesül, akkor ez a $k_0 - 1$ számra már nem érvényes, ezért

$$\frac{3k_0 - 2}{3^{n_0}} = \frac{3(k_0 - 1) + 1}{3^{n_0}} \leq \alpha.$$

Így

$$\frac{3k_0 + 2}{3^{n_0}} = \frac{3k_0 - 2}{3^{n_0}} + \frac{4}{3^{n_0}} < \alpha + 4 \cdot \frac{\beta - \alpha}{4} = \beta.$$

Összefoglalva, azt igazoltuk, hogy

$$\alpha < \frac{3k_0 + 1}{3^{n_0}} < \frac{3k_0 + 2}{3^{n_0}} < \beta,$$

azaz az $] \alpha, \beta[$ intervallum nem állhat csupa E -beli elemekből, mert tartalmazza a

$$\left] \frac{3k_0 + 1}{3^{n_0}}, \frac{3k_0 + 2}{3^{n_0}} \right[$$

intervallumot, amiben egyetlen egy E -beli elem sincsen.

Mivel a Cantor-féle triadikus halmaz perfekt, ezért nem megszámlálható. Igazolható, hogy a halmaz kontinuum számosságú. A bizonyítás nagy vonalakban úgy történik, hogy a Cantor-féle triadikus halmaz minden eleme azonosítható egy 0 és 1 elemekből álló sorozattal. Úgy történik a hozzárendelés, hogy ha az elem a halmaz konstrukciója $n - 1$ -dik lépésében az egyik fennmaradó intervallum első harmadában van, akkor a sorozat n -dik eleme 0, ha az utolsó harmadában van, akkor 1. A $[0, 1[$ intervallum hasonlóképpen azonosítható egy 0 és 1 elemekből álló sorozattal, ha intervallum-felezést alkalmazunk. Ezért a Cantor-féle triadikus halmaz és a $[0, 1[$ intervallum azonos számosságú halmazok.

3. Sorozatok főbb tulajdonságai

A sorozat nem új fogalom számunkra, hiszen középiskolában már foglalkoztunk a számtani és a mértani sorozatokkal. A sorozat fogalma már akkor is kellő precizitással került értelmezésre.

9. Definíció. Egy $a: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt **R-beli sorozatnak** vagy **valós számsorozatnak** (röviden **sorozatnak**) nevezünk.

A sorozatok tehát a természetes számok halmazán értelmezett valós értékű függvények, azonban nem úgy kezeljük, jelöljük vagy ábrázoljuk őket, mint ahogyan a függvényeket szokás. Eleve a sorozat „változóját”, azaz az n -t, indexként szerepeltetjük és nem tesszük zárójelek közé, ahogy a függvény változóját szoktunk, és a továbbiakban **indexként** hivatkozunk rá. Ez azt jelenti, hogy az $a: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ sorozatnál az $a(n)$ helyet az a_n jelölést alkalmazzuk, ahol n egy tetszőleges pozitív egész szám lehet. Ezenkívül az $a: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ függvényjelölés helyett az $\langle a_n \rangle$ jelölést fogjuk alkalmazni.

A különböző indexek a felvett értékükkel együtt a sorozat **tagjait** vagy **elemeit** alkotják. Nem csak az a fontos, hogy a sorozat milyen értékeket vesz fel, hanem az is, hogy melyik helyen, azaz melyik indexnél. A sorozat tehát több, mint az értékészletén vett elemek összessége, amely véges halmaz is lehet, miközben a sorozatnak mindig végtelen sok eleme van.

Az $\langle a_n \rangle$ sorozatnál azt mondjuk, hogy a_n a sorozat **általános tagja**, ami egy n -től függő valós számot jelent. Ezért a sorozat általános tagja nem maga a sorozat, de ha olyan összefüggést adunk, amiből egyértelműen meg tudjuk mondani, hogy adott n indexhez melyik a_n értéket rendeljük, akkor ez meghatározza az $\langle a_n \rangle$ sorozatot. Ilyen amikor a függvényekhez hasonlóan, ún. **zárt képlet** segítségével adjuk meg a sorozat általános tagját.

Például, az

$$a_n := \frac{1}{2^n}$$

zárt képlettel azt az $\langle a_n \rangle$ sorozatot értelmezzük, aminek az elemei

$$a_1 := \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}, \quad a_2 := \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \quad a_3 := \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad \dots$$

és így tovább. Tehát zárt képlettel megadott sorozatok esetén úgy kapjuk meg a sorozat elemeit, hogy az n helyére behelyettesítünk pozitív egész számokat.

Járható út, hogy a sorozatot nem zárt képlettel, hanem néhány elem felsorolásával adjuk meg, ha kézenfekvő az a szabály, amelyet a felsorolt elemek sugallnak. Ha például öt elemet adunk meg, akkor a sorozatra az $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots \rangle$ jelölést alkalmazzuk. Sajnos ez a módszer nem rendelkezik kellő matematikai szigorral, mert minden esetben több zárt képlet adható meg, amely előállítja a felsorolt elemeket. Ezért csak akkor szabad alkalmazni, amikor mindenki számára teljesen egyértelmű a szabály.

Valóban, ha egy sorozatból csak az első x_1, x_2, \dots, x_r elemet ismerjük, akkor tetszőleges A érték esetén az

$$a_n := \sum_{i=1}^r x_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \frac{n-k}{i-k} + A \prod_{k=1}^r (n-k)$$

képlet előállítja az ismert elemeket úgy, hogy $a_1 = x_1, a_2 = x_2, \dots, a_r = x_r$, de az r nagyobb indexekhez tartozó elemek értékei függnak a kiválasztott A értéktől. Az előzőek miatt elemek felsorolással ritkán adunk meg sorozatokat.

Például, az

$$a_n := \frac{1}{2^n}$$

sorozat (helyesen zárt képlettel értelmezett $\langle a_n \rangle$ sorozatot kellett volna írni, de ezt ezentúl rövidíteni fogjuk) is megadható elemei felsorolásával a következő módon

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right\rangle.$$

A természetes számok sajátossága, hogy a velük kapcsolatos fogalmakat rekurzív módon adhatjuk meg. Ezzel a „Valós számok” című tananyagban teljes részletes-séggel foglalkozunk. A rekurzió olyan összefüggés, amely megadja, hogyan kapható meg a sorozat n -edik eleme a kisebb indexű sorozatbeli elemekből, feltéve, hogy ismerünk elég elemet a sorozat elejéről. Például az előző

$$a_n := \frac{1}{2^n}$$

sorozat a következő módon is megadható:

$$a_1 := \frac{1}{2}, \quad a_n := \frac{1}{2} \cdot a_{n-1} \quad (n > 1).$$

A rekurzív megadásnak az a hátránya, hogy egy konkrét elem kiszámításához ismerni kell az őt megelőző összes elemet, és ezek kiszámítása nagy indexek esetén sok időt igényelhet. Azonban a rekurziós számítás hatékony lehet, ha eleve ki kell számítani a sorozat összes elemét egy megadott indexig, továbbá a teljes indukció jól alkalmazható ezeknél a sorozatoknál.

Ha szükséges megpróbálkozhatunk azzal, hogy a rekurzív megadásból kiindulva zárt képletet keressünk a sorozatnak, de ez nagyon nehéz feladat lehet, ha van egyáltalán egy ilyen képlet. Ezen a területen vannak híres eredmények, például a rekurzív módon értelmezett

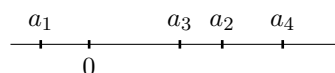
$$a_1 := 1, \quad a_2 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2),$$

Fibonacci-sorozatnak van zárt képlete, mégpedig az

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}.$$

Ez utóbbit Binet-formulának nevezzük. A rekurzív megadásból zárt képletet kereső módszerekkel, feladatokkal jelen tananyag nem foglalkozik.

A sorozatok ábrázolására általában nem célszerű a függvényeknél megismert módot választani, bár néha ez is hasznos lehet.



A sorozat bizonyos tulajdonságait sokszor jobban szemléltethetjük, ha elemeit a számegyenesen helyezzük el, és a kapott pontsorozatot a sorozat képének tekintjük.

A sorozat fogalmában azt látjuk, hogy minden pozitív egész szám indexként szerepel a sorozatban a természetes sorrendben. Azonban találkozhatunk olyan zárt képletekkel, amelyek nem értelmezhetők az összes pozitív egész számon, vagy egyszerűen szeretnénk kizárni néhány elemet. Néha célszerű megengedni, hogy az indexek egész számok legyenek növekvő sorrendben. Például $\langle a_{-7}, a_{-4}, a_{-1}, a_2, \dots \rangle$ sorozatnak tekinthető. Ha szigorúan szeretnénk venni a sorozat fogalmát, akkor az indexek átírásával a sorozatot átjelölhetjük a már megengedett $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, \dots \rangle$ módon, bár az átírási szabály sok esetben elég bonyolult lehet. A fenti példában az átírási szabály egyszerű: $b_n = a_{3n-10}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Minthogy a sorozatok speciális függvények, ezért a függvényekkel kapcsolatban már bevezetett fogalmak sorozatokra is alkalmazhatók, így nem szükséges ezeket újra értelmezni. Ilyen fogalom a sorozat értékkészlete, a sorozatok összege, szorzata, különbsége és hányadosa. Fontos megjegyezni a sorozatok hányadosánál, hogy ha a nevezőbe kerülő sorozat valamely eleme 0 értékű, akkor az elem indexe kikerül a hányadossorozat indexei közül.

A monotonitás és a korlátosság szintén két olyan tulajdonság, amely a függvények tulajdonságaira vezethető vissza. Fontosságuk miatt újra megadjuk e két fogalmat a sorozatoknál alkalmazott jelölés segítségével.

10. Definíció. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy valós számsorozat. Akkor mondjuk, hogy a sorozat

- **monoton növekvő**, ha $a_{n+1} \geq a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,
- **monoton csökkenő**, ha $a_{n+1} \leq a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,
- **szigorúan monoton növekvő**, ha $a_{n+1} > a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,
- **szigorúan monoton csökkenő**, ha $a_{n+1} < a_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,
- **(szigorúan) monoton**, ha (szigorúan) monoton növekvő vagy csökkenő.

A monoton növekvő sorozatok tehát azok, amelyeknél az index növekedésével az elemek értéke nem csökken. Szigorúan monoton növekvő sorozatok esetén ezek az értékek növekszenek, nem lehetnek egyenlőek. Ekkor a sorozat ábrázolásakor minden elem az előző elemtől jobbra esik. Monoton csökkenő sorozatok esetén mindez fordítva történik.



Annak eldöntésére, hogy egy sorozat monoton-e vagy sem, gyakran az általános $a_{n+1} - a_n$ különbséget vizsgáljuk. Ha minden n index esetén

$$a_{n+1} - a_n \begin{cases} > 0, & \text{akkor a sorozat szigorúan monoton növekvő,} \\ \geq 0, & \text{akkor a sorozat monoton növekvő,} \\ < 0, & \text{akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő,} \\ \leq 0, & \text{akkor a sorozat monoton csökkenő.} \end{cases}$$

Pozitív tagú sorozatok esetén azt is vizsgálhatjuk, hogy az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányados nagyobb egyenlő vagy kisebb egyenlő mint 1.

Például az

$$a_n := \frac{1}{2^n}$$

sorozat szigorúan monoton csökkenő, mert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Itt érdemes volt az a_{n+1} és a_n hányadosát vizsgálni a különbségük helyett, mert egyszerűbb számolást igényelt. Azonban az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1}$$

sorozat esetén inkább a különbséget vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1} = \\ &= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

azaz a sorozat szigorúan monoton növekvő. További megoldott példák a 8. Feladatban találhatók.

Konkrét sorozatok vizsgálatakor azt javasoljuk, hogy számítsuk ki a sorozat első négy-öt elemét. Ha azt látjuk, hogy az értékük egyszer növekszik és ezután csökken vagy fordítva, akkor azt állíthatjuk, hogy a sorozat nem monoton és ezzel a vizsgálat véget ér. Ellenkező esetben csak az előzőben bemutatott általános különbség vagy hányados vizsgálata alapján tudjuk eldönteni a sorozat monotonitást.

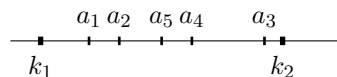
Érdemes a monotonitás fogalmát kiterjeszteni azokra az sorozatokra is, amelyek csak egy bizonyos index után lesznek monotonok. Ez akkor történik, ha a monotonitás definíciójában található egyenlőtlenségek csak egy bizonyos n_0 -nál nagyobb index esetén érvényesek, azaz a monotonitás csak véges sok elemről eltekintve teljesül. Ez utóbbi észrevétel megkönnyíti a sorozat további vizsgálatát.

A következő fontos tulajdonság a sorozatok korlátosságára.

11. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ számsorozat **alulról** korlátos, ha értékkészlete alulról korlátos, azaz $\exists k_1 \in \mathbf{R}$, hogy $a_n \geq k_1$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Hasonlóan az $\langle a_n \rangle$ számsorozat **felülről** korlátos, ha értékkészlete felülről korlátos, azaz $\exists k_2 \in \mathbf{R}$, hogy $a_n \leq k_2$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ha egy sorozat egyszerre alulról és felülről korlátos, akkor a sorozatot **korlátos** sorozatnak nevezzük.

A fenti definíció értelmében $\langle a_n \rangle$ egy korlátos sorozat, ha $\exists k_1, k_2 \in \mathbf{R}$, hogy

$$k_1 \leq a_n \leq k_2$$



minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, azaz van olyan intervallum, amely tartalmazza a sorozat értékeit. Ez egyenértékű azzal, hogy $\exists k > 0$, hogy $|a_n| \leq k$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, hiszen a $[k_1, k_2]$ intervallum mindig befoglalható egy $[-k, k]$ szimmetrikus intervallumba.

A sorozatok korlátosságához kapcsolódó fogalmakat és tulajdonságokat teljes egészében a korábbi tananyagokban tanult halmazok korlátosságára vezetjük vissza úgy, hogy az értékkészletüket vesszük alapul. Ezzel könnyen értelmezhetjük a sorozatok alsó és felső korlátjának fogalmát.

12. Definíció. Azt mondjuk, hogy a k_1 valós szám az $\langle a_n \rangle$ számsorozat **alsó korlátja**, ha k_1 alsó korlátja a sorozat értékkészletének, azaz $a_n \geq k_1$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Hasonlóan a k_2 valós szám az $\langle a_n \rangle$ számsorozat **felső korlátja**, ha k_2 felső korlátja a sorozat értékkészletének, azaz $a_n \leq k_2$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.

A halmazok szuprémumát úgy értelmeztük, mint a halmaz felső korlátjai közül a legkisebbiket. Létezéséről a valós számokra vonatkozó teljességi axióma gondoskodik. Hasonlóan a halmazok infimuma nem más mint a halmaz alsó korlátjai közül a legnagyobbik. Sorozatok esetében e két fogalom nem változik lényegesen.

13. Definíció. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy valós számsorozat. Ha van olyan $\beta^* \in \mathbf{R}$, amely teljesíti a következő két feltételt:

- i) β^* felső korlátja az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak,
- ii) ha β felső korlátja az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, akkor $\beta \geq \beta^*$,

akkor azt mondjuk, hogy β^* **felső határa, pontos felső korlátja**, vagy **szuprémuma** az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, és ezt a számot $\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n$ -val jelöljük. Ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat felülről nem korlátos, akkor ezt $\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n = \infty$ módon jelöljük.

14. Definíció. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy valós számsorozat. Ha van olyan $\alpha^* \in \mathbf{R}$, amely teljesíti a következő két feltételt:

- (i) α^* alsó korlátja az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak,
- (ii) ha α alsó korlátja az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, akkor $\alpha \leq \alpha^*$,

akkor azt mondjuk, hogy α^* **alsó határa**, **pontos alsó korlátja**, vagy **infimuma** az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, és ezt a számot $\inf_{n \in \mathbf{N}} a_n$ -val jelöljük. Ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat alulról nem korlátos, akkor ezt $\inf_{n \in \mathbf{N}} a_n = -\infty$ módon jelöljük.

Lássunk néhány példát! Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az

$$a_n := \frac{1}{2^n}$$

sorozatot! A sorozat pozitív elemekből áll, azaz $0 < a_n$, így alulról korlátos. Mivel már igazoltuk, hogy a sorozat monoton csökkenő, így első eleme $a_1 = \frac{1}{2}$ egyben felső korlátja a sorozatnak, sőt ez a sorozat szuprémuma is. Összefoglalva

$$0 < a_n \leq \frac{1}{2}$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, azaz a sorozat korlátos.

Az előbbi példában látható monotonitás és korlátosság közötti kapcsolat mindig teljesül. Nevezetesen, ha egy sorozat monoton csökkenő, akkor felülről korlátos és szuprémuma a sorozat első eleme. Ugyanígy, ha egy sorozat monoton növekvő, akkor alulról korlátos és infimuma a sorozat első eleme. Azonban a sorozat korlátosságából nem következtethetünk a monotonitására. Sőt, egy monoton sorozat nem feltétlenül korlátos (alulról és felülről is egyszerre). Például az $a_n = n$ sorozat szigorúan monoton növekvő, de nem korlátos.

Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1}$$

sorozatot! Mivel igazoltuk, hogy a sorozat monoton növekvő, ezért a sorozat alulról korlátos és infimuma $a_1 = \frac{1}{2}$. A sorozat monotonitásából nem tudunk következtetni arra, hogy felülről korlátos-e vagy sem. Ha felírjuk a sorozat néhány nagy indexű elemét, mint az

$$a_{100} \approx 1,97029, \quad a_{1000} \approx 1,99700, \quad a_{10000} \approx 1,99970, \quad (2)$$

akkor megsejthetjük, hogy $k_2 = 2$ a sorozat felső korlátja. Ezt igazolni tudjuk a következő levezetéssel:

$$\frac{2n-1}{n+1} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2n-1 < 2n+2 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < 2,$$

vagy a

$$\frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$$

átalakítással. Összefoglalva, a sorozat korlátos és

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2n-1}{n+1} < 2$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.

A korlátosság megállapítása nem mindig könnyű feladat, főleg ha ezt elemi úton, ügyes átalakításokkal tesszük. Az előző sorozattal nem volt nehéz dolgunk, de ez csak annak volt köszönhető, hogy a sorozatot definiáló képlet nem túl bonyolult. Mégis segítségünkre volt néhány nagy indexű elemének kiszámítása (2), amivel megsejthettük a sorozat felső korlátját. Azt figyeltük meg, hogy a kiszámított értékek egyre jobban, tetszőleges pontossággal megközelítik ezt a felső korlátot. Ez a felismerés az analízis egyik legfontosabb fogalmához, a határértékhez vezet.

15. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ számsorozat **konvergens**, ha van olyan a valós szám, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbf{N} \text{ úgy, hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ekkor az a számot a sorozat **határértékének** nevezzük, és azt mondjuk, hogy a sorozat **konvergál**, vagy **tart** az a -hoz. Ezt röviden az $a_n \rightarrow a$ módon jelöljük. A határértéket a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ módon is szokás jelölni. Ha egy sorozat nem konvergens, akkor **divergensnek** mondjuk.

Mit is jelent pontosan az, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart az a számhoz? Vegyük észre, hogy a definícióban szereplő $|a_n - a| < \varepsilon$ egyenlőtlenség ekvivalens az

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

tulajdonsággal, ami azt jelenti, hogy a_n eleme az a középpontú ε sugarú $K(a, \varepsilon)$ környezetnek. Ezért egy szám akkor és csak akkor lesz határértéke egy sorozatnak, ha a szám bármely ε sugarú környezetéhez (azaz minden környezetéhez) találunk olyan n_0 indexet (ún. **küszöbindexet**) úgy, hogy minden ennél nagyobb indexű sorozatbeli elem értéke beleesik ebbe a környezetbe. Mivel a küszöbindex előtt csak véges sok index van, így másképpen is meg tudjuk fogalmazni a konvergencia fogalmát.

„Az $\langle a_n \rangle$ számsorozat akkor és csak akkor tart az a számhoz, ha az a minden környezetéből legfeljebb véges sok sorozatbeli elem marad ki.”

A fenti állításból következik, hogy a sorozat konvergenciáját véges sok elem elhagyása vagy megváltoztatása nem befolyásolja.

Mielőtt konkrét példákat nézünk, meg kell jegyeznem, hogy a határérték egyértelműen meghatározható, ha létezik. Ezt mondja ki a következő tétel.

12. Tétel. *Ha egy sorozat konvergens, akkor nincs két különböző határértéke.*

Bizonyítás. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy konvergens sorozat, $a, b \in \mathbf{R}$, és indirekt módon tegyük fel, hogy $a_n \rightarrow a$, $a_n \rightarrow b$, de $a \neq b$. Legyen a konvergencia definíciójában szereplő $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$. Ekkor

$$a_n \rightarrow a \implies \exists n_1 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |a_n - a| < \frac{|a-b|}{2} \text{ ha } n > n_1,$$

és

$$a_n \rightarrow b \implies \exists n_2 \in \mathbf{N}, \text{ hogy } |a_n - b| < \frac{|a-b|}{2} \text{ ha } n > n_2.$$

Vegyünk olyan n indexet, amely egyszerre nagyobb mint az n_1 és n_2 , azaz $n > \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor a háromszög egyenlőtlenségből következik, hogy

$$|a-b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = |a-b|,$$

ami nem lehetséges, mert az $|a-b|$ szám nem lehet szigorúan kisebb saját magánál. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Térjünk vissza az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1}$$

sorozathoz. Azt tapasztaltuk, hogy a nagy indexű elemek értékei egyre jobban megközelítik a 2-es számot. Azt sejtjük tehát, hogy ez lesz a sorozat határértéke. Hogyan tudjuk ezt igazolni?

A konvergencia fogalma szerint minden $\varepsilon > 0$ számhoz keresünk egy ε -tól függő n_0 küszöbindexet, hogy ha $n > n_0$, akkor $|a_n - a| < \varepsilon$. Vizsgáljuk meg azokat az n indexeket, amelyek kielégítik az $|a_n - a| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget!

Ekvivalens átalakításokkal azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{2n-1-2n-2}{n+1} \right| < \varepsilon \iff \\ &\iff \left| \frac{-3}{n+1} \right| < \varepsilon \iff \frac{3}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{3}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Tehát jelen sorozatnál $|a_n - a| < \varepsilon$ ekvivalens azzal, hogy

$$n > \frac{3}{\varepsilon} - 1.$$

Azonban $\frac{3}{\varepsilon} - 1$ nem lehet küszöbindex minden ε számhoz, mert nem feltétlenül pozitív egész szám. Ezt a problémát technikailag úgy oldjuk meg, hogy küszöbindexnek vesszük a $\frac{3}{\varepsilon} - 1$ szám egész részét, ha ez a szám nagyobb vagy egyenlő mint 1, illetve 1-et, ha a $\frac{3}{\varepsilon} - 1$ szám egész része nulla vagy negatív. Összefoglalva:

$$n_0 = \max \left\{ \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} - 1 \right\rceil, 1 \right\},$$

Ekkor ha $n > n_0$, akkor

$$n > \frac{3}{\varepsilon} - 1, \quad \text{és így} \quad \left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon,$$

azaz $|a_n - a| < \varepsilon$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy jelen sorozat esetén az $a = 2$ kielégíti a konvergencia definícióját, ezért a sorozat konvergens és határértéke 2. Ekkor a definícióban bevezetett jelölésekkel azt is írhatjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2.$$

Az előbbihez hasonlóan nem nehéz igazolni, hogy az

$$a_n := \frac{1}{2^n}$$

sorozat nullához tart. Valóban, az

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > -\log_2 \varepsilon,$$

átalakításokból látható, hogy

$$n_0 = \max \{ \lceil -\log_2 \varepsilon \rceil, 1 \}$$

küszöbindex tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén.

Szeretném megjegyezni, hogy egy sorozatot **nullsorozatnak** nevezzük, ha konvergens és határértéke 0.

Fontos megjegyezni még, hogy a határérték definíciójával csak egy már meglévő számról tudunk megbizonyosodni, hogy határértéke-e a sorozatnak. Léteznek olyan módszerek, amelyekkel ki tudjuk számítani a határértéket közvetlenül a sorozatot definiáló képletből a benne szereplő műveletek alapján. A sorozatok határértékszámításával egy másik tananyagban fogunk részletesen foglalkozni.

A határérték fogalmához egy másik feladat kapcsolódik, amelyet küszöbindex-számításnak fogunk hívni. Az a feladat, hogy konkrét ε érték mellett meghatározzuk a hozzátartozó legkisebb küszöbindexet, ami azt mutatja, milyen „gyorsan” konvergál egy sorozat a határértékéhez. A küszöbindex-számítás általában ugyanúgy zajlik, mint annak bizonyítása, hogy a sorozat konvergens. Annyi az eltérés, hogy egy konkrét ε érték mellett konkrét n_0 küszöbindexet kapunk.

Számítsuk ki az előző példák esetében a küszöbindexet az $\varepsilon = 10^{-3}$ érték mellett! Mivel már kiszámoltuk a küszöbindexeket ε függvényében, így csak be kell helyettesíteni az $\varepsilon = 10^{-3}$ értéket a végeredményekbe:

- $a_n := \frac{2n-1}{n+1}$ esetén $n_0 = \left\lceil \frac{3}{10^{-3}} - 1 \right\rceil = 2999$,
- $a_n := \frac{1}{2^n}$ esetén $n_0 = \lceil -\log_2 10^{-3} \rceil = \lceil 9,965 \rceil = 10$.

A következőekben azt vizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat van az eddig tanult tulajdonságok között.

13. Tétel. *Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.*

Bizonyítás. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy konvergens sorozat, amelynek a a határértéke. Válasszuk a definícióban szereplő ε -t 1-nek, és legyen n_0 az ehhez tartozó küszöbindex. Így ha $n > n_0$, akkor

$$a - 1 < a_n < a + 1,$$

azaz $|a_n| < \max\{|a - 1|, |a + 1|\}$, ha $n > n_0$. Továbbá legyen

$$K := \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |a - 1|, |a + 1|\}.$$

Ilyen maximum létezik, mert a halmaznak véges sok eleme van. Ekkor nyilvánvalóan $|a_n| \leq K$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, azaz a sorozat korlátos. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A tétel megfordítása nem igaz. Vannak olyan korlátos sorozatok, amelyek nem konvergensek. Ilyen például az

$$a_n := (-1)^n$$

sorozat, amelynek értékkészlete $\{-1, 1\}$, azaz korlátos sorozat, de nem tarthat semmilyen számhoz, mert bármely 1 hosszúságú nyílt intervallumból (azaz bármely $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sugarú környezetből) a sorozat minden második eleme biztosan kimarad, ami végtelen sok sorozatbeli elemet jelent.

Az $a_n := n$ sorozat mutatja, hogy egy monoton sorozat nem feltétlenül konvergens. A következő tételből az derül ki, hogy ennek oka az, hogy a sorozat nem korlátos.

14. Tétel. *Ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy monoton növekvő korlátos sorozat. A korlátosság miatt a sorozatnak van szuprémuma, amelyet a -val jelölünk. Legyen $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges szám. Ekkor $a - \varepsilon$ már nem szuprémum, azaz $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $a - \varepsilon < a_{n_0} < a$. Mivel a sorozat monoton növekvő, így $a_{n_0} \leq a_n \leq a$ minden $n > n_0$ esetén. Összefoglalva, minden $\varepsilon > 0$ -hoz találtunk olyan $n_0 \in \mathbf{N}$ indexet, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon,$$

azaz $|a_n - a| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy a sorozat konvergens és határértéke a -val egyenlő.

A bizonyítás hasonló monoton csökkenő sorozatok esetében. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Természetesen nem monoton sorozat is lehet konvergens. Az

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n}$$

sorozat nem monoton, hiszen minden második eleme előjelet vált. Azonban a definíció alapján nem nehéz igazolni, hogy a sorozat tart a nullához. Valóban, a

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon},$$

ekvivalens átalakításokból következik, hogy az

$$n_0 = \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil, 1 \right\}$$

küszöbindex tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén.

A 13. és a 14. Tétel szerint a monoton sorozatokkal két lehetséges eset áll elő. A sorozat korlátos és konvergens, vagy a sorozat nem korlátos és divergens. A 14. Tétel bizonyításából következik, hogy ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, akkor a sorozat szuprémuma egyben a sorozat határértéke is, illetve ha a határértéket a -val jelöljük, akkor

$$a_1 \leq a_n \leq a \quad \text{minden } n \in \mathbf{N} \text{ esetén.}$$

Hasonlóan, ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, akkor a sorozat infimuma egyben a sorozat határértéke is, illetve ha a határértéket a -val jelöljük, akkor

$$a \leq a_n \leq a_1 \quad \text{minden } n \in \mathbf{N} \text{ esetén.}$$

Szigorú monotonitás esetén a fenti egyenlőtlenségekben $a_n \neq a$.

A fenti állítások jól mutatják, hogy a sorozat monotonitása leegyszerűsíti a további vizsgálatokat, ezért érdemes a sorozatok vizsgálatát a monotonitással kezdeni. Ha a sorozat csak egy bizonyos index után monoton, akkor ezt a tényt is jól tudjuk használni a sorozat további vizsgálatához, mert véges sok elem nem változtat a sorozat konvergenciáján vagy korlátosságán, bár korlátosság esetén módosíthatja a pontos alsó és felső korlátokat.

4. Kidolgozott feladatok

8. Feladat. Vizsgáljuk meg monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából a következő sorozatokat! Ha konvergensek, számítsuk ki az $\varepsilon = 10^{-3}$ -hoz tartozó küszöbindexet!

$$\begin{array}{ll} (a) \ a_n := \frac{3n+2}{2n-1}, & (b) \ a_n := \frac{2n+1}{1-3n}, \\ (c) \ a_n := \frac{4n+1}{2n-5}, & (d) \ a_n := \frac{2n+1}{n^2+1}, \\ (e) \ a_n := \frac{2^n}{3 \cdot 2^n - 1}, & (f) \ a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}. \end{array}$$

Megoldás:

$$(a) \ a_n := \frac{3n+2}{2n-1}$$

$a_1 = 5, a_2 = \frac{8}{3}, a_3 = \frac{11}{5}, a_4 = \frac{14}{7}$. Mivel a kapott értékek csökkennek, így ha a sorozat monoton, akkor csak monoton csökkenő lehet.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)+2}{2(n+1)-1} - \frac{3n+2}{2n-1} = \frac{3n+5}{2n+1} - \frac{3n+2}{2n-1} = \\ &= \frac{(3n+5)(2n-1) - (3n+2)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} = \\ &= \frac{-7}{(2n+1)(2n-1)} < 0, \end{aligned}$$

hiszen $2n+1 > 0$ és $2n-1 > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ezért a sorozat **szigorúan monoton csökkenő**. Az

$$a_n := \frac{3n+2}{2n-1} = \frac{3 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}}$$

átalakításból sejthető, hogy a sorozat határértéke $\frac{3}{2}$, hiszen az $\frac{1}{n}$ mennyiség elég kicsi, ha n elég nagy. Továbbá,

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n+2}{2n-1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{6n+4-6n+3}{2(2n-1)} \right| < \varepsilon \iff \\ \iff \left| \frac{7}{2(2n-1)} \right| < \varepsilon &\iff \frac{7}{2(2n-1)} < \varepsilon \iff n > \frac{\frac{7}{2\varepsilon} + 1}{2}. \end{aligned}$$

Ekkor van

$$n_0 = \max \left\{ \left\lceil \frac{\frac{7}{2\varepsilon} + 1}{2} \right\rceil, 1 \right\}$$

ε -tól függő küszöbindex, azaz a sorozat **konvergens** és határértéke $\frac{3}{2}$.

$\varepsilon = 10^{-3}$ esetén a küszöbindex $n_0 = \left\lceil \frac{\frac{7}{2 \cdot 10^{-3}} + 1}{2} \right\rceil = 1750$.

A sorozat **korlátos**, mert konvergens, és monotonitása miatt

$$\frac{3}{2} < a_n \leq 5.$$

(b) $a_n := \frac{2n+1}{1-3n}$

$a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = -1$, $a_3 = -\frac{7}{8}$, $a_4 = -\frac{9}{11}$. Mivel a kapott értékek növekednek, így ha a sorozat monoton, akkor csak monoton növekvő lehet.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)+1}{1-3(n+1)} - \frac{2n+1}{1-3n} = \frac{2n+3}{-2-3n} - \frac{2n+1}{1-3n} \\ &= \frac{5}{(3n+2)(3n-1)} > 0, \end{aligned}$$

hiszen $3n+2 > 0$ és $3n-1 > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ezért a sorozat **szigorúan monoton növekvő**. Az

$$a_n := \frac{2n+1}{1-3n} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - 3}$$

átalakításból sejthető, hogy a sorozat határértéke $-\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{2n+1}{1-3n} + \frac{2}{3} \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{6n+3+2-6n}{3(1-3n)} \right| < \varepsilon \iff \\ \iff \left| \frac{5}{3(1-3n)} \right| < \varepsilon &\iff \frac{5}{3(3n-1)} < \varepsilon \iff n > \frac{\frac{5}{3\varepsilon} + 1}{3}. \end{aligned}$$

Ekkor van

$$n_0 = \max \left\{ \left\lceil \frac{\frac{5}{3\varepsilon} + 1}{3} \right\rceil, 1 \right\}$$

ε -tól függő küszöbindex, azaz a sorozat **konvergens** és határértéke $-\frac{2}{3}$.

$\varepsilon = 10^{-3}$ esetén a küszöbindex $n_0 = \left\lceil \frac{\frac{5}{3 \cdot 10^{-3}} + 1}{3} \right\rceil = 555$.

A sorozat **korlátos**, mert konvergens, és monotonitása miatt

$$-\frac{3}{2} \leq a_n < -\frac{2}{3}.$$

$$(c) \quad a_n := \frac{4n+1}{2n-5}$$

$a_1 = -\frac{5}{3}$, $a_2 = -9$, $a_3 = 13$, azaz a sorozat nem monoton. Azonban

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{4(n+1)+1}{2(n+1)-5} - \frac{4n+1}{2n-5} = \frac{4n+5}{2n-3} - \frac{4n+1}{2n-5} = \\ &= \frac{-22}{(2n-3)(2n-5)} < 0, \end{aligned}$$

ha $2n-3 > 0$ és $2n-5 > 0$, azaz ha $n > 2$. Így a sorozat **szigorúan monoton csökkenő**, ha $n > 2$. Az

$$a_n := \frac{4n+1}{2n-5} = \frac{4 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{5}{n}}$$

átalakításból sejthető, hogy a sorozat határértéke $\frac{4}{2} = 2$. Ha $n \geq 3$, akkor

$$\begin{aligned} \left| \frac{4n+1}{2n-5} - 2 \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{4n+1-4n+10}{2n-5} \right| < \varepsilon \iff \\ \iff \left| \frac{11}{2n-5} \right| < \varepsilon &\stackrel{(n \geq 3)}{\iff} \frac{11}{2n-5} < \varepsilon \iff n > \frac{\frac{11}{\varepsilon} + 5}{2}. \end{aligned}$$

Ekkor van

$$n_0 = \max \left\{ \left\lceil \frac{\frac{11}{\varepsilon} + 5}{2} \right\rceil, 3 \right\}$$

ε -tól függő küszöbindex, azaz a sorozat **konvergens** és határértéke 2.

$\varepsilon = 10^{-3}$ esetén a küszöbindex $n_0 = \left\lceil \frac{\frac{11}{10^{-3}} + 5}{2} \right\rceil = 5502$.

A sorozat **korlátos**, mert konvergens és a 3. elemtől kezdve monoton csökkenő, így ezek az elemek a 3. elem értéke és a határérték között vannak, azaz 13 és 2 között. Az első két elem figyelembevételével

$$-9 \leq a_n \leq 13.$$

$$(d) \quad a_n := \frac{2n+1}{n^2+1}$$

$a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{7}{10}$, $a_4 = \frac{9}{17}$. Mivel a kapott értékek csökkennek, így ha a sorozat monoton, akkor csak monoton csökkenő lehet.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2+1} - \frac{2n+1}{n^2+1} = \frac{2n+3}{n^2+2n+2} - \frac{2n+1}{n^2+1} = \\ &= -\frac{2n^2+4n-1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0, \end{aligned}$$

hiszen az $n^2 + 1 > 0$ és $n^2 + 2n + 2 > 0$, illetve

$$2n^2 + 4n - 1 > 4n - 1 \geq 3 > 0$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ezért a sorozat **szigorúan monoton csökkenő**. Fontos megjegyezni, hogy nem mindig lehet egyszerű becslésekkel megállapítani, mikor pozitív egy másodfokú kifejezést. A másodfokú egyenlőtlenségek megoldásáról a „Valós függvények” című tananyagban olvashatunk. Ha ezt alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy a $2x^2 + 4x - 1 > 0$ másodfokú egyenlőtlenség megoldása

$$x < -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{és} \quad x > -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Mivel

$$n \geq 1 > -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 0,22,$$

így $2n^2 + 4n - 1 > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén.

Az

$$a_n := \frac{2n+1}{n^2+1} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

átalakításból sejthető, hogy a sorozat határértéke 0.

$$\left| \frac{2n+1}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2n+1}{n^2+1} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < \varepsilon n^2 - 2n + \varepsilon - 1$$

A fenti másodfokú kifejezés főegyütthatója pozitív ($\varepsilon > 0$) és diszkriminánsa $4 - 4\varepsilon(\varepsilon - 1)$. Ezért ha a diszkrimináns negatív, akkor a másodfokú kifejezés csak pozitív értékeket vehet fel. A

$$4 - 4\varepsilon(\varepsilon - 1) = -4\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 4 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon^2 - \varepsilon - 1 > 0$$

egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\varepsilon < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad \varepsilon > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Tehát ha $\varepsilon > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, akkor a másodfokú kifejezés értéke pozitív minden $n \in \mathbf{N}$, azaz $n_0 = 1$. Másrészt ha $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, akkor a diszkrimináns nem negatív, és így a másodfokú kifejezés pozitív, ha n nagyobb, mint a legnagyobb gyöke, azaz

$$n > \frac{2 + \sqrt{4 - 4\varepsilon(\varepsilon - 1)}}{2\varepsilon}.$$

Ekkor van

$$n_0 = \max \left\{ \left\lceil \frac{2 + \sqrt{4 - 4\varepsilon(\varepsilon - 1)}}{2\varepsilon} \right\rceil, 1 \right\}$$

ε -tól függő küszöbindex, azaz a sorozat **konvergens** és határértéke 0.

$$\varepsilon = 10^{-3} \text{ esetén a küszöbindex } n_0 = \left\lceil \frac{2 + \sqrt{4 - 4 \cdot 10^{-3}(10^{-3} - 1)}}{2 \cdot 10^{-3}} \right\rceil = 2000.$$

A sorozat **korlátos**, mert konvergens, és monotonitása miatt

$$0 < a_n \leq \frac{3}{2}.$$

$$(e) \quad a_n := \frac{2^n}{3 \cdot 2^n - 1}$$

$a_1 = \frac{2}{5}$, $a_2 = \frac{4}{11}$, $a_3 = \frac{8}{23}$, $a_4 = \frac{16}{47}$. Mivel a kapott értékek csökkennek, így ha a sorozat monoton, akkor csak monoton csökkenő lehet.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2^{n+1}}{3 \cdot 2^{n+1} - 1} - \frac{2^n}{3 \cdot 2^n - 1} = \frac{2 \cdot 2^n}{6 \cdot 2^n - 1} - \frac{2^n}{3 \cdot 2^n - 1} = \\ &= -\frac{2^n}{(6 \cdot 2^n - 1)(3 \cdot 2^n - 1)} < 0, \end{aligned}$$

hiszen $6 \cdot 2^n - 1 > 0$ és $3 \cdot 2^n - 1 > 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ezért a sorozat **szigorúan monoton csökkenő**. Az

$$a_n := \frac{2^n}{3 \cdot 2^n - 1} = \frac{1}{3 - \frac{1}{2^n}}$$

átalakításból sejthető, hogy a sorozat határértéke $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{2^n}{3 \cdot 2^n - 1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{3 \cdot 2^n - 3 \cdot 2^n + 1}{3(3 \cdot 2^n - 1)} \right| < \varepsilon \iff \\ &\iff \frac{1}{3(3 \cdot 2^n - 1)} < \varepsilon \iff n > \log_2 \frac{\frac{1}{3\varepsilon} + 1}{3}. \end{aligned}$$

Ekkor van

$$n_0 = \max \left\{ \left\lceil \log_2 \frac{\frac{1}{3\varepsilon} + 1}{3} \right\rceil, 1 \right\}$$

ε -tól függő küszöbindex, azaz a sorozat **konvergens** és határértéke $\frac{1}{3}$.

$$\varepsilon = 10^{-3} \text{ esetén a küszöbindex } n_0 = \left\lceil \log_2 \frac{\frac{1}{3 \cdot 10^{-3}} + 1}{3} \right\rceil = 6.$$

A sorozat **korlátos**, mert konvergens, és monotonitása miatt

$$\frac{1}{3} < a_n \leq \frac{2}{5}.$$

(f) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$a_1 \approx 0,42$, $a_2 \approx 0,32$, $a_3 \approx 0,27$, $a_4 \approx 0,24$. Mivel a kapott értékek csökkennek, így ha a sorozat monoton, akkor csak monoton csökkenő lehet. A sorozat csak pozitív értékeket vehet fel, így

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1 \end{aligned}$$

minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ezért a sorozat **szigorúan monoton csökkenő**.

A

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

átalakításból sejthető, hogy a sorozat határértéke 0. Négyzetre emeléssel

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 0 \right| < \varepsilon &\iff \sqrt{n+1} < \varepsilon + \sqrt{n} \iff \\ &\iff n+1 < \varepsilon + n + 2\varepsilon\sqrt{n} \iff \sqrt{n} > \frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ha $\varepsilon > 1$, akkor a fenti egyenlőtlenség igaz minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, azaz $n_0 = 1$. Másrészt ha $0 < \varepsilon \leq 1$, akkor a fenti egyenlőtlenség ekvivalens az

$$n > \left(\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right)^2$$

egyenlőtlenséggel. Ekkor van

$$n_0 = \max \left\{ \left[\left(\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon} \right)^2 \right], 1 \right\}$$

ε -tól függő küszöbindex, azaz a sorozat **konvergens** és határértéke 0.

$$\varepsilon = 10^{-3} \text{ esetén a küszöbindex } n_0 = \left[\left(\frac{1-10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \right] = 249\,500.$$

A sorozat **korlátos**, mert konvergens, és monotonitása miatt

$$0 < a_n \leq \sqrt{2} - 1.$$

5. Részsorozatok

Az előző részben szereplő sorozatok vizsgálatát a monotonitás nagyon megkönnyítette, de lesznek olyan sorozatok, amelyekkel nehezebb dolgunk lesz. Ezekben az esetekben a sorozatot felbontjuk olyan „kezelhető” részekre, amelyek követik az eredeti sorozat menetét. Ezek a részek szintén sorozatok, amelyek az eredeti sorozat elemeiből épülnek fel úgy, hogy változatlan marad az eredeti sorozatban lévő sorrendjük.

16. Definíció. Legyen $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ egy szigorúan monoton növekvő leképezés és $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat. Ekkor a

$$b_n := a_{\varphi(n)}, \quad (n \in \mathbf{N})$$

módon kapott $\langle b_n \rangle$ sorozatot az $\langle a_n \rangle$ sorozat **részsorozatának** nevezzük.

Részsorozathoz jutunk, ha egy sorozatból az index szerint növekvő sorrendben választunk ki végtelen sok elemet, azaz ha kiválasztunk egy elemet, akkor ezután csak magasabb indexű elemekből választhatunk. Részsorozatot kapunk akkor is, ha egy sorozatból kihagyunk elemeket úgy, hogy megtartunk végtelen sok elemet az eredeti sorrendben.

A fenti definícióban szereplő φ leképezés azt a szabályt írja le, hogy hogyan válogatottunk ki a részsorozat elemeit az eredeti sorozatból. Például, ha az $\langle a_n \rangle$ sorozatból ki szeretnénk válogatni minden második elemét, és ezzel csak a páros indexű elemeket megtartani, akkor a $\varphi(n) = 2n$ szabállyal a $b_n = a_{2n}$ módon értelmezett $\langle b_n \rangle$ részsorozatot kapjuk. Ez lesz az

$$\langle a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}, a_{14}, \dots \rangle$$

sorozat, amely az $\langle a_n \rangle$ sorozat egyik részsorozata. Azonban az

$$\langle a_2, a_8, a_4, a_6, a_{10}, a_{12}, a_{14}, \dots \rangle$$

sorozat már nem részsorozata az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, hiszen az elemek az $\langle a_n \rangle$ sorozattól eltérő sorrendben követik egymást. Az a tény, hogy a részsorozat elemei az eredeti sorozattal azonos sorrendben követik egymást, abból következik, hogy az elemek kiválasztását leíró φ leképezés szigorúan monoton növekvő.

Fontos megjegyezni, hogy minden sorozat saját magának részsorozata, hiszen a $\varphi(n) = n$ szabállyal kiválogatjuk a sorozat összes elemét.

Nézzük egy konkrét példát! Az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1}$$

sorozatnak

$$b_n := a_{n^2} = \frac{2n^2-1}{n^2+1} \quad \text{és} \quad c_n := a_{2n-1} = \frac{4n-3}{2n}$$

két különböző részsorozata, amelyeket úgy kaptunk meg, hogy az eredeti $\langle a_n \rangle$ sorozat képletében az n index helyett n^2 -et írtunk a $\langle b_n \rangle$ részsorozat esetén, illetve $2n - 1$ -et írtunk a $\langle c_n \rangle$ részsorozat esetén. Ezt azért tehettük meg, mert mind a két kifejezés (n^2 és $2n - 1$) szigorúan monoton növekvő az n változójára nézve.

Felvetődik a kérdés, hogy a részsorozatok öröklik-e az eredeti sorozat tulajdonságait. Ha ez igaz, akkor ez több sorozat vizsgálatát könnyítené meg. Például, az előző részben megvizsgáltunk az

$$a_n := \frac{2n - 1}{n + 1}$$

sorozatot, és az derült ki, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő, korlátos, pontos alsó korlátja $\frac{1}{2}$, pontos felső korlátja 2, illetve konvergens és határértéke 2. Jelentős munkát spórolnánk meg, ha mindezek a tulajdonságok igazak lennének például a

$$b_n := \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

sorozatra pusztán csak azért, mert részsorozata az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak. Vizsgáljuk meg tehát a feltett kérdést lépésenként.

Abból a tényből, hogy egy részsorozat elemei az eredeti sorozattal azonos sorrendben követik egymást, nyilvánvalóan következik, hogy a részsorozat monotonitása azonos az eredeti sorozat monotonitásával. Hogyan tudnánk ezt az állítást precízen igazolni? Tegyük fel, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat monoton növekvő, és legyen $b_n := a_{\varphi(n)}$ az egyik részsorozata. Mivel a φ leképezés szigorúan monoton növekvő, és pozitív egész értékeket vesz fel, így

$$\varphi(n + 1) \geq \varphi(n) + 1 > \varphi(n)$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor az $\langle a_n \rangle$ sorozat monotonitása miatt

$$b_{n+1} = a_{\varphi(n+1)} \geq a_{\varphi(n)+1} \geq a_{\varphi(n)} = b_n$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy a $\langle b_n \rangle$ részsorozat is monoton növekvő. A többi monotonitási eset hasonlóan igazolható. Szeretném megjegyezni, hogy egy nem monoton sorozatnak mindig van monoton részsorozata.

Hasonló a helyzet a korlátossággal, nevezetesen egy korlátos sorozat összes részsorozata is korlátos. Továbbá, ha egy sorozat alulról vagy felülről korlátos, akkor ez szintén igaz minden részsorozatára. Ez abból következik, hogy a részsorozatok értékkészlete az eredeti sorozat értékkészletének részhalmaza, és a sorozatok korlátossága egyenértékű az értékkészletének korlátosságával.

Azonban egy részsorozat pontos alsó és felső korlátja már nem feltétlenül egyezik meg az eredeti sorozat alsó és felső korlátjával. Gondoljunk például egy szigorúan monoton növekvő $\langle a_n \rangle$ sorozatra, és tekintsünk az

$$\langle a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots \rangle$$

részsorozatára. A monotonitás miatt $\langle a_n \rangle$ infimuma az a_1 elem értéke, de a részsorozat infimuma az a_2 elem értéke, amik nem egyenlőek a szigorú monotonitás miatt.

Fontos még megjegyezni, hogy vannak olyan nem korlátos sorozatok, amelyeknek egyik részszorozata sem korlátos, illetve vannak olyan nem korlátos sorozatok, amelyeknek van korlátos részszorozata. Az első esetet jól példázza az $a_n := n$ sorozat, a másodikat az

$$a_n := \begin{cases} n & \text{ha } n \text{ páros szám,} \\ 1 & \text{ha } n \text{ páratlan szám} \end{cases}$$

sorozat. Ez utóbbi példában a $b_n := a_{2n-1} = 1$ korlátos részszorozat.

A részszorozatok konvergenciájára vonatkozó állítás igazolása már valamivel nehezebb, mint a következő tétel bizonyításában látható.

15. Tétel. *Egy sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden részszorozata konvergens és ugyanehhez a határértékéhez tart.*

Bizonyítás. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy konvergens sorozat, amely az a valós számhoz tart, és

$$b_n := a_{\varphi(n)}$$

az egyik részszorozata. A konvergencia fogalma szerint

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } |a_n - a| < \varepsilon.$$

A $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ egyenlőtlenség alkalmazásával nem nehéz igazolni teljes indukcióval, hogy $\varphi(n) \geq n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén. Ez utóbbiból következik, hogy ha $n > n_0$, akkor $\varphi(n) > \varphi(n_0) \geq n_0$, hiszen φ monoton növekvő. Így

$$|a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon, \quad \text{azaz} \quad |b_n - a| < \varepsilon.$$

Ez azt bizonyítja, hogy $b_n \rightarrow a$.

Fordítva, ha minden részszorozat konvergens, akkor az eredeti sorozat is az lesz, hiszen minden sorozat saját magának részszorozata.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételből következik, hogy ha egy sorozatnak van divergens részszorozata, vagy van két konvergens, de nem ugyanahhoz a számhoz tartó részszorozata, akkor a sorozat divergens. Megjegyzem, hogy vannak olyan divergens sorozatok, amelyeknek van konvergens részszorozata. Valóban, az

$$a_n := \begin{cases} n & \text{ha } n \text{ páros szám,} \\ 1 & \text{ha } n \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

sorozat divergens, de a $b_n := a_{2n-1} = 1$ részszorozata konvergens.

A részszorozatok tulajdonságaira vonatkozó eredményeket egy mondatban össze tudjuk foglalni: a részszorozatok öröklik a monotonitást, a korlátosságot és a konvergenciát, de a pontos alsó és felső korlát értéke nem mindig ugyanaz. Az előző

$$b_n := \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$$

példához visszatérve a $\langle b_n \rangle$ sorozat szigorúan monoton növekvő és korlátos, illetve konvergens és határértéke 2, hiszen részsorozata az

$$a_n := \frac{2n-1}{n+1}$$

sorozatnak, így ezeket a tulajdonságokat örökli tőle. A monotonitás miatt a $\langle b_n \rangle$ elemei az első eleme és a határértéke között helyezkednek el, azaz

$$\frac{1}{2} \leq b_n < 2.$$

A következőben szeretnénk a fentieket megfordítani és megvizsgálni, hogy néhány speciális részsorozat tulajdonságaiból tudunk-e következtetni az egész sorozat tulajdonságaira. Látni fogunk, hogy vannak ilyen részsorozatok.

17. Definíció. Legyen $k \in \mathbf{N}$. Azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat felbontható a $\langle b_n^{(1)} \rangle, \dots, \langle b_n^{(k)} \rangle$ páronként diszjunkt részsorozatokra, ha a részsorozatokhoz tartozó φ_i ($i = 1, \dots, k$) szigorúan monoton növekvő leképezések értékkészletei egy osztályozása a természetes számok halmazának.

Az osztályozás azt jelenti, hogy a sorozatnak nincs olyan eleme, amely szerepel a felbontás két különböző részsorozatában, de minden eleme biztosan szerepel a felbontás egyik részsorozatában. Ilyen felbontás lehet a sorozat páros és páratlan indexű részsorozatai.

Az egyes páronként diszjunkt részsorozatok monotonitásából nem kapunk információt az egész sorozat monotonitására. Nem nehéz olyan találni olyan sorozatra, ahol a felbontásban szereplő minden egyes részsorozat monoton növekvő, de az egész sorozat nem lesz az. Valóban, az

$$a_n := (-1)^n - \frac{1}{n}$$

sorozat ilyen, ha felbontjuk páros és páratlan indexű részsorozatokra, hiszen látható, hogy mindkét

$$b_n^{(1)} := a_{2n} := 1 - \frac{1}{2n} \quad \text{és} \quad b_n^{(2)} := a_{2n-1} := -1 - \frac{1}{2n-1}$$

részsorozat monoton növekvő.

Azonban ha az egyes páronként diszjunkt részsorozatok korlátosak, akkor az egész sorozat is korlátos lesz. Ez abból az egyszerű tényből következik, hogy véges sok korlátos halmaz uniója is korlátos halmaz, hiszen az eredeti sorozat értékkészlete az egyes részsorozatok értékkészletének uniója. Ez ugyanúgy teljesül alulról és felülről korlátosságra is.

Hasonló a helyzet a konvergenciával.

16. Tétel. *Ha egy sorozatnak van egy páronként diszjunkt, véges számú részsorozatból álló felbontása, amely felbontásban szereplő részsorozatok konvergensek és mindegyik ugyanahhoz a számhoz tart, akkor az eredeti sorozat konvergens és ugyanahhoz a számhoz tart.*

Bizonyítás. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy sorozat, és $\langle b_n^{(1)} \rangle, \dots, \langle b_n^{(k)} \rangle$ a sorozat egy páronként diszjunkt részsorozatokból álló felbontása. Jelöljük φ_i -vel a $\langle b_n^{(i)} \rangle$ részsorozathoz tartozó leképezést, azaz

$$b_n^{(i)} := a_{\varphi_i(n)} \quad (n \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, k).$$

Ha minden $\langle b_n^{(i)} \rangle$ sorozat konvergens és közös határértékük van, amit a -val jelölünk, akkor a konvergencia fogalma alapján

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0^{(i)} \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0^{(i)}, \text{ akkor } |b_n^{(i)} - a| < \varepsilon. \quad (3)$$

Legyen $n_0 := \max\{\varphi_i(n_0^{(i)}): i = 1, \dots, k\}$, továbbá legyen $n > n_0$. Tegyük fel, hogy $\langle b_n^{(i)} \rangle$ az a részsorozat, ami az a_n elemet tartalmazza, azaz a $\langle b_n^{(i)} \rangle$ sorozatnak van olyan m indexe, hogy $b_m^{(i)} = a_n$, és így $\varphi_i(m) = n$. Ekkor

$$\varphi_i(m) = n > n_0 \geq \varphi_i(n_0^{(i)}).$$

Ebből az következik, hogy $m > n_0^{(i)}$, hiszen az inverz függvény monotonitására vonatkozó tételből tudjuk, hogy φ_i inverze is szigorúan monoton növekvő leképezés. Ezért (3) miatt azt kapjuk, hogy

$$|b_m^{(i)} - a| < \varepsilon$$

azaz $|a_n - a| < \varepsilon$. Ez azt bizonyítja, hogy $a_n \rightarrow a$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A páronként diszjunkt részsorozatokra való felbontást gyakran alkalmazzuk alternáló értékeket felvevő sorozatok vizsgálatokor. Például az

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n}$$

sorozatot érdemes külön páros és páratlan indexű részsorozatokra bontani:

$$b_n^{(1)} := a_{2n} = \frac{1}{2n} \quad \text{és} \quad b_n^{(2)} := a_{2n-1} = -\frac{1}{2n-1}.$$

Nem nehéz igazolni, hogy a fenti két részsorozat monoton, korlátos és nullához tart, illetve $\langle b_n^{(1)} \rangle$ szigorúan monoton csökkenő, és $\langle b_n^{(2)} \rangle$ szigorúan monoton növekvő sorozat, valamint

$$0 < b_n^{(1)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad -1 \leq b_n^{(2)} < 0.$$

Ezekből következik, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos, konvergens és szintén nullához tart, valamint

$$-1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}.$$

Azonban az $\langle a_n \rangle$ sorozat nem monoton egyetlen index után sem, mert minden páros indexű eleme nullánál nagyobb, és minden páratlan indexű eleme nullánál kisebb.

Érdekességgént említem, hogy a sorozat páronként diszjunkt részsorozatokra való felbontása kizárólag véges sok részsorozat esetén használható, különben nem biztos, hogy a 16. Tétel teljesül. Lássunk erről egy ellenpéldát! Tudjuk, hogy minden n pozitív egész szám egyértelműen felírható az $n = 2^k q$ alakban, ahol k egy nem negatív egész szám és q egy pozitív páratlan szám. Ennek segítségével definiáljuk az $a_n := \frac{1}{q}$ sorozatot. Továbbá, minden fix k nem negatív egész szám esetén értelmezzük a

$$b_n^{(k)} := a_{2^k(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

részsorozatokat. Az előző megadásból látható, hogy $\langle b_n^{(0)} \rangle, \langle b_n^{(1)} \rangle, \langle b_n^{(2)} \rangle, \dots$ egy „végtelen”, páronként diszjunkt részsorozatokból álló felbontása az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak. Mivel minden $\langle b_n^{(k)} \rangle$ részsorozat tart nullához, így ha a 16. Tétel állítása teljesülne, akkor az $\langle a_n \rangle$ sorozat is tartana nullához. Ez azonban nem lehetséges, mert az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak van olyan részsorozata, ami nem tart nullához. Válsóban, a $c_n := a_{2^n}$ részsorozat azonosan 1.

9. Feladat. Vizsgáljuk meg monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából a következő sorozatokat! Ha konvergens, számítsuk ki $\varepsilon = 10^{-3}$ -hoz tartozó küszöbindexet!

$$\begin{aligned} (a) \quad a_n &:= 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}, & (b) \quad a_n &:= (-1)^n + \frac{2}{n}, \\ (c) \quad a_n &:= \frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1} - 1}, & (d) \quad a_n &:= \frac{2}{n} \sin \frac{2n\pi}{3}. \end{aligned}$$

Megoldás: A feladat megoldásában szereplő részsorozatok vizsgálata a 8. Feladathoz hasonlóan történik, de ezt az olvasókra fogjuk bízni.

$$(a) \quad \boxed{a_n := 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}}$$

$a_1 = 2 - 1$, $a_2 = 2 + \frac{1}{4}$, $a_3 = 2 - \frac{1}{9}$, azaz a sorozat **nem monoton**. Mivel a páros indexű elemek értéke nagyobb, mint 2 és a páratlan indexű elemek értéke kisebb mint 2, így nincs olyan index, amitől kezdve a sorozat már monoton lenne.

Bontsuk fel a sorozatot páros és páratlan indexű részsorozatokra! Nem nehéz igazolni, hogy a páros indexű

$$b_n^{(1)} = a_{2n} = 2 + \frac{1}{(2n)^2}$$

részszorozata monoton csökkenő, és 2-höz tart. Ezért értékei 2 és $b_1^{(1)} = \frac{9}{4}$ között vannak. Hasonlóan a páratlan indexű

$$b_n^{(2)} = a_{2n-1} = 2 - \frac{1}{(2n-1)^2}$$

részszorozata monoton növekvő és 2-höz tart. Ezért értékei $b_1^{(2)} = 1$ és 2 között vannak. Így az eredeti sorozat **konvergens**, 2-höz tart, **korlátos**, és

$$1 \leq a_n \leq \frac{9}{4}.$$

teljesül. A küszöbindex-számításhoz elvégezzük a következő átalakításokat:

$$\begin{aligned} \left| 2 + \frac{(-1)^n}{n^2} - 2 \right| < \varepsilon &\iff \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| < \varepsilon &\iff \\ &\iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon &\iff n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon = 10^{-3}$, ezért a küszöbindex $n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{10^{-3}}} \right\rceil = 31$.

(b) $\boxed{a_n := (-1)^n + \frac{2}{n}}$

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{3}{2}$ azaz a sorozat **nem monoton**. $n > 1$ esetén a sorozat váltakozó előjelű, így nincs olyan index, amitől kezdve a sorozat már monoton lenne.

Bontsuk fel a sorozatot páros és páratlan indexű részsorozatokra! A páros indexű

$$b_n^{(1)} = a_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$$

részszorozata monoton csökkenő, és 1-hez tart. Értékei 1 és $b_1^{(1)} = 2$ között vannak. A páratlan indexű

$$b_n^{(2)} = a_{2n-1} = -1 + \frac{2}{2n-1}$$

részszorozata is monoton csökkenő, de -1 -hez tart. Ezért értékei -1 és $b_1^{(2)} = 1$ között vannak. Így az eredeti sorozat **divergens**, mert van két nem ugyanahhoz a számhoz tartó részsorozata. Azonban a sorozat **korlátos**, és

$$-1 < a_n \leq 2.$$

$$(c) \quad a_n := \frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1} - 1}$$

Vegyük észre, hogy a sorozat a

$$b_n = \frac{3n + 2}{2n - 1}$$

sorozat részsorozata, hiszen $a_n = b_{2^n}$. A $\langle b_n \rangle$ sorozatot már a 8. Feladatban vizsgáltunk, és megállapítottuk, hogy monoton csökkenő, korlátos, konvergens és tart $\frac{3}{2}$ -höz. Így az $\langle a_n \rangle$ sorozat szintén **monoton csökkenő, korlátos, konvergens**, és tart $\frac{3}{2}$ -höz. Továbbá

$$\frac{3}{2} < a_n \leq a_1 = \frac{8}{3}.$$

A 8. Feladat megoldásában a $\langle b_n \rangle$ sorozatra azt kaptunk, hogy

$$\left| \frac{3n + 2}{2n - 1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{\frac{7}{2\varepsilon} + 1}{2}.$$

Ezért az $\langle a_n \rangle$ sorozatra azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{3 \cdot 2^n + 2}{2^{n+1} - 1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 2^n > \frac{\frac{7}{2\varepsilon} + 1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \log_2 \left(\frac{\frac{7}{2\varepsilon} + 1}{2} \right).$$

Mivel $\varepsilon = 10^{-3}$, ezért a küszöbindex $n_0 = \left\lceil \log_2 \left(\frac{\frac{7}{2 \cdot 10^{-3}} + 1}{2} \right) \right\rceil = 10$.

$$(d) \quad a_n := \frac{2}{n} \sin \frac{2n\pi}{3}$$

Bontsuk fel a sorozatot a következő módon!

$$\begin{aligned} b_n^{(1)} &:= a_{3n} = \frac{2}{3n} \sin \frac{2 \cdot 3n\pi}{3} = 0, \\ b_n^{(2)} &:= a_{3n-1} = \frac{2}{3n-1} \sin \frac{2(3n-1)\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3n-1}, \\ b_n^{(3)} &:= a_{3n-2} = \frac{2}{3n-2} \sin \frac{2(3n-2)\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3n-2}. \end{aligned}$$

Nem nehéz igazolni, hogy $\langle b_n^{(2)} \rangle$ szigorúan monoton növekvően és $\langle b_n^{(3)} \rangle$ szigorúan monoton csökkenően tart 0-hoz. Ezért a sorozat **konvergens** és 0-hoz tart. A sorozat **nem monoton**, sőt nincs olyan index, amitől kezdve a sorozat monoton lenne, hiszen váltakozóan veszi fel a nulla, pozitív és negatív értéket. Továbbá a sorozat **korlátos**, és

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = b_1^{(2)} \leq a_n \leq b_1^{(3)} = \sqrt{3}.$$

Páronként diszjunkt részsorozatokra való felbontás esetén úgy lehet küszöbindexet keresni, hogy külön-külön megkeressük a küszöbindexet minden egyes részsorozat esetére és ezek közül vesszük a legnagyobbat. Ebben az esetben a megoldás $n_0 = 578$.

6. Tágabb értelemben vett konvergencia

A divergens sorozatok közül kiemelt szerepet töltenek be azok a sorozatok, amelyek bármely értéket túlnőnek egy bizonyos index után. Más szavakkal: bármilyen számot mondunk, legfeljebb véges sok sorozatbeli elem lesz a számnál kisebb. Ugyanúgy azokat a divergens sorozatokat is kiemeljük, amelyek bármilyen számnál kisebbek tudnak maradni egy index után.

18. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ számsorozat

- **végtesenhez tart**, ha

$$\forall k \in \mathbf{R}\text{-hez } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } a_n > k.$$

Ezt az $a_n \rightarrow \infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ módon jelöljük.

- **mínusz végtesenhez tart**, ha

$$\forall k \in \mathbf{R}\text{-hez } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } a_n < k.$$

Ezt az $a_n \rightarrow -\infty$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ módon jelöljük.

A fentiek értelmében minden monoton növekvő, divergens sorozat tart végtesenhez. Tudniillik, a 14. Tétel szerint egy ilyen $\langle a_n \rangle$ sorozat nem lehet felülről korlátos, ezért minden k számhoz találunk olyan n_0 indexet, hogy $a_{n_0} > k$. Azonban a monotonitás miatt $a_n \geq a_{n_0} > k$ minden $n > n_0$ index esetén. Hasonlóan igazolható, hogy minden monoton csökkenő, divergens sorozat tart mínusz végtesenhez.

Az előző állítások miatt az $a_n := 2^n$ sorozat tart végtesenhez, hiszen monoton növekvő és felülről nem korlátos. Természetesen a definíció alapján ez is igazolható. Valóban, tetszőleges $k \in \mathbf{R}$ esetén

$$2^n > k \quad \Longleftrightarrow \quad n > \begin{cases} \log_2 k & \text{ha } k \geq 2 \\ 1 & \text{ha } k < 2 \end{cases},$$

azaz ha

$$n_0 = \max \{ \lceil \log_2 k \rceil, 1 \},$$

és ha $n > n_0$ egy pozitív egész szám, akkor $2^n > k$, azaz $a_n > k$. Hasonló megfontolásokkal igazolható, hogy az $a_n := -2^n$ sorozat mínusz végtesenhez tart.

Ha példát keresünk olyan divergens sorozatra, amely sem végtesenhez, sem mínusz végtesenhez nem tart, akkor alkalmas nem monoton sorozat után kell néznünk. Ilyen az $a_n := (-1)^n$ sorozat, amely egy korlátos sorozat. Az $a_n := (-2)^n$ szintén ilyen sorozat, bár nem korlátos sorozat. Ennek oka az, hogy minden második eleme pozitív és minden második eleme negatív, így a sorozat egy index után nem marad végig nagyobb vagy kisebb mint egy adott szám.

Természetesen egy nem monoton, divergens sorozat tarthat végtelenhez vagy mínusz végtelenhez. Gondoljunk arra a sorozatra, amelynek elemei egymásután először kettővel nőnek, aztán eggyel csökkennek. Hasonlóan végtelenhez tart az

$$a_n := \begin{cases} n & \text{ha } n \text{ páros szám,} \\ 2n & \text{ha } n \text{ páratlan szám,} \end{cases}$$

nem monoton sorozat.

Felmerülhet a kérdés, hogy miért tartottunk fontosnak külön foglalkozni azokkal a divergens sorozatokkal, amelyek végtelenhez vagy mínusz végtelenhez tartanak. Ennek az az oka, hogy ez a fajta divergencia bizonyos szempontból hasonlít a konvergenciára. Terjesszük ki a környezet fogalmát a ∞ és a $-\infty$ szimbólumokra a következő módon:

- minden x valós szám esetén az $]x, \infty[$ intervallumot a ∞ szimbólum környezetének tekintjük, illetve
- minden x valós szám esetén a $] - \infty, x[$ intervallumot a $-\infty$ szimbólum környezetének tekintjük.

Ekkor egy a konvergenciához nagyon hasonló állítást tudunk megfogalmazni végtelenhez és mínusz végtelenhez tartó sorozatok esetén.

„Az $\langle a_n \rangle$ számsorozat akkor és csak akkor tart végtelenhez (mínusz végtelenhez), ha a ∞ ($-\infty$) minden környezetéből legfeljebb véges sok sorozatbeli elem marad ki.”

Ezért ez a fajta divergenciát **tágabb értelemben vett konvergenciának** nevezzük. Egy másik hasonlóság tapasztalható, ha megnézzük hova tartanak a tágabb értelemben vett konvergens sorozatok részsorozatai.

17. Tétel. *Egy sorozat akkor és csak akkor tart végtelenhez (mínusz végtelenhez), ha minden részsorozata végtelenhez (mínusz végtelenhez) tart.*

Bizonyítás. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy végtelenhez tartó sorozat, és

$$b_n := a_{\varphi(n)}$$

az egyik részsorozata. $a_n \rightarrow \infty$, így a definíció szerint

$$\forall k \in \mathbf{R}\text{-hez } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } a_n > k.$$

A φ szigorúan monoton növekvő monotonitása következtében, ha $n > n_0$, akkor $\varphi(n) > \varphi(n_0) \geq n_0$, így

$$a_{\varphi(n)} > k, \quad \text{azaz} \quad b_n > k.$$

Ez azt bizonyítja, hogy $b_n \rightarrow \infty$.

Fordítva, ha minden részsorozat végtelenhez tart, akkor az eredeti is, hiszen minden sorozat részsorozata saját magának.

A bizonyítás hasonlóan történik mínusz végtelenhez tartó sorozatok esetén.

Az előző tétel alapján könnyebb elmagyarázni, hogy miért az $a_n := (-2)^n$ sorozat divergens, de nem tart sem végtelenhez, sem mínusz végtelenhez. Ehhez vegyük észre, hogy

$$b_{2n} = 2^{2n} \rightarrow \infty \quad \text{és} \quad b_{2n-1} = -2^{2n-1} \rightarrow -\infty,$$

hiszen a páros indexű részsorozata monoton növekvő és felülről nem korlátos, illetve a páratlan indexű részsorozata monoton csökkenő és alulról nem korlátos.

Ezenkívül érvényes a 16. Tételnek megfelelő állítás.

18. Tétel. *Ha egy sorozatnak van egy páronként diszjunkt, véges számú részsorozatból álló felbontása, amely felbontásban szereplő mindegyike végtelenhez (mínusz végtelenhez) tart, akkor az eredeti sorozat is végtelenhez (mínusz végtelenhez) tart.*

Bizonyítás. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy sorozat, és $\langle b_n^{(1)} \rangle, \dots, \langle b_n^{(k)} \rangle$ a sorozat egy páronként diszjunkt részsorozatokból álló felbontása. Jelöljük φ_i -vel a $\langle b_n^{(i)} \rangle$ részsorozathoz tartozó leképezést, azaz

$$b_n^{(i)} := a_{\varphi_i(n)} \quad (n \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, k).$$

Tegyük fel, hogy minden $\langle b_n^{(i)} \rangle$ sorozat végtelenhez tart. Ekkor a definíció alapján

$$\forall k \in \mathbf{N}\text{-hez } \exists n_0^{(i)} \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0^{(i)}, \text{ akkor } b_n^{(i)} > k. \quad (4)$$

Legyen $n_0 := \max\{\varphi_i(n_0^{(i)}): i = 1, \dots, k\}$, továbbá legyen $n > n_0$. Tegyük fel, hogy $\langle b_n^{(i)} \rangle$ az a részsorozat, ami az a_n elemet tartalmazza, azaz a $\langle b_n^{(i)} \rangle$ sorozatnak van olyan m indexe, hogy $b_m^{(i)} = a_n$, azaz $\varphi_i(m) = n$. Ekkor

$$\varphi_i(m) = n > n_0 \geq \varphi_i(n_0^{(i)}).$$

Ebből az következik, hogy $m > n_0^{(i)}$, hiszen az inverz függvény monotonitására vonatkozó tételből tudjuk, hogy φ_i inverze is szigorúan monoton növekvő leképezés. Ezért (4) miatt azt kapjuk, hogy $b_m^{(i)} > k$, azaz $|a_n - a| < \varepsilon$. Ez azt bizonyítja, hogy $a_n \rightarrow \infty$.

A tétel hasonlóan igazolható mínusz végtelenhez tartó sorozatok esetén.

Láttuk, hogy egy végtelenhez vagy mínusz végtelenhez tartó sorozat nem feltétlenül monoton. A következő állítás mégis bizonyos ilyen jellegű kapcsolatot biztosít.

19. Tétel. *Ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor van végtelenhez tartó monoton növekvő részsorozata. Ugyanígy, ha egy sorozat alulról korlátos, akkor van a mínusz végtelenhez tartó monoton csökkenő részsorozata.*

Bizonyítás. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy felülről nem korlátos sorozat, és $b_1 := a_1$. Ekkor van olyan $n_1 > 1$ index, hogy $a_{n_1} > \max\{b_1, 2^2\}$, hiszen a sorozat felülről nem korlátos.

Legyen $b_2 := a_{n_1}$. Ekkor van olyan $n_2 > n_1$ index, hogy $a_{n_2} > \max\{b_2, 2^3\}$, hiszen a sorozat felülről nem korlátos. Legyen $b_3 := a_{n_2}$ és így tovább.

Az $1 < n_1 < n_2 < \dots$ indexek megválasztási módjából következik, hogy $\langle b_n \rangle$ részsorozata $\langle a_n \rangle$ -nek, amely monoton növekvő, hiszen $b_{i+1} = a_{n_i} > b_i$ minden $i \in \mathbf{N}$ esetén. Továbbá $\langle b_n \rangle$ nem korlátos, mert $b_n > 2^n$. Ezért $b_n \rightarrow \infty$.

A bizonyítás hasonló csökkenő, alulról nem korlátos sorozatok esetében. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Érdemes a ∞ és $-\infty$ szimbólumokkal kibővíteni a valós számok halmazát és kiterjeszteni a rendezést úgy, hogy megőrizzük a valós számok eredeti rendezését, továbbá legyen érvényes, hogy

$$-\infty < x < \infty \quad \text{minden } x \in \mathbf{R} \text{ esetén.}$$

Emellett a műveleteket is kiterjesztjük a ∞ és $-\infty$ szimbólumokra:

- minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\begin{aligned} x + \infty &= \infty + x = \infty, & x - \infty &= -\infty + x = -\infty, \\ \frac{x}{\infty} &= 0, & \frac{x}{-\infty} &= 0, \end{aligned}$$

- minden $x > 0$ valós szám esetén

$$\begin{aligned} x \cdot \infty &= \infty \cdot x = \infty, & x \cdot (-\infty) &= -\infty \cdot x = -\infty, \\ \frac{\infty}{x} &= \infty, & \frac{-\infty}{x} &= -\infty, \end{aligned}$$

- minden $x < 0$ valós szám esetén

$$\begin{aligned} x \cdot \infty &= \infty \cdot x = -\infty, & x \cdot (-\infty) &= -\infty \cdot x = \infty, \\ \frac{\infty}{x} &= -\infty, & \frac{-\infty}{x} &= \infty, \end{aligned}$$

- továbbá

$$\begin{aligned} \infty + \infty &= \infty - (-\infty) = \infty, & -\infty - \infty &= -\infty + (-\infty) = -\infty, \\ \infty \cdot \infty &= (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, & \infty \cdot (-\infty) &= -\infty \cdot (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Az előző bővítést **a valós számok kiterjesztett rendszerének** nevezzük. Ebben $-\infty$ és ∞ alsó és felső korlátja minden számhalmaznak, és minden felülről nem korlátos halmaznak szuprémuma ∞ , illetve minden alulról nem korlátos halmaznak infimuma $-\infty$. Vegyük észre, hogy nem minden esetben értelmezzük a műveleteket. Például a

$$\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0 \quad \text{és} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

műveleteket nem értelmezzük.

7. Torlódási pontok

Ebben a részben olyan fogalmat fogunk bevezetni, amely divergens sorozatok esetén sok vonatkozásban pótolja a határérték fogalmát. A konvergens sorozatokra azt állapítottunk meg, hogy a határérték minden környezetéből legfeljebb véges sok sorozatbeli elem marad ki. Ez azt jelenti, hogy ezek a környezetek nem csak végtelen sok sorozatbeli elemet tartalmaznak, hanem egy index után az összeset. A következő fogalom gyengíteni próbál a konvergencia ezen erős követelményén.

19. Definíció. Legyen $\langle a_n \rangle$ számsorozat és $a \in \mathbf{R}$. Azt mondjuk, hogy a **torlódási pontja** az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, ha minden környezete végtelen sok sorozatbeli elemet tartalmaz.

Valóban, a torlódási pont fogalma kisebb követelményt támaszt, mint a határérték fogalma. Egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke lehet (lásd a 12. Tételt), de több torlódási pontja is lehet. Például az

$$a_n := (-1)^n$$

sorozatnak két torlódási pontja van, az 1 és a -1 . Tudniillik a sorozat minden páros indexű elemének értéke 1, és nyilvánvalóan az $a = 1$ pont bármely környezete magát az a pontot tartalmazza, így az a pont bármely környezete végtelen sok sorozatbeli elemet tartalmaz. Hasonlóan $a = -1$ is torlódási pontja a sorozatnak, mert minden páratlan indexű elemének értéke -1 . Más a érték nem lehet torlódási pontja a sorozatnak, mert mindig találunk olyan kis környezetet, amely nem tartalmazza sem az 1-et, sem a -1 -et, azaz egyetlen sorozatbeli elemet sem.

Szeretném megjegyezni, hogy a torlódási pont fogalmával már halmazok esetében is találkoztunk. Akkor azt mondtuk, hogy egy szám torlódási pontja egy halmaznak, ha minden környezete végtelen sok halmazbeli elemet tartalmaz. A két fogalom hasonlósága szembetűnő, azonban nem állíthatjuk azt, hogy egy sorozat torlódási pontjai a sorozat értékkészletének is torlódási pontjai. Az előző $a_n := (-1)^n$ sorozat jól példa erre. Értékkészlete a $\{-1, 1\}$ halmaz, amelynek nincsenek torlódási pontjai, hiszen véges halmaz. Azonban azt láttuk, hogy a sorozatnak két torlódási pontja van. Nem szabad elfelejteni, hogy egy sorozat elemeinek száma mindig végtelen akkor is, ha értékei nem különböznek egymástól.

Mielőtt további példákat néznénk meg, nagyon hasznos tudni, hogy szoros kapcsolat létezik egy sorozat torlódási pontjai és a konvergens részsorozatának határértéke között.

20. Tétel. Az a valós szám akkor és csak akkor torlódási pontja az $\langle a_n \rangle$ számsorozatnak, ha az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak van olyan részsorozata, amely a -hoz tart.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a az $\langle a_n \rangle$ számsorozat torlódási pontja. Ekkor a $K(a, 1)$ környezet tartalmaz végtelen sok sorozatbeli elemet. Jelöljük egy ilyen elem értékét b_1 -gyel és indexét n_1 -gyel, azaz $b_1 = a_{n_1}$.

Hasonlóan a $K(a, \frac{1}{2})$ környezet tartalmaz végtelen sok sorozatbeli elemet. Válasszunk közülük olyat, amelynek indexe nagyobb mint n_1 . Jelölje b_2 ennek az elemnek az értékét és n_2 az indexét, azaz $b_2 = a_{n_2}$.

Az eljárást úgy folytatjuk, hogy a b_1, \dots, b_k elemek és n_1, \dots, n_k indexek ismeretében, mivel a $K(a, \frac{1}{2^k})$ környezet végtelen sok sorozatbeli elemet tartalmaz, kiválaszthatunk közülük olyat, amelynek indexe nagyobb mint n_k . Jelölje b_{k+1} ennek az elemnek az értékét és n_{k+1} az indexét, azaz $b_{k+1} = a_{n_{k+1}}$.

A fenti eljárással kapott $\langle b_n \rangle$ sorozat részsorozata az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak, hiszen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Továbbá minden $n > k$ esetén $b_n \in K(a, \frac{1}{2^k})$ teljesül, azaz

$$|b_n - a| < \frac{1}{2^k}.$$

Azonban $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, ezért $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Ha pedig $n > n_0$, akkor

$$|b_n - a| < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $b_n \rightarrow a$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\langle b_n \rangle$ egy konvergens részsorozata az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak és $b_n \rightarrow a$. Ekkor a minden környezete végtelen sok $\langle b_n \rangle$ sorozatbeli elemet tartalmaz. Mivel minden $\langle b_n \rangle$ -beli elem is $\langle a_n \rangle$ -beli elem, így a minden környezete végtelen sok $\langle a_n \rangle$ sorozatbeli elemet is tartalmaz, azaz a torlódási pontja az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételnek több fontos következménye is van.

- Egy sorozatnak legfeljebb egy határértéke van, de torlódási pontja több lehet. Ezt az állítást már az $a_n := (-1)^n$ példával igazoltuk. Ez érvényes minden olyan sorozatra, amelynek több, más értékhez tartó részsorozata van.
- Ha egy sorozatnak több torlódási pontja van, akkor divergens, hiszen nem minden részsorozata tart ugyanahhoz az értékhez, ami ellentmond a 15. Tételnek.
- Ha egy sorozat konvergens, akkor a határérték a sorozat egyetlen torlódási pontja. Valóban, a 15. Tételből következik, hogy minden részsorozata a sorozat határértékéhez tart.
- Lehetséges, hogy egy sorozatnak egyetlen torlódási pontja van és mégis divergens. Gondoljunk például egy olyan sorozatra, melynek páros indexű részsorozata konvergens, de a páratlan indexű részsorozata a végtelenhez tart. Ilyen az

$$a_n := \begin{cases} n & \text{ha } n \text{ páros szám,} \\ 1 & \text{ha } n \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

sorozat.

A 20. Tételben alkalmazott eljárással a következő állítás igazolható.

21. Tétel. *Legyen a az A halmaznak egy torlódási pontja. Ekkor van olyan sorozat, amely a -hoz tart és elemeinek értéke az A halmazból valók.*

Bizonyítás. Ha a az A halmaznak torlódási pontja, akkor a $K(a, 1)$ környezet tartalmaz végtelen sok halmazbeli elemet. Válasszunk közülük egyet és jelöljük a_1 -gyel.

Hasonlóan a $K(a, \frac{1}{2})$ környezet tartalmaz végtelen sok halmazbeli elemet. Válasszunk közülük egyet és jelöljük a_2 -vel.

Az eljárást úgy folytatjuk, hogy az a_1, \dots, a_k elemek ismeretében, mivel a $K(a, \frac{1}{2^k})$ környezet végtelen sok halmazbeli elemet tartalmaz, kiválasztunk közülük egyet és jelöljük a_{k+1} -gyel.

A fenti eljárással kapott $\langle a_n \rangle$ sorozatra igaz, hogy minden $n > k$ esetén $a_n \in K(a, \frac{1}{2^k})$ teljesül, azaz

$$|a_n - a| < \frac{1}{2^k}.$$

Azonban $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, ezért $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Ha pedig $n > n_0$, akkor

$$|a_n - a| < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $a_n \rightarrow a$. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tétel állítása kiterjeszthető a halmaz alsó és felső határára.

22. Tétel. *Legyen A egy számhalmaz. Ekkor van olyan sorozat, amely a halmaz alsó határához tart és másik, amely a halmaz felső határához tart úgy, hogy a sorozatok elemeinek értéke az A halmazból valók.*

Bizonyítás. Ha $\sup A = \infty$, akkor a halmaz felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n \in \mathbf{N}$ -hez $\exists a_n \in A$, hogy $a_n > 2^n$. Nyilvánvaló, hogy $a_n \rightarrow \infty$.

Ha $a = \sup A$ egy valós szám, akkor két eset lehetséges:

- a torlódási pontja az A halmaznak. Ekkor a 21. Tétel szerint van olyan A -beli elemekből álló sorozat, amely a -hoz tart.
- a eleme az A halmaznak. Ekkor az $a_n := a$ állandó sorozat olyan A -beli elemekből álló sorozat, amely a -hoz tart.

A tétel hasonlóan igazolható $\inf A$ esetében. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

A 21. Tétel másik fontos következmény a Bolzano–Weierstrass-tétel megfelelője sorozatokra. A Bolzano–Weierstrass-tétel azt állítja, hogy minden korlátos, végtelen halmaznak van torlódási pontja.

23. Tétel. *Minden korlátos sorozatnak van torlódási pontja, azaz konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Ha a sorozat értékkészlete véges, akkor van az értékkészletnek legalább olyan eleme, amelyet végtelen sok sorozatbeli elem felveszi. Ez az elem nyilván torlódási pontja lesz a sorozatnak.

Ha a sorozat értékkészlete végtelen és korlátos, akkor az a Bolzano–Weierstrass-tétel szerint az értékkészletnek van torlódási pontja és ez a 21. Tétel szerint torlódási pontja lesz a sorozatnak.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

8. Felső és alsó határértékek

Egy sorozat torlódási pontjainak halmaza a sorozat fontos jellemzője, mert azt mutatja, mely értékek körül „sűrűsödnek” a sorozat elemei. Azonban ez üres halmaz is lehet. Pl. az $a_n := n$ sorozatnak nincsenek torlódási pontjai, hiszen monoton növekvően tart végtelenhez. Hogyan tudnánk a torlódási pont fogalmát úgy bővíteni, hogy magába foglalja a nem korlátos sorozatoknak azt a tulajdonságát, miszerint elemei akármekkoraak lehetnek pozitív vagy negatív irányban? A választ a 20. Tételben találjuk a torlódási pontok és részsorozatok közötti kapcsolatban.

Egy sorozat torlódási pontjainak halmaza a sorozat összes konvergens részsorozatának határértékeiből áll. A **kiterjesztett torlódási pontjainak halmazát** úgy értelmezzük, mint a sorozat összes, akár tágabb értelemben is vett konvergens részsorozatának határértékeiből álló halmaz. Más szavakkal: ha a sorozat felülről nem korlátos, akkor a torlódási pontjainak halmazát bővítjük a ∞ szimbólummal. Hasonlóan, ha a sorozat alulról nem korlátos, akkor a torlódási pontjainak halmazát bővítjük a $-\infty$ szimbólummal. Fontos hangsúlyozni, hogy a ∞ vagy a $-\infty$ szimbólumok, és nem valós számok, így nem számítanak torlódási pontoknak, de beszélhetünk róluk mint kiterjesztett torlódási pontok.

A ∞ és a $-\infty$ szimbólumok bevonásával a kiterjesztett torlódási pontokat a valós számok kiterjesztett rendszerén kell elhelyezni, ahol ∞ a legnagyobb és $-\infty$ a legkisebb elem. Mivel a 19. és a 23. Tételek garantálják, hogy a kiterjesztett torlódási pontok halmaza már nem üres halmaz, így van neki szuprémuma és infimuma a valós számok kiterjesztett rendszerén.

20. Definíció. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat és jelölje H a sorozat kiterjesztett torlódási pontjainak halmazát. Ekkor a sorozat **felső határértéke** vagy **limesz superiorja**

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup H,$$

míg a sorozat **alsó határértéke** vagy **limesz inferiorja**

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf H.$$

A fenti szuprémumot és infimumot a valós számok kiterjesztett rendszerén kell tekinteni.

Nézzük át a sorozatok alsó és felső határértékével előforduló lehetséges eseteket:

- Ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat konvergens, akár tágabb értelemben is, akkor

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Tudniillik a sorozat minden részsorozata ugyanoda tart, és így a kiterjesztett torlódási pontjainak halmaza a közös határértéket tartalmazó egy elemű halmaz.

- Ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat korlátos, akkor a limesz superiorja megegyezik a torlódási pontjai halmazának szuprémumával és a limesz inferiorja megegyezik a torlódási pontjai halmazának infimumával. Ennek az az oka, hogy ebben az esetben a kiterjesztett torlódási pontok halmaza megegyezik a közösértékben vett torlódási pontok halmazával. Másrészt, a korlátosság miatt sem a limesz superior, sem az inferior sem lehet ∞ , illetve $-\infty$.
- Ha az $\langle a_n \rangle$ sorozat felülről nem korlátos, akkor $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, illetve ha a sorozat alulról nem korlátos, akkor $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

10. Feladat. Keresse meg a következő sorozatok torlódási pontjait, valamint alsó és felső határértékét!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_n := \frac{5n-2}{n+1}, & \text{b) } a_n := 3n^2 + 2, \\ \text{c) } a_n := \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}, & \text{d) } a_n := (-2)^n. \end{array}$$

Megoldás:

a) $a_n := \frac{5n-2}{n+1}$

Nem nehéz igazolni, hogy a sorozat konvergens és 5-höz tart. Ekkor 5 a sorozat egyetlen torlódási pontja, és ezért

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 5.$$

b) $a_n := 3n^2 + 2$

Nem nehéz igazolni, hogy $a_n \rightarrow \infty$. Ekkor a sorozatnak nincsenek torlódási pontjai és egyetlen egy kiterjesztett torlódási pontja van, a ∞ . Ezért

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

c) $a_n := \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

Ha a sorozatot felbontjuk páros és páratlan indexű részsorozatokra, akkor

$$b_n^{(1)} := a_{2n} = \frac{2n+1}{2n-1} \rightarrow 1 \quad \text{és} \quad b_n^{(2)} := a_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n} \rightarrow 1.$$

Ebből következik, hogy a sorozat konvergens és 1-hez tart. Ezért 1 a sorozat egyetlen torlódási pontja és

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

d) $a_n := (-2)^n$

Ha a sorozatot felbontjuk páros és páratlan indexű részsorozatokra, akkor

$$b_n^{(1)} := a_{2n} = 2^{2n} \rightarrow \infty \quad \text{és} \quad b_n^{(2)} := a_{2n-1} = -2^{2n-1} \rightarrow -\infty.$$

Ebből következik, hogy a sorozatnak nincsenek torlódási pontjai és nem korlátos sem alulról, sem felülről. Ezért a sorozat kiterjesztett torlódási pontjainak halmaza $H = \{-\infty, \infty\}$, és így

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \quad \text{és} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Mielőtt további példákat oldanánk meg, érdemes feltennünk azt a kérdést, hogy az eddig hatékonynak bizonyult módszer, nevezetesen a sorozatok páronként diszjunkt részsorozatokra való felbontása segítségünkre lehet-e a kiterjesztett torlódási pontok megkeresésben. A válasz az, hogy igen. Elég külön megkeresni a felbontásban szereplő részsorozatok kiterjesztett torlódási pontjait, ahogyan a következő tétel állítja.

24. Tétel. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat és $\langle b_n^{(1)} \rangle, \dots, \langle b_n^{(k)} \rangle$ egy páronként diszjunkt részsorozatokból álló felbontása. Jelölje H az $\langle a_n \rangle$, illetve H_i a $\langle b_n^{(i)} \rangle$ kiterjesztett torlódási pontjainak halmazát, ahol $i = 1, \dots, k$. Ekkor

$$H = \bigcup_{i=1}^k H_i.$$

Bizonyítás. Egy sorozat minden részsorozata egy újabb sorozat, amelynek további részsorozatai vannak. Nem nehéz belátni, hogy ez utóbbiak szintén részsorozatai az eredeti sorozatnak. Ez azt jelenti, hogy $\langle b_n^{(i)} \rangle$ részsorozatai az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak is részsorozatai. Tehát a $\langle b_n^{(i)} \rangle$ részsorozatok kiterjesztett torlódási pontjai az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak is kiterjesztett torlódási pontjai, azaz $H_i \subseteq H$ minden $i = 1, \dots, k$ esetén. Ezért

$$\bigcup_{i=1}^k H_i \subseteq H.$$

Legyen $x \in H$. Ekkor van egy olyan $\langle b_n \rangle$ részsorozat, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x$. Mivel véges sok diszjunkt $\langle b_n^{(i)} \rangle$ részsorozatunk van, így van köztük olyan, amely végtelen sok $\langle b_n \rangle$ sorozatbeli elemet tartalmaz. Jelölje $\langle b_n^{(j)} \rangle$ ezt a részsorozatot. Ha a végtelen sok elemet olyan sorrendben vesszük, ahogyan a $\langle b_n \rangle$ sorozatban szerepelnek, akkor ez olyan részsorozata lesz $\langle b_n^{(j)} \rangle$ -nek, amely x -hez tart. Így $x \in H_j$, azaz $x \in \bigcup_{i=1}^k H_i$, amiből következik, hogy $H \subseteq \bigcup_{i=1}^k H_i$. A két tartalmazást figyelembe véve: $H = \bigcup_{i=1}^k H_i$.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Az előző tételnek egyik lehetséges megfordítása a 40. Feladatban látható.

11. Feladat. Keresse meg a következő sorozatok torlódási pontjait, valamint alsó és felső határértékeit!

$$a) \quad a_n := (-1)^n + \frac{1}{n},$$

$$b) \quad a_n := n^{(-1)^n},$$

$$c) \quad a_n := n \bmod 10,$$

$$d) \quad a_n := \{\sqrt{2}n\}.$$

$n \bmod 10$ az n szám 10-zel való osztásának maradékát, és $\{x\}$ az x szám törtrészét jelenti.

Megoldás:

$$a) \quad \boxed{a_n := (-1)^n + \frac{1}{n}}$$

Ha a sorozatot felbontjuk páros és páratlan indexű részsorozatokra, akkor azt kapjuk, hogy

$$b_n^{(1)} := a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1 \quad \text{és} \quad b_n^{(2)} := a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1} \rightarrow -1.$$

Ebből következik, hogy a sorozatnak két torlódási pontja van, -1 és 1 , valamint

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1 \quad \text{és} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

$$b) \quad \boxed{a_n := n^{(-1)^n}}$$

Ha a sorozatot felbontjuk páros és páratlan indexű részsorozatokra, akkor azt kapjuk, hogy

$$b_n^{(1)} := a_{2n} = 2n \rightarrow \infty \quad \text{és} \quad b_n^{(2)} := a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \rightarrow 0.$$

Ebből következik, hogy a sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, a 0 . A sorozat kiterjesztett torlódási pontjainak halmaza $H = \{0, \infty\}$. Ezért

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

$$c) \quad \boxed{a_n := n \bmod 10}$$

A sorozat ciklikusan veszi fel 0-tól 9-ig az egész számokat, így a sorozat korlátos és torlódási pontjainak halmaza $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Ezért

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 9.$$

$$d) \quad \boxed{a_n := \{\sqrt{2}n\}}$$

A feladat megoldása elég összetett, és mutatja, hogyan kaphatunk egy

egyszerű összefüggéssel olyan sorozatot, melynek elemei mindenütt sűrűsödnek egy intervallumon.

Egy szám törtrésze a szám mínusz az egész része, azaz $\{x\} = x - [x]$, ami a $[0, 1[$ intervallumban helyezkedik el. Az

$$a_n = \sqrt{2}n - [\sqrt{2}n]$$

sorozat mindig különböző értékeket vesz fel, mert ha lenne két különböző n és m természetes szám, amire $a_n = a_m$ teljesül, akkor a

$$\sqrt{2}n - [\sqrt{2}n] = \sqrt{2}m - [\sqrt{2}m] \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{2} = \frac{[\sqrt{2}n] - [\sqrt{2}m]}{n - m},$$

átalakításból következne, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám, hiszen felírható lenne két egész szám hányadosaként. $\sqrt{2}$ pedig nem racionális szám.

Igazolni fogjuk, hogy nem találunk a $[0, 1[$ intervallumnak olyan részintervallumát, amely nem tartalmaz sorozatbeli elemet. Ebből következne, hogy a sorozat torlódási pontjainak halmaza a teljes $[0, 1]$ intervallum.

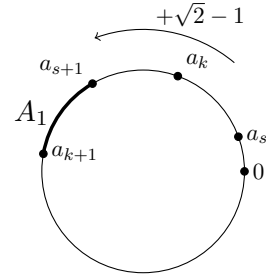
Vegyük észre, hogy a sorozat elemeit rekurzív módon is megkaphatjuk:

$$a_1 = \{\sqrt{2}\}, \quad a_{n+1} = \{a_n + \sqrt{2} - 1\} \quad (n > 1),$$

továbbá, hogy az $\{x + y\}$ olyan művelet a $[0, 1[$ intervallumon, amelyet legjobban úgy tudunk szemléltetni, ha a $[0, 1[$ intervallum két végpontját „összeragasztjuk”, és az intervallumból egy egység kerületű ($\frac{1}{2\pi}$ sugarú) kört alkotunk. Így a $[0, 1[$ intervallum pontjai a kör kerületén vannak, 0 a ragasztás helyén van, $x \in]0, 1[$ a kör kerület olyan P pontján, hogy a 0-tól P -ig mért kerületi ív hossza pontosan x legyen. Az $\{x + y\}$ művelet eredménye a körön nem más, mint az x és y körívek összege a forgásszögek figyelembevételével.

Helyezzük el a körön a sorozat elemeit, és tegyük fel, hogy van olyan körív, amely nem tartalmaz sorozatbeli elemet. Nyissuk a körívet olyan nagyra, amíg nem találunk a sorozatnak két olyan a_s és a_k elemét, hogy az a_s -től a_k -ig terjedő körív ne tartalmazzon sorozatbeli elemet. Jelölje A_n az a_{s+n} -től a_{k+n} -ig terjedő körívet.

Az A_1 körív legfeljebb a sorozat első elemét tartalmazhatja, ellenkező esetben a sorozat rekurzív előállítására miatt a köríven található a_n sorozatbeli elemet megelőző a_{n-1} elem az a_s -től a_k -ig terjedő köríven lenne. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy A_n legfeljebb a sorozat első n elemét tartalmazhatja.



A fentiekből következik, hogy tetszőleges $n > 1$ index esetén az A_n körív végpontjai nem eshetnek bele egyetlen öt megelőző körív belsejébe sem, hiszen végpontjai a_{s+n} és a_{k+n} értéke nincsenek a sorozat első n elemének értéke között, mert a sorozat mindig különböző értékeket vesz fel. Másrészt két különböző körív nem eshet egybe, mert végpontjai mindig különböző értékeket vesznek fel. Ebből következik, hogy az A_1, \dots, A_n körívek páronként diszjunktak. Ez azért nem lehetséges, mert a körívek egyforma hosszúságúak, és így egy alkalmas nagy n érték esetén az A_1, \dots, A_n körívek összhossza nagyobb mint 1.

Összefoglalva: a sorozat torlódási pontjainak halmaza a $[0, 1]$ intervallum. Mivel a sorozat korlátos, ezért

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Végül szeretnénk megjegyezni, hogy a fenti módszer $\sqrt{2}$ helyett bármilyen más irracionális számmal is lefolytatható. Racionális érték mellett más a helyzet, hiszen ekkor a sorozat véges sok értéket vesz fel.

A továbbiakban az alsó és felső határérték néhány általános tulajdonságáról lesz szó. A fogalmukból azonnal következik, hogy az $\langle a_n \rangle$ számsorozat minden, akár tágabb értelemben konvergens $\langle b_n \rangle$ részsorozata esetén

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

teljesül. Már nem annyira nyilvánvaló tény, hogy az alsó és felső határértékek maguk is kiterjesztett torlódási pontok. Ezzel azt is mondhatjuk, hogy az alsó és felső határérték a sorozat legkisebb és legnagyobb kiterjesztett torlódási pontjai. A következő tétel mondja ki ezt az állítást.

25. Tétel. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat és H a sorozat kiterjesztett torlódási pontjainak halmaza. Ekkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in H \quad \text{és} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \in H.$$

Bizonyítás. Csak a felső határértékre vonatkozó állítást fogjuk igazolni. Az alsó határértékre vonatkozó állítás igazolása hasonlóan történik.

Jelölje

$$a^* := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

a sorozat felső határértékét. A következő esetek fordulhatnak elő.

- Ha $a^* = \infty$, akkor $\langle a_n \rangle$ felülről nem korlátos, így van olyan részsorozata, amely ∞ -hez tart, azaz $a^* \in H$.

- Legyen $a^* \in \mathbf{R}$. Mivel $a^* = \sup H$, így a 22. Tétel értelmében van olyan $\langle \alpha_n \rangle$ számsorozat, amely H -beli elemekből áll és $\alpha_n \rightarrow a^*$.
Mivel $\alpha_n \in H$, így minden α_n érték mellett van az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak olyan

$$\langle b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, b_3^{(n)}, \dots \rangle$$

részsorozata, amely α_n -hez konvergál. Válasszunk ki a

$$\langle b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, b_3^{(1)}, \dots \rangle$$

sorozatból olyan b_1 elemet, amire

$$|b_1 - \alpha_1| < |\alpha_1 - a^*|$$

teljesül. Hasonlóan válasszunk ki a

$$\langle b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, b_3^{(2)}, \dots \rangle$$

sorozatból olyan b_2 elemet, hogy indexe az $\langle a_n \rangle$ sorozatban nagyobb legyen, mint b_1 indexe az $\langle a_n \rangle$ sorozatban, és teljesül, hogy

$$|b_2 - \alpha_2| < |\alpha_2 - a^*|.$$

Az eljárás folytatásával a

$$\langle b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, b_3^{(n)}, \dots \rangle$$

sorozatból olyan b_n elemet választunk ki, amelynek indexe az $\langle a_n \rangle$ sorozatban nagyobb, mint a b_{n-1} indexe az $\langle a_n \rangle$ sorozatban, és teljesül, hogy

$$|b_n - \alpha_n| < |\alpha_n - a^*|.$$

Ekkor $\langle b_n \rangle$ az $\langle a_n \rangle$ sorozat részsorozata. Másrészt $\alpha_n \rightarrow a^*$, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } |\alpha_n - a^*| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így ha $n > n_0$, akkor

$$|b_n - a^*| \leq |b_n - \alpha_n| + |\alpha_n - a^*| < 2|\alpha_n - a^*| < \varepsilon.$$

Ezért $b_n \rightarrow a^*$, amiből következik, hogy $a^* \in H$.

- Ha $a^* = -\infty$, akkor H csak egyetlen elemet tartalmaz, a $-\infty$ szimbólumot. Így $a^* \in H$.

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Van két tulajdonság, ami jellemzi az alsó és felső határértéket, és fontossá teszi őket a matematikai analízisben alkalmazott módszerekben. Ezek a következők.

26. Tétel. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat, és H a sorozat kiterjesztett torlódási pontjainak halmaza. Ekkor

- *a sorozat felső határértéke a valós számok kiterjesztett rendszerének egyetlen olyan eleme, amely kielégíti a következő két tulajdonságot:*
 - (a) *ha $x < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor végtelen sok sorozatbeli elem létezik, amely nagyobb mint x .*
 - (b) *ha $x > \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor legfeljebb véges sok sorozatbeli elem létezik, amely nagyobb mint x .*
- *a sorozat alsó határértéke a valós számok kiterjesztett rendszerének egyetlen olyan eleme, amely kielégíti a következő két tulajdonságot:*
 - (a) *ha $x < \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor legfeljebb véges sok sorozatbeli elem létezik, amely kisebb mint x .*
 - (b) *ha $x > \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, akkor végtelen sok sorozatbeli elem létezik, amely kisebb mint x .*

Bizonyítás. Csak a felső határértékre vonatkozó állítást fogjuk igazolni. Az alsó határértékre vonatkozó állítás igazolása hasonlóan történik.

- Az (a) tulajdonság azért igaz, mert ha legfeljebb véges sok sorozatbeli elem létezik, amely nagyobb mint x , akkor nincs olyan kiterjesztett torlódási pont, amely nagyobb, mint x . De az előző tétel szerint a felső határérték a sorozat egyik kiterjesztett torlódási pontja, azaz ő sem lehetne nagyobb, mint x .
- A (b) tulajdonság azért igaz, mert ha végtelen sok sorozatbeli elem létezik, amely nagyobb mint x , akkor ezekből lehet olyan részsorozatot konstruálni, amely konvergens akár tágabb értelemben is. Ennek határértéke a sorozat olyan kiterjesztett torlódási pontja lenne, ami nagyobb vagy egyenlő, mint x . Mivel a felső határérték a sorozat legnagyobb kiterjesztett torlódási pontja, ezért ő is nagyobb vagy egyenlő lenne, mint x .

Az egyértelműség igazolása is indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy α és β a valós számok kiterjesztett rendszerének két olyan eleme, amely kielégíti az (a) és (b) tulajdonságot, és $\alpha < \beta$. Legyen x olyan valós szám, amire $\alpha < x < \beta$ teljesül. Mivel α kielégíti az (b) tulajdonságot, így legfeljebb véges sok sorozatbeli elem van, amely nagyobb mint x . De ekkor β nem elégítheti ki az (a) tulajdonságot, ami ellentmondás. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Végül olyan állítást mutatunk meg, ami indokoltá teszi a limesz inferior és limesz superior elnevezéseket.

27. Tétel. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat. Ekkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k : k > n\},$$

és

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{a_k : k > n\}.$$

Bizonyítás. Csak a felső határértékre vonatkozó állítást fogjuk igazolni. Az alsó határértékre vonatkozó állítás igazolása hasonlóan történik.

Először vegyük észre, hogy az

$$A_n := \{a_k : k > n\} = \{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$$

halmaz legfeljebb véges sok sorozatbeli elem értékét nem tartalmaz. Továbbá

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$$

Ezért ha a sorozat felülről nem korlátos, akkor $\sup\{a_k : k > n\} = \infty$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Másrészt ha a sorozat felülről korlátos, akkor

$$b_n := \sup\{a_k : k > n\}$$

egy monoton csökkenő számsorozat. Ekkor a $\langle b_n \rangle$ sorozat konvergens vagy mínusz végtelenhez tart. Minden esetben a

$$b^* := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{a_k : k > n\}$$

határérték létezik akár tágabb értelemben is. Azt kell igazolni, hogy b^* a sorozat felső határértéke. Az előző tétel miatt,

(a) ha $x < b^*$, akkor

$$\sup\{a_1, a_2, a_3, \dots\} > x.$$

Ezért végtelen sok sorozatbeli elem létezik, amely nagyobb mint x .

(b) ha $x > b^*$, akkor van olyan n_0 index, hogy

$$\sup\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, \dots\} < x.$$

Ezért legfeljebb véges sok sorozatbeli elem létezik, amely nagyobb mint x .

Tehát b^* kielégíti a 26. Tételben található a felső határértékre vonatkozó két feltételt, ezért

$$b^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

9. Cauchy-sorozatok

A konvergens sorozatokból mutatott példáknál látható, hogy a sorozat elemei egy index után nagyon közel kerülnek egymáshoz. Ez persze így nem elég pontos megfogalmazás. A következő definíció precízen írja le, mire gondolunk.

21. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ számsorozat **Cauchy-sorozat**, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n, m > n_0, \text{ akkor } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Más szavakkal: akkor mondjuk, hogy egy sorozat rendelkezik a **Cauchy-tulajdonsággal**, vagyis Cauchy-sorozat, ha bármely pozitív számhoz találunk olyan küszöbindexet, hogy az annál nagyobb indexű elemek közötti távolság kisebb, mint ez a szám. Ezt értjük az alatt, hogy a sorozat elemei egy index után nagyon közel kerülnek egymáshoz.

Természetesen a Cauchy-tulajdonság egy a konvergenciától független fogalom, bár nagyon hasonlítanak egymásra. Emlékeztetőül, azt mondtuk, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat tart az a számhoz, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } |a_n - a| < \varepsilon.$$

A különbség az, hogy a konvergens sorozatok egy index után nagyon közel kerülnek egy adott számhoz, amíg a Cauchy-sorozatok esetén az elemei egymáshoz kerülnek nagyon közel. Látni fogjuk azonban, hogy a két fogalom mégis ugyanaz abban az értelemben, hogy azok és csak azok a sorozatok rendelkeznek a Cauchy-tulajdonsággal, amelyek konvergenssek.

A tananyag bevezetésében említettem, hogy több geometriai és fizikai fogalmat csak a határérték fogalmának pontos ismeretével tudjuk általánosan értelmezni. A történelem során sok neves matematikus ügyes módszereket dolgozott ki, amivel konkrét problémákat tudtak megoldani. De **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) francia matematikus, mérnök és fizikus volt az, aki a határérték fogalmát szilárd matematikai alapokra fektette azzal, hogy geometriai fogalomból aritmetikai fogalommá tette.

Cauchy megteremtette a matematikai analízis modern tárgyalásmódját. Nevével gyakran találkozunk a sorozatok, sorok, differenciál- és integrálszámítás, komplex függvénytan és differenciálegyenletek elméletében, és alkalmazásuk fizikai problémák megoldásában. A Cauchy-tulajdonság nélkülözhetetlen a sorok és függvénysorok több elméleti tételének bizonyításában. Közel 800 szakkikket és 5 könyvet publikált, nála csak Eulernek volt nagyobb publikációs tevékenysége. Életműve egy 27 kötetes könyvben jelent meg.

28. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium). *Egy számsorozat akkor és csak akkor Cauchy-sorozat, ha konvergens.*

Bizonyítás. Először igazolni fogjuk, hogy minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat. Tegyük fel, hogy az $\langle a_n \rangle$ sorozat konvergens és határértéke a , azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n > n_0, \text{ akkor } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor minden $n, m > n_0$ index esetén a háromszög egyenlőtlenség miatt

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

adódik. Így $\langle a_n \rangle$ Cauchy-sorozat.

A fordított állítás igazolása úgy történik, hogy először bebizonyítjuk, hogy minden Cauchy-sorozat korlátos, amiből a 23. Tétel szerint következik, hogy van konvergens részsorozata. Ezután igazoljuk, hogy az egész sorozat a részsorozat határértékéhez tart.

A Cauchy-sorozat definíciójában legyen n_0 az $\varepsilon := 1$ számhoz tartozó küszöb-index, illetve legyen $m = n_0 + 1$. Így ha $n > n_0$, akkor $|a_n - a_{n_0+1}| < 1$, azaz

$$a_{n_0+1} - 1 < a_n < a_{n_0+1} + 1.$$

Ez azt jelenti, hogy véges sok elemtől eltekintve, nevezetesen ha $n > n_0$, a sorozat korlátos és

$$|a_n| < \max\{|a_{n_0+1} - 1|, |a_{n_0+1} + 1|\}.$$

Tekintettel a hiányzó elemekre, legyen

$$K := \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |a_{n_0+1} - 1|, |a_{n_0+1} + 1|\}.$$

Ilyen maximum létezik, mert az előző halmaznak véges sok eleme van. Ekkor már $|a_n| \leq K$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, azaz a sorozat korlátos.

Legyen $\langle b_n \rangle$ az $\langle a_n \rangle$ sorozatnak egy konvergens részsorozata, és jelölje a a részsorozat határértékét. Mivel $\langle a_n \rangle$ Cauchy-sorozat, így

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ hogy ha } n, m > n_0, \text{ akkor } |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel $b_n \rightarrow a$, így van olyan $k > n_0$ index, hogy $|b_k - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Továbbá legyen m a b_k elem indexe az $\langle a_n \rangle$ sorozatban, azaz $a_m = b_k$. Mivel $m \geq k > n_0$, így

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_m| + |a_m - a| = |a_n - a_m| + |b_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Azaz az $\langle a_n \rangle$ sorozat konvergens. Ezzel a tétel állítását igazoltuk.

Kiderült tehát, hogy ugyanazok a sorozatok konvergenssek és Cauchy-sorozatok is egyben. Jogos tehát a kérdés, hogy miért érdemes külön foglalkozni a Cauchy-tulajdonsággal, hiszen ott van a konvergencia eredeti fogalma. A legfontosabb ok az, hogy a Cauchy-tulajdonságban a határérték nem szerepel. Ha szeretnénk megállapítani egy sorozat határértékét, de sejtésünk sincs arról, hogy mennyi lehet ez a szám, akkor a konvergencia definíciója nem használható, mert vele csak azt tudjuk megállapítani, hogy a sorozat tart egy bizonyos értékhez vagy sem. Bár a Cauchy-tulajdonságból sem tudjuk meg mi lesz a határérték, de legalább megtudhatjuk, hogy a sorozat konvergens-e, hiszen a Cauchy-féle konvergencia kritérium ezt garantálja. Azonban konvergens sorozatokra több olyan szabály érvényes, ami néhány esetben segíthet meghatározni a határértéket. Ezekben az esetekben az a tudat, hogy a sorozat konvergens, lényeges információnak bizonyul a határérték megállapításához.

A fentiek szerint érdemes foglalkozni azzal a kérdéssel, hogy egy sorozat konvergens-e azzal, hogy megvizsgáljuk Cauchy-sorozat-e. Jelen tananyagban ilyen jellegű feladatokat nem oldunk meg. Másrészt, későbbi tananyagokban látni fogjuk, hogy a Cauchy-tulajdonság egy jól használható technikát ad, amivel nagyon fontos állításokat tudunk bebizonyítani.

Van egy másik ok, amiért külön foglalkozunk a Cauchy-sorozatokkal. A tananyag elején említettünk, hogy a matematika analízisben tudunk a természetes metrikától eltérő távolságfüggvényt értelmezni. Az ilyen metrikus terekben is értelmezzük a konvergenciát és a Cauchy-sorozat fogalmát. Azonban van olyan távolságfüggvény, amire a két fogalom már nem esik egyben. A Cauchy-féle konvergencia kritérium pontosan azt állítja, hogy a természetes metrika mellett az előző probléma nem fordul elő.

10. Feladatok

12. Feladat. Keressünk különböző távolságfüggvényeket a valós számok halmazán!

13. Feladat. Vizsgáljuk meg korlátosság szempontjából a következő halmazokat!

$$(1) A := \{x \in \mathbf{R} : \log_x(x+1) > 2\},$$

$$(2) B := \left\{x \in \mathbf{R} : 0 < \sin x < \frac{1}{2}\right\},$$

$$(3) C := f(\mathbf{Q}), \text{ ahol } f(x) := \cos x,$$

$$(4) D := f^{-1}(\mathbf{N}), \text{ ahol } f(x) := [x] \text{ egészrész függvény,}$$

$$(5) E := \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbf{N}\right\}.$$

$$(6) F := \left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbf{N}\right\}.$$

14. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $A \subseteq B$, akkor $A^* \subseteq B^*$!

15. Feladat. Igazoljuk a következő állításokat! Igazak-e az állítások a relációjelek megfordításával?

$$(1) (A \cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*,$$

$$(2) \overline{A^*} \subseteq (\overline{A})^*,$$

$$(3) (A^*)^* \subseteq A^*.$$

16. Feladat. Határozzuk meg az alábbi halmazok torlódási, belső, külső és határpontjait!

$$(a) A := [1, 5[\setminus [2, 3],$$

$$(b) \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q},$$

$$(c) B := \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\},$$

$$(d) \mathbf{Z}.$$

17. Feladat. Igazoljuk, hogy egy intervallum torlódási pontjainak halmaza zárt intervallum!

18. Feladat. Igaz-e a 3. Feladat állítása végtelen sok halmaz uniója esetén?

19. Feladat. Igazoljuk, hogy $\text{int } A \cup \text{int } B \subseteq \text{int } A \cup B$! Igaz-e az állítás a relációjel megfordításával?

20. Feladat. Melyek azok az A halmazok, amelyeknek nincsenek határpontjai, azaz $\text{mar } A = \emptyset$?

21. Feladat. Igaz-e, hogy $\text{mar } A \cup \text{mar } B \subseteq \text{mar } A \cup B$?

22. Feladat. Igazoljuk a következő azonosságokat!

- (1) $\text{int } A \cap \text{int } B = \text{int } A \cap B,$
- (2) $\text{ext } A \cap \text{ext } B = \text{ext } A \cup B,$
- (3) $\text{int}(\text{int } A) = \text{int } A,$

23. Feladat. Igazoljuk, hogy minden A halmaz esetén $\text{int } A$ és $\text{ext } A$ nyílt halmaz, de $\text{mar } A$ és A^* zárt halmaz!

24. Feladat. Igazoljuk, hogy egy véges intervallum akkor és csak akkor nyílt halmaz, ha nyílt intervallum!

25. Feladat. Oldjuk meg a 7. Feladatot közvetlenül a nyílt és zárt halmazok definíciója segítségével!

26. Feladat. Vizsgáljuk meg monotonitást, korlátosságot és konvergencia szempontjából a következő sorozatokat! Ha konvergens, számítsuk ki $\varepsilon = 10^{-3}$ -hoz tartozó küszöbindexet!

- (a) $a_n := \frac{n+1}{2n^2-1},$
- (b) $a_n := \frac{n+2}{2-3n^2},$
- (c) $a_n := \frac{1}{4n-9},$
- (d) $a_n := \frac{2n-1}{n^2+3},$
- (e) $a_n := \frac{n^7}{2-3n^7},$
- (f) $a_n := \frac{3\sqrt{n}+2}{2\sqrt{n}+1},$
- (g) $a_n := \lg \frac{n+1}{n+2},$
- (h) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1},$
- (i) $a_n := 1 + (-1)^n,$
- (j) $a_n := \frac{(-1)^n + 2}{n},$
- (k) $a_n := \frac{2^{n+1}}{3 \cdot 2^n + 2},$
- (l) $a_n := \frac{2}{n^2} \cos \frac{2n\pi}{3},$
- (m) $a_n := \begin{cases} 1 & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{n+1}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases},$
- (n) $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{1-n}{n} & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$

27. Feladat. Igazoljuk, hogy egy részsorozat részsorozata az eredeti sorozatnak is részsorozata!

28. Feladat. Igazolja, hogy ha $\varphi: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ szigorúan monoton növekvő, akkor $\varphi(n) \geq n$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén!

29. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy sorozat minden részsorozatának van nullához tartó részsorozata, akkor az eredeti sorozat nullsorozat!

30. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy sorozat monoton és van konvergens részsorozata, akkor a sorozat konvergens!

31. Feladat. Igazoljuk, hogy egy nem monoton sorozatnak mindig van monoton részsorozata!

32. Feladat. Az alábbi sorozatok közül, melyek az $\langle a_n \rangle := \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$ sorozat részsorozatai?

- (a) $\langle b_n \rangle := \langle 1, 2, 3, 4, \dots \rangle$, (b) $\langle b_n \rangle := \langle 2, 4, 8, 16, \dots \rangle$,
 (c) $\langle b_n \rangle := \langle 1, 1, 2, 2, \dots \rangle$, (d) $\langle b_n \rangle := \langle 2, 1, 4, 3, \dots \rangle$.

33. Feladat. Igazoljuk, hogy ha a Cantor-féle metszet-tételben az intervallumok hossza tart a nullához, akkor a metszet egyelemű halmaz lesz!

34. Feladat. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat és

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

a sorozat elemeiből képzett számtani közepekből álló sorozat. Igazoljuk, hogy

- (a) ha $\langle a_n \rangle$ monoton, akkor $\langle A_n \rangle$ is monoton,
 (b) ha $\langle a_n \rangle$ konvergens, akkor $\langle A_n \rangle$ is konvergens és ugyanahhoz a számhoz tart!
 (c) ha $\langle a_n \rangle$ végtelenhez tart, akkor $\langle A_n \rangle$ is végtelenhez tart!

35. Feladat. Igazolja a következő tagabb értelemben vett határértékeket!

- (a) $a_n := \frac{n^2}{n+1} \rightarrow \infty$, (b) $a_n := \frac{1-n^2}{2n-1} \rightarrow -\infty$,
 (c) $a_n := 1,01^n \rightarrow \infty$, (d) $a_n := \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \rightarrow \infty$,

36. Feladat. Igazoljuk, hogy egy sorozat részsorozatainak torlódási pontjai a sorozatnak is torlódási pontjai!

37. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy sorozat torlódási pontjainak halmaza felülről nem korlátos, akkor ∞ kiterjesztett torlódási pontja!

38. Feladat. Legyen $\langle a_n \rangle$ és $\langle b_n \rangle$ két számsorozat, amelyre $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n > n_0$ esetén. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

39. Feladat. Legyen $\langle a_n \rangle$ egy számsorozat és $a < b$ két valós szám. Igazoljuk, hogy ha $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $a < a_n < b$ minden $n > n_0$ esetén, akkor

$$a \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq b.$$

40. Feladat. Igazolja, hogy ha egy sorozatnak véges sok torlódási pontja van, akkor van a sorozatnak egy olyan, páronként diszjunkt részsorozatokból álló felbontása, amelynek részsorozatai a sorozat torlódási pontjaihoz tartanak!

41. Feladat. Keresse meg a következő sorozatok torlódási pontjait, valamint alsó és felső határértékét!

$$(a) \quad a_n := \frac{-2}{2n+1},$$

$$(b) \quad a_n := 2 - 2n^2,$$

$$(c) \quad a_n := n(1 + (-1)^n),$$

$$(d) \quad a_n := \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2},$$

$$(e) \quad a_n := n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(f) \quad a_n := \{1, 1 \cdot n\}.$$

$\{x\}$ az x szám törtrésze.

Ajánlott irodalom

- [1] Blahota István: *Kalkulus és maxima*, egyetemi jegyzet. <http://mek.oszk.hu/09800/09846/09846.pdf>
- [2] Laczkovich Miklós és T. Sós Vera: *Valós analízis I.*, Typotex kiadó, Budapest, 2012.
- [3] Leindler László – Schipp Ferenc: *Analízis I*, Tankönyvkiadó, 1985.
- [4] Sain Márton: *Nincs királyi út! : Matematikatörténet*, Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.
- [5] Leindler László: *Analízis*, Polygon, Szeged, 2001.
- [6] Rimán János: *Matematikai analízis I*, Liceum, Eger, 2004.
- [7] Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I-II*, Liceum, Eger, 2004.
- [8] Rudin Walter: *A Matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
- [9] Szabó Tamás: *Kalkulus I. Példatár*, Polygon, Szeged, 2004.
- [10] Toledo Rodolfo: *Halmazok, relációk, függvények*, elektronikus tananyag, 2016. <http://bit.ly/toledo-tananyag-halmazok>
- [11] Toledo Rodolfo: *Valós számok*, elektronikus tananyag, 2017. http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_szamok
- [12] Toledo Rodolfo: *Valós függvények*, elektronikus tananyag, 2017. http://bit.ly/toledo-tananyag-valos_fv

Tárgymutató

- alsó határ, 30
- alsó határérték, 58
- Bolzano–Weierstrass-tétel, 11, 57
- Cantor-féle metszet-tétel, 11
- Cantor-féle triadikus halmaz, 22
- Cauchy-féle konvergencia
 - kritérium, 68
- Cauchy-sorozat, 67
- felső határ, 29
- felső határérték, 58
- halmaz
 - belső pontja, 15
 - határpontja, 15
 - infimum, 10
 - izolált pontja, 13
 - külső pontja, 15
 - korlátosság, 9
 - maximuma, 9
 - minimuma, 10
 - sűrűsödési pontja, 10
 - szuprémuma, 9
 - torlódási pontja, 10
- Hausdorff-féle tulajdonságok, 8
- infimum, 30
- környezet, 7
- küszöbindex, 31
- konvergens sorozatok, 31
- korlátos sorozatok, 29
- limesz inferior, 58
- limesz szuperior, 58
- metrika, 6, 7
- metrikus tér, 7
- monoton sorozatok, 27
- nullsorozat, 33
- nyílt halmaz, 16
- páronként diszjunkt részsorozatokra való felbontás, 45
- perfekt halmaz, 21
- részsorozat, 42
- sorozat, 25
- sorozatok
 - alsó korlátja, 29
 - felső korlátja, 29
 - konvergenciája, 31
 - monotonitása, 27
 - torlódási pontja, 54
- szuprémum, 29
- távolságfüggvény, 6, 7
- végtelen mint határérték, 50
- zárt halmaz, 18