

Sipos Béla

Termelési függvények felhasználása elemzésre

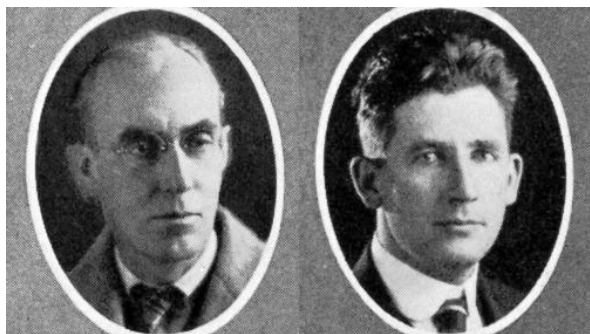
Magánkiadás. 2023

Tartalom

Tartalom.....	2
A termelési függvények megalkotóinak arcképalbuma.....	3
Kutatási előzmények	3
Szerkesztéseim a Wikipédiában	4
Bevezetés. A termelési függvény.....	5
A termelési függvények becslése egy tényezőváltozó esetén.....	19
A termelési függvényszámítás adatbázisának kialakítása	27
Gyakorlati számítások. Egy cipőgyár termelési függvénye.	31
Egy cipőgyár CES függvénye	39
Egy cipőgyár Solow termelési függvénye.....	52
Cobb és Douglas által 1928-ban publikált termelési függvény számításainak a kiegészítése.....	53
Termelési függvényszámítás. Magyarország.....	69
A Kádas Kálmán féle termelési függvény	70
Oktatási termelési függvények.	75
A translog termelési függvény.....	88
A nem lineáris regressziós függvények jellemzői	89

A termelési függvények megalkotóinak arcképalbuma

Cobb-Douglas termelési függvény megalkotói és első felhasználói



[Charles W. Cobb és Paul H. Douglas](#)



[Jan Tinbergen](#)



[Kádas Kálmán](#)

A CES-termelési függvény kidolgozói



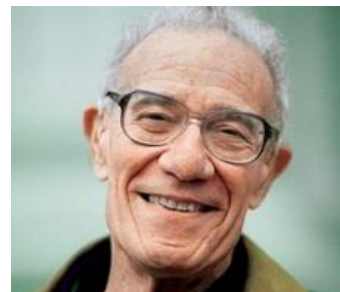
[Kenneth Arrow](#)



[Hollis B. Chenery](#)



[Bagicha Singh Minhas](#)



[Robert Merton Solow](#)

Kutatási előzmények

Forrás: MTMT adatbázis

<https://m2.mtmt.hu/gui2/?type=authors&mode=browse&sel=authors10004703>

1. [Sipos Béla: Termelési lehetőségek elemzése a könnyűipari vállalatoknál](#) pp. 73-83. 11 p. (1971) Könnyűipari Szervezési Tájékoztató, VOL. 8, Füzet 3., A Könnyűipari Szervezési Intézet kiadványa.
2. [Sipos Béla: 10. fejezet: A vállalati termelőfolyamat.](#) In: Komjáti, Zoltán (szerk.) [Vállalati gazdaságtan.](#) Budapest, Magyarország: Tankönyvkiadó, (1971) pp. 244-282. 39 p.
3. Borli Károly - [Sipos Béla: Fébó, László \(szerk.\) Iparvállalati prognóziskészítés matematikai, statisztikai módszerkel.](#) Budapest, Magyarország: Közgazdasági és Jogi Kiadó (KJK) (1977), 254 p.
4. Rédey Katalin - [Sipos Béla: A termelési függvények felhasználása ágazati és vállalati prognóziskészítésre, I. rész.](#) IPARI ÉS ÉPÍTŐIPARI STATISZTIKAI ÉRTESÍTŐ 29: 8-9 pp. 305-321. 17 p. (1978)
5. Rédey Katalin- [Sipos Béla: A termelési függvények felhasználása ágazati és vállalati prognóziskészítésre, II. rész.](#) IPARI ÉS ÉPÍTŐIPARI STATISZTIKAI ÉRTESÍTŐ 29: 11 pp. 397-405. 9 p. (1978)

6. [Sipos Béla: A termelési függvények felhasználása ágazati és vállalati prognóziskészítésre, IV. rész.](#) IPARI ÉS ÉPÍTŐIPARI STATISZTIKAI ÉRTESÍTŐ 30: 6 pp. 220-225. 6 p. (1979)
7. Rédey Katalin - [Sipos Béla: Termelési függvények felhasználása ágazati és vállalati prognóziskészítésre, III. rész.](#) IPARI ÉS ÉPÍTŐIPARI STATISZTIKAI ÉRTESÍTŐ 30: 2-3 pp. 86-97. 12 p. (1979)
8. Rédey Katalin - [Sipos Béla: Termelési függvények a magyar ipar néhány ágazatában.](#) STATISZTIKAI SZEMLE 58: 7 pp. 692-708. 17 p. (1980) [A Fényes Elek nívódíjak kiosztása.](#) Fényes Elek díjas tanulmány.
9. [Sipos Béla: Termelési függvények felhasználása vállalati prognózis készítésére.](#) pp. 52-67. 16 p. (1981) Könnyűipari Szervezési Tájékoztató. VOL. 18, füzet: 1., A Könnyűipari Szervezési Intézet kiadványa.
10. [Sipos Béla: Termelési függvények felhasználása a vállalati prognóziskészítésben. Prognosztika.](#) PROGROSZTIKA (BUDAPEST) 12: 1-2 pp. 43-49. 7 p. (1981)
11. [Sipos Béla: Termelési függvények alkalmazása a magyar iparban.](#) MUNKAÜGYI SZEMLE 25: 3-4 pp. 38-47. 10 p. (1981)
12. Rédey Katalin - [Sipos Béla: A termelési függvények és a vállalati prognózisok. I. rész.](#) STATISZTIKAI SZEMLE 59: 5 pp. 488-498. 11 p. (1981)
13. Rédey Katalin - [Sipos Béla: A termelési függvények és a vállalati prognózisok. II. rész.](#) STATISZTIKAI SZEMLE 59: 6 pp. 606-625. 20 p. (1981)
14. Rédey Katalin - [Sipos, Béla: Elemzésre és prognóziskészítésre alkalmas termelési függvények a magyar gépiparban.](#) VÁLLALATVEZETÉS VÁLLALATSZERVEZÉS 13: 2 pp. 78-83. 6 p. (1981)
15. [Sipos, Béla: Termelési függvények - vállalati prognózisok.](#) Budapest, Magyarország: Közgazdasági és Jogi Kiadó (KJK) (1982), 278 p.
16. Rédey Katalin, Sipos Béla: Termelési függvények alkalmazása az iparban. KÖZGAZDASÁGI SZEMLE 30 : 4 pp. 435-446. 12 p. (1983)
17. [Sipos Béla: Vállalati prognosztika: Elmélet - módszertan - szoftverek.](#) Pécs, Magyarország: Janus Pannonius Egyetemi Kiadó (1999)
18. Kehl Dániel -Sipos Béla. [Excel parancsfájlok felhasználása a statisztikai elemzésekben:](#) oktatási segédlet. (2011)

Szerkesztéseim a Wikipédiában

Sipos Béla Wikipédia szerkesztő oldala

[SiposBéla1945](#)

Magyar nyelvű szócikkeim:

[Kádas Kálmán](#) Magyar és angol Wikipédia

[Komjáti Zoltán](#) Magyar Wikipédia

Általam javított, bővített szócikkek:

[Cobb–Douglas-függvény](#)

[Termeléselmélet](#)

[Termelési tényező](#)

[CES-függvény](#)

Bevezetés. A termelési függvény

Az egy egyenletbe sűrített [ökonometriai modellek](#) ágazati és vállalati gyakorlatban egyaránt használt formái a termelési függvények, melyek nagy szerepet játszanak a termelési folyamatok leírásában. A termelési folyamat eredménye [volumene] nagy számú műszaki, gazdasági, természeti, társadalmi tényezőtől függ. Közgazdasági és műszaki elemzés útján határozhatók meg azok a termelési tényezők, melyek az adott gazdasági egységnél a legnagyobb hatással vannak a kibocsátásra. A matematikai, statisztikai elemzés e hatások modellezésével és mértékének számszerűsítésével foglalkozik. A termelési ráfordításokat termelési tényezőknek [factors of production] hívjuk. A termelési tényezőkhez tartozik pl. a föld, a tőke, a nyersanyag és a munkaerő. A munkaerő [labour force] személyi termelési tényező, míg a többi termelési tényező tárgyi tényező. A tőkejavakat [capital goods] a termelés során állítják elő, s ide tartoznak a termelő- és szállító berendezések, épületek, számítógépek és egyéb gépek. A tőke fogalmát gyakran egy üzleti vállalkozás beindításához vagy fenntartásához szükséges pénzösszeg meghatározására használják, amit mi pénztőkének [financial capital] hívunk, míg a termelésben felhasznált tényezőket fizikai tőkének [physical capital] nevezzük. A fizikai tőkét holt munkának is hívjuk megkülönböztetve a munkaerőtől, az élőmunkától. A termelési függvények tehát, valamely gazdasági egység termelésének volumenét fejezik ki a vizsgált időszakban az élőmunka - ráfordítások, a fizikai tőkeráfordítások és egyéb termelési tényezők függvényében. A termelés eredménye és a termelési tényezők közötti összefüggést sztochasztikus formában, technikai [technológiai] egyenletekkel írják le. Az alapvető két termelési tényező, az élőmunka és holtmunka ráfordítások mellett, a termelési függvények tartalmazhatják az anyag-, és energia - ráfordításokat és egyéb tényezőket is. A termelési függvények segítségével a vállalat [általában a gazdaság] viselkedésének technológiai korlátait írhatjuk le. A technológiai korlátok [technological constraints] azt jelentik, hogy egy adott mennyiségű kibocsátás csak bizonyos ráfordítás - [input-] kombinációk révén valósítható meg, a vállalat a technológiailag megvalósítható termelési tervekre kénytelen korlátozni tevékenységét, vagyis már döntött az optimális termékösszetétel- és technológia kérdésében. [Az operációkutatás módszerei segítik az ilyen problémák megoldását, pl.: lineáris- és nem lineáris programozás].

A termelési függvények, mint ökonometriai modellek felírásánál feltételezik, hogy:

- a vizsgált törvényszerűség időben állandó, vagy csak lassan változik, vagy ismert a változása;
- az elemzés tárgya, a termelési eredmény közvetlenül vagy közvetve mérhető;
- az elemzés tárgyára lényeges hatást gyakorló tényezők elhatárolhatók azoktól a tényezőktől, amelyeknek szerepe elhanyagolható;
- az adatok hozzáférhetők és összehasonlíthatók.

Az ökonometria, így a termelési függvényszámítás is a matematikai közgazdasági és a matematikai, statisztikai kutatást együttesen, kombinált módon alkalmazza. Az ökonometria a gazdasági folyamatok [pl. a termelési folyamatok] mennyiségi vonatkozásainak elemzésével lehetővé teszi a

múltbeli folyamatok, összefüggések vizsgálatát, sőt ezen kívül e folyamatok jövőbeli alakulásának előrejelzését is. Az ökonometria ex ante információival a döntések jobb megalapozását szolgálja.

Az ökonometria is modellekkel dolgozik. Az ökonometriai modell olyan formális konstrukció, amely egyenlet vagy egyenletrendszer segítségével modellezi a gazdasági jelenségek között fennálló, [legtöbbször ok okozati] alapvető sztochasztikus összefüggéseket. A modell megfogalmazásának fontos szakasza a modell matematikai formájának kialakítása, vagyis függvényszerű kapcsolatok meghatározása a modell változói között. Az ökonometriai modelleknek két nagy csoportját különböztetjük meg az előző definíció alapján:

- az egy egyenletes modelleket és
- a többegyenletes modelleket.

Az egy egyenletes modellnél [pl. a termelési függvény számításnál] feltételezzük, hogy az adott jelenség önmagában, a gazdaság többi folyamatától elválasztva vizsgálható. Például a termelés becsült volumene [y] két tényezőtől; az élőmunka [x_1] és a fizikai tőke, [a holtmunka] [x_2] tényezőktől függ.

A termelési függvények változóinak jelölésére különböző megoldásokat alkalmaznak a hazai és a nemzetközi szakirodalomban.

Cobb és Douglas tanulmánya „A termelés elmélete” 1928-ban jelent meg. "[A Theory of Production](#)"

A változóknál a következő jelöléseket alkalmazták.

P= Production (Termelés)

L= Labour (Munkaerő)

C= Capital (Össztőke).

A Cobb és Douglas és a különböző termelési függvényeket, pl. a CES, a Solow regressziós modellként értelmezzük és a regressziós függvényeknél alkalmazott jelöléseket alkalmazzuk általában. Kivétel, amikor a Cobb és Douglas által publikált adatállománnyal végeztük el a számításokat.

Termelés = f [élőmunka, holtmunka] vagyis:

$$y = f[x_1, x_2]$$

Tételezzük fel, hogy a függvény [f] hatványkitevős:

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$$

vagyis az eredeti változók logaritmusai között lineáris kapcsolat van:

$$\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2$$

A modell specifikáció így még hiányos, mert az ökonometriai modell sztochasztikus, vagyis véletlen hatások is jelentkeznek, [olyan hatások, amelyeket a modellbe bevont változókkal (x_1 és x_2) nem tudunk magyarázni]. A véletlen hatást a reziduális változó [e] testesíti meg.

A modell ekkor:

$$\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + e$$

A bal oldalon szereplő változót, vagyis az y -t eredményváltozónak, a jobboldalon szereplő változókat [x_1 -t és x_2 -t] pedig magyarázó [tényező] változóknak nevezzük.

Az eredményváltozó az okozat, a magyarázó [vagy tényező] változó az ok szerepét tölti be, így az y -t endogén változónak, az x -eket exogén változóknak hívjuk. Az endogén változót a modellből nyerjük, míg az exogén változókkal magyarázzuk az endogén változó alakulásában fellépő törvényszerűségeket. Az exogén változók külső adottságok, a rendszer maga nem hat rá vissza és mi se tudjuk befolyásolni.

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a vizsgált jelenség, a termelés és a két ráfordítás közötti kapcsolat, önmagában is vizsgálható. Ez azonban nem biztos, hogy igaz. Pl. az x_2 [a fizikai tőke, az állóeszköz-állomány] volumene függhet az import [z] mennyiségétől. Tegyük fel, hogy ez a kapcsolat leírható az:

$$x_2 = a_0 + a_1 z + u$$

alakban, ahol z az importot testesíti meg és u a reziduális változó. Ekkor a két egyenlet az:

$$\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2$$

$$x_2 = a_0 + a_1 z + u$$

alakban írható fel. A két eredményváltozót [$\ln y$ és x_2] hívjuk a modell endogén változóinak, míg a modell exogén változóit: az $\ln x_1$ és z .

Exogén változó tehát az, amelynek értékét azon modellen kívüli tényezők határozzák meg, amelybe beletartozik. Az exogén szó valamire utal, ami valamin kívül képződik. Az endogén változó tehát az, amelynek értékét a modellen belül megállapított kapcsolatok határozzák meg, amelybe beletartozik.

Az egy egyenletes modell esetében az eredmény- és magyarázó változó kategóriák egybeesnek az endogén és exogén változó kategóriákkal, a több egyenletes modell esetében azonban már nem. A termelési folyamatok ökonometria elemzésének és előrejelzésének egyik fő iránya tehát a létrehozott kibocsátás [termelési volumen, output] és a termelési folyamatban résztvevő termelési tényezők [termelési ráfordítások, inputok, pl. a fizikai tőke, élőmunka, föld, nyersanyag, energia stb.] közötti kapcsolat kifejezése. A kapcsolat ökonometria kifejezője a termelési függvény, amelynek alább adott definíciójából következik, hogy feltételezzük a termelési tényezők tökéletes oszthatóságát.

A termelési függvény általános alakja egy olyan implicit [y -ra ki nem fejezett] függvény, amely az y_1, y_2, \dots, y_m kibocsátások és az

x_1, x_2, \dots, x_p termelési tényezők [ráfordítások] közötti kapcsolatot matematikai [függvény] alakban fejezi ki:

$$f[y_1, y_2, \dots, y_m; x_1, x_2, \dots, x_p] = 0$$

Az egyetlen kibocsátást létrehozó termelőtevékenységet az:

$$f[y; x_1, x_2, \dots, x_p] = 0$$

implicit függvénnyel, vagy általában még egyszerűbb formában az:

$$y = f[x_1, x_2, \dots, x_p]$$

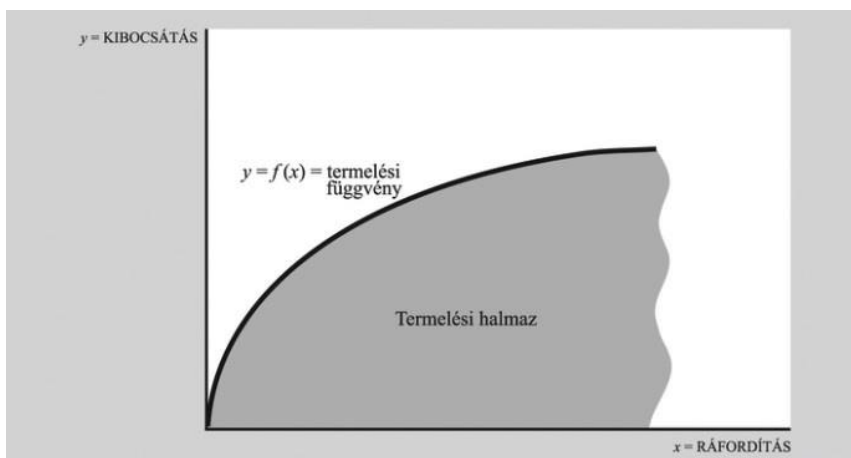
explicit függvénnyel írhatjuk le, amelynek bal oldalán az y a létrehozott kibocsátás mint függő [eredmény, magyarázott, endogén] változó, jobb oldalán pedig az x_1, x_2, \dots, x_p független, magyarázó, [exogén] változók szerepelnek. Az egyszerűbb értelmezés miatt a tényező változók számát kettőre csökkenthetjük. [élő - és holtmunka], s így kapjuk meg az:

$$y = f[x_1, x_2]$$

függvényt.

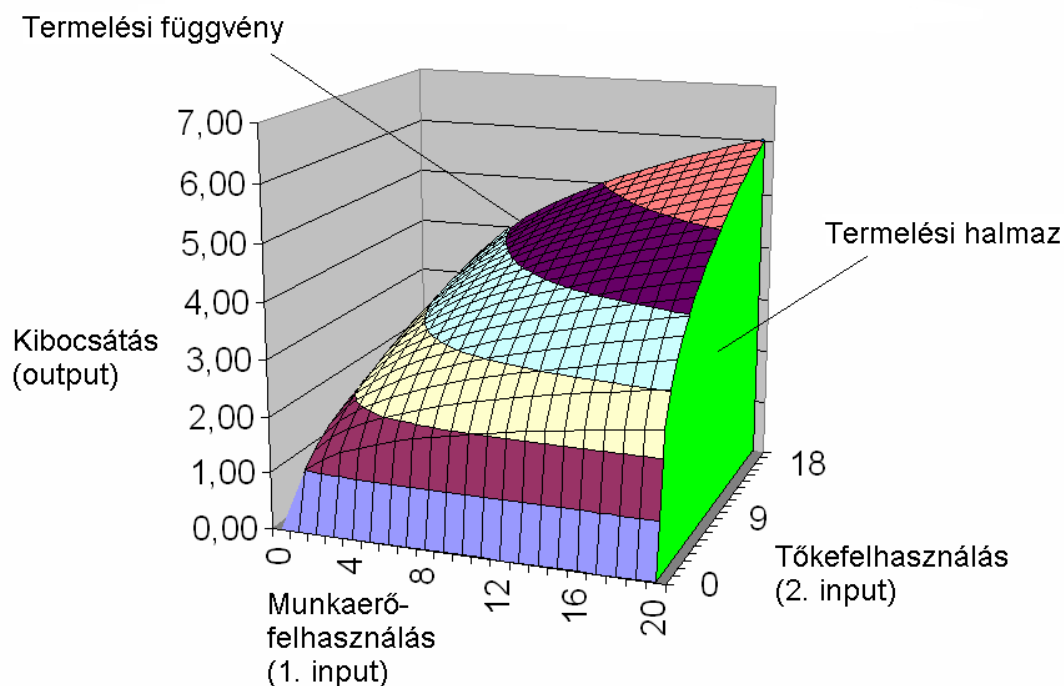
A továbbiakban ez utóbbi termelési függvény tulajdonságaival foglalkozunk, amit tovább egyszerűsíthetünk, rögzíthetjük pl. az x_2 értékét, s így csak két változóval [y és x_1] dolgozunk. A termelési függvény leírásának legegyszerűbb módja az, hogy táblázatot készítünk, s ebben felsoroljuk az összes technológiailag megvalósítható ráfordítás-kibocsátás kombinációkat majd ezt grafikusan ábrázoljuk.

A technológiailag megvalósítható ráfordítás-kibocsátás [input-output] kombinációk halmazát termelési halmaznak [production set] nevezzük. Tegyük fel például, hogy csak egyetlen ráfordítással [inputtal, jele x] és egyetlen kibocsátással [outputtal, jele y] rendelkezünk. A termelési halmazt ebben az esetben az alábbi ábra szemlélteti.



A rövid távú termelési függvény egyre laposabb, ahogy pl. az x_1 termelési tényező nő. Az $f[x_1, x_2]$ függvény x_1 szerinti deriváltja, az élőmunka határtermelékenysége tehát csökken, az x_1 növekedésével. Pl. a mezőgazdasági vállalkozó, aki rövid távon csak egy meghatározott mennyiségű [az általa bérelt, vagy tulajdonában levő] földre vonatkozó termelési tervben gondolkodhat, ha növeli a munkások számát [vagy a felhasznált munkaórák mennyiségét], akkor ez először többleteredményre vezethet, mert hatékony munkamegosztást tudnak kialakítani vagy más módon növelik a termelést. Ha azonban a rendelkezésre álló föld mennyisége állandó, a határtermék előbb vagy utóbb szükségszerűen csökken [esetleg az abszolút kibocsátás is], mert a munkások "egymást zavarhatják" a munkavégzés során.

A termelési halmaz a vállalat lehetséges technológiai választásait tartalmazza, mivel, ha valamely $[x, y]$ pont benne van a termelési halmazban, akkor ez azt jelenti, hogy az x ráfordítás segítségével technológiailag lehetséges az y kibocsátás előállítása. Figyelembe véve, hogy a vállalat számára a termelési ráfordítások költségekkel járnak, érdemes leszűkíteni vizsgálatunkat a ráfordítások egy adott szintjén maximálisan elérhető kibocsátások vizsgálatára. A következő ábrán ez nem más, mint a termelési halmaz határa. A határpontok által meghatározott függvény a termelési függvény néven ismert és azt a maximálisan lehetséges kibocsátást méri, amelyet adott mennyiségű ráfordítással elérhetünk. Természetesen a termelési függvény fogalma több ráfordítás [input] esetében is ugyanígy alkalmazható. Ezt mutatja a következő ábra, amely egy háromváltozós termelési függvény termelési felületét szemlélteti. E felület minden egyes pontja az egyes x_1 és x_2 termelési tényező-kombinációkhoz tartozó kibocsátást adja. Így az alábbi ábra p pontjának megfelel a két termelési tényező adott x_{11} és x_{22} kombinációjával létrehozott kibocsátás.

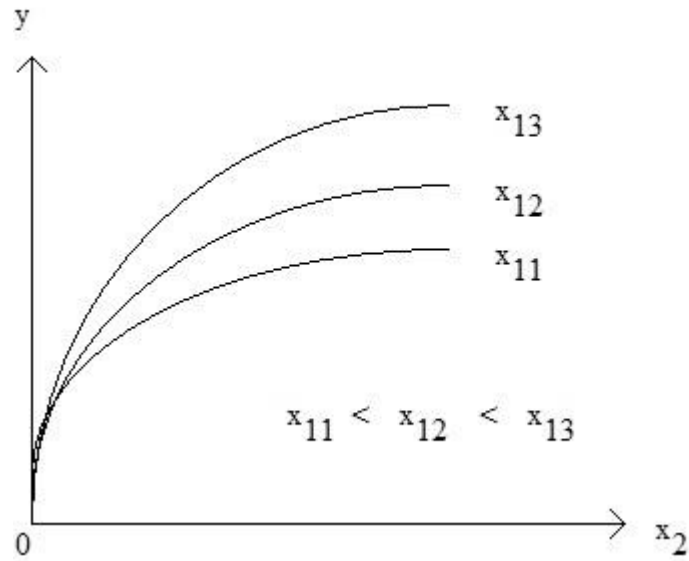


A termelési függvény termelési felületének a részletes ábrája

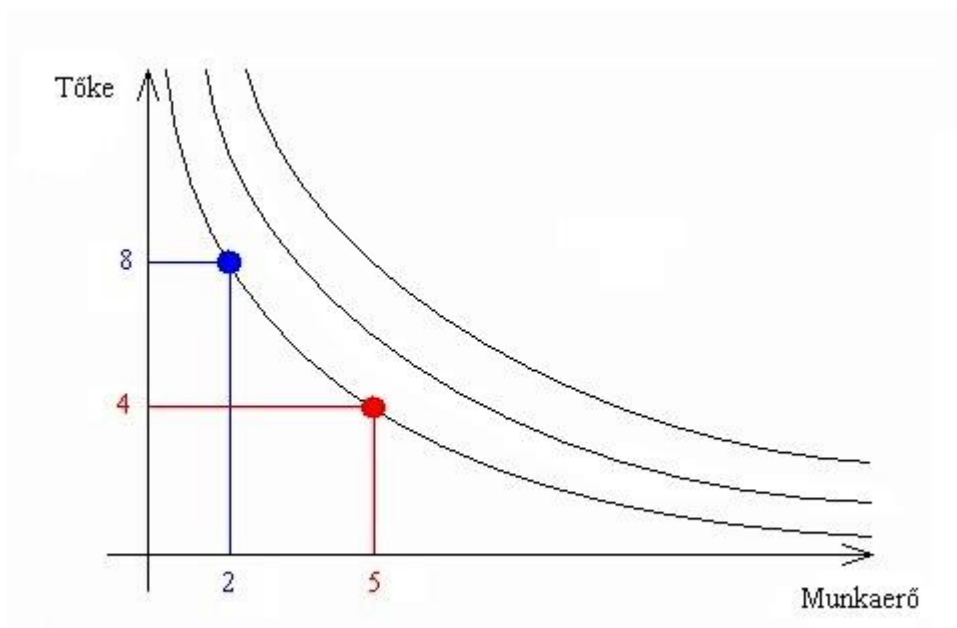
A síkba helyezett térbeli ábrákat konkrét mennyiségi elemzésre nehéz használni, ezért a termelési függvények további tulajdonságainak a tanulmányozására a kétdimenziós ábrákat használjuk, ahol az egyik termelési tényezőt állandónak vesszük.

Az alábbi ábrában az x_{11} , x_{12} , x_{13} rögzített élőmunka értékekhez tartozó görbéket a termelési függvény ráfordítás- kibocsátás vonalának hívjuk. Látható az ábrából, hogy mindegyik görbe a koordináta rendszer kezdőpontjából indul ki és növekszik, de minél nagyobb a rögzített x_1 termelési tényező értéke annál magasabban fekszik a görbe. Eljárhatunk úgy is, hogy a termelést tekintjük állandónak és így azokat a termelési tényezőkombinációkat határozzuk meg, amelyekkel ezt az állandó termelést elő lehet állítani. Ezt a görbét izokvantnak nevezzük. Ld. alábbi ábrát.

A termelési függvény ráfordítás-kibocsátás vonalai.



Az izokvant görbék tőke és munkaerő

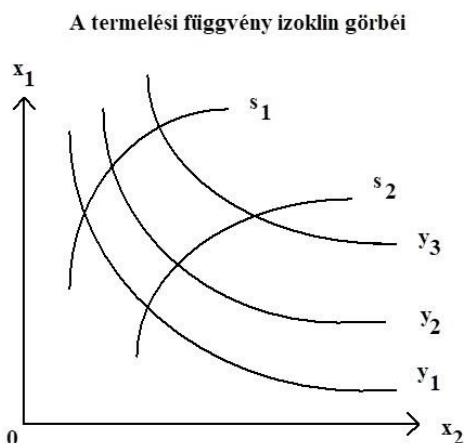


Az izokvant görbék nem érinthetik, nem metszhetik egymást mert ha egy pontjuk közös, akkor minden pontjuk közös. A görbe meredeksége negatív, vagyis, ha az egyik tényezőt növeljük, a másikat csökkenteni kell, hogy az össztermelés ne változzon. Végül a görbe az origóba konvex.

A görbe mentén az elmondottak alapján az alábbi összefüggés érvényes:

$$dx_1 \frac{d \hat{y}}{dx_1} + dx_2 \frac{d \hat{y}}{dx_2} = 0$$

vagyis az izokvant görbe mentén haladva az egyik tényező mennyiségét folyamatosan csökkentjük, a másikat a feltételezés szerint lehet annyival növelni, hogy az össztermelés színvonala ne változzon. Ha az izokvantok azonos meredekségű [iránytangensű] pontjait összekötjük, akkor az ún. izoklin görbéket [s_1 és s_2] kapjuk. Az izoklin görbék az azonos helyettesítési határárányú pontok mértani helyei, amelyeket a következő ábrában az izokvantok segítségével szerkesztettünk meg. Ezekben a pontokban a határtermelékenységek [parciális deriváltak] hányadosa állandó érték. [A derivált geometriailag iránytangensként értelmezhető.]



Elemzéseinkben a helyettesítést folytonosnak tekintjük. A termelési függvény elemzésénél meg kell különböztetnünk a hosszú- és rövidtáv fogalmát. A technológiailag megvalósítható ráfordítás-kibocsátás kombinációk halmazának, a termelési halmaznak értelmezésénél ugyanis, eltekintettünk attól a fontos ténytől, hogy vannak olyan termelési tervek [programok], amelyek azonnal megvalósíthatók és vannak olyanok, amelyek megvalósítása csak hosszabb távon lehetséges.

Rövid távon jó néhány előre meghatározott szinten rögzített termelési tényezőnk van. Ilyen például a rendelkezésre álló föld, a gépek, berendezések, szállítóeszközök kapacitása, mivel ezeknek fizikai és erkölcsi kopása hosszabb időszakot vesz igénybe stb. Bizonyos eszközök még hosszabb ideig rögzítettnek tekinthetők, pl. az épületek, az infrastruktúra, a vezetők szakismerete stb. Azokat a termelési tényezőket, amelyekből a felhasználható mennyiség, - figyelembe véve fizikai és erkölcsi kopásukat - nem változtatható meg azonnal, abból a célból, hogy hatást gyakoroljunk a kibocsátásra, állandó termelési tényezőknak [fix inputoknak] hívjuk. A nem állandó termelési tényezőket változó termelési tényezőknak [változó inputoknak] nevezzük és ezek [pl. a munkaerő, anyag- és energia- felhasználás, stb.] növelése - adott korlátok között - rövid távon is lehetséges. Azt a legrövidebb időszakot, mely alatt valamennyi figyelembe vett ráfordítás nagysága megváltoztatható, hosszú távnak nevezzük, míg az ennél rövidebb távot rövid távnak hívjuk.

A termelési függvény értelmezési tartományának és értékkészletének meghatározásakor figyelembe kell venni, hogy mind a termelési tényezők, mind a kibocsátás csak pozitív értékeket vehetnek fel. Mivel a kibocsátás létrehozásához az x_1 és x_2 tényezőkre egyaránt szükség van, ezek nulla értéket nem vehetnek fel. Ha valamelyik tényező értéke nulla lenne, akkor az eredeti függvényben nem szerepelne, s az egy tényezős termelési függvénné alakulna át, ami rendszerint csak részleges vizsgálatokat tesz lehetővé. A termelési tényezők pozitív intervallumának felső határát elméletileg a rendelkezésre álló tényezők mennyisége, gyakorlatilag természetesen a rendelkezésre álló termelési tényezőknek az a mennyisége szabja meg, ameddig a termelés még hatékony. A termelési függvény folytonos. Ez azt jelenti, hogy az x_1 és x_2 termelési tényezők kismértékű megváltoztatására az y kibocsátás is csak kismértékben változik. A termelési függvény x_1 és x_2 szerinti elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak és pozitívak, azaz

$$MP_{x_1} = \frac{d\hat{y}}{dx_1} > 0$$

$$MP_{x_2} = \frac{d\hat{y}}{dx_2} > 0$$

Hatványkitevős két tényezőváltozós termelési függvény esetében a határtermelékenységek:

$$MP_{x_1} = \frac{d\hat{y}}{dx_1} = b_0 x_2^{b_2} b_1 x_1^{b_1-1} = b_1 \frac{\hat{y}}{x_1} = b_1 \bar{y}_1$$

$$MP_{x_2} = \frac{d\hat{y}}{dx_2} = b_0 x_1^{b_1} b_2 x_2^{b_2-1} = b_2 \frac{\hat{y}}{x_2} = b_2 \bar{y}_2$$

Ugyanis:

$$\hat{y} = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$$

$$x_1^{b_1-1} = x_1^{b_1} x_1^{-1} = x_1^{b_1} \frac{1}{x_1}$$

Az élőmunka határtermelékenysége az élőmunka változó (x_1) kitevője (b_1) és az átlagtermelékenység (\bar{y}_1) szorzatával egyenlő. Hasonló módon a holtmunka határtermelékenysége a holtmunka változó (x_2) kitevője (b_2) és az eszközhatékonyság (\bar{y}_2) szorzatával egyenlő.

MP=Határtermelékenység (Marginal Productivity). Használatos fogalom még: határtermék: MP: Marginal Product.

Az elsőrendű parciális derivált pozitív volta azt fejezi ki, hogy a termelési tényezők növekedésével a kibocsátás is nő. Ez azt jelenti, hogy a munkatényező vagy az állóeszköz-tényező rögzítésével mindig találunk olyan befektetési lehetőséget vagy foglalkoztatási lehetőséget, amellyel az állóeszköz-felhasználás vagy a munkaráfordítás utolsó növekménye is elősegíti a kibocsátás növekedését. Valamely termelési tényező határtermelékenysége [marginális produktivitása] tehát megmutatja, hogy mennyi többletkibocsátást hoz létre a felhasznált termelési tényező többletköltsége, miközben a termelési függvényben szereplő másik termelési tényező mennyisége változatlan marad. Természetesen ezekkel a tulajdonságokkal több termelési tényező esetén is rendelkezik a termelési függvény, itt csak az egyszerűség és a könnyebb értelmezhetőség miatt írtuk fel a két tényezőváltozós függvényt. A termelési függvények közgazdasági-matematikai vizsgálata lehetővé teszi számos, a termelés függvény tartalmával és formájával összefüggő mutató felírását. Ezekből a mutatókból fontos következtetéseket lehet levonni a tényezők közötti összefüggés jellegéről.

A termelési függvény alapján meghatározható átlagmutatók.

Átlagtermelékenység (Average Productivity) vagy átlagtermék: Average Product, jele AP.

Valamely termelési tényező átlagtermelékenységén a megfelelő termelési tényező egységére vonatkozó becsült kibocsátást értjük. Általában az átlaghatékonyságok amelyek a t időpontbeli vagy i térbeli átlaghatékonyságokat jelölik, a termelési tényezők függvényei.

Az x_1 és x_2 termelési tényezők átlagtermelékenysége illetve eszközkihasználása:

$$\bar{y}_1 = \frac{y}{x_1} \quad \bar{y}_2 = \frac{y}{x_2}$$

Az F hányadost technikai felszereltségnek nevezzük.

$$\frac{1}{y_1} = \frac{x_1}{y} \quad \frac{1}{y_2} = \frac{x_2}{y}$$

Az előzőekből következik ugyanis, hogy a technikai felszereltség és az eszközhatékonyság szorzata a munka termelékenységével egyenlő.

$$\frac{y}{x_1} = \frac{y}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

Az x_1 és x_2 termelési tényező parciális elaszticitása:

$$e_1 = \frac{d\hat{y}}{\hat{y}} : \frac{dx_1}{x_1} = \frac{d\hat{y}}{dx_1} : \frac{\hat{y}}{x_1} = \frac{d\hat{y}}{dx_1} : \bar{y}_1 = MP_{x_1} : \bar{y}_1$$

$$e_2 = \frac{d\hat{y}}{\hat{y}} : \frac{dx_2}{x_2} = \frac{d\hat{y}}{dx_2} : \frac{\hat{y}}{x_2} = \frac{d\hat{y}}{dx_2} : \bar{y}_2 = MP_{x_2} : \bar{y}_2$$

A hatványkitevős regressziós függvény esetében a parciális rugalmassági együttható a b_1 és b_2 paraméterekkel egyenlő:

$$e_1 = (b_1 \bar{y}) / (\bar{y}) = b_1$$

$$e_2 = (b_2 \bar{y}) / (\bar{y}) = b_2$$

A parciális elaszticitás a termelési tényezők határ- és átlagtermelékenysége hányadosával is kifejezhető.

Az e_1 az élőmunka parciális elaszticitása azt mutatja meg, hogy hány százalékkal nő a kibocsátás az élőmunka-ráfordítás egy százalékos növekedése mellett, miközben a holtmunka-ráfordítás változatlan marad. Hasonló módon értelmezzük az e_2 -t, amely a holtmunka [állóeszköz-tényező] parciális elaszticitását jelöli. A parciális elaszticitás reciprokát parciális flexibilitásnak [részleges érzékenységnek] hívjuk. Megmutatja, hogy hány százalékkal nő pl. a munkaerő-felhasználás, ha a termelést egy százalékkal növeljük, miközben a holtmunka-ráfordítás változatlan marad. A gazdálkodó egység számára hasznos lehet megtudni, hogyan nő a termelés, ha minden termelési tényező felhasználását növeli. A parciális elaszticitás csak egy termelési tényező változása esetén adja meg a termelés [kibocsátás] változását. Hosszabb távon azonban az összes termelési tényező változik.

A volumenhozadék [használatos még: [mérethozadék](#), volumenelaszticitás, skálahozadék, nívóhozadék, mérethozadék, Return to Scale.] megmutatja, hogy hány százalékkal nő a termelés a termelési tényezők egy százalékos növekedése mellett. Ez a mutató tehát az összes termelési tényező egyidejű arányos relatív növekedésének hatását méri.

A volumenhozadék az egyes termelési tényezők parciális elaszticitásainak összegével egyenlő a termelési függvény adott pontjában, az az:

$$e_v = e_1 + e_2$$

A volumen hozadék e_v tehát azt fejezi ki, hogy a termelés relatív növekedése nagyobb-e, $e_v > 1$ vagy kisebb-e, $e_v < 1$, mint a ráfordítások relatív növekedése, illetve azokkal egyenlő-e $e_v = 1$. A gazdasági fejlődés szempontjából az előnyös, ha $e_v > 1$.

Ha a termelési függvény k -ad fokú [homogén](#), akkor

$$f(a x_1, a x_2) = a^k f(x_1, x_2)$$

vagyis a termelési tényezők a - szoros növekedése a kibocsátás a^k - szoros növekedését idézi elő. A k-t a homogenitás fokának nevezik.

A termelési függvény segítségével vizsgálhatjuk a termelési tényezők arányainak, helyettesítésének és kölcsönhatásának alakulását is.

Az Euler-tétel alapján: a termelési tényezők hozadékát határtermelékenységük és mennyiségük szorzata határozza meg:

$$\hat{y} = MP_{x_1} * x_1 + MP_{x_2} * x_2 \quad / \hat{y}$$

$$1 = MP_{x_1} * \frac{x_1}{\hat{y}} + MP_{x_2} * \frac{x_2}{\hat{y}}$$

Az Euler tételből következik, hogy elsőfokú homogén termelési függvény esetén a tényezők parciális rugalmasságainak összege 1, ugyanis az átlagtermelékenységek és a határtermelékenységek szorzata egyenlő eggyel.

A termelési függvényben szereplő tényezők bizonyos határokon belül helyettesíthetik egymást. A helyettesítési határárány azt fejezi ki, hogy az egyik termelési tényező egységnyi csökkentése esetén mennyivel kell megnövelni a másik tényezőt ahhoz, hogy a kibocsátás változatlan szinten maradjon. A helyettesítési határárány jele MRS=Marginal rate of Substitution.

A tényezők helyettesítési határáránya nemcsak a függvény paramétereitől, hanem az alkalmazott tényezők kölcsönös viszonyától is függ. Ha az egyik tényező viszonylagos mennyisége nő, a másik tényezőt helyettesítő képessége is nőhet. Így például minél nagyobb a munka állóeszközökkel való ellátottsága, annál nagyobb lehet a munka állóeszközökkel való helyettesítésének határáránya.

A helyettesítési határárány a kétváltozós hatványkitevős termelési függvény esetében az:

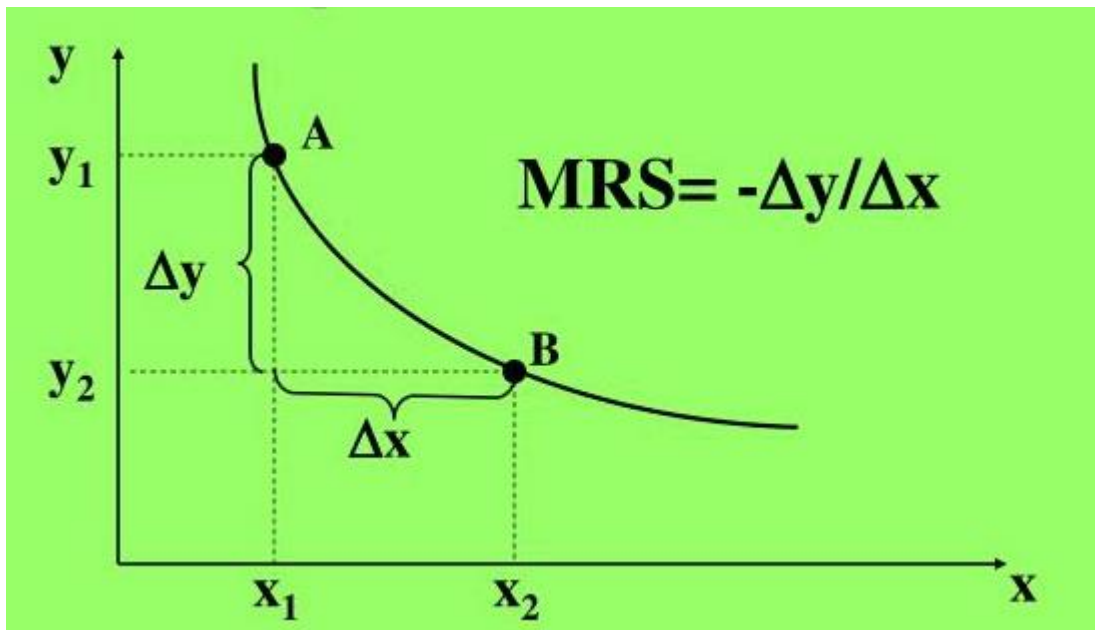
$$s_1 = \frac{d\hat{y}}{dx_1} : \frac{d\hat{y}}{dx_2} = b_1 \frac{\hat{y}}{x_1} / b_2 \frac{\hat{y}}{x_2} = (b_1/b_2) \frac{x_2}{x_1}$$

$$s_2 = \frac{d\hat{y}}{dx_2} : \frac{d\hat{y}}{dx_1} = (b_2/b_1) \frac{x_1}{x_2}$$

azaz, a termelési tényezők határtermelékenységének a hányadosával határozható meg.

Az s_1 -gyel jelöltük annak a szükséges beruházásnak a nagyságát, amely egységnyi munkaerő állóeszközökkel történő helyettesítéséhez szükséges a kibocsátás változatlansága mellett. Az élőmunka helyettesítésének így kifejezett nagysága egyenesen arányos élőmunka határtermelékenységével, és fordítottn arányos a holtmunka határtermelékenységével. Az s_2 -vel jelöltük a kibocsátás változatlansága esetén az egységnyi állóeszköz munkaerővel való kiváltásának nagyságát. Ez egyenesen arányos a holtmunka határtermelékenységével, és fordítottn arányos az élőmunka határtermelékenységével.

MRS=Marginal rate of Substitution (A helyettesítési határárány) [grafikus ábrája:](#)



A helyettesítési rugalmasság

A [helyettesítési rugalmasság](#) angolul: ES=Elasticity of substitution.

A helyettesítési rugalmasság a technikai felszereltség relatív változásának és a helyettesítési határárány relatív változásának hányadosával egyenlő. Közgazdasági szempontból fontos ez a mutató, mert értékétől függ például az, hogy a beruházások milyen mértékben terjeszthetők ki gazdaságosan valamely termelési egységnél.

A helyettesítési rugalmasság képlete:

$$\sigma = \frac{d(x_2 / x_1)}{x_2 / x_1} : \frac{ds_1}{s_1}$$

átrendezve:

$$\sigma = \frac{d(x_2 / x_1)}{d(\frac{dy}{dx_1} / \frac{dy}{dx_2})} \times \frac{\frac{dy}{dx_1} / \frac{dy}{dx_2}}{x_2 / x_1}$$

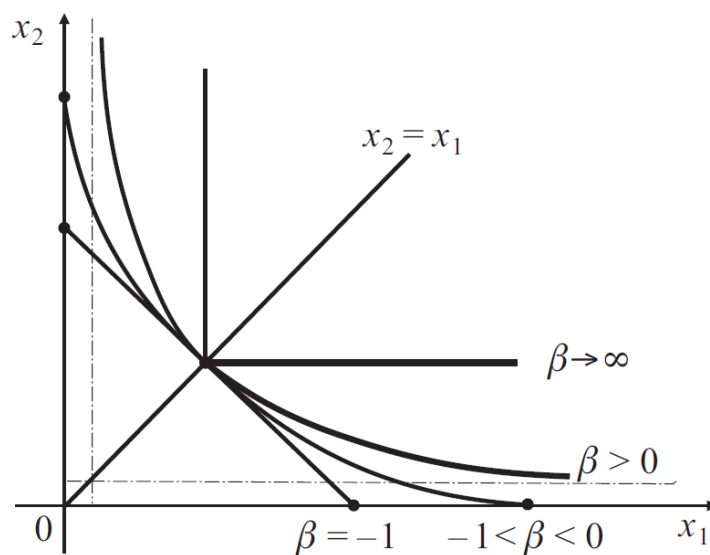
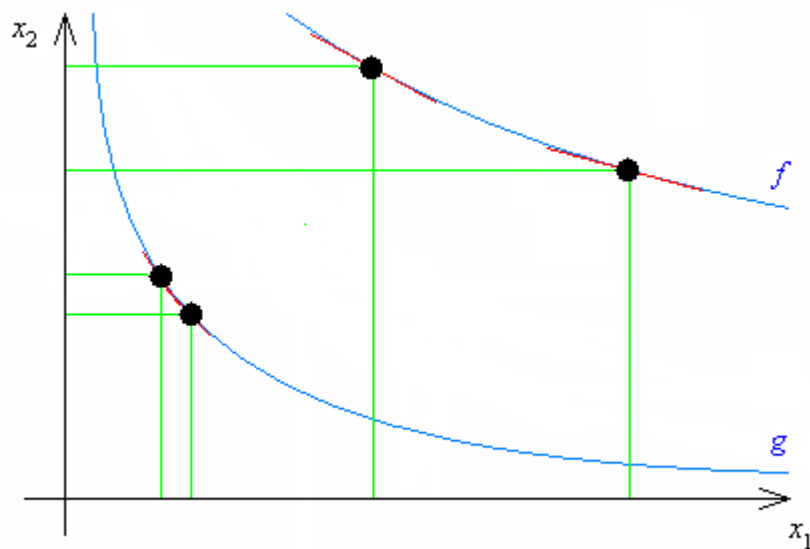
Kedvező az, ha $\sigma > 1$, ugyanis ebben az esetben a helyettesítési határárány 1 %-os növekedése esetén a technikai felszereltség 1 %-nál nagyobb ütemben nő.

A helyettesítési rugalmasságra érvényes, hogy:

$$0 \leq \sigma \leq \infty.$$

Hatványkitevős regressziós függvény esetében a $\sigma=1$.

Helyettesítési rugalmasságok. [Az alábbi ábrában](#) az f szintvonal „görbülete” kisebb, mint g-é, így a hozzá tartozó helyettesítési rugalmasság nagyobb, mert a görbén maradv a meredekség 1%-os növekedéséhez az x_2/x_1 arány nagyobb megváltozása szükséges.



x_1 =élőmunka felhasználás

x_2 =holtmunka felhasználás

β a helyettesítési rugalmasságot meghatározó paraméter, míg maga a helyettesítési rugalmasság:

$$\sigma = \frac{1}{1 + \beta}$$

A helyettesítési rugalmasságot meghatározó paraméter nagyságának változásának a hatását mutatja a fenti ábra.

β = a helyettesítési paraméter, amely a helyettesítési rugalmasság (σ) transzformációja, ha $\beta=0$, akkor $\sigma=1$, ez a Cobb-Douglas függvény esete, ha: $-1 < \beta < 0$, akkor $\sigma > 1$, végül, ha $0 < \beta < \infty$, akkor $\sigma < 1$.

Akcelerátorok

Valamely termelési tényező határtermelékenységének változását, valamint a termelési tényezők változásának a kapcsolatát jellemző mutatókat akcelerátoroknak nevezzük. A termelés akcelerátora az egyik termelési tényező határtermelékenységének a változása, ha ennek a termelési tényezőnek

felhasznált mennyiségét egységgel növelik [közvetlen akcelerátor], vagy a másik termelési tényező felhasznált mennyiségét egy egységgel növelik [keresztakcelerátor].

Valamely termelési tényező közvetlen akcelerátorát a termelésnek a megfelelő termelési tényező szerinti másodrendű parciális deriváltja adja meg. A vizsgált termelési függvényhez a következő közvetlen akcelerátorok tartoznak:

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx_1^2} = (b_0 x_2^{b_2} b_1 x_1^{b_1-1})' = b_0 x_2^{b_2} b_1 (b_1 - 1) x_1^{b_1-2} = \frac{b_1 (b_1 - 1)}{x_1^2} \hat{y}$$

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx_2^2} = (b_0 x_1^{b_1} b_2 x_2^{b_2-1})' = b_0 x_1^{b_1} b_2 (b_2 - 1) x_2^{b_2-2} = \frac{b_2 (b_2 - 1)}{x_2^2} \hat{y}$$

A közvetlen akcelerátorok előjelétől függően a határtermelékenységek viselkedésének három esete különböztethető meg:

a/ A termelési tényező határtermelékenysége nő a termelési tényező növekedésével, ha a közvetlen akcelerátor pozitív.

b/ A termelési tényező határtermelékenysége változatlan marad a termelési tényező növekedésével, ha a közvetlen akcelerátor nulla.

c/ A termelési tényező határtermelékenysége csökken a termelési tényező növekedésével, ha a közvetlen akcelerátor negatív.

A közvetett akcelerátor, a keresztakcelerátor, amely megadja az egyik termelési tényező határtermelékenységének változását a másik termelési tényező egységnyi változása esetén. A differenciálás szabályai szerint;

$$\frac{d\hat{y}}{dx_1} \frac{d\hat{y}}{dx_2} = b_0 x_2^{b_2} b_1 x_1^{b_1-1} b_2 x_2^{b_2-1} = \hat{y} \frac{b_1 b_2}{x_1 x_2}$$

ami azt jelenti, hogy az egyik termelési tényező változása ugyanúgy befolyásolja a másik termelési tényező határtermelékenységét, mint ez utóbbi termelési tényező változása az előbbinek a határtermelékenységét. A fenti összefüggés azt mutatja, hogy két-két keresztakcelerátor mindig egyenlő egymással, mivel a deriválás szabályai szerint mindegy, hogy a parciális deriválásokat milyen sorrendben végezzük el. Mindegy tehát, hogy a termelési függvényt először az élömunka- és azután a holtmunka szerint, vagy először a holtmunka és utána az élömunka szerint deriváljuk.

A keresztakcelerátorok felhasználásával eldönthetjük, hogy két termelési tényező helyettesíti vagy kiegészíti egymást a termelésben. Ha két termelési tényező kereszt- akcelerátora pozitív, vagyis az egyik termelési tényező növelése növeli a másik határ- termelékenységét, akkor a két tényező kiegészíti egymást. Ha két termelési tényező keresztakcelerátora negatív, vagyis az egyik mennyiségének növelése csökkenti a másik határtermelékenységét, akkor a két tényező egymást helyettesíti. Ha két termelési tényező keresztakcelerátora nulla, akkor függetlenek egymástól. A helyettesítési [szubsztitúciós] viszonyban levő tényezők jellegzetessége, hogy ezekből többféle mennyiségi kombináció használható fel ugyanazon termékmennyiség előállításához, azaz bizonyos keretek között az egyik a másikat helyettesítheti a termelésben. Az egyik tényező növelése, a másik csökkentését vonja maga után. Az egymást kiegészítő [komplementáris] tényezők nagyságát az előállítandó termék mennyiség általában egyértelműen meghatározza. Ezek a termelésben szükséges mennyisége általában arányos az előállított termék mennyiségével.

Az átlagtermelékenység és a határtermelékenység között az alábbi összefüggés áll fenn; valamely termelési tényező hozadéka nő, ha az átlagtermelékenység deriváltja pozitív, ebben az esetben az adott termelési tényező növekedésével az átlagtermelékenység is nő, miközben a másik termelési tényező értéke nem változik.

A csökkenő hozadék esetén az átlagtermelékenység deriváltja negatív. Nem változik a hozadék, ha a fenti derivált értéke 0.

$$\frac{d\bar{y}_1}{dx_1} = \frac{d\left(\frac{\hat{y}}{x_1}\right)}{dx_1} = \frac{1}{x_1} \left[\frac{d\hat{y}}{dx_1} - \frac{\hat{y}}{x_1} \right] = \frac{1}{x_1} \left[b_1 \frac{\hat{y}}{x_1} - \frac{\hat{y}}{x_1} \right] = \frac{1}{x_1} \frac{\hat{y}}{x_1} [b_1 - 1]$$

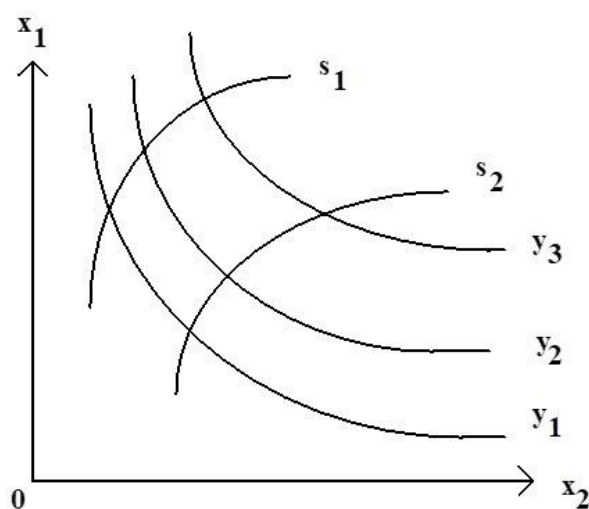
$$\frac{d\bar{y}_2}{dx_2} = \frac{d\left(\frac{\hat{y}}{x_2}\right)}{dx_2} = \frac{1}{x_2} \left[\frac{d\hat{y}}{dx_2} - \frac{\hat{y}}{x_2} \right] = \frac{1}{x_2} \left[b_2 \frac{\hat{y}}{x_2} - \frac{\hat{y}}{x_2} \right] = \frac{1}{x_2} \frac{\hat{y}}{x_2} [b_2 - 1]$$

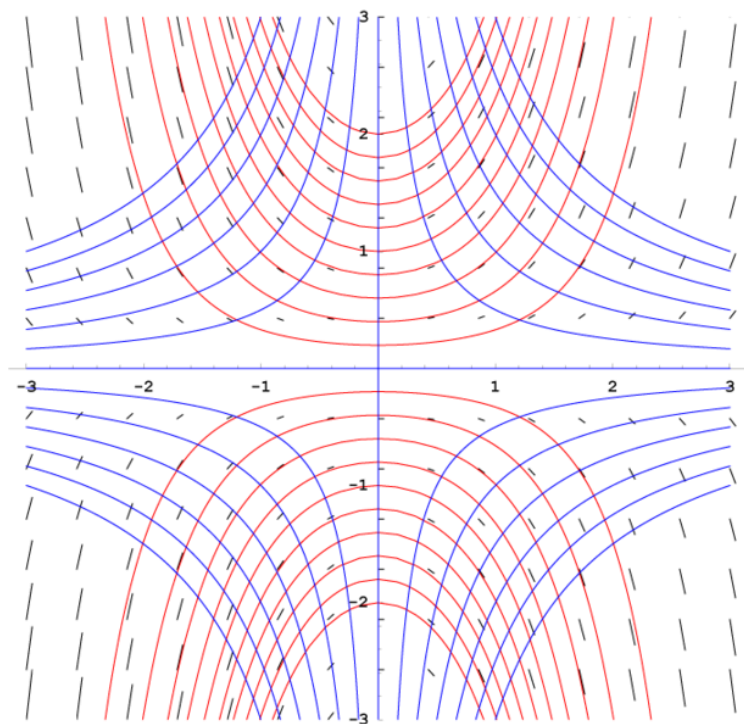
A termelési tényező hozadéka nő, ha $b_1 > 1$ illetve $b_2 > 1$, nem változik, $b_1 = 1$ illetve $b_2 = 1$ és csökken, ha $0 < b_1 < 1$ illetve $0 < b_2 < 1$.

A termelési függvények becsülhetők kettőnél több magyarázó változó esetében is, az előzőekben bemutatott parciális átlag és határmutatók hasonló módon értelmezhetők.

A termelési függvények izoklin görbái:

A termelési függvény izoklin görbái





Izoklin görbék. Az izoklin olyan görbe, amely mentén a differenciálegyenlet megoldási görbéi azonos meredekségűek.

A termelési függvények becslése egy tényezőváltozó esetén

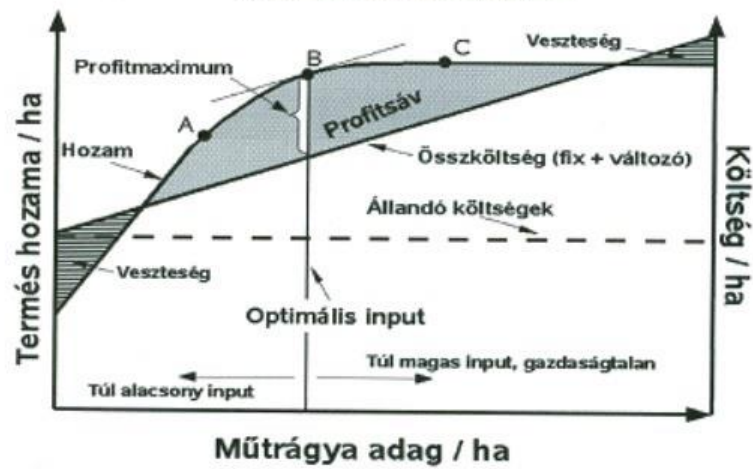
Az egy tényezőváltozó esetén történő számításokat az alábbi példán mutatjuk be.

A kiválasztott ágazat a növénytermesztés köréből a kukorica termelése. [Lipics Zsolt szakdolgozata, JPTE KTK, 1992.] Az adatok a barcsi területben található 30 táblára vonatkoznak. Az elvetett vetőmag Pioneer fajtához tartozott. A kukorica számára a fő tápelemek a nitrogén, a foszfor és a kálium. A felsorolt tényezők közül előzetes vizsgálatok alapján a nitrogén N-tartalom [kg/ha] hatását vizsgáltuk. (ha=hektár=10000 m²)

Feltételeztük tehát, hogy a termésátlag egyetlen tényezőtől, a műtrágyák nitrogén adagjától függ. Az N-tartalom növelése először javítja az átlaghozam értékét, de egy bizonyos szinten felül, az átlaghozam csökkeni fog, mert a nitrogén felesleges többlete elveszik a földben, [nitrátosodik](#) a víz, szikessé válhat a föld, növekednek a költségek stb.

Az N-tartalom növekedésének a hatása más növényfajták, pl. a búza esetén is kimutatható. Ld.: az alábbi ábrát. (Forrás: [Sárdi Katalin: Tápanyag-gazdálkodás](#). 2011.) A műtrágya adag növekedése a búza termelési hozamát növeli, de a B érték után már nem érdemes növelni a műtrágya felhasználását.

A TÁPANYAG-GAZDÁLKODÁS JÖVEDELMEZŐSÉGE

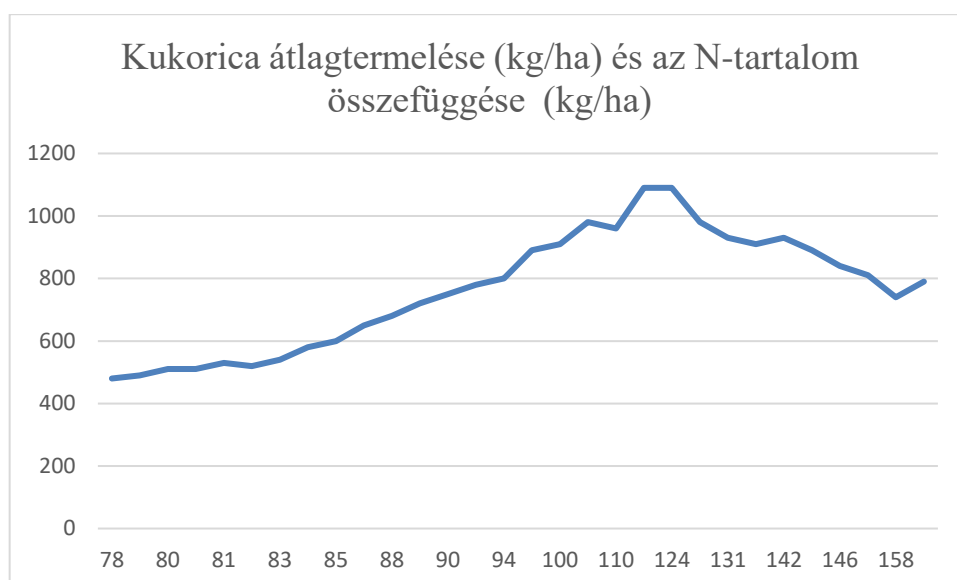


- A – LISA (Low Input Sustainable Agriculture)
- B – termés optimális inputnál
- C – termés túl magas inputnál

A rendelkezésre álló adatokat az alábbi tábla mutatja.

A kukoricatermelés [y : kg/ha] és a N-tartalom [műtrágya nitrogén hatóanyaga kilogramm-ban x : kg/ha]

Kukorica átlagtermelése (kg/ha)	N-tartalom (kg/ha)
480	78
490	79
510	80
510	81
530	81
520	82
540	83
580	84
600	85
650	87
680	88
720	90
750	90
780	91
800	94
890	99
910	100
980	106
960	110
1090	118
1090	124
980	129
930	131
910	139
930	142
890	145
840	146
810	154
740	158
790	160



Az x-tengely N-felhasználás, y-tengely=kukorica átlagtermelésének ábrája

Az ábrából látható, hogy 124 kg/ha N-felhasználásig az átlaghozamok nőnek, azt követően pedig csökkennek, s az összefüggés másodfokú parabolával jól leírható.

Lineáris regressziós függvény

A lineáris regresszió esetén a számítások eredményei (regresszió.xls letölthető a MEK-ből: Kehl Dániel - Sipos Béla: [Excel parancsfájlok felhasználása a statisztikai elemzésekben](#)) A könyvben a képletek magyarázata megtalálható. (4. A korreláció- és regressziószámítás) A zöld betű a nullhipotézis elfogadását, a piros betű az elutasítását jelöli. A számítások eredményeit ld.: regresszio-nitrogén-kukorica.xls.

Regressziós statisztika

R	0,6386
R²	0,4078
R⁻²	0,3866
s	146,6333
n	30

Az F-próbával az egész modellt teszteljük, mert arra a kérdésre keressük a választ, hogy érdemes-e a regresszió-számítást, mint elemzési módszert alkalmazni. Esetünkben a regressziós modellt elfogadjuk. (p-érték kisebb, mint 0,05)

F_{krit}	5%
4,196	

Varianciaanalízis.

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	1	414549,2	414549,2	19,3	0,000146
Maradék	28	602037,4	21501,3		
Összesen	29	1016586,7			

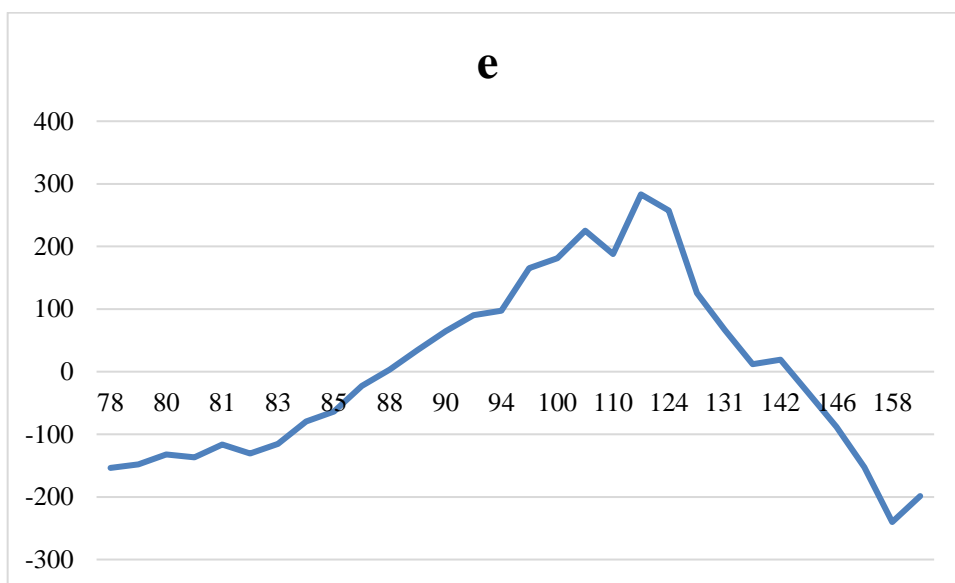
A regressziós modellt elfogadhatjuk. (p-értékek kisebbek, mint 0,05)

Regressziós együtthatók

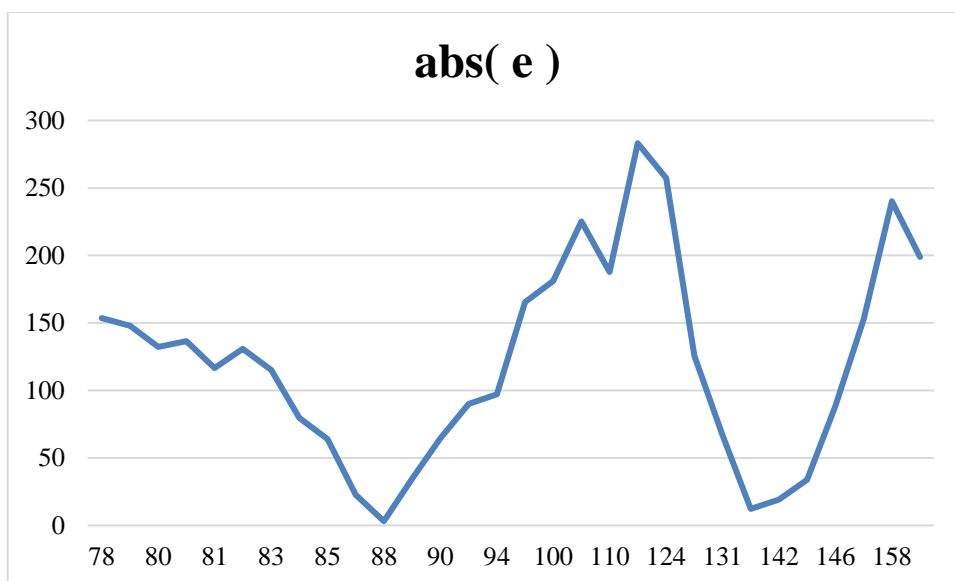
	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	295,6836	109,6698	2,70	0,012	71,035	520,332
b₁	4,3319	0,9866	4,39	0,000	2,311	6,353

Ha a véletlen változó (hibatényező) szórásnégyzete (varianciája) állandó, akkor a véletlen változó homoszkedasztikus, ellenkező esetben heteroszkedasztikus a modell. Keresztmetszeti adatoknál jelent elsősorban problémát a heteroszkedaszticitás, ebben az esetben a modell elemzésre nem, előrejelzésre viszont esetleg használható.

A reziduumok ábrája:



A reziduumok abszolút értékének az ábrája:



A két grafikus ábra azt mutatja, hogy a regressziós modell homoszkedasztikus, ezt bizonyítják az alábbi tesztek is. Ezt a zöld szín is jelzi.

[Homoszkedaszticitás](#) tesztjei, megtalálhatóak a homoszkedaszticitás munkalapon.

A heteroszkedaszticitás tesztelése Glejser-, Breusch-Pagan-Godfrey (BPG) és Koenker-Bassett (KB) próbákkal.

Próba	Jelölés	R ²	F	F _{krit}	p-érték
Glejser	R ² (e ;x)	0,0251	0,720	4,196	0,403
BPG	R ² (e ² ;x)	0,0611	1,821	4,196	0,188
KB	r ² (e ² ;(y [^]) ²)	0,0571	1,694	4,196	0,204

Ha a számított F-érték nagyobb, mint a táblabeli kritikus érték (F_{krit}), akkor az alternatív hipotézist fogadjuk el, tehát a modell heteroszkedasztikus, ellenkező esetben homoszkedasztikus. Példánkban a modell tehát homoszkedasztikus.

Próba	Jelölés	R ²	F	F _{krit}	p-érték
Glejser	R ² (e ;x)	0,0251	0,720	4,196	0,403
BPG	R ² (e ² ;x)	0,0611	1,821	4,196	0,188
KB	r ² (e ² ;(y [^]) ²)	0,0571	1,694	4,196	0,204

Glejser		r	t-érték	p-érték
r(e _{abs} ;N-tartalom (kg/ha))		0,158	0,849	0,4033

BPG		r	t-érték	p-érték
r(e ² ;N-tartalom (kg/ha))		0,247	1,350	0,1880

t _{krit}	5,0%
2,048	

A [lineáris becslőfüggvény](#):

$$y = 295,6836 + 4,3319 \cdot x$$

A határtermelékenység, az x (N-tartalom, kg/ha) változó szerinti [derivált](#), ami megmutatja, hogy x változó kisméretű növekedésének a hatására mennyivel nő az y (kukorica átlagtermelése, kg/ha) mennyisége.

$$f'(x) = 4,3319$$

Az átlag termelékenység (y/x) az egységnyi ráfordításra (x) jutó termelés (y) mennyiségét mutatja, a becsült függvény alapján:

$$y/x = 295,6836/x + 4,3319$$

$$\text{Ha } x = 100$$

$$y/x = 7,288$$

A tényadatokkal az átlag termelés, ha x=100: (910/100) 91 (kg/ha)

Másodfokú parabolikus regressziós függvény

Az adatállomány:

Kukorica átlagtermelése (kg/ha)	N-tartalom (kg/ha)
480	78
490	79
510	80
510	81
530	81
520	82
540	83
580	84
600	85
650	87
680	88
720	90
750	90
780	91
800	94
890	99
910	100
980	106
960	110
1090	118
1090	124
980	129
930	131
910	139
930	142
890	145
840	146
810	154
740	158
790	160

A számítások eredményei:

Regressziós statisztika

R	0,9757
R²	0,9519
R⁻²	0,9484
s	42,5477
n	30

Varianciaanalízis

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	2	967708,4	483854,2	267,3	0,000000
Maradék	27	48878,2	1810,3		0
Összesen	29	1016586,7			

Regressziós együtthatók:

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	-3025,0086	192,6145	-15,70	0,000	-3420,221	-2629,796
b₁	65,1599	3,4916	18,66	0,000	57,996	72,324
b₂	-0,2619	0,0150	-17,48	0,000	-0,293	-0,231

Miután a magyarázó változók x és x^2 , a modell heteroszkedasztikus.

A másodfokú parabolikus regressziós becslőfüggvény:

$$y = -3025,0086 + 65,1599 \cdot x - 0,2619 \cdot x^2$$

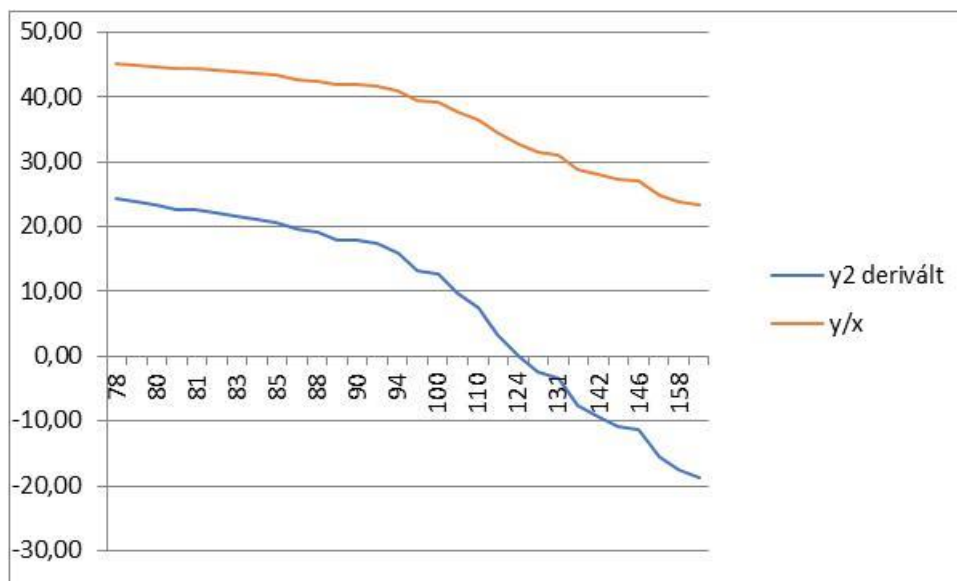
A határtermelékenység, az x (N-tartalom, kg/ha) változó szerinti [derivált](#), ami megmutatja, hogy x változó kisméretű növekedésének a hatására mennyivel nő az y (kukorica átlagtermelése, kg/ha) mennyisége.

$$f'(x) = 65,1599 - 0,5238 \cdot x$$

Az átlag termelékenység (y/x) az egységnyi ráfordításra (x) jutó termelés (y) mennyiségét mutatja, a becsült függvény alapján:

$$y/x = 3025,0086/x + 65,1599 - 0,2619 \cdot x$$

A grafikus ábrák:



Az első ábrán látható, hogy a másodfokú parabolikus trend jól illeszkedik az eredeti adatokhoz. A második ábrán levonható következtetés a határtermelékenység alapján, hogy 129 N-tartalom (kg/ha) műtrágya felhasználásnál kezdődően a határtermelékenység negatív, tehát egy egységnyi N-tartalom növekedése esetén a kukorica átlagtermelése csökken, tehát nem érdemes növelni a műtrágya felhasználást.

A termelési függvényszámítás adatbázisának kialakítása

A számítások adatbázisát általában, a vizsgált gazdasági egység termelési eredményének és ráfordításainak idősorai alkotják.

A termelési eredmények mérése

A termelés eredménye esetében a legmegfelelőbb megoldás az lenne, ha azt természetes mértékegységben figyelnénk meg. A természetes mértékegységben történő számbavétel során olyan mennyiségi egységeket alkalmazunk, amelyek a termék fizikai tulajdonságaival, a használati értékkel vannak kapcsolatban. A természetes mértékegységben való számbavétel jelentőségét az húzza alá, hogy ez kifejezi az adott időszakban előállított használati értékek tömegét és ez képezi az összes többi számbavételi mód; az értéki számbavétel, a munkamértékegység, a terméksoros volumenindex stb. alapját. Például, a cementüzem esetében a termelés viszonylag homogén, és így az üzem kibocsátása, amit az adott időszak folyamán termeltek, tonnában mérhető. Általában a gazdasági egységeknél előállított termékek száma igen nagy, így a termelés eredményét legtöbbször valamilyen értéki mutatószámmal mérjük.

A termelés értéki mutatószámai az alábbiak lehetnek:

- a bruttó termelési érték,
- a nettó termelési érték,
- az anyagmentes termelési érték.

A termelés bruttó jellegű értéki mutatói a termékek teljes értékét [$c + v + m$ elemeket] figyelembe veszik, tehát mind az élőmunka értékét [v], mind a holtmunka értékét [c], tartalmazzák. A bruttó jellegű mutatószámok közös jellemzője, hogy ha az egymást követő termelőfolyamatok bruttó termelési értékeit összegezzük, akkor az összegzett termelési érték többszörös számbavételt tartalmaz, ezt halmozódásnak nevezzük. A nettó jellegű termelési mutatószámok a létrehozott termékeknek csak azon érték részét tartalmazzák, melyet a vizsgált időszakban a megfigyelt termelőegység hozott létre. Így a nettó termelési érték az átvitt munka egyetlen elemét sem tartalmazza. A nettó termelési érték megbízhatóan jellemzi a termelőegységnél előállított új értéket, nagysága nem függ sem az ipar szervezeti felépítésétől, sem az egyes iparvállalatok belső tagozódásától. A nettó termelési érték kiszámításánál sok esetben problémát okoz a vizsgált időszak termelését terhelő amortizáció megállapítása, melyhez a fizikai kopás mellett, az erkölcsi kopás figyelembevétele is szükséges lenne. Ezért kerül sor a gyakorlatban az anyagmentes termelési érték meghatározására, mely a teljes termelés, valamint az összes anyagköltség és egyéb anyag jellegű költség különbsége. Az anyagmentes termelési érték alkalmazása leegyszerűsíti a termelési függvényt, mivel a nyersanyag változó[ka]t nem szükséges explicit módon befoglalni. Vállalati

szinten végzett elemzéseknél általában megfelelő a bruttó termelési mutatószámmal történő mérés. Az ágazati szintű termelési függvény számításoknál viszont - a jelentős halmozódás kiküszöbölése érdekében - célszerűbb a nettó termelés mutatóját alkalmazni. A termelés volumenének értékbeni mérésekor - mivel a termelési érték idősorai képezik a vizsgálat adatbázisát - nagyon fontos az összehasonlíthatóság biztosítása. Ez történhet összehasonlító árak vagy árindexek felhasználásával. Az így nyert idősorok, a termelés volumenének változását mutatják.

Ágazati szinten alkalmazzák a terméksorok alapján számított indexeket, amely a termelés mennyiségi változását jelzi. A terméksoros volumenindex valamely ágazat termelési volumenének változását, az adott ágazat termelő tevékenységét leginkább jellemző termékek mennyiségi adataiból számított egyedi indexek súlyozott átlagával méri. Súlyként általában a bér és amortizáció együttes összegét alkalmazzák. A terméksoros volumenindexszel közelíthetjük a bruttó termelés alakulását, ha a bruttó értékkel súlyozunk. Ha a munkások teljesített óráival súlyozunk, akkor a nettó termelést, ha a bér plusz amortizációval súlyozzuk, akkor az anyagmentes termelést közelítjük.

A terméksorok alapján számított közelítő volumenindex eltérhet a termelési módszer alapján számított nettó termelési indextől. Ennek okaként a következők említhetők meg: a közelítő index nem tükrözi a fajlagos anyagfelhasználás változását; a számítás során alkalmazott súlyok aránya eltér a nettó értékek arányától; eltekint bizonyos minőségi jellemzőktől; reprezentatív jellege miatt nem vesz minden terméket figyelembe; és az új termékek késve kerülhetnek be a mintába; eltekint a szolgáltatásoktól, a félkész és befejezetlen termelés állomány változásától, stb. Célszerű továbbá a GDP-GNI termelési mutatókat alkalmazni. A GDP esetében figyelembe kell venni, ha nyitott a gazdaság, ami szinte minden országra és Magyarországra is igaz, akkor a külkereskedelmet bruttó módon kellene elszámolni, az export volumenének egészét beszámítva a végső kibocsátásba (az outputba) és az import volumenét a felhasznált termelési tényezők (inputba) között kimutatva.

A ráfordítások mérése

Az élőmunka ráfordítás az alábbi mutatószámokkal mérhető:

- létszámadatokkal [az összes foglalkoztatottak, fizikai foglalkoztatottak, szakmunkások stb. létszámával],
- a teljesített munkanapok vagy teljesített munkaórák számával,
- munkabér és közterhei adatokkal.

Az élőmunka-ráfordítást az összes foglalkoztatottak létszámával mérve az élőmunkát egyneműnek tekintjük, bár ez nyilvánvalóan egyszerűsítést jelent. Ezt a megközelítést az indokolja, hogy a termelés volumenét nemcsak a fizikai foglalkozásúak száma befolyásolja, hanem közvetetten a nem fizikai [alkalmazotti] apparátus is [pl. a műszaki fejlesztés, az irányítás színvonala által]. A fizikai foglalkozásúak létszámát tekintve, a termelés és a közvetlenül termelő munkát végző dolgozók közötti kapcsolat általában szorosabb, mint a termelés és a közvetve termelőmunkát végző dolgozók között. A közvetve termelőmunkát végzők tevékenysége a közvetlen termelőmunkához kapcsolódik, azt irányítja, ellenőrzi, kiszolgálja, ellátja [pl. közvetlen termelésirányítók, anyagmozgatók, karbantartók]. Célszerű ezért külön adatsorral közelíteni a fizikaiak említett kategóriáit. A foglalkoztatottak adatsorai és a munkanapokra vonatkozó megfigyelések hátránya, hogy nem

tükrözik az egy munkanapra jutó átlagos munkaóra számot, illetve annak változását. Az élőmunka-ráfordítás legjobb közelítésének a teljesített munkaórák száma tekinthető, mivel ez tükrözi a leginkább a munkaráfordítások nagyságát. Problémát az jelent, hogy a teljesített munkaórák száma a munkahelyen eltöltött időt jelenti, mely nem minden esetben azonos a munkában eltöltött tényleges idővel. Teljesített óráként jelentkezik ugyanis az állásidő, amikor a munkás pl. anyag, energiahiány, géphiba miatt nem végez termelőmunkát. Tehát, amennyiben az adatok rendelkezésre állnak, célszerű a teljesített, [bélyegzett] munkaórákból az állásidőt levonni. A fizikai tőkeráfordítás, azaz az állóeszköz-felhasználás közelítésére a következő megoldások lehetségesek:

- az összes termelő állóeszköz nyitó, záró vagy átlagos állománya,
- a termelő állóeszközökön belül a gépek, berendezések, felszerelések nyitó, záró vagy átlagos állománya.

Ha az év folyamán jelentős beruházást helyeztek üzembe, akkor célszerű a záró vagy átlagos állományt megfigyelni. Idősoros vizsgálat esetén az összehasonlíthatóság biztosítása céljából, lehetőleg összehasonlító árakon [azonos árszinten] kell az állóeszközöket értékelni. Az állóeszközök számbavételekor problémát jelent, hogy nettó vagy bruttó értékben történjen a mérés. Elvileg a nettó érték tükrözi az állóeszköz-állomány műszaki-gazdasági állapotát, de figyelembe kell venni, hogy a lineáris leírási kulcsok általában nem tükrözik az állóeszköz-állomány tényleges elhasználódási fokát, azaz torzítanak. a magyar iparvállalatoknál magas a nullára leírt, de a termelésben továbbra is résztvevő gépek aránya, melyek csak "eszmei" értékkel szerepelnek a vállalati nyilvántartásban, hatékonyságuk azonban megkérdőjelezhető. a beruházások üzembe helyezése után bizonyos időszaknak el kell telnie ahhoz, hogy a gépek teljes kapacitással üzemeljenek, tehát a termelési függvényben ennek a hatása idővel eltolva jelentkezhet, ezért indokolt lehet azt kifejezni ún. késleltetett változók [pl. Koyck regresszió] alkalmazása útján.

Figyelembe kell venni a kapacitás kihasználását is, továbbá azt, hogy az állóeszközök különböző évjáratúak, és így teljesítőképességük, műszaki jellemzőik is mások;

Az anyag és energiaráfordítást a műszaki sajátosságoknak megfelelően értékben és naturális mutatókkal lehet közelíteni.

Jelentős problémát okoz általában a termelési függvény-számítások során, hogy az állóeszköz- és bizonyos mértékig még a létszámadatok is kapacitásadatok [angol szóval "stock" jellegűek] a termelési adatok viszont nem kapacitás [angol szóval "flow"] jellegűek. Az állóeszközök esetén elméleti szempontból megfelelőbb lenne ezeket a ráfordításokat az eszközök felhasználásának helye szerint, tehát mozgásukban számba venni, ugyanúgy, mint a termelést és a munkaerőt. Sajnos a megfelelő statisztikai adatok mindenütt tapasztalható hiánya következtében gyakorlatilag kénytelenek vagyunk az állóeszközöket készletként kezelni. A kapacitásadatok tehát állományváltozók, szemben a folytonos változókkal. A különbség az, hogy a folytonos változót az időegység alatt felhasznált vagy elfogyasztott erőforrás mennyiségében mérjük, míg az állomány változót az egy adott időpontban létező vagy használati célra elérhető erőforrás mennyiségében mérjük. A munkaerő-felhasználást mérhetjük az üzemben a megfigyelt időszak folyamán felhasznált munkaórák számával, tehát folytonos változóval. Ha ilyen adatok nem állnak rendelkezésre, akkor a felhasználást mérhetjük az üzemben alkalmazott átlagos munkáslétszámmal, ami állományváltozó.

A termelékenység tényezőkre bontásának módszerei.

Makró szinten

$y = \text{GDP (ezer Ft.)}$

$x_1 = \text{népesség száma (ezer fő)}$

$x_2 = \text{foglalkoztatottak száma (ezer fő)}$

$x_3 = \text{aktív korúak száma (ezer fő)}$

$$\frac{y}{x_1} = \frac{y}{x_3} \frac{x_3}{x_2} \frac{x_2}{x_1}$$

Az aktív korúak számának aránya a foglalkoztatottak számához viszonyítva

$$\frac{x_3}{x_2}$$

A foglalkoztatottak számának aránya a népesség számához viszonyítva

$$\frac{x_2}{x_1}$$

Mikró szinten

$y = \text{termelés értéke (ezer Ft.)}$

$x_1 = \text{dolgozók száma (fő)}$

$x_2 = \text{fizikai dolgozók száma (fő)}$

$x_3 = \text{fizikai dolgozók ledolgozott óráinak a száma (óra)}$

$$\frac{y}{x_1} = \frac{y}{x_3} \frac{x_3}{x_2} \frac{x_2}{x_1}$$

A fizikai dolgozók ledolgozott óráinak a számának aránya a fizikai dolgozók számához viszonyítva

$$\frac{x_3}{x_2}$$

A fizikai dolgozók számának aránya a dolgozók számához viszonyítva

$$\frac{x_2}{x_1}$$

Eszközhatékonyság

$y = \text{termelés értéke (ezer Ft.)}$

$x_1 = \text{gépek bruttó értéke (ezer Ft.)}$

$x_2 = \text{gépek száma (db)}$

$x_3 = \text{üzemgépes gépek száma (db)}$

$x_4 = \text{működő gépek száma (db)}$

$x_5 = \text{gépek ténylegesen ledolgozott óráinak a száma (óra)}$

$$\frac{y}{x_1} = \frac{y}{x_5} \frac{x_5}{x_4} \frac{x_4}{x_3} \frac{x_3}{x_2} \frac{x_2}{x_1}$$

A gépek ténylegesen ledolgozott óráinak a számnak aránya a működő gépek számához viszonyítva (óra/db)

$$\frac{x_5}{x_4}$$

A működő gépek aránya az üzemgépes gépekhez viszonyítva.

$$\frac{x_4}{x_3}$$

Üzemképesség mutatója, az üzemgépes gépek aránya a működő gépek számához viszonyítva

x_3 x_2

Az egy gépre jutó átlagos bruttó érték (ezer Ft./db)

 x_2 x_1 **Gyakorlati számítások. Egy cipőgyár termelési függvénye.**

Egy cipőipari vállalatnál végzett termelési függvényszámítás adatbázisát az alábbi tábla tartalmazza.

Év	y	x1	x21	x22	d	v
1968	1009	1787	1008	21457	175	1650
1969	1099	2178	1111	23433	188	1680
1970	1476	2627	1253	23111	267	1750
1971	1488	2611	1218	22842	281	1820
1972	1522	2740	1219	22422	292	1950
1973	1568	2723	1208	23118	303	2150
1974	1570	2746	1300	29532	295	2340
1975	1701	2882	1647	32217	328	2470
1976	1699	2506	1499	32359	337	2860
1977	1667	2792	1741	33717	314	2930
1978	1681	2681	2126	47350	333	3100
1979	1594	2559	2544	52911	340	3320
1980	1557	2483	2766	52421	351	3700
1981	1560	2403	2654	50433	350	3800
1982	1562	2146	2695	50440	315	4500
1983	1589	2098	3702	57063	316	4800
1984	1601	2032	4042	65007	318	5200
1985	1588	2010	3930	61494	310	5800
1986	1592	1949	4074	64815	315	6200
1987	1538	2032	5278	77203	300	6800
1988	1330	1844	4976	82919	250	8200
1989	1208	1651	5314	88749	220	9300
1990	1000	1568	5346	61645	180	9800

A termelési függvényszámítás az alábbi változók 1968-tól 1990-ig terjedő idősorai alapján készült:

y = a termelés volumene [ezer pár]

x₁ = a fizikai foglalkozásúak teljesített munkaórái [ezer óra]

x₂₁ = a gépek berendezések amortizációja [millió Ft]

x₂₂ = a gépek berendezések bruttó értéke [millió Ft]

d = a felsőbőr felhasználás [ezer m²]

v = a fizikai foglalkozásúak havi átlagbére (Ft/fő)

t = az időváltozó [t = 1, 2, ... 23]

Az elemzésre és előrejelzésre alkalmas függvények kiválasztása.

Backward elimination:

Első körben minden változót beépít a modellbe, majd azokat eliminálja, melyek kivételével nem csökken szignifikánsan a modell magyarázó ereje. A nem szignifikáns hatásúakat kizárja a modellből.

A becslőfüggvény:

$$\hat{y} = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} x_4^{b_4} x_5^{b_5}$$

vagyis az eredeti változók logaritmusai között lineáris kapcsolat van, aminek alapján a számításokat elvégeztük.

$$\ln \hat{y} = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + b_3 \ln x_3 + b_4 \ln x_4 + b_5 \ln x_5$$

A számítások eredményei:

Regressziós statisztika

R	0,9761
R²	0,9529
R⁻²	0,9390
s	0,0392
n	23

Varianciaanalízis

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	5	0,5	0,1	68,7	0,000000
Maradék	17	0,0	0,0		
Összesen	22	0,6			

Regressziós együtthatók

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	2,6295	0,9633	2,73	0,014	0,597	4,662
b₁	0,1265	0,1347	0,94	0,361	-0,158	0,411
b₂	-0,0101	0,1007	-0,10	0,921	-0,223	0,202
b₃	-0,0645	0,0898	-0,72	0,482	-0,254	0,125
b₄	0,6925	0,0916	7,56	0,000	0,499	0,886
b₅	0,0658	0,0762	0,86	0,400	-0,095	0,227

A zöld számok a szignifikáns, a piros számok a nem szignifikáns változókat jelöli. Próbálkozással (a bevonjuk ? oszlopban a pipa jel kivételével, vagy megtartásával) lehet meghatározni az optimális függvényt, aminek esetében a változók szignifikánsak és a szakmai szempontoknak is eleget tesznek, vagyis tartalmaznak egy munka, és egy holtmunka tényezőt. A pipajel változtatásával az eredmények azonnal láthatóak.

Kihagytuk az x₂₂ a v és d változókat.

Az optimális termelési függvény az alábbi magyarázó változókat tartalmazza:

x₁ = a fizikai foglalkozásuk teljesített munkaórái [ezer óra]

x₂₁ = a gépek berendezések amortizációja [millió Ft]

A számítások eredményei

Regressziós statisztika

R	0,8876
R²	0,7878
R⁻²	0,7666
s	0,0831
n	23

Varianciaanalízis

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresz-szió	2	0,4	0,2	37,1	0,000000
Maradék	20	0,1	0,0		
Összesen	22	0,6			

Regressziós együtthatók

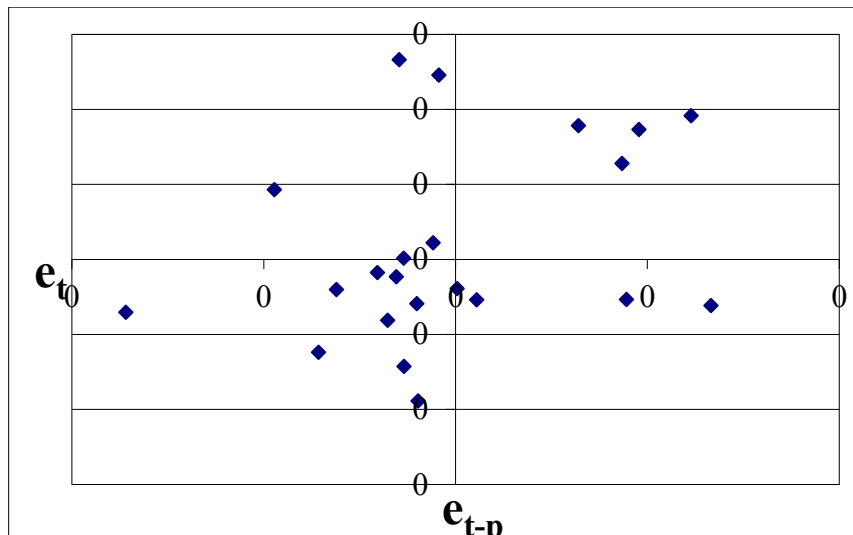
	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	-2,3616	1,2485	-1,89	0,073	-4,966	0,243
b₁	1,0416	0,1313	7,93	0,000	0,768	1,316
b₂	0,2071	0,0409	5,07	0,000	0,122	0,292

Az autokorreláció tesztjei:

Autokorreláció rendje	ρ	t	t _{krit}	p-érték
1	0,333	1,621	2,080	0,1199
2	0,194	0,905	2,086	0,3762
3	-	0,046	2,093	0,8348
4	-	0,487	2,101	0,0199
5	-	0,475	2,110	0,0243
6	-	0,322	2,120	0,1386
7	-	0,407	2,131	0,0589
8	0,059	0,270	2,145	0,7913
9	0,322	1,560	2,160	0,1427
10	0,566	3,145	2,179	0,0085
11	0,192	0,895	2,201	0,3902
12	-	0,106	2,228	0,6348
Tetszőleges	ρ	t	t _{krit}	p-érték
1	0,333	1,621	2,080	0,1199

Durbin-Watson

D-W	1,333
dL (5%)	1,168
dU (5%)	1,543
dL' (5%)	2,457
dU' (5%)	2,832



Nincs szignifikáns autokorreláció az idősorban.

Ennek alapján a becslő függvény.

$$\ln \hat{y} = -2,3616 + 1,0416 \cdot \ln x_1 + 0,2071 \cdot \ln x_{21}$$

Vissza transzformálva:

$$\hat{y} = 0,094269 \cdot x_1^{1,0416} \cdot x_{21}^{0,2071}$$

Ha rendelkezünk a két magyarázó változó (x_1 és x_{21}) értékeivel, akkor a regresszió.xls extrapolálja a termelés (y) jövőbeni értékeit.

Használjuk a C-Dtermelésifüggvényátlagéshatármutatói-cipőgyár.xls Excel parancsfájlt.

A program kiszámítja először a hatványkitevős (Cobb-Douglas) termelési (regressziós) függvény paramétereit a logaritmizált függvény alapján, majd közli a transzformált b_0 és e_v volumenhozadék értékeket, továbbá a becsült y vektort logaritmizált ($\ln y_{\text{becsült}}$) és természetes formában ($y_{\text{becsült}}$). Ezt követően kiszámítja az átlag- és a határmutatókat, a megfigyeléseknek és a magyarázó változóknak (x_1 és x_2) megfelelően a következő sorrendben: átlagtermelékenységek, technológiai koefficiensek, technikai felszereltség, határtermelékenységek, parciális rugalmasságok, helyettesítési határárányok, közvetlen akceleratorok, keresztakcelerator, hozadékok. Az ábrák munkalapon pedig ábrázolja is a kiszámított átlag- és határ-mutatókat.

A jelölések:

y/x_1 y/x_2 x_1/y x_2/y $F=x_2/x_1$ dy/dx_1 dy/dx_2 s_1 s_2 akc_1 akc_2 $keresztakc$ $hozadékx_1$ $hozadékx_2$

A paraméterek, az átlag és határmutatók ábrái és adatai:

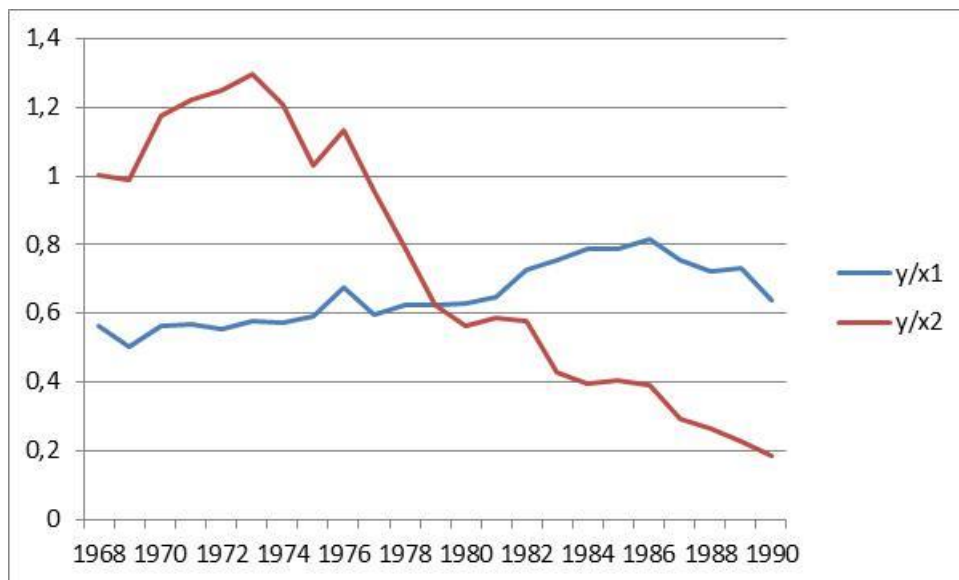
$$\ln b_0 = -2,3616$$

$$b_0 = 0,0943$$

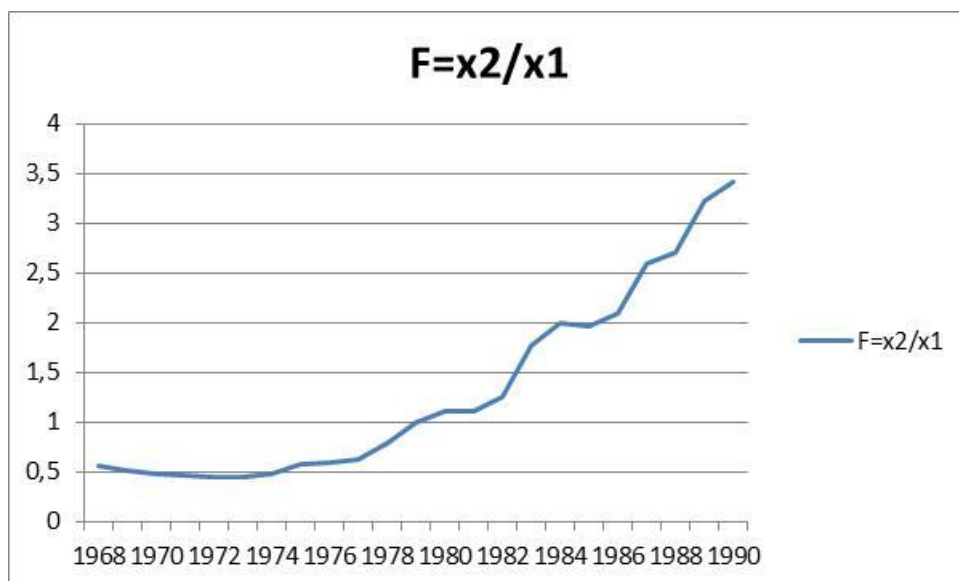
$$b_1 = 1,0416$$

$$b_2 = 0,2071$$

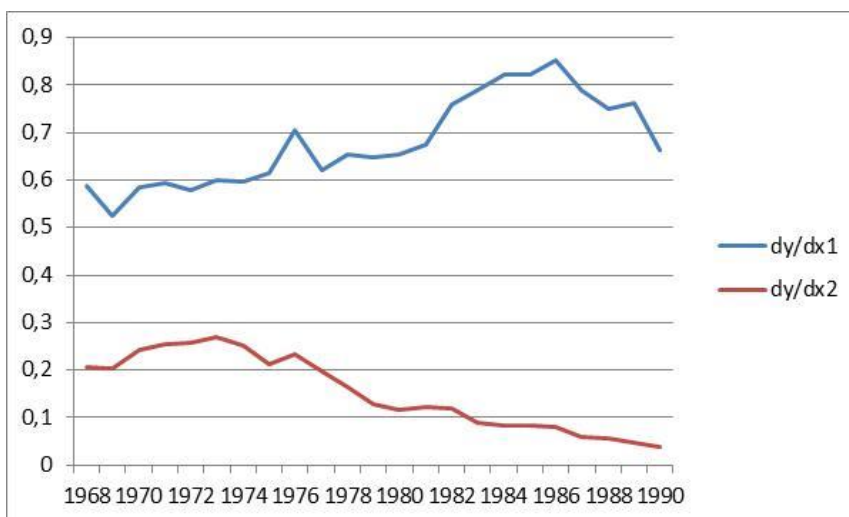
$$e_v = b_1 + b_2 = 1,2487$$



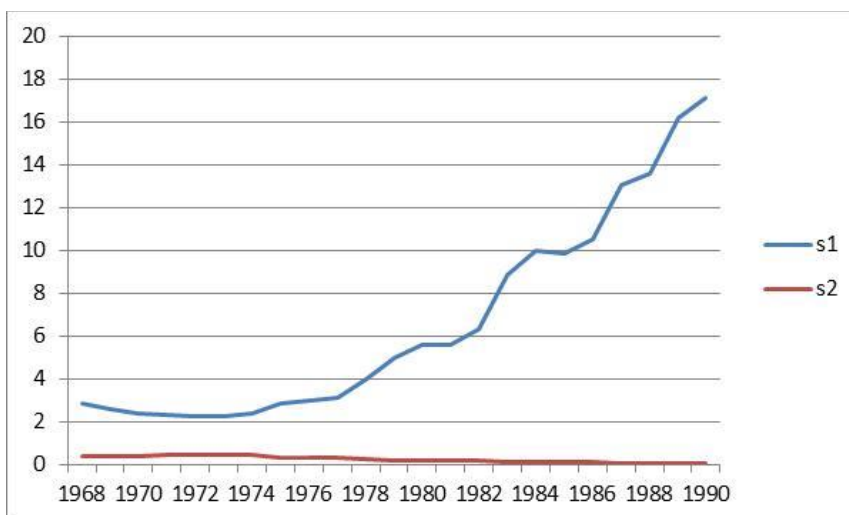
A munka termelékenysége (y/x_1) 1987-ig emelkedett, majd 1987-től csökkent, mert a termelés is csökkent. Az eszközkhasználás (y/x_2) végig csökkent. Ha csökken a termelés, akkor el lehet küldeni dolgozókat, de a gépek amortizációja nem változik. Az átlagmutatók alakulásában ciklikus mozgás volt tapasztalható, a munka termelékenységénél a periódus 4 év, az eszközkhasználásnál 5 év. (ciklusfordulópontok számítása.xls parancsfájl felhasználásával)



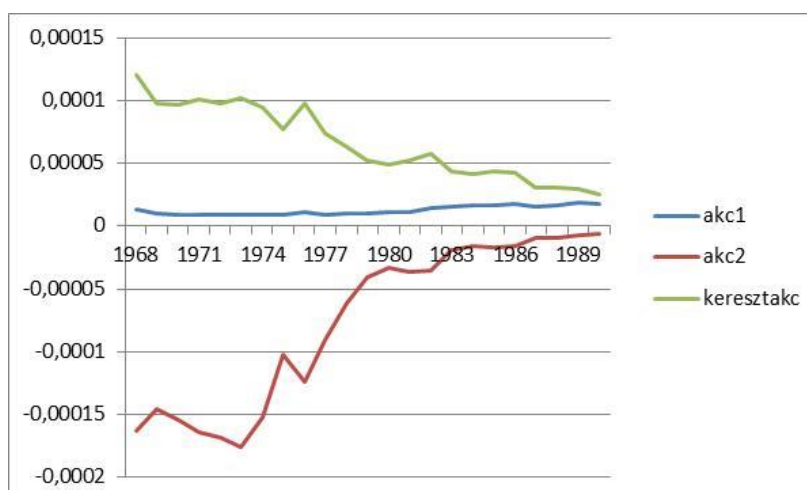
A technikai felszereltség (x_2/x_1) hatszorosára emelkedett 1968-1990 között, a periódusok átlagos értéke 6 év volt.



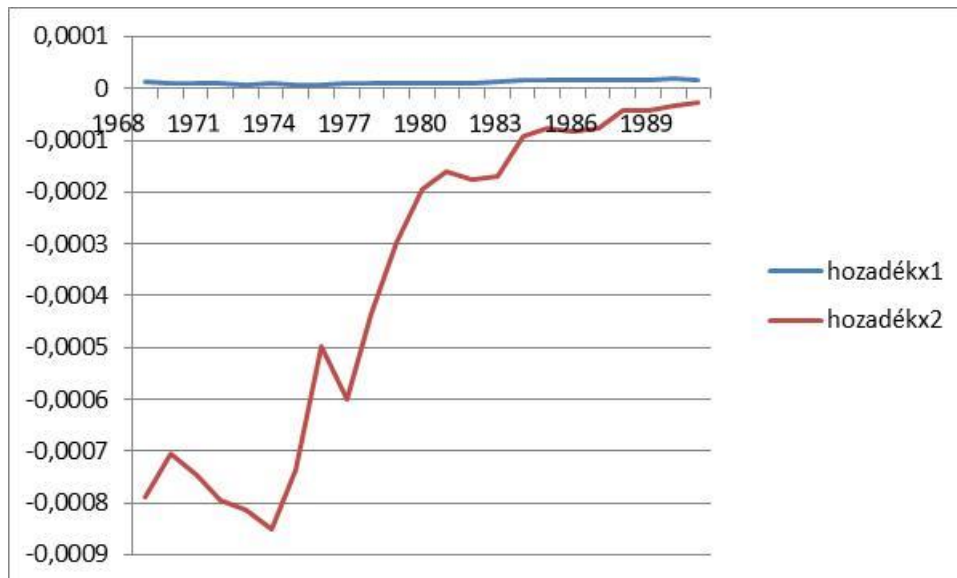
Az élőmunka határtermelékenysége (dy/dx_1) 1986-ig nőtt, utána csökkent. A periódus átlag értéke 4 év. Az eszközkihasználás határtermelékenysége (dy/dx_2) csak 1973-ig emelkedett, azóta csökkent. A periódus átlag értéke 5 év.



Az élőmunka helyettesítési határáránya (s_1) 1968 és 1990 között hatszorosára emelkedett. Az s_1 -gyel jelöltük annak a szükséges beruházásnak a nagyságát, amely egységnyi munkaerő állóeszközökkel történő helyettesítéséhez szükséges a kibocsátás változatlansága mellett.



A keresztakcelátor pozitív és 1968-és 1990 között csökkent, tehát a két termelési tényező kiegészíti egymást. Az élőmunka közvetlen akcelérátora (akc1) pozitív, vagyis, ha az élőmunka felhasználását növeljük, akkor az élőmunka határtermelékenysége nő. A holtmunka közvetlen akcelérátora (akc2) negatív, vagyis, ha a holtmunka felhasználását növeljük, akkor a holtmunka határtermelékenysége csökken.



Az élőmunka hozadéka (hozadéx1) pozitív, tehát, ha az élőmunka felhasználását növeljük, az átlagtermelékenység nő, miközben a holtmunka felhasználása nem változik. A holtmunka hozadéka (hozadéx2) negatív, tehát, ha a holtmunka felhasználását növeljük, az eszközkhasználás csökken, miközben az élőmunka felhasználása nem változik.

y/x_1	y/x_2	x_1/y	x_2/y	$F=x_2/x_1$	dy/dx_1	dy/dx_2
0,564633	1,000992	1,771060	0,999009	0,564074	0,588115	0,207296
0,504591	0,989199	1,981802	1,010919	0,510101	0,525576	0,204854
0,561858	1,177973	1,779810	0,848916	0,476970	0,585223	0,243947
0,569897	1,221675	1,754704	0,818548	0,466488	0,593597	0,252997
0,555474	1,248564	1,800263	0,800920	0,444891	0,578575	0,258566
0,575835	1,298013	1,736607	0,770408	0,443628	0,599783	0,268806
0,571741	1,207692	1,749045	0,828025	0,473416	0,595518	0,250102
0,590215	1,032787	1,694297	0,968254	0,571478	0,614760	0,213880
0,677973	1,133422	1,474985	0,882284	0,598164	0,706167	0,234721
0,597063	0,957496	1,674865	1,044391	0,623567	0,621893	0,198288
0,627005	0,790687	1,594884	1,264723	0,792988	0,653080	0,163744
0,622900	0,626572	1,605395	1,595985	0,994138	0,648804	0,129757
0,627064	0,562907	1,594733	1,776493	1,113975	0,653142	0,116573
0,649189	0,587792	1,540385	1,701282	1,104453	0,676186	0,121726
0,727866	0,579592	1,373880	1,725352	1,255825	0,758135	0,120028
0,757388	0,429227	1,320327	2,329767	1,764538	0,788885	0,088889
0,787894	0,396091	1,269207	2,524672	1,989173	0,820660	0,082027
0,790050	0,404071	1,265743	2,474811	1,955224	0,822905	0,083679
0,816829	0,390771	1,224246	2,559045	2,090303	0,850798	0,080925
0,756890	0,291398	1,321196	3,431730	2,597441	0,788366	0,060346
0,721258	0,267283	1,386466	3,741353	2,698482	0,751253	0,055352
0,731678	0,227324	1,366722	4,399007	3,218655	0,762106	0,047077
0,637755	0,187056	1,568000	5,346000	3,409439	0,664277	0,038737

s_1	s_2	akc_1	akc_2	$keresztakc$	$hozadékk_1$	$hozadékk_2$
2,837077	0,352475	0,000014	-0,000163	0,000121	0,000013	-0,000787
2,565614	0,389770	0,000010	-0,000146	0,000098	0,000010	-0,000706
2,398978	0,416844	0,000009	-0,000154	0,000097	0,000009	-0,000745
2,346257	0,426211	0,000009	-0,000165	0,000101	0,000009	-0,000795
2,237630	0,446901	0,000009	-0,000168	0,000098	0,000008	-0,000812
2,231282	0,448173	0,000009	-0,000176	0,000103	0,000009	-0,000852
2,381102	0,419974	0,000009	-0,000153	0,000095	0,000009	-0,000737
2,874318	0,347909	0,000009	-0,000103	0,000077	0,000009	-0,000497
3,008540	0,332387	0,000012	-0,000124	0,000098	0,000011	-0,000600
3,136307	0,318846	0,000009	-0,000090	0,000074	0,000009	-0,000436
3,988427	0,250725	0,000010	-0,000061	0,000064	0,000010	-0,000295
5,000138	0,199994	0,000011	-0,000040	0,000053	0,000010	-0,000195
5,602871	0,178480	0,000011	-0,000033	0,000049	0,000011	-0,000161
5,554978	0,180019	0,000012	-0,000036	0,000053	0,000011	-0,000176
6,316322	0,158320	0,000015	-0,000035	0,000058	0,000014	-0,000171
8,874954	0,112677	0,000016	-0,000019	0,000044	0,000015	-0,000092
10,004786	0,099952	0,000017	-0,000016	0,000042	0,000016	-0,000078
9,834033	0,101688	0,000017	-0,000017	0,000043	0,000016	-0,000082
10,513429	0,095116	0,000018	-0,000016	0,000043	0,000017	-0,000076
13,064141	0,076545	0,000016	-0,000009	0,000031	0,000015	-0,000044
13,572337	0,073679	0,000017	-0,000009	0,000031	0,000016	-0,000043
16,188614	0,061772	0,000019	-0,000007	0,000030	0,000018	-0,000034
17,148182	0,058315	0,000018	-0,000006	0,000026	0,000017	-0,000028

Egy cipőgyár CES függvénye

A hatványkitevős regressziós (Cobb - Douglas – típusú) termelési függvények széleskörű elterjedése, népszerűsége a függvény egyszerű és könnyen kezelhető matematikai alakjának tulajdonítható. Probléma viszont az, hogy a helyettesítési rugalmasság (σ) értéke előre rögzített, eggyel egyenlő érték lehet csak. Ezt a korlátot oldották fel a CES (állandó helyettesítési rugalmasságú) termelési függvény kidolgozói. A CES függvéynél a helyettesítési rugalmasság értékét a konkrét termelési függvény eredményeként határozzák meg. Ebben az esetben a helyettesítési rugalmasság állandó, de nem feltétlenül egyenlő eggyel, viszont értéke nem lehet negatív. A CES függvény öt becsült paraméterével sokoldalúbban írja le a fejlődést, mint a három paraméteres Cobb-Douglas termelési függvény. Ugyanakkor a CES függvény becslése bizonyos problémákat vet fel. Szükség van a munkaerő és az állóeszköz "ára" becslésére és ez sok bizonytalanságot visz a modellbe. Iterációs eljárással viszont a munkaerő és az állóeszköz "ára" ismerete nélkül is meghatározható az a függvény, ami mellett a többszörös determinációs együttható (R^2) értéke a legnagyobb. A CES-függvényt 1961-ben alkották meg az úgynevezett [stanfordi](#) kör tagjai, [Kenneth Arrow](#), [Hollis Burnley Chenery](#), [Bagicha Singh Minhas](#) és [Robert Merton Solow](#).

A CES¹-függvény becslése.^{2 34}

A CES-függvény képlete eredeti és logaritmizált formában:

$$y = h \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right]^{-\frac{e_v}{p}} e^u$$

$$\ln y = \ln h + e_v \left\{ \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right] \right\} + u$$

$$p = \frac{1}{\sigma} - 1$$

$$\sigma = \frac{1}{p+1}$$

$$\sigma = \frac{d(x_2/x_1)}{x_2/x_1} : \frac{ds_1}{s_1}$$

$$s_1 = \frac{dy}{dx_1} : \frac{dy}{dx_2}$$

Ahol:

- $h > 0$; $0 < A_2 < 1$; $p \geq -1$; $\sigma \geq 0$,
- y = a termelés (kibocsátás, output),
- x_1 = a munkatényező (az élőmunka-ráfordítás, input),
- x_2 = az állóeszköz-tényező (a holtmunka-ráfordítás, input),
- e_v = a volumenhozadék, azt fejezi ki, hogy hány százalékkal nő a termelés (a kibocsátás) a termelési tényezők (x_1 és x_2) egy százalékos növekedése mellett.
- A_2 = az elosztási paraméter, a két termelési tényező részesedését fejezi ki a termelés [\hat{y}] létrehozásában, ahol az A_2 a holtmunka, míg $(1 - A_2)$ az élőmunka részesedése.
- σ = a helyettesítés rugalmassága (a technikai felszereltség relatív változásának és a helyettesítési határány relatív változásának a hányadosa)
- s_1 = a helyettesítési határány (határráta) a vizsgált termelési függvény esetében az élőmunka parciális deriváltjának és a holtmunka parciális deriváltjának a hányadosa.
- p = a helyettesítési paraméter, amely a helyettesítési rugalmasság (σ) transzformációja, ha $p=0$, akkor $\sigma=1$, ez a Cobb-Douglas függvény esete, ha: $-1 < p < 0$, akkor $\sigma > 1$, végül, ha $0 < p < \infty$, akkor $\sigma < 1$.
- h = a semleges hatékonysági paraméter, amelynek változása meghatározott ráfordítások esetén azonos arányban változtatja a termelést.

² Arrow K. J. - Chenery H. B. - Minhas B. S. – Solow R. M. [1961]: Capital - labor substitution and economics efficiency. The Review of Economics and Statistics. 225-250. A szerzők vezetéknévének kezdőbetűi alapján a CES - függvényt ACMS vagy SMAC – függvénynek is hívják. Az állandó helyettesítési rugalmasságú függvény angol rövidítése CES. (Constant Elasticity of Substitution).

³ Pintér József [1987]: A termelési függvények vállalati alkalmazásai. [Statisztikai Szemle. 2. sz.](#) 187-206.

⁴ Mátyás Antal [1973]: A modern polgári közgazdaságtan története. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest. 305-310.

Ha ismernénk az A_2 és a p értékét, akkor egy háromváltozós lineáris modellre vezetnénk vissza a CES-függvényt és akkor a becslés megoldható lenne. A CES-függvény paraméterei ugyanis csak a p és A_2 ismeretében becsülhetők meg:

$$\ln y = \ln h + e_v \left\{ \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right] \right\} + u$$

Legyen:

$$W = \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right]$$

A_2 és p ismeretében a két hiányzó ($\ln h$ illetve h és e_v) paraméter becsülhető:

$$\ln y = \ln h + e_v W + u$$

A CES becslésének három módszere ismert.

Felhasznált adatállomány, a már bemutatott cipőgyár adatai, kibővítve:

y%	x ₁ %	x ₂₁ %	v%	r%	v/r%	x ₂₁ /x ₁ %	y/x ₁ %
100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
108.92	121.88	110.22	101.82	98.82	103.04	90.43	89.37
146.28	147.01	124.31	106.06	117.67	90.13	84.56	99.50
147.47	146.11	120.83	110.30	122.05	90.37	82.70	100.93
150.84	153.33	120.93	118.18	124.73	94.75	78.87	98.38
155.40	152.38	119.84	130.30	129.67	100.48	78.65	101.98
155.60	153.67	128.97	141.82	120.65	117.55	83.93	101.26
168.58	161.28	163.39	149.70	103.18	145.09	101.31	104.53
168.38	140.24	148.71	173.33	113.23	153.08	106.04	120.07
165.21	156.24	172.72	177.58	95.65	185.65	110.55	105.74
166.60	150.03	210.91	187.88	78.99	237.85	140.58	111.04
157.98	143.20	252.38	201.21	62.60	321.44	176.24	110.32
154.31	138.95	274.40	224.24	56.24	398.75	197.48	111.05
154.61	134.47	263.29	230.30	58.72	392.18	195.80	114.98
154.81	120.09	267.36	272.73	57.90	471.01	222.63	128.91
157.48	117.40	367.26	290.91	42.88	678.43	312.83	134.14
158.67	113.71	400.99	315.15	39.57	796.45	352.64	139.54
157.38	112.48	389.88	351.52	40.37	870.83	346.62	139.92
157.78	109.07	404.17	375.76	39.04	962.55	370.56	144.66
152.43	113.71	523.61	412.12	29.11	1415.67	460.48	134.05

131.81	103.19	493.65	496.97	26.70	1861.23	478.39	127.74
119.72	92.39	527.18	563.64	22.71	2481.96	570.6	129.58
99.11	87.74	530.36	593.94	18.69	3178.31	604.47	112.96

1. Módszer CES1.xls

Keresés gombra kattintva az **Opt W** vektorban megkeresi azt a helyettesítés rugalmasság, illetve az ebből számított helyettesítési paraméter értéket és az elosztási paramétereket, A_2 illetve az ebből számított A_1 értéket, amelyek esetében az illesztés a legjobb, tehát a többszörös determinációs együttható (R^2) a legnagyobb. Ha A_2 és p ismert, – amit az Excel parancsfájl kiszámít az előzőekben leírt módon – a hiányzó $\ln h$ és e_v paraméterek az alábbi regressziós függvénnyel becsülhetők:

$$\ln y = \ln h + e_v W + u$$

Az optimális regressziót, tehát ahol az adott A_2 és p értékek mellett az R^2 a legnagyobb, elfogadva a CES-függvény paramétereit a logaritmizált egyenletből ($\ln y_{\text{becs}}$) megkapjuk.

$$\ln y = \ln h + e_v \left\{ \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right] \right\} + u$$

$h = e^{\ln h}$ transzformációval az eredeti függvény (y_{becs}) felírható, mert p , A_2 és e_v paraméterek ismertek.

Az ábra munkalapon az eredeti és a becsült (CES) adatok ábráját is meg lehet tekinteni.

A feldolgozható legnagyobb adatállomány esetében a megfigyelések száma 500.

A számítások eredményei.

Az adatállomány:

y	x ₁	x ₂
1009,00000	1787,00000	1008,00000
1099,00000	2178,00000	1111,00000
1476,00000	2627,00000	1253,00000
1488,00000	2611,00000	1218,00000
1522,00000	2740,00000	1219,00000
1568,00000	2723,00000	1208,00000
1570,00000	2746,00000	1300,00000
1701,00000	2882,00000	1647,00000
1699,00000	2506,00000	1499,00000
1667,00000	2792,00000	1741,00000
1681,00000	2681,00000	2126,00000
1594,00000	2559,00000	2544,00000

1557,00000	2483,00000	2766,00000
1560,00000	2403,00000	2654,00000
1562,00000	2146,00000	2695,00000
1589,00000	2098,00000	3702,00000
1601,00000	2032,00000	4042,00000
1588,00000	2010,00000	3930,00000
1592,00000	1949,00000	4074,00000
1538,00000	2032,00000	5278,00000
1330,00000	1844,00000	4976,00000
1208,00000	1651,00000	5314,00000
1000,00000	1568,00000	5346,00000

y = a termelés volumene [ezer pár]

x_1 = a fizikai foglalkozásúak teljesített munkaórái [ezer óra]

$x_2=x_{21}$ = a gépek berendezések amortizációja [millió Ft]

A számítások eredményei:

$\sigma=0,54$

$p=0,850$

$A_2=0,172$

$e_v=1,174$

$\ln h=-1,752$

$h=0,173$

Ábra:



$$\ln y = \ln h + e_v W + u$$

$$\ln y = -\ln 1,752 + 1,174 W + u$$

$$\ln y = \ln h + e_v \left\{ \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right] \right\} + u$$

$$\ln y = -\ln 1,752 + 1,174 * ([-1/0,850] * \ln[0,172 * x_2^{-0,850} + 0,828 * x_1^{-0,850}])$$

$$h = e^{\ln h}$$

$$0,173 = e^{\ln h}$$

A számítások eredményei, a becsült CES-függvény

Opt W	$\ln y_{\text{becs}}$	y_{becs}
7,368	6,899	990,885
7,539	7,100	1212,107
7,708	7,299	1478,108
7,696	7,284	1456,770
7,731	7,325	1517,080
7,723	7,316	1504,564
7,751	7,348	1553,190
7,849	7,464	1743,441
7,720	7,313	1499,238
7,839	7,451	1722,145
7,851	7,466	1746,784
7,846	7,461	1738,038
7,835	7,447	1715,226
7,801	7,407	1647,866
7,708	7,298	1476,656
7,729	7,323	1514,195
7,710	7,300	1480,897
7,697	7,286	1459,004
7,673	7,257	1418,522
7,735	7,330	1525,103
7,641	7,220	1365,892
7,544	7,106	1218,803
7,497	7,050	1152,613

Az időtényező bevonása (ces1-időtényezőbevonása_Cipőgyár adatai.xls parancsfájl felhasználása. A programozás ideje 2023)

A CES függvényt bővítjük a következő szorzattal

$$e^{\lambda t}$$

A CES egyenletet logaritmizálva

$$+\lambda t$$

$$\sigma = 0,1271$$

$$p = 6,8702$$

$$A_2 = 0,1387$$

$$\lambda = 0,0004$$

$$e_v = 1,208$$

$$\ln h = -0,485$$

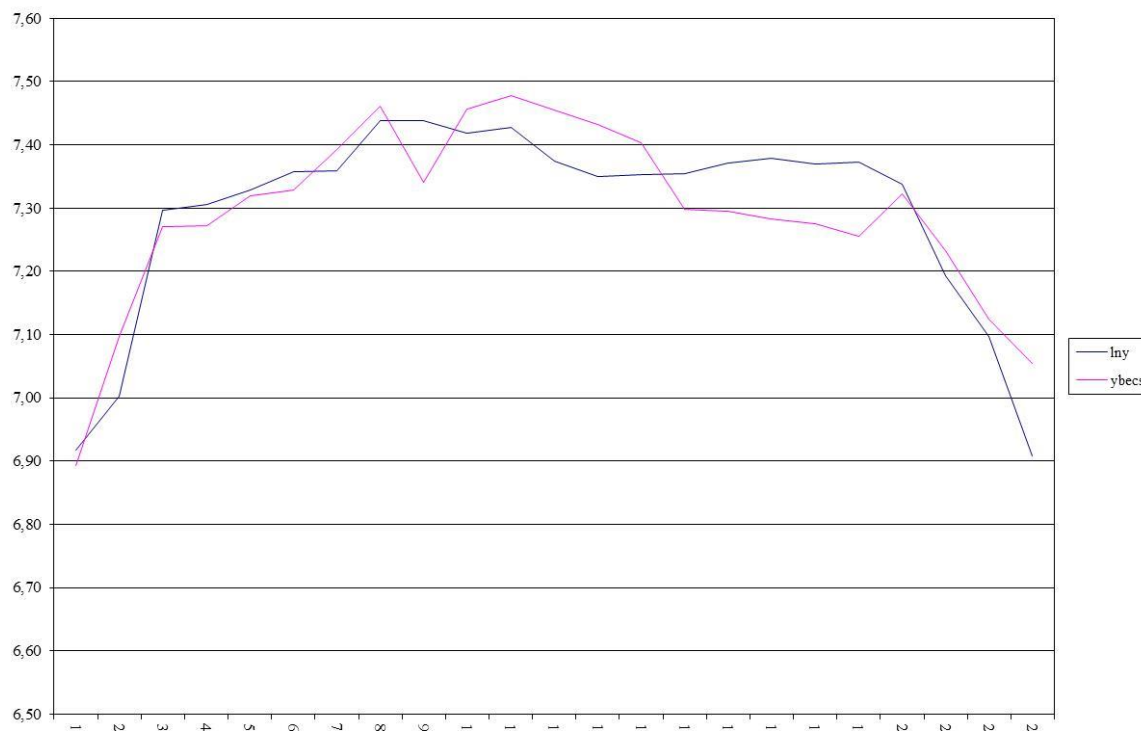
$h = 0,615$

$R^2 = 0,817$

A becslőfüggvény ln transzformációval

$\ln y = 0,0004t - \ln 0,485 + 1,208 * \left(\left[-1/6,8702 \right] * \ln \left[0,1387 * x_2^{-6,8702} + 0,8613 * x_1^{-6,8702} \right] \right)$

A becslés ábrája



2 Módszer CES2.xls

A CES függvény kidolgozói, abból indultak ki, hogy a munka átlagos termelékenysége és a munkabér közötti empirikus összefüggés magában foglal egy hatványkitevős regressziós függvényt. Az alábbi összefüggésből kiindulva, mindkét oldalt logaritmizálva, a munkabér (v) kitevőjét c-vel jelölve, a következő segéd függvényhez jutottak.

$$\frac{y}{x_1} = b_1 v^c e^u$$

$$\ln \frac{y}{x_1} = \ln b_1 + c \ln v + u$$

Ahol:

v = az egységnyi munkaerő-tényező ára (pl. az összes munkabér [vagy bérköltség, vagy reálbér stb.] osztva a figyelembe vett munkatényező $[x_1]$ mennyiségével)

A fenti összefüggésekben a b_1 és c paraméterek, a legkisebb négyzetek módszerével, az $\ln[y/x_1]$ és $\ln v$ idősorából meghatározhatók. Bizonyították, hogy c állandó volumenhozadék (e_v) esetén a helyettesítési rugalmassággal σ egyenlő. A fenti összefüggésekben látható, hogy a munkabér kitevője

(c) azt fejezi ki, hogy a munkabér (v) 1 százalékos növekedésével a termelékenység c %-kal változik. A $c=\sigma$ összefüggést felhasználva a helyettesítési paraméter (p) is meghatározható. Az egyenlet becslését úgy végezhetjük el, hogy az A_2 értékét változtatjuk, s azt a változatot fogadjuk el, ahol az R^2 a legnagyobb és a regressziós modell, az elméleti feltételeknek eleget tesz. A p tehát ismert, így az A_2 értékét kell változtatni a 0 és 1 intervallumban, és mindegyik A_2 érték esetében meg kell határozni a többszörös determinációs együttható (R^2) értékét, felhasználva az alábbi, korábban már megismert determinációs együttható (R^2) értékét, felhasználva az alábbi, korábban már megismert összefüggéseket. Amelyik A_2 értéknél a legnagyobb a többszörös determinációs együttható értéke (R^2), azt a függvényt fogadjuk el. A számítás tehát hasonlít az 1. módszerhez, a különbség az, hogy csak az A_2 értékét változtatjuk, a p viszont már ismert. Az adatállomány viszont bonyolultabb, szükség van a munkaerő árára is, hogy a p értékét megbecsüljük.

$$y = h \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right]^{\frac{e_v}{p}} e^u$$

$$\ln y = \ln h + e_v \left\{ \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right] \right\} + u$$

A p ismeretében a hiányzó az A_2 változtatásával paraméterek megbecsülhetők. A ces2.xls fájl közli az $A_2 = 0,1$: $A_2 = 0,2$: $A_2 = 0,3$: $A_2 = 0,4$: $A_2 = 0,5$: $A_2 = 0,6$: $A_2 = 0,7$: $A_2 = 0,8$: $A_2 = 0,9$: és az optimális A_2 (az A_2 bármilyen értéket felvehet 0 és 1 között, és ahol az R^2 a legnagyobb) esetében a következő mutatókat: R^2 , $\ln h$, h , e_v .

A W a megadott A_2 ($A_2 = 0,1$: $A_2 = 0,2$: $A_2 = 0,3$:...= $0,9$: és az optimális) értékek szerint változik:

$$W = \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right]$$

A megadott A_2 felhasználásával a hiányzó paraméterek a már ismert regressziós függvényvel becsülhetők.

$$\ln y = \ln h + e_v W + u$$

A program közli az A_2 megadott értékei ($A_2 = 0,1$: ... $A_2 = 0,9$:) közül a legjobb becslést (ahol az R^2 a legnagyobb) adó CES függvény logaritmizált ($\ln y_{\text{becs}}$) és transzformált, eredeti (y_{becs}) értékeit, az eredeti adatok és a CES-függvény alapján számított reziduum négyzet értékeit. A K oszlopban először a CES paramétereket sorolja fel.

A program közli az A_2 optimális értékét is, (ahol az R^2 a legnagyobb) és ezt *-gal jelöli, CES függvény logaritmizált ($\ln y_{\text{becs}}^*$) és transzformált, eredeti (y_{becs}^*) értékeit, az eredeti adatok és a CES-függvény alapján számított REZIDUUM NÉGYZET* értékeit. A K oszlopban a CES paramétereket * megjelöléssel másodikként sorolja fel.

A feldolgozható legnagyobb adatállomány esetében a megfigyelések száma 500, ezért a számított paraméterek egy része az 501. sorban található.

Az ábra munkalapon az eredeti, és a becsült (CES) adatok ábráját is meg lehet tekinteni.

Az adatok, amivel számoltunk:

y	x1	x2	v
1009,00	1787,00	1008,00	1650,00
1099,00	2178,00	1111,00	1680,00
1476,00	2627,00	1253,00	1750,00
1488,00	2611,00	1218,00	1820,00
1522,00	2740,00	1219,00	1950,00
1568,00	2723,00	1208,00	2150,00
1570,00	2746,00	1300,00	2340,00
1701,00	2882,00	1647,00	2470,00
1699,00	2506,00	1499,00	2860,00
1667,00	2792,00	1741,00	2930,00
1681,00	2681,00	2126,00	3100,00
1594,00	2559,00	2544,00	3320,00
1557,00	2483,00	2766,00	3700,00
1560,00	2403,00	2654,00	3800,00
1562,00	2146,00	2695,00	4500,00
1589,00	2098,00	3702,00	4800,00
1601,00	2032,00	4042,00	5200,00
1588,00	2010,00	3930,00	5800,00
1592,00	1949,00	4074,00	6200,00
1538,00	2032,00	5278,00	6800,00
1330,00	1844,00	4976,00	8200,00
1208,00	1651,00	5314,00	9300,00
1000,00	1568,00	5346,00	9800,00

A számítások eredményei:

$$\sigma = 0,198$$

$$p = 4,048$$

$$R^2 = 0,727$$

$$\ln h = 0,225$$

$$h = 1,252$$

$$e_v = 0,925$$

$$A_2 = 0,1$$

Az optimális megoldás:

$$R^{2*} = 0,735$$

$$\ln h^* = 0,134$$

$$h^* = 1,143$$

$$e_v^* = 0,936$$

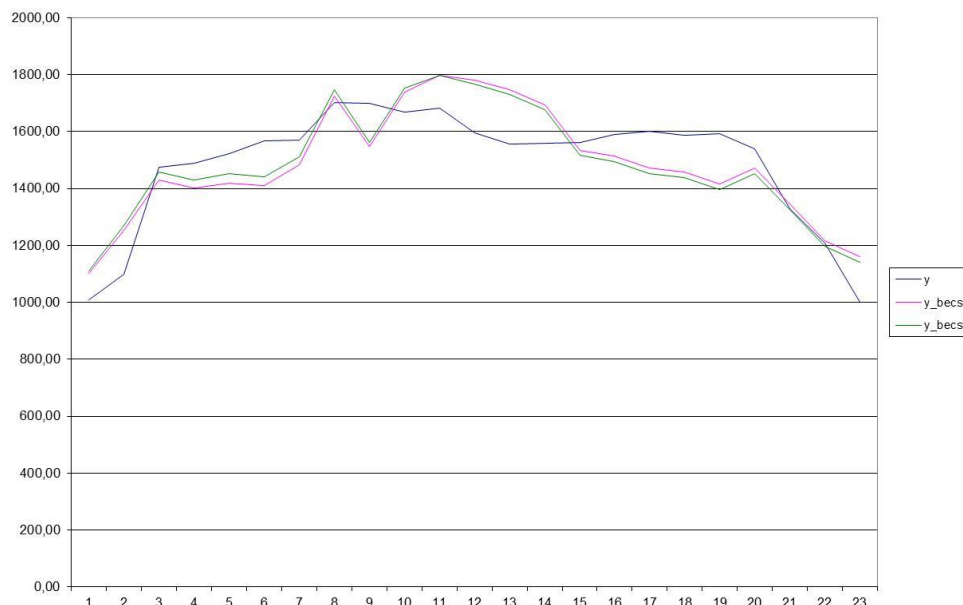
$$A_2^* = 0,082$$

$$\ln y = -\ln 0,134 + 0,936 * ([-1/4,048] * \ln [0,082 * x_2^{-4,048} + 0,918 * x_1^{-4,048}])$$

$$\ln h = 0,134$$

$$h = e^{\ln h} = 1,143$$

A grafikus ábra (eredeti adatok, első becslés, második becslés, optimális megoldás):



3 Módszer CES3.xls

A módszer alkalmazásához szükség van a munkaerő (v) és az állóeszköz (r) árára is. Feltételezzük, hogy a CES függvény folytonos és létezik az elsőrendű és másodrendű parciális deriváltja. Az elsőrendű parciális derivált [a határtermelékenységek] pozitív, ami azt jelenti, hogy a megfelelő termelési tényező növelésével a termelés is nő. Ez a feltétel a termelési függvény növekvő jellegére utal. A parciális deriváltakat meghatározva, bizonyítható, hogy a CES termelési függvényénél, az élőmunka és a holtmunka határtermelékenységeinek hányadosa, a helyettesítési háttarány s_1 :

$$\frac{v}{r} = s_1 = \frac{1 - A_2}{A_2} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{p+1}$$

A helyettesítési háttarány – nyereség maximum esetén – a tényezőváltozók árának arányával v/r egyenlő.

Ahol a még nem ismert jelölés:

r = az egységnyi állóeszköz-tényező ára, ami pl. az állóeszköz állomány megtérülési rátája, annak a kamatlábnak a meghatározására szolgál, amely egyszeri megtérülést biztosít az élettartamon belül, ez a belső kamatláb. A belső kamatláb megmutatja, hogy mekkora az a kalkulatív kamatláb, amely mellett a beruházás egyszeri és a működés folyamatos költségei a bevételekből éppen egyszer térülnek meg az élettartam alatt. Helyettesíthetjük a belső kamatlábat az eszközhatékonyság vagy a kibocsátás (termelés) növekedési ütemével, vagy az állóeszközök nettó értékére jutó amortizációval, vagy az állóeszközök nettó értékére jutó amortizációnak az egyéb tiszta jövedelmi elemekkel növelt tömegével.

E feltételek mellett a CES termelési függvényre a következő segéd függvényt írhatjuk fel. A fenti egyenletet logaritmizálva:

$$\ln \frac{v}{r} = \ln \frac{1-A_2}{A_2} + (p+1) \ln \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

az A_2 és a p meghatározható.

Legyen:

$$e_0 = \ln \frac{1-A_2}{A_2}$$

$$e_1 = p+1$$

Ekkor:

$$A_2 = \frac{1}{1+e^{e_0}}$$

$$p = e_1 - 1$$

Az A_2 és p ismeretében a CES függvény becsülhető.

Látható, hogy a becsléshez szükség van a munkaerő és az állóeszköz ár adatokra is.

$$\ln y = \ln h + e_v \left\{ \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1-A_2) x_1^{-p} \right] \right\} + u$$

$$W = \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1-A_2) x_1^{-p} \right]$$

$$\ln y = \ln h + e_v W + u$$

$h = e^{\ln h}$ transzformációval az eredeti függvény felírható, mert p és A_2 az első segédfüggvényből, míg e_v a fenti, logaritmizált CES regressziós függvény becsléséből meghatározhatók:

$$\hat{y} = h \left[A_2 x_2^{-p} + (1-A_2) x_1^{-p} \right]^{-\frac{e_v}{p}}$$

A program automatikusan minden paramétert kiszámít a fenti egyenletek felhasználásával.

A feldolgozható legnagyobb adatállomány esetében a megfigyelések száma 500.

Az ábra munkalapon az eredeti és a becsült (CES) adatok ábráját is meg lehet tekinteni.

Az adatállomány:

y	x ₁	x ₂	v	r
1009,00	1787,00	1008,00	1650,00	100,10
1099,00	2178,00	1111,00	1680,00	98,91989
1476,00	2627,00	1253,00	1750,00	117,7973
1488,00	2611,00	1218,00	1820,00	122,1675
1522,00	2740,00	1219,00	1950,00	124,8564
1568,00	2723,00	1208,00	2150,00	129,8013
1570,00	2746,00	1300,00	2340,00	120,7692
1701,00	2882,00	1647,00	2470,00	103,2787
1699,00	2506,00	1499,00	2860,00	113,3422
1667,00	2792,00	1741,00	2930,00	95,74957
1681,00	2681,00	2126,00	3100,00	79,06867
1594,00	2559,00	2544,00	3320,00	62,65723
1557,00	2483,00	2766,00	3700,00	56,29067
1560,00	2403,00	2654,00	3800,00	58,7792
1562,00	2146,00	2695,00	4500,00	57,95918
1589,00	2098,00	3702,00	4800,00	42,92274
1601,00	2032,00	4042,00	5200,00	39,6091
1588,00	2010,00	3930,00	5800,00	40,40712
1592,00	1949,00	4074,00	6200,00	39,07707
1538,00	2032,00	5278,00	6800,00	29,13983
1330,00	1844,00	4976,00	8200,00	26,7283
1208,00	1651,00	5314,00	9300,00	22,7324
1000,00	1568,00	5346,00	9800,00	18,70557

A számítások eredményei:

lny_becs	y_becs
7,129	1247,993
7,257	1418,450
7,379	1602,022
7,375	1594,959
7,405	1644,727
7,401	1637,938
7,408	1649,020
7,443	1707,753
7,352	1559,317
7,424	1674,944
7,400	1636,716
7,373	1592,053
7,354	1562,925
7,333	1529,571
7,260	1422,176
7,248	1405,682

7,228	1377,860
7,221	1367,874
7,201	1341,199
7,230	1380,511
7,167	1295,685
7,095	1206,380
7,062	1166,641

$$e_0 = 3,997$$

$$e_1 = 1,614$$

$$A_2 = 0,018$$

$$p = 0,614$$

$$\sigma = 0,620$$

$$R^2 = 0,504$$

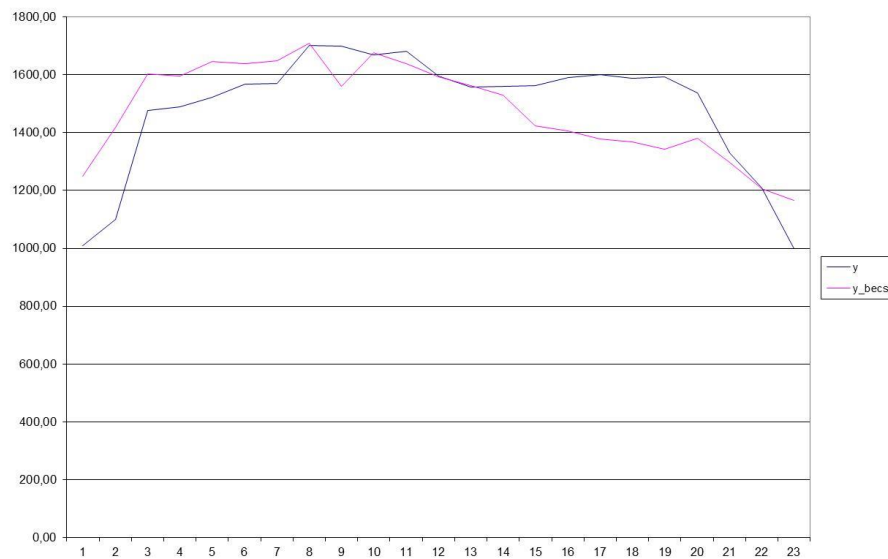
$$\ln h = 2,227$$

$$h = 9,270$$

$$e_v = 0,656$$

$$y = 9,270[0,018x_2^{-0,614} + (1-0,018)x_1^{-0,614}]^{-0,656/0,614}$$

A becslés eredménye, eredeti és becslt adatok ábrája:



A CES függvény általánosítása

$$y = h(A_1x_1^{-p} + A_2x_2^{-p} + \dots + A_nx_n^{-p})^{\frac{-e_v}{p}}$$

Mindkét oldalt logaritmizálva

$$\ln y = \ln h + \frac{-e_v}{p} \ln(A_1x_1^{-p} + A_2x_2^{-p} + \dots + A_nx_n^{-p})$$

Az eddig nem használt jelölések

x_i = termelési tényezők, $i=1,2,\dots,n$,

A_i az elosztási paraméter, $i=1,2,\dots,n$, amelyek pozitívok és összegük 1.

Ebben az esetben is a paraméterek változtatásával, iterációs módszerrel lehet a legjobban illeszkedő modellt megbecsülni. E feladat megoldására Excel parancsfájl nem dolgoztunk ki.

Egy cipőgyár Solow termelési függvénye.

[Robert Solow](#) 1957-ben publikálta a Róla elnevezett termelési függvényt.

Solow, RM (1957): [Technical Change and the Aggregate Production Function](#). Review of Economics and Statistics 39 (3): 312-320.

Solow az időtényezőt is bevonta a modellbe, az általa alkalmazott jelölésekkel:

$$Q = e^{\lambda t} F(K, L)$$

ahol:

$y = Q$ = output, a kibocsátás

$x_1 = K$ = Capital input, a tőke

$x_2 = L$ = Labor input, a munkaerő

t = az idő (1,2,3,...n), ennek beépítésével a modell dinamizálható.

λ = a meg nem testesült műszaki haladás évi növekedési üteme

A becslőfüggvény:

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} e^{\lambda t}$$

vagyis az eredeti változók logaritmusai között lineáris kapcsolat van, aminek alapján a számításokat elvégeztük.

$$\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \lambda t$$

A számításokat a már korábban bemutatott cipőgyár adatbázisán végeztük el.

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} x_4^{b_4} x_5^{b_5} e^{\lambda t}$$

vagyis az eredeti változók logaritmusai között lineáris kapcsolat van, aminek alapján a számításokat elvégeztük.

$$\ln y = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_{21} + b_3 \ln x_{22} + b_4 \ln x_4 + b_5 \ln x_5 + \lambda t$$

y = a termelés volumene [ezer pár]

x_1 = a fizikai foglalkozásúak teljesített munkaórái [ezer óra]

x_{21} = a gépek berendezések amortizációja [millió Ft]

x_{22} = a gépek berendezések bruttó értéke [millió Ft]

d = a felsőbőr felhasználás [ezer m²]

v = a fizikai foglalkozásúak havi átlagbére (Ft/fő)

t = az időváltozó [$t = 1, 2, \dots, 23$]

λ = a meg nem testesült műszaki haladás évi növekedési üteme

A számítások eredményei

Regressziós együtthatók

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	-3,1622	3,1981	-0,99	0,337	-9,942	3,617
b₁	0,1903	0,1300	1,46	0,163	-0,085	0,466
b₂	0,1107	0,1136	0,97	0,344	-0,130	0,352
b₃	-0,1060	0,0865	-1,22	0,238	-0,289	0,077
b₄	0,8273	0,1114	7,43	0,000	0,591	1,063
b₅	0,6395	0,3122	2,05	0,057	-0,022	1,301
b₆	-0,0544	0,0288	-1,89	0,077	-0,115	0,007

A tényezőváltozókat változtatva az alábbi függvényt kapjuk.

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	-2,1009	1,6348	-1,29	0,214	-5,523	1,321
b₁	0,9929	0,1280	7,76	0,000	0,725	1,261
b₂						
b₃	0,1543	0,1392	1,11	0,282	-0,137	0,446
b₄						
b₅						
b₆	0,0065	0,0101	0,64	0,530	-0,015	0,028

A regressziós modellbe bevont változók, a kiválasztásnál azt vettük figyelembe, hogy a paraméterek pozitívak legyenek. A kiválasztott változók és a termelés között nincs szignifikáns kapcsolat a holtmunka és az időtényező esetében.

x_1 = a fizikai foglalkozásúak teljesített munkaórái [ezer óra]

$x_3=x_{22}$ = a gépek berendezések bruttó értéke [millió Ft]

$x_6=t$ = az időváltozó [$t = 1, 2, \dots, 23$]

Ennek alapján a Solow termelési függvény

$\ln b_0 = -2,1009$

$b_0 = 0,12235$

$y = x_1^{0,9929} x_{22}^{0,1543} e^{-0,0065t}$

A meg nem testesült műszaki haladás évi növekedési üteme (λ) -0,0065. A volumenhozadék nagyobb, mint 1. ($e_v = 1,1472$)

Cobb és Douglas által 1928-ban publikált termelési függvény számításainak a kiegészítése

Cobb és Douglas tanulmánya „A termelés elmélete” 1928-ban jelent meg. Cobb, C. W.; Douglas, P. H. (1928). "[A Theory of Production](#)" (PDF). American Economic Review. 18 (Supplement): 139–165. A termelési függvényszámítás területén ez volt az első publikáció.

A számításokat a feldolgozóiparra dolgozták ki 1899-1922 közötti éves adatok felhasználásával.

1896-1929 között a Kondratyjev ciklus felszálló ágában⁵ volt, ami kedvezett [a neoklasszikus közgazdaságtani iskola](#) kibontakozásának.

Azt vizsgálták, hogy a munkaerő és a tőke rendelkezésre álló mennyisége, hogyan hat a kibocsátásra, a termelésre. Feltételezték, hogy az élőmunka és az ösztőke kitevőjének összege 1. Hatványkitevős regressziós modellt alkalmaztak. A háromváltozós regressziós modellt, így kétváltozóssá alakították

⁵ Ld.: Sipos Béla: [A konjunktúra-ciklusok elemzése és prognosztizálása](#). MEK.

át, ami a számításokat megkönnyítette. Cobb és Douglas által publikált adatállomány felhasználásával elvégeztük a számításokat az Excel-parancsfájlokkal.

Az adatállomány Cobb és Douglas jelölései szerint (zárójelben a táblák száma):

P=(Production) A feldolgozóipari termékek fizikai mennyiségének az indexe. (1899=100) (IV. tábla)

b= (Total factor productivity) [Teljes tényezőtermelékenység](#).

L= (Labour, a Munkaerő) Foglalkoztatott átlagos létszám ezer főben. (1899=100) (III. tábla)

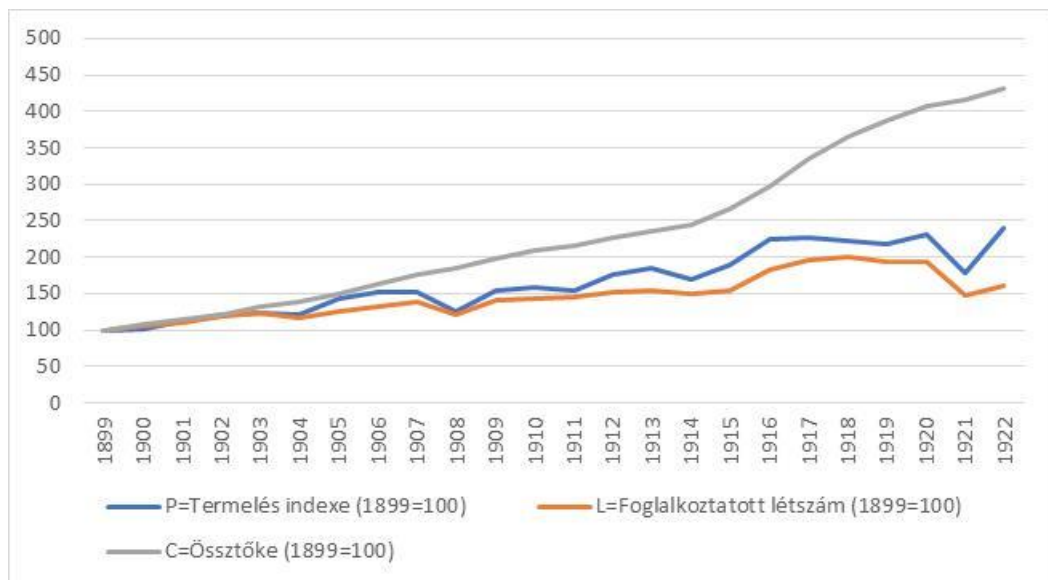
C= (Capital, az Össztőke). A teljes állóeszköz értéke 1880-as \$-ban. (1899=100) (II. tábla)

k= (the output elasticities of labor) az élőmunka parciális rugalmassági együtthatója

1-k= (the output elasticities of capital) a holtmunka (tőke) parciális rugalmassági együtthatója

Évek	P=Termelés indexe (1899=100)	L=Foglalkoztatott létszám (1899=100)	C=Össztőke (1899=100)
1899	100	100	100
1900	101	105	107
1901	112	110	114
1902	122	118	122
1903	124	123	131
1904	122	116	138
1905	143	125	149
1906	152	133	163
1907	151	138	176
1908	126	121	185
1909	155	140	198
1910	159	144	208
1911	153	145	216
1912	177	152	226
1913	184	154	236
1914	169	149	244
1915	189	154	266
1916	225	182	298
1917	227	196	335
1918	223	200	366
1919	218	193	387
1920	231	193	407
1921	179	147	417
1922	240	161	431

Az adatok grafikus ábrája:



A termelés indexe (P) és a foglalkoztatott létszám (L) időbeni változása hasonló, az összítőke (C) változása 1903-tól eltér, meredeken emelkedik. A grafikus ábrán tehát látható, hogy az L változása határozza meg elsősorban a P változását.

A Cobb és Douglas által kidolgozott termelési függvény, a kitevők összege 1.

$$P = bL^k C^{1-k}$$

A fenti egyenletet átrendezve, C-vel osztva mindkét oldalt:

$$P/C = (bL^k C^{1-k})/C = b(L/C)^k$$

Logaritmizálva mindkét oldalt:

$$\ln(P/C) = \ln(b) + k \cdot \ln(L/C)$$

A transzformációval a két tényező változós hatványkitevős regressziós függvényt egy tényező változóssá alakították. Az eredmény változó $Y = \ln(P/C)$, a tényező változó $X = \ln(L/C)$

A számítások adatbázisa:

Évek	$\ln(P/C)$	$\ln(L/C)$
1899	0	0
1900	-0,057708318	-0,018868484
1901	-0,017699577	-0,035718083
1902	0	-0,03333642
1903	-0,054915758	-0,063012968
1904	-0,12323264	-0,173663494
1905	-0,041101676	-0,175632569
1906	-0,06986968	-0,203401073
1907	-0,153204158	-0,24323031
1908	-0,384073918	-0,424565279
1909	-0,244841914	-0,346624608
1910	-0,268633877	-0,36772478
1911	-0,344840486	-0,398544665
1912	-0,244385267	-0,396654478
1913	-0,248896047	-0,426879203
1914	-0,36726951	-0,493221919
1915	-0,341749294	-0,546543706
1916	-0,280993084	-0,493086799
1917	-0,389180514	-0,536015873
1918	-0,495461562	-0,604315967
1919	-0,57392963	-0,695734504
1920	-0,566395475	-0,746122997
1921	-0,845700416	-1,042653635
1922	-0,585469167	-0,984703725

A regresszióC-D-függvény—kitevőkösszege-1.xls Excel parancsfájl tartalmazza a számítások eredményeit:

Regressziós statisztika:

R	0,9680
R²	0,9370
R⁻²	0,9342
s	0,0571
n	24

Variancia analízis.

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	1	1,1	1,1	327,4	0,000000
Maradék	22	0,1	0,0		
Összesen	23	1,1			

Regressziós együtthatók:

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	0,0145	0,0200	0,7280	0,4743	-0,0269	0,0560
b₁	0,7459	0,0412	18,0932	0,0000	0,6604	0,8314

Autokorreláció tesztjei (5 %-os szignifikanciai szinten, zöld szín, elfogadjuk a nullhipotézist, piros szín elutasítjuk):

Autokorreláció rendje	ρ	t	t_{krit}	p-érték
1	0,076	0,359	2,074	0,7232
2	-0,160	-0,762	2,080	0,4547
3	-0,125	-0,589	2,086	0,5622
4	-0,304	-1,496	2,093	0,1511
5	-0,542	-3,029	2,101	0,0072
6	-0,148	-0,701	2,110	0,4930
7	0,206	0,988	2,120	0,3379
8	0,025	0,119	2,131	0,9069
9	0,234	1,127	2,145	0,2788
10	0,663	4,149	2,160	0,0011
11	0,189	0,904	2,179	0,3840
12	-0,236	-1,137	2,201	0,2798

Tetszőleges	ρ	t	t_{krit}	p-érték
1	0,076	0,359	2,074	0,7232

Durbin-Watson statisztika:

D-W	1,847
dL (5%)	1,273
dU (5%)	1,446
dL' (5%)	2,554
dU' (5%)	2,727

A regressziós modell eleget tesz az elméleti feltételeknek, a kapcsolat a két változó között szignifikáns és 5 %-os szignifikancia szinten nincs autokorreláció. A becslőfüggvény:

$$\ln(P/C) = \ln(0,0145) + 0,7459 \cdot \ln(L/C)$$

$$e^{\ln(0,0145)} = 1,01461$$

visszatranszformálva az eredeti C-D egyenletre:

$$P = bL^k C^{1-k} = 1,01461 L^{0,7459} C^{0,2541}$$

Cobb és Douglas eredeti tanulmányukban 1928-ban azonos eredményt számoltak ki:

$$b = 1,01$$

$$k = \frac{3}{4} = 0,75$$

A számításokat, most úgy végezzük el, hogy feloldjuk a $[k+(k-1)] = 1$ korlátot.

A becslőfüggvény

$$P = bL^{k_1}C^{k_2}$$

$$\ln(P) = \ln(b) + k_1 \ln(L) + k_2 \ln(C)$$

vagyis az eredeti változók logaritmusai között lineáris kapcsolat van és $k_1 + k_2$ tetszőleges szám:

Az adatállomány:

Évek	ln[Termelés indexe (1899=100)]	ln[Foglalkoztatott létszám (1899=100)]
1899	4,605170186	4,605170186
1900	4,615120517	4,65396035
1901	4,718498871	4,700480366
1902	4,804021045	4,770684624
1903	4,820281566	4,812184355
1904	4,804021045	4,753590191
1905	4,96284463	4,828313737
1906	5,023880521	4,890349128
1907	5,017279837	4,927253685
1908	4,836281907	4,795790546
1909	5,043425117	4,941642423
1910	5,068904202	4,9698133
1911	5,030437921	4,976733742
1912	5,176149733	5,023880521
1913	5,214935758	5,036952602
1914	5,129898715	5,003946306
1915	5,241747015	5,036952602
1916	5,416100402	5,204006687
1917	5,424950017	5,278114659
1918	5,407171771	5,298317367
1919	5,384495063	5,262690189
1920	5,442417711	5,262690189
1921	5,187385806	4,990432587
1922	5,480638923	5,081404365

A regresszióC-D-függvény-nincskitevőkorlát.xls): Excel parancsfájl tartalmazza a számítások eredményeit:

Regressziós statisztika

R	0,9785
R²	0,9574
R⁻²	0,9534
s	0,0581
n	24

Varianciaanalízis

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	2,0000	1,5962	0,7981	236,1219	0,0000
Maradék	21,0000	0,0710	0,0034		
Összesen	23,0000	1,6672			

Regressziós együtthatók

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	-0,1773	0,4343	-0,4083	0,6872	-1,0805	0,7259
b₁	0,8073	0,1451	5,5645	0,0000	0,5056	1,1090
b₂	0,2331	0,0635	3,6684	0,0014	0,1009	0,3652

A regressziós modell az elméleti feltételeknek eleget tesz, az eredmény változó, a termelés és a magyarázó változók (élőmunka és tőke) között szignifikáns a kapcsolat.

Az autokorreláció tesztjei:

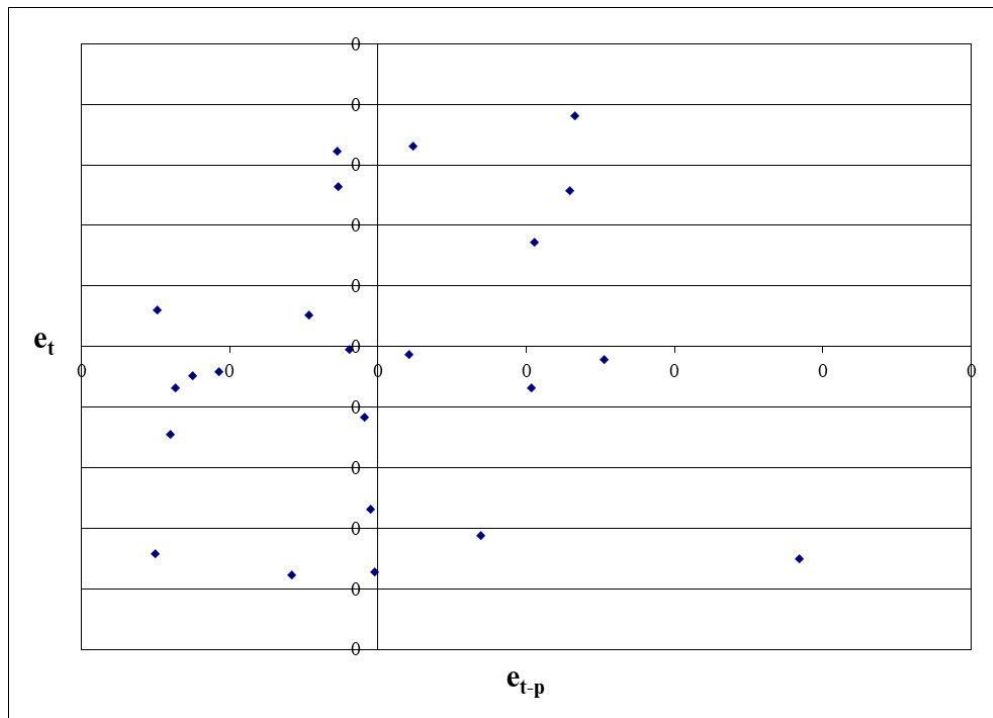
Autokorreláció rendje	ρ	t	t_{krit}	p-érték
1	0,115	0,542	2,074	0,5931
2	-0,159	-0,757	2,080	0,4573
3	-0,162	-0,769	2,086	0,4511
4	-0,356	-1,787	2,093	0,0899
5	-0,558	-3,154	2,101	0,0055
6	-0,136	-0,646	2,110	0,5268
7	0,234	1,127	2,120	0,2762
8	0,070	0,331	2,131	0,7450
9	0,277	1,352	2,145	0,1978
10	0,637	3,879	2,160	0,0019
11	0,135	0,637	2,179	0,5362
12	-0,274	-1,335	2,201	0,2087

Tetszőleges	ρ	t	t_{krit}	p-érték
1	0,115	0,542	2,074	0,5931

Durbin-Watson teszt.

D-W	1,770
dL (5%)	1,188
dU (5%)	1,546
dL' (5%)	2,454
dU' (5%)	2,812

Az e_{t-p} és az e_t kapcsolatát mutatja az alábbi reziduum ábra.



Nincs szignifikáns autokorreláció, a termelési függvény elemzésre és előrejelzésre is felhasználható.

A becsülő függvény:

$$\ln(P) = \ln(-0,1773) + 0,8073 \ln(L) + 0,2331 \ln(C)$$

$$P = 0,8375285 L^{0,8073} C^{0,2331}$$

A volumen hozadék:

$$e_v = 0,8073 + 0,2331 = 1,0404$$

A $k_1 + k_2 = 1$ hipotézis ellenőrzését F-próbával végezhetjük el.

$$F = [(Q_1 - Q_2) : 1] / [Q_2 / (n - k)] < F_{0,05}$$

Ha teljesül a fenti feltétel, elfogadhatjuk azt a hipotézist, hogy a $k_1 + k_2 = 1$, ha nem teljesül a feltétel, akkor a hipotézisünket elvetjük.

$$Q_2 = \text{Az eltérés négyzetösszeg (SS), logaritmizált alakban, (ha } k_1 + k_2 \neq 1) = 0,0710$$

$$Q_1 = \text{Az eltérés négyzetösszeg (SS), logaritmizált alakban (ha } k_1 + k_2 = 1) = 0,0716$$

$$n = 24$$

$$k = 2$$

A számításokat elvégezve:

$$F = [(0,0716 - 0,0710) : 1] / [0,0710 / (24 - 2)] = 0,18592$$

A számláló szabadság foka 1, a nevező szabadságfoka 22, 5 %-os szignifikancia szinten ($F_{0,05}$) a kritikus érték 4,30. A számított F-érték kisebb, mint a kritikus érték, tehát elfogadjuk a $k_1 + k_2 = 1$

hipotézist. Látható, hogy nem volt jelentős eltérés a volumen hozadékok nagyságában: $0,0716 - 0,0710 = 0,0006$

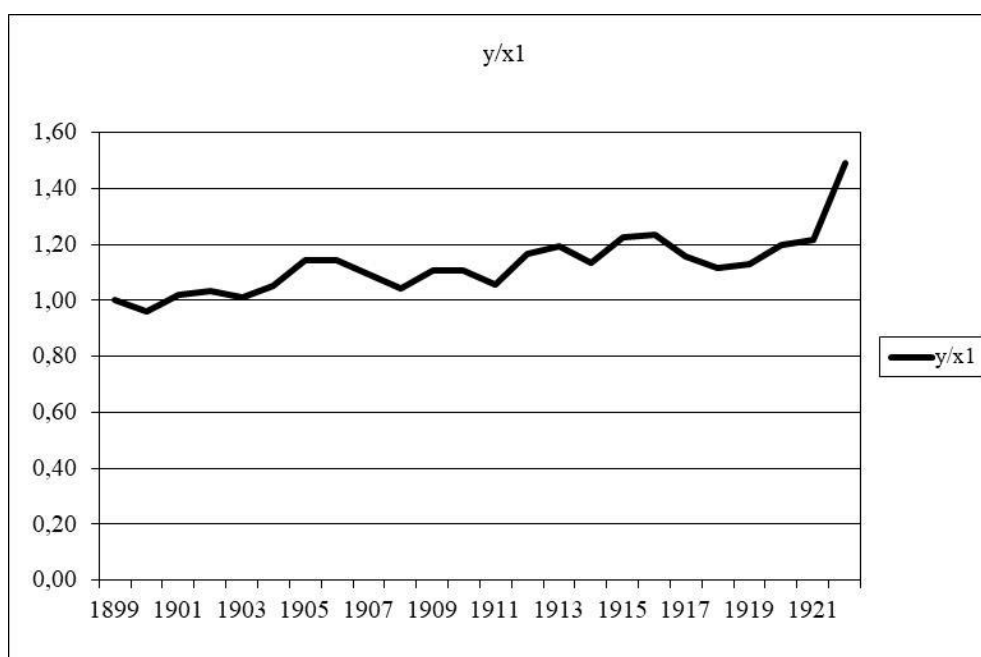
Az átlag és határmutatók.

A számítások eredményeit a C-Dtermelésifüggvényátlagés határmutatói-C-Dfüggvény Excel parancsfájl tartalmazza.

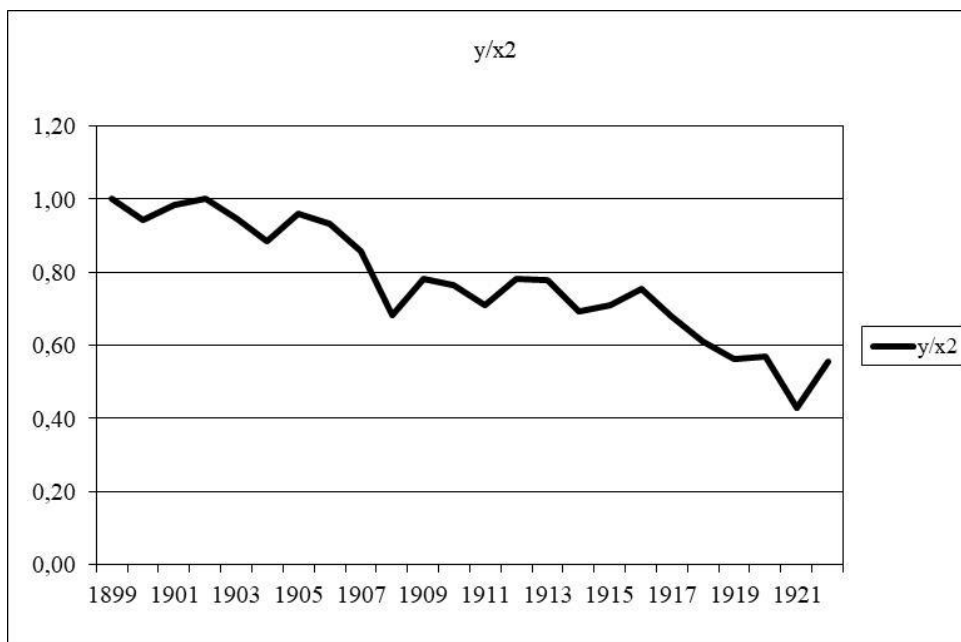
y/x_1	y/x_2	x_1/y	x_2/y	$F=x_2/x_1$	dy/dx_1	dy/dx_2
1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,807278	0,233053
0,961905	0,943925	1,039604	1,059406	1,019048	0,776525	0,219985
1,018182	0,982456	0,982143	1,017857	1,036364	0,821956	0,228965
1,033898	1,000000	0,967213	1,000000	1,033898	0,834644	0,233053
1,008130	0,946565	0,991935	1,056452	1,065041	0,813841	0,220600
1,051724	0,884058	0,950820	1,131148	1,189655	0,849034	0,206033
1,144000	0,959732	0,874126	1,041958	1,192000	0,923526	0,223669
1,142857	0,932515	0,875000	1,072368	1,225564	0,922604	0,217326
1,094203	0,857955	0,913907	1,165563	1,275362	0,883326	0,199949
1,041322	0,681081	0,960317	1,468254	1,528926	0,840637	0,158728
1,107143	0,782828	0,903226	1,277419	1,414286	0,893772	0,182441
1,104167	0,764423	0,905660	1,308176	1,444444	0,891370	0,178151
1,055172	0,708333	0,947712	1,411765	1,489655	0,851818	0,165080
1,164474	0,783186	0,858757	1,276836	1,486842	0,940054	0,182524
1,194805	0,779661	0,836957	1,282609	1,532468	0,964540	0,181703
1,134228	0,692623	0,881657	1,443787	1,637584	0,915638	0,161418
1,227273	0,710526	0,814815	1,407407	1,727273	0,990751	0,165591
1,236264	0,755034	0,808889	1,324444	1,637363	0,998009	0,175963
1,158163	0,677612	0,863436	1,475771	1,709184	0,934960	0,157920
1,115000	0,609290	0,896861	1,641256	1,830000	0,900115	0,141997
1,129534	0,563307	0,885321	1,775229	2,005181	0,911848	0,131281
1,196891	0,567568	0,835498	1,761905	2,108808	0,966224	0,132274
1,217687	0,429257	0,821229	2,329609	2,836735	0,983012	0,100040
1,490683	0,556845	0,670833	1,795833	2,677019	1,203396	0,129775

s_1	s_2	akc_1	akc_2	$keresztakc$	$hozadéks_1$	$hozadéks_2$
3,463918	0,288690	-0,001556	-0,001787	0,001881	-0,001927	-0,007669
3,529898	0,283294	-0,001425	-0,001577	0,001691	-0,001766	-0,006766
3,589879	0,278561	-0,001440	-0,001540	0,001680	-0,001784	-0,006610
3,581339	0,279225	-0,001363	-0,001465	0,001594	-0,001689	-0,006286
3,689214	0,271060	-0,001275	-0,001292	0,001448	-0,001580	-0,005542
4,120868	0,242667	-0,001411	-0,001145	0,001434	-0,001747	-0,004913
4,128991	0,242190	-0,001424	-0,001151	0,001445	-0,001764	-0,004940
4,245253	0,235557	-0,001337	-0,001023	0,001319	-0,001656	-0,004388
4,417751	0,226360	-0,001234	-0,000871	0,001170	-0,001528	-0,003739
5,296074	0,188819	-0,001339	-0,000658	0,001059	-0,001659	-0,002824
4,898970	0,204125	-0,001230	-0,000707	0,001052	-0,001524	-0,003032
5,003438	0,199863	-0,001193	-0,000657	0,000999	-0,001478	-0,002819
5,160044	0,193797	-0,001132	-0,000586	0,000919	-0,001402	-0,002515
5,150300	0,194163	-0,001192	-0,000619	0,000969	-0,001476	-0,002658
5,308342	0,188383	-0,001207	-0,000590	0,000952	-0,001495	-0,002534
5,672457	0,176290	-0,001184	-0,000507	0,000875	-0,001467	-0,002177
5,983132	0,167137	-0,001240	-0,000477	0,000868	-0,001536	-0,002049
5,671691	0,176314	-0,001057	-0,000453	0,000781	-0,001309	-0,001943
5,920473	0,168905	-0,000919	-0,000362	0,000650	-0,001139	-0,001551
6,338971	0,157754	-0,000867	-0,000298	0,000573	-0,001074	-0,001277
6,945785	0,143972	-0,000911	-0,000260	0,000549	-0,001128	-0,001116
7,304740	0,136897	-0,000965	-0,000249	0,000553	-0,001195	-0,001070
9,826217	0,101769	-0,001289	-0,000184	0,000549	-0,001596	-0,000789
9,272974	0,107840	-0,001441	-0,000231	0,000651	-0,001784	-0,000991

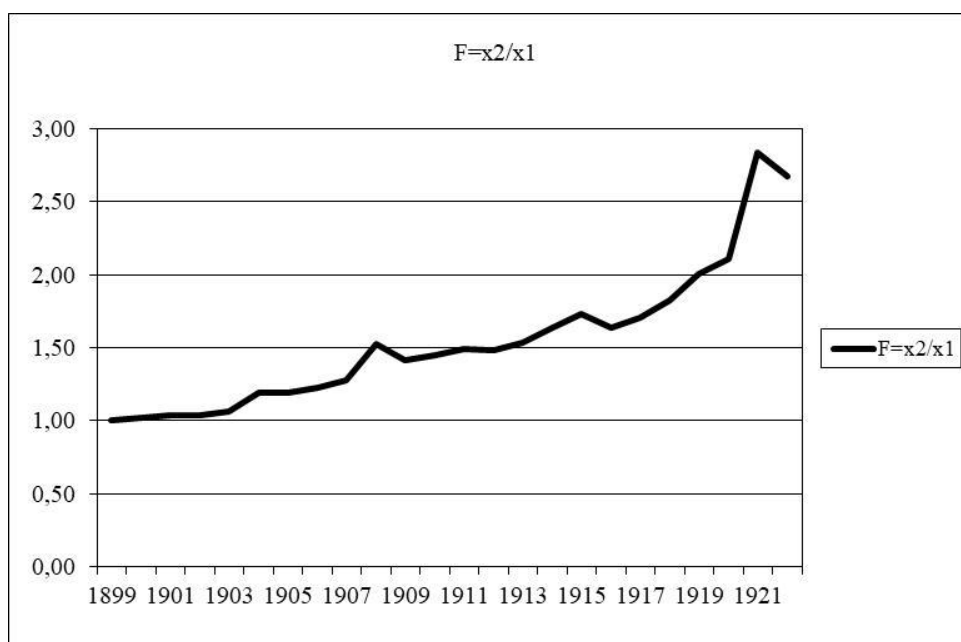
A grafikus ábrák:



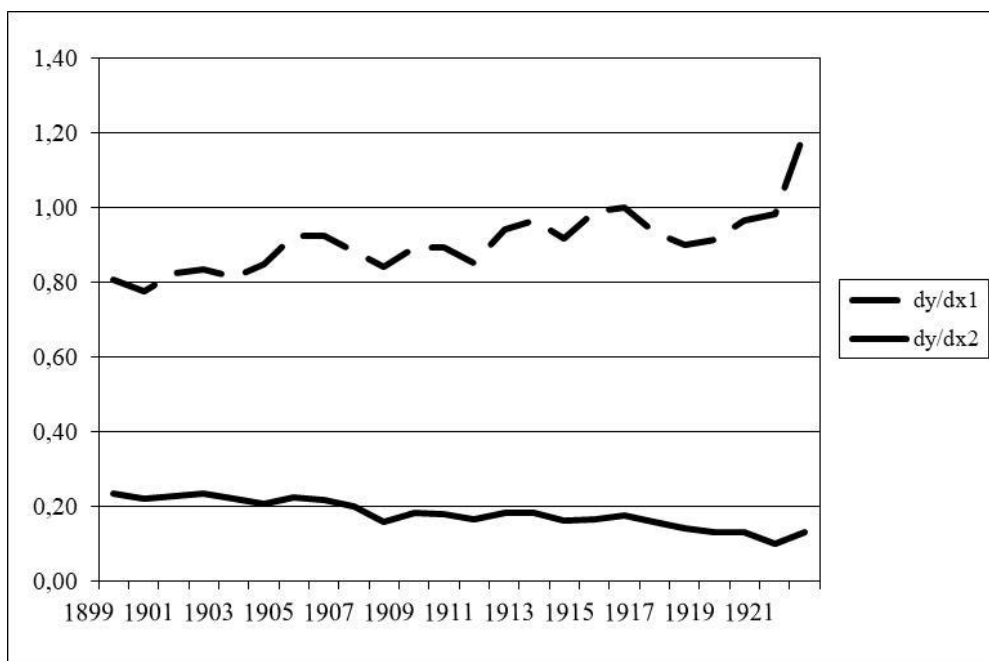
Az átlagtermelékenység (munkatermelékenység) 1899-1922 között másfél szorosára, 1-ről 1,49-re emelkedett (1899=100 %) A ciklusfordulópontok Excel parancsfájllal elvégzett számítások szerint 4 éves átlagos ciklus volt kimutatható az idősorban.



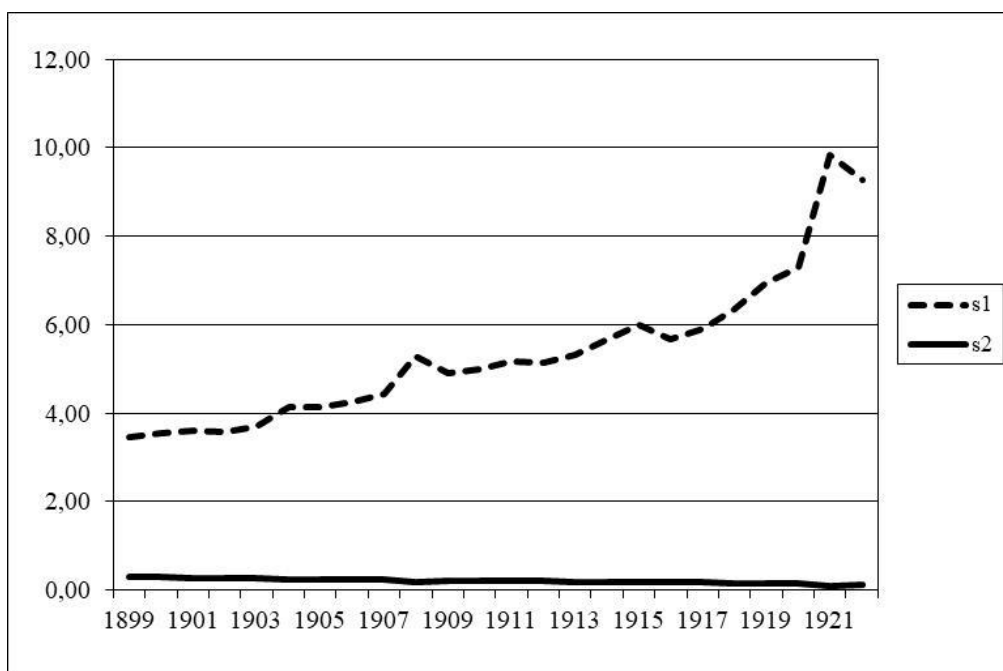
Az eszközkhasználás nagyjából a felére csökkent 1899-1922 között, a ciklusok átlagos hossza 3 év volt.



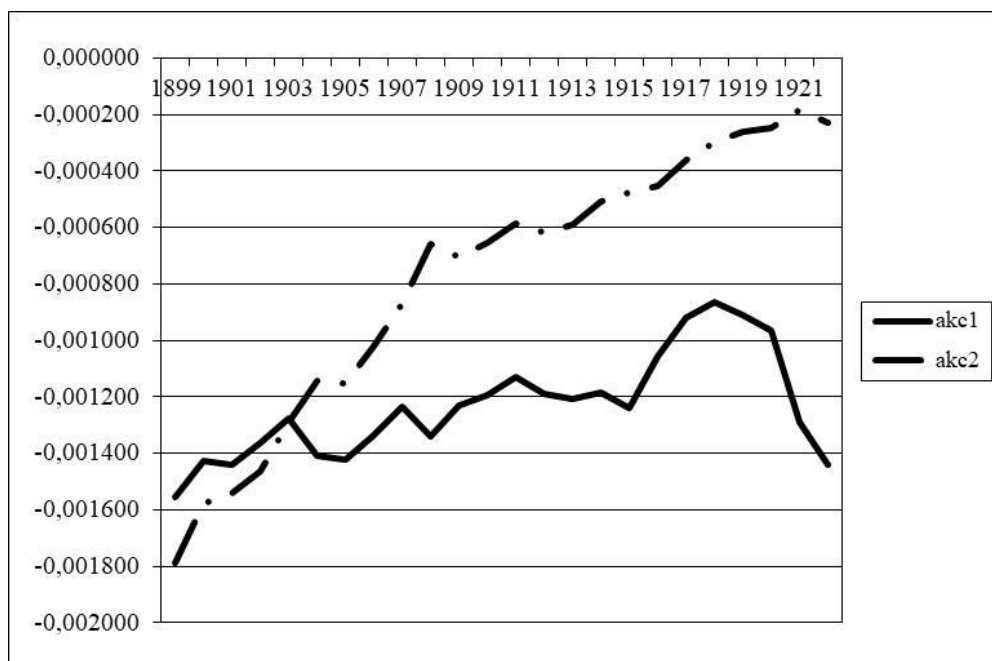
A technikai felszereltség több mint két és félszeresére emelkedett 1899-1922 között, a ciklus átlagos periódusa 4 év.



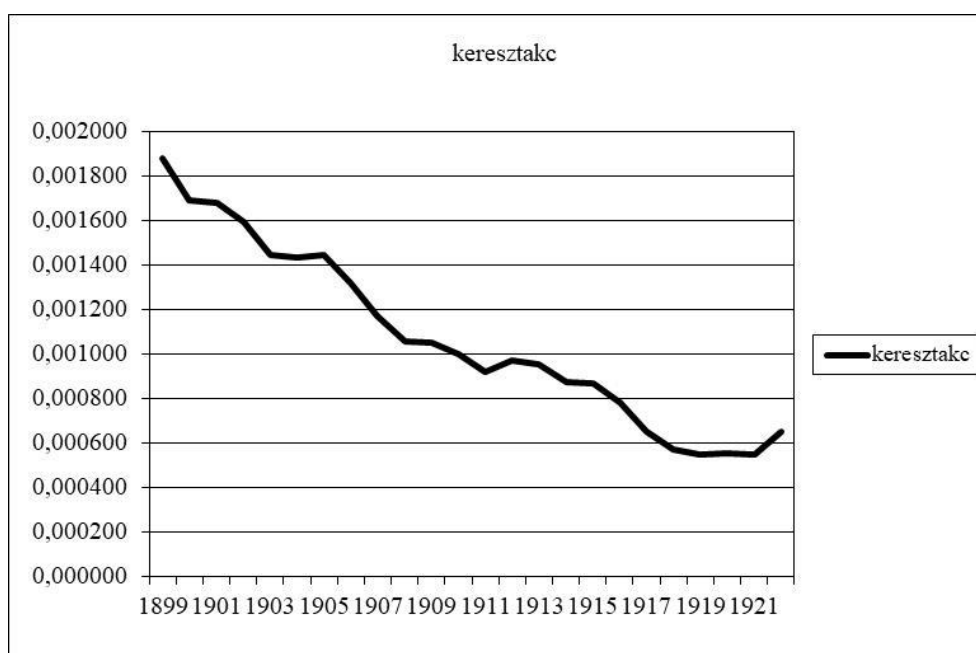
1899-1922 között az élők munkája határtermelékenysége (periódusa 4 év) másfélszeresére nőtt, a holtmunka határtermelékenysége (periódusa 3 év) pedig felére csökkent.



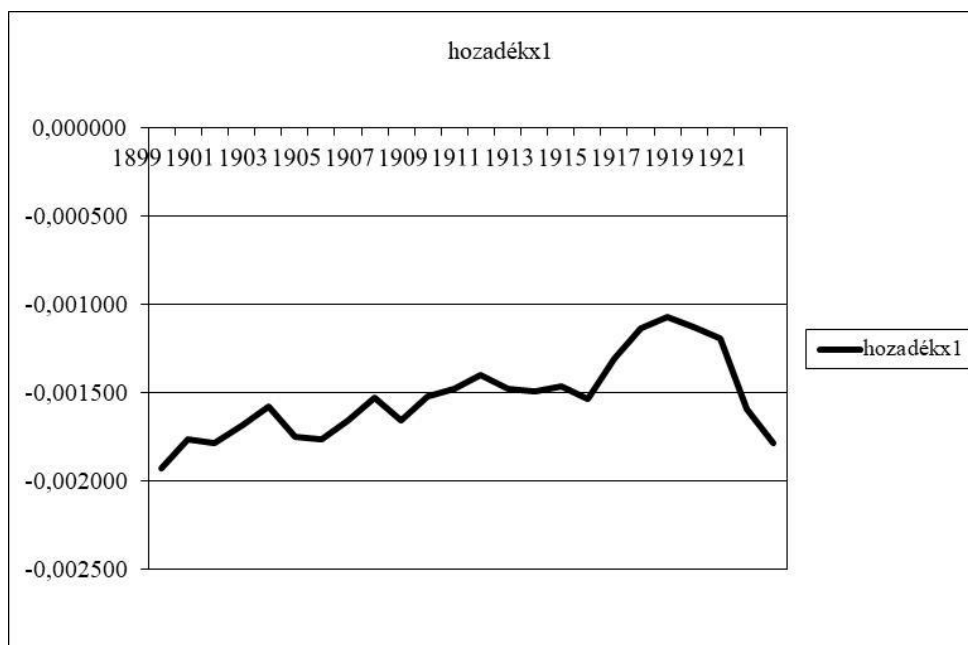
1899-1922 között az élők munkája helyettesítési határáránya (periódusa 4 év) 2,6-szorosára nőtt, a holtmunka helyettesítési határáránya (periódusa 5 év) egy harmadára csökkent.



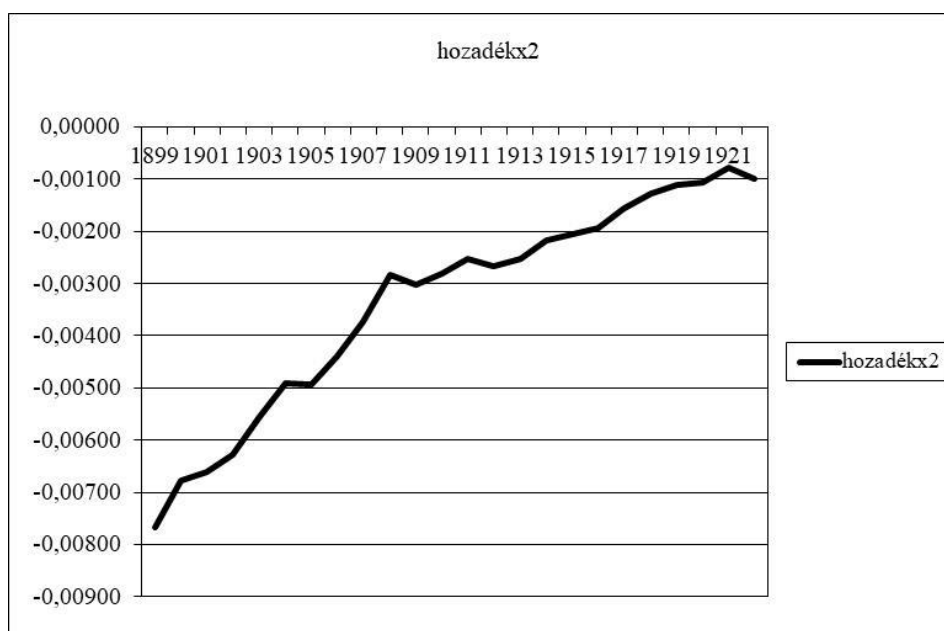
1899-1922 között az élőmunka (periódusa 4 év) és a holtmunka (periódusa 6 év) közvetlen akcelerátorai negatívak, tehát a termelési tényezők határtermelékenységei csökkennek, ha a termelési tényezők nagyságai növekednek.



1899-1922 között a keresztakcelerátorok (periódusa 6 év) egy harmadával csökkentek és pozitívak, tehát a két termelési tényező kiegészíti egymást, ugyanis az egyik termelési tényező növekedése növeli a másik termelési tényező határtermelékenységét.



1899-1922 között az élőmunka hozadéka (periódusa 4 év) negatív, mert az élőmunka növekedésével az átlagtermelékenység csökken, miközben a holtmunka értéke nem változik.



1899-1922 között a holtmunka hozadéka (periódusa 6 év) negatív, mert a holtmunka növekedésével az átlagtermelékenység (eszköz hatékonyság) csökken, miközben az élőmunka értéke nem változik.

CES-függvény becslése (ces1-Cobb-Douglas-adataival.xls Excel parancsfájl felhasználásával.)

A felhasznált adatokat az előzőekben közöltük. A változók:

$y=P$ =Termelés indexe (1899=100)

$x_1=L$ =Foglalkoztatott létszám (1899=100)

$x_2=C$ =Össztőke (1899=100)

A számítások eredményei:

$$\ln y = \ln h + e_v \left\{ \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right] \right\} + u$$

$$\sigma = 0,541$$

$$p = 0,850$$

$$A_2 = 0,172$$

$$A_1 = 0,828$$

$$e_v = 1,137$$

$$\ln h = -0,249$$

$$h = 0,533$$

$$R^2 = 0,952$$

Opt W	lny _{becs}	y _{becs}
4,605	4,608	100,264
4,657	4,667	106,374
4,707	4,723	112,516
4,776	4,802	121,812
4,823	4,855	128,418
4,782	4,809	122,556
4,857	4,894	133,471
4,923	4,969	143,908
4,966	5,018	151,077
4,859	4,896	133,782
4,994	5,051	156,105
5,025	5,086	161,702
5,036	5,098	163,727
5,083	5,152	172,697
5,100	5,171	176,055
5,075	5,143	171,153
5,115	5,187	178,974
5,275	5,370	214,873
5,355	5,460	235,121
5,383	5,492	242,716
5,357	5,462	235,683
5,362	5,468	237,054
5,116	5,189	179,220
5,202	5,287	197,699

A $\sigma = 1$ feltételezés a Cobb-Douglas (hatványkitevős regressziós függvény) a CES-függvény számítása esetén nem igazolható, mert a számítások eredménye alapján a $\sigma = 0,541$

Ez azt jelenti, hogy a helyettesítési határárány 1 %-os növekedése esetén a technikai felszereltség csak 0,541 %-kal nő.

CES-függvény becslése az időtényező bevonásával a Cobb-Douglas függvény adatállományának felhasználásával. (ces1idő-CD.xls Excel parancsfájl felhasználásával.)

A számítások eredményei:

$$\sigma = 0,508$$

$$p = 0,967$$

$$A_2 = 0,144$$

$$\lambda = 0,003$$

$$e_v = 0,805$$

$$\ln h = 0,298$$

$$h = 1,348$$

$$R^2 = 0,961$$

A Solow termelési függvény becslése a Cobb-Douglas által publikált idősorok felhasználásával.

$$\hat{y} = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} e^{\lambda t}$$

vagyis az eredeti változók logaritmusai között lineáris kapcsolat van, aminek alapján a számításokat elvégeztük.

$$\ln \hat{y} = \ln b_0 + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \lambda t$$

Varianciaanalízis

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	3	1,6	0,5	189,8	0,000000
Maradék	20	0,1	0,0		
Összesen	23	1,7			

Autokorreláció nincs

Tetszőleges	ρ	t	t_{krit}	p-érték
1	0,043	0,204	2,074	0,8404

Durbin-Watson statisztika

D-W	1,913
dL (5%)	1,101
dU (5%)	1,656
dL' (5%)	2,344
dU' (5%)	2,899

Regressziós együtthatók

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b_0	2,8132	1,3825	2,03	0,055	-0,071	5,697
b_1	0,9060	0,1397	6,48	0,000	0,615	1,197
b_2	-0,5262	0,3412	-1,54	0,139	-1,238	0,186
b_3	0,0469	0,0208	2,26	0,035	0,004	0,090

A regressziós modell az elméleti feltételeknek nem tett eleget, mert az $x_2 = C = \text{Össztőke (1899=100)}$ paramétere negatív és nem szignifikáns.

Az x_2 osztóke változót elhagyva a paraméterek szignifikánsok és pozitívak

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b_0	0,8764	0,6091	1,44	0,165	-0,390	2,143
b_1	0,8079	0,1311	6,16	0,000	0,535	1,080
b_2						
b_3	0,0153	0,0037	4,12	0,000	0,008	0,023

A becslőfüggvény:

$$\ln b_0 = 0,1511$$

$$b_0 = 2,4022$$

$$y = 2,4022x_1^{0,8079}e^{0,0153t}$$

Termelési függvényszámítás. Magyarország.

A felhasznált adatok

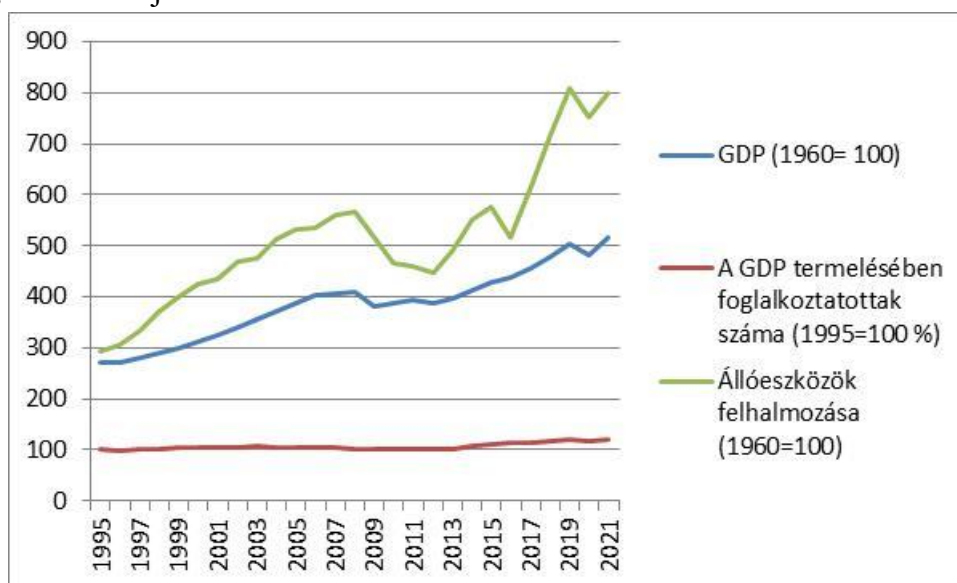
évek= 1995-2021

y= [GDP](#) (1960=100 %)

x_1 = [A GDP termelésében foglalkoztatottak száma](#). Ezer fő. (1960=100 %)

x_2 = [Az állóeszközök felhalmozása](#). (1960=100 %)

Az adatok grafikus ábrája



A termelési függvényszámítás eredményei.

Varianciaanalízis

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	2	0,8	0,4	129,9	0,000000
Maradék	24	0,1	0,0		
Összesen	26	0,9			

A regressziós együtthatók:

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b_0	2,5961	1,1823	2,20	0,038	0,156	5,036
b_1	-0,2578	0,3302	-0,78	0,443	-0,939	0,424
b_2	0,7312	0,0755	9,68	0,000	0,575	0,887

Az autokorreláció

Durbin-Watson statisztika, pozitív autokorreláció.

D-W	0,588
dL (5%)	1,240
dU (5%)	1,556
dL' (5%)	2,444
dU' (5%)	2,760

Az x_1 = a GDP termelésében foglalkoztatottak száma változó nem szignifikáns és negatív. Ez azt jelenti, hogyha a kitevő negatív, akkor a parciális rugalmasság negatív, tehát a határtermelékenység is negatív. Az idősor autokorrelált. Közgazdasági és statisztikai szempontból is a termelési függvény sem elemzésre, sem előrejelzésre nem használható.

Ennek alapján a becslő függvény.

$$\ln \hat{y} = 2,5961 - 0,2578 \cdot \ln x_1 + 0,7312 \cdot \ln x_2$$

Vissza transzformálva:

$$\hat{y} = 13,4109 \cdot x_1^{-0,2578} \cdot x_2^{0,7312}$$

A Kádas Kálmán féle termelési függvény

Kádas Kálmán. [Az emberi munka termelékenységének statisztikai vizsgálata a magyar gyárparban.](#) (A Cobb—Douglas-féle statisztikai törvény kiegészítése.). Statisztikai Szemle. 1944. 7-8. sz.

[Kádas Kálmán](#) 1944-ben megjelent tanulmányában az akkor ismert nemzetközi szakirodalmat feldolgozta. A számításokat [logarléccel](#) végezte. Az általa használt adatállományt sikerült rekonstruálni. A regressziós modellek tesztelése 1945 előtt nem volt ismert. Feleségemmel 1980-ban feldolgoztuk a Kádas Kálmán által végzett számításokat és összehasonlítottuk a saját vizsgálatunkkal. A saját vizsgálatunk az 1960-1975 közötti időszakra vonatkozott. Tanulmányunkban a regressziós modelleket teszteltük, nagy számítógépen ([Razdan-3](#) Pollack Mihály Műszaki Főiskola Pécs) a [BMPD](#) programcsomagot használtuk. Személyi számítógép és az Excel akkor még nem állt rendelkezésünkre. Ld.: Rédey Katalin - [Sipos Béla: Termelési függvények a magyar ipar néhány ágazatában.](#) STATISZTIKAI SZEMLE 58: 7 pp. 692-708. 17 p. (1980)

A Kádas Kálmán által használt adatállomány feldolgozását most bemutatjuk az Excel és az Excel parancsfájlok felhasználásával.

A Kádas Kálmán által alkalmazott jelölések (KádasKálmánadatai-1944.xls):

T= terméksoros volumenindex (anyagfelhasználás mentes)

L= létszám, a munkások teljesített munkaórái

C= a tőke értéke 1931. évi bázison számítva, az üzemszakok számának figyelembevételével

T/L= a munka termelékenysége

T/C= eszköz kihasználás

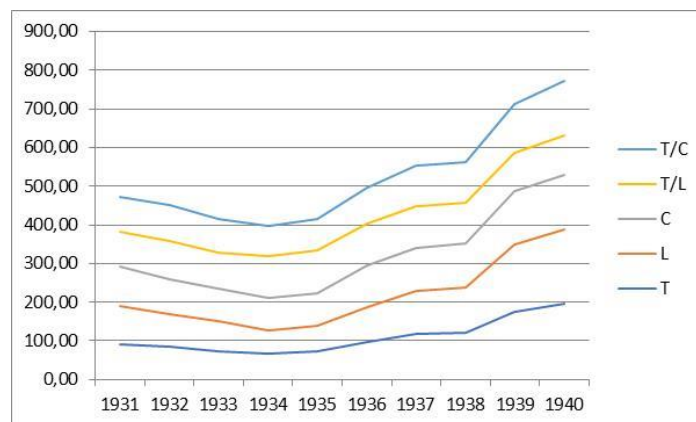
Vizsgált időszak 1931-1940

Iparcsoportok:

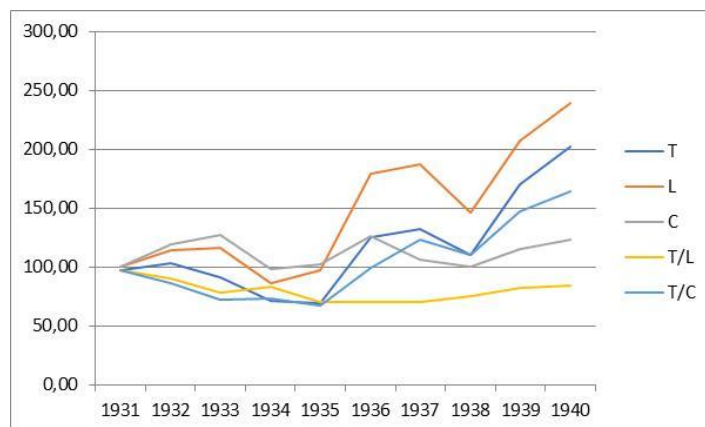
Vas- és fémipar,

Gépgyártás,

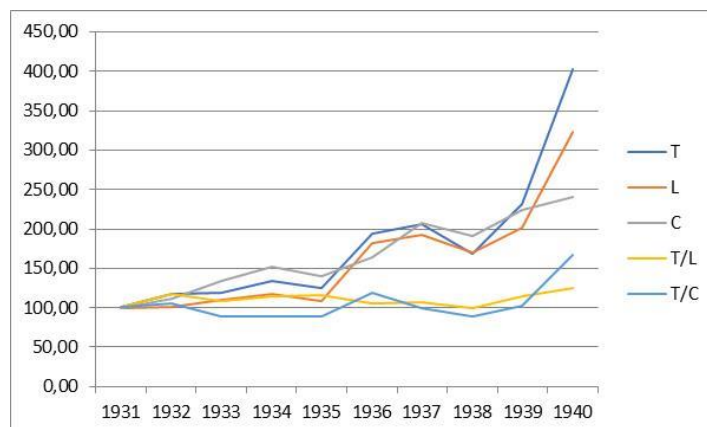
Papír gyártás,
Papírosárú gyártás.
A grafikus ábrák.
Vas-és fémipar:



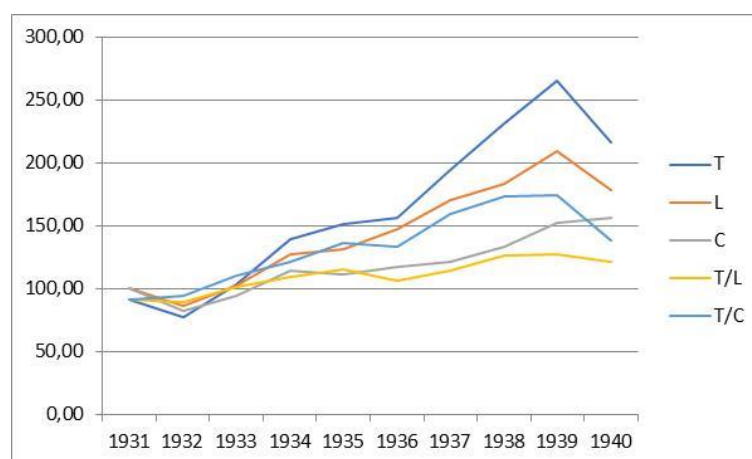
Gépgyártás:



Papír gyártás:



Papírosárú gyártás:



Mindegyik adatsornál látható a visszaesés, az 1929-1933-as világválság hatása.

Vas- és fémiparra végzett számítások, átlag- és határmutatók.

(C-Dtermelésifüggvényátlagéshatármutatói-KádasKálmánadatai-fémipar.xls)

$$\ln b_0 = -2,2370$$

$$b_0 = 0,1068$$

$$b_1 = 0,4855$$

$$b_2 = 0,9965$$

$$e_v = b_1 + b_2 = 1,4820$$

y/x_1	y/x_2	x_1/y	x_2/y	$F=x_2/x_1$	dy/dx_1	dy/dx_2
0,90550	0,90550	1,10436	1,10436	1,00000	0,43958	0,90233
0,98000	0,94276	1,02041	1,06072	1,03950	0,47575	0,93946
0,93000	0,86918	1,07527	1,15051	1,06998	0,45148	0,86613
1,06490	0,78302	0,93906	1,27711	1,35999	0,51697	0,78028
1,08620	0,82910	0,92064	1,20613	1,31010	0,52731	0,82619
1,10000	0,90904	0,90909	1,10006	1,21007	0,53401	0,90585
1,08310	1,06187	0,92328	0,94173	1,01999	0,52580	1,05815
1,04450	1,03928	0,95740	0,96221	1,00503	0,50706	1,03563
0,99860	1,27212	1,00140	0,78609	0,78499	0,48478	1,26766
1,02390	1,39302	0,97666	0,71787	0,73502	0,49706	1,38813

A megfigyelt évek száma 10. Az átlag mutatók 1 körül szóródtak. A holtmunka határtermelékenysége nagyjából a duplája volt az élőmunka határtermelékenységének 1931-1940 között, aminek az oka, hogy a fémipar eszközigenyes iparág.

s_1	s_2	akc_1	akc_2	$keresztakc$	$hozadéx_1$	$hozadéx_2$
0,48717	2,05268	-0,00226	-0,00003	0,00438	-0,00466	-0,00003
0,50641	1,97468	-0,00285	-0,00004	0,00530	-0,00586	-0,00004
0,52126	1,91843	-0,00295	-0,00004	0,00535	-0,00609	-0,00004
0,66254	1,50933	-0,00430	-0,00003	0,00612	-0,00886	-0,00003
0,63824	1,56681	-0,00411	-0,00003	0,00608	-0,00847	-0,00003
0,58951	1,69633	-0,00309	-0,00003	0,00494	-0,00636	-0,00003
0,49691	2,01245	-0,00247	-0,00003	0,00469	-0,00509	-0,00003
0,48962	2,04241	-0,00225	-0,00003	0,00434	-0,00464	-0,00003
0,38242	2,61491	-0,00143	-0,00003	0,00352	-0,00294	-0,00003
0,35808	2,79267	-0,00133	-0,00003	0,00351	-0,00274	-0,00003

A holtmunka helyettesítési határáránya lényegesen nagyobb, mint az élőmunka határtermelékenysége. A különbség 2,28-7,80 szoros. A közvetlen akceleratorok (akc_1 és akc_2) negatívak, vagyis ha a termelési tényezőket kis egységgel növeljük, a határtermelékenység csökken. Az akc_2 értékei nagyobbak, mint az akc_1 értékei. A keresztakceleratorok pozitívak, tehát a két termelési tényező kiegészíti egymást. A közvetlen hozadékok negatívak, tehát az adott termelési tényező növekedésével, az átlagtermelékenység csökken. A holtmunka ($hozadéx_2$) hozadéka nagyobb, mint az élőmunkáé ($hozadéx_1$).

A CES-függvény:

(ces1KádasKálmán-fémipar.xls):

$$\ln y = \ln h + e_v \left\{ \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right] \right\} + u$$

$$W = \left[-\frac{1}{p} \right] \ln \left[A_2 x_2^{-p} + (1 - A_2) x_1^{-p} \right]$$

$$\ln y = \ln h + e_v W + u$$

$$\sigma = 0,541$$

$$p = 0,850$$

$$A_2 = 0,172$$

$$A_1 = 0,828$$

$$e_v = 1,076$$

$$\ln h = -0,334$$

$$h = 0,716$$

$$R^2 = 0,975$$

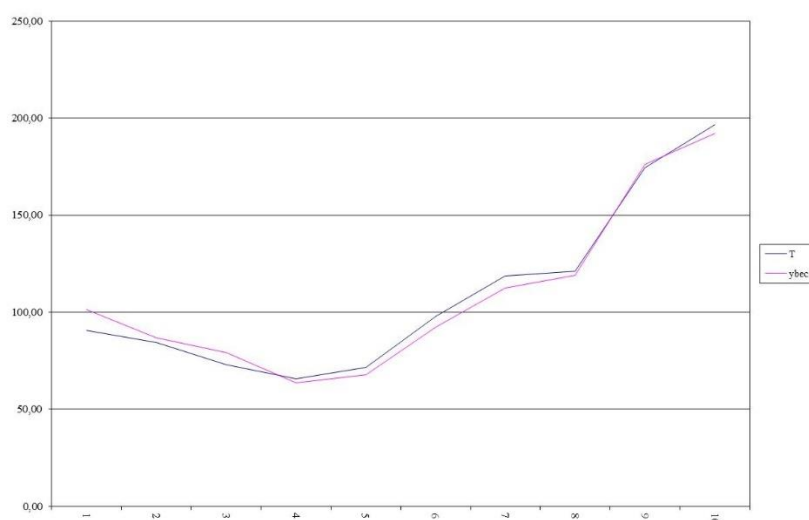
A helyettesítés rugalmassága, $\sigma = 0,541$, tehát, a helyettesítési határárány 1 %-os növekedése esetén a technikai felszereltség csak 0,541 %-kal nő. A volumen hozadéka, $e_v = 1,076$, ami kisebb, mint amit a Cobb-Douglas-termelési függvény esetében becsültünk, ahol a kitevők összege tetszőleges volt:

$e_v = 1,4820$. Az $A_2 = 0,172$ és az $A_1 = 0,828$ értékei azt mutatják, hogy az élőmunka részesedése (0,828) a termelés létrehozásában lényegesen nagyobb, mint a holtmunkáé (0,172).

A számítások eredményei:

Opt W	$\ln y_{\text{becs}}$	y_{becs}
4,605	4,620	101,510
4,461	4,465	86,934
4,376	4,374	79,330
4,172	4,154	63,720
4,232	4,219	67,946
4,519	4,527	92,514
4,700	4,722	112,405
4,753	4,780	119,068
5,117	5,171	176,056
5,199	5,259	192,231

Az eredeti adatok T = terméksoros volumenindex (anyagfelhasználás mentes) és a becsült termelési adatok grafikus ábrája. Az illesztés pontos ($R^2 = 0,975$)



**A Kádas Kálmán féle CES termelési függvény az időtényező bevonásával.
(ces1-időtényező bevonása_Kádas Kálmán-adatai-.xls)**

A számítások eredményei:

$$\sigma = 0,5273$$

$$p = 0,8963$$

$$A^2 = 0,4947$$

$$\lambda = 0,0033$$

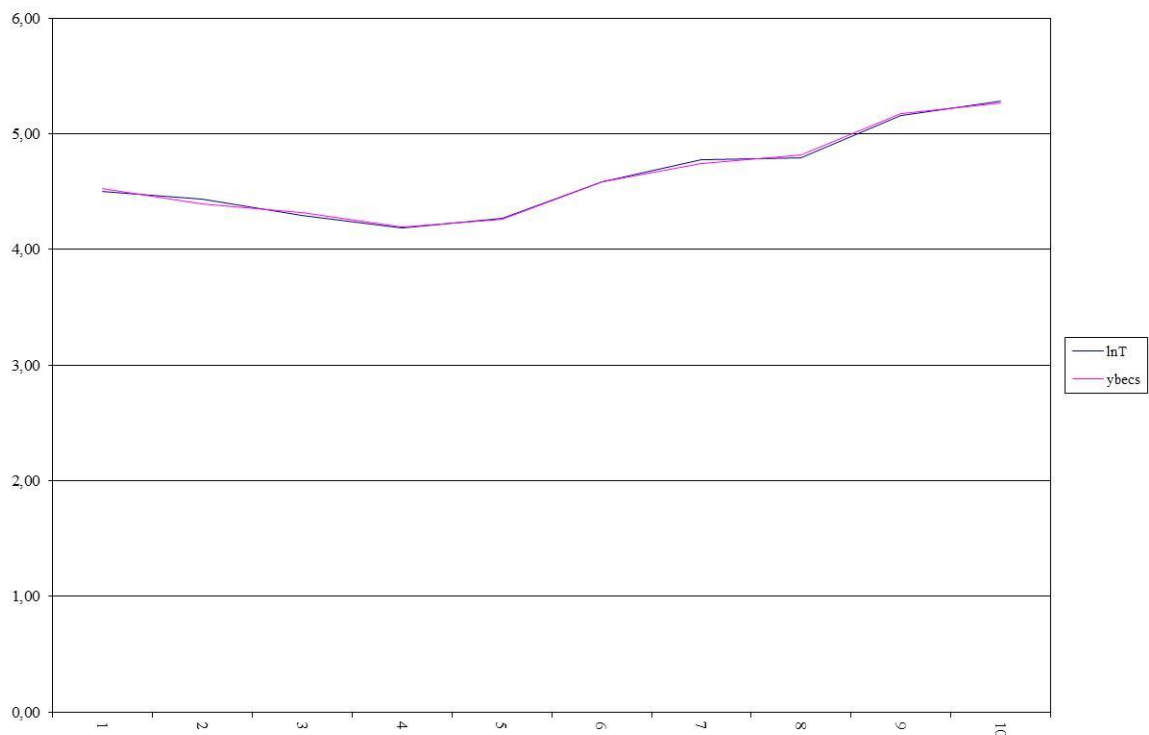
$$e_v = 1,157$$

$$\ln h = -0,261$$

$$h = 0,770$$

$$R^2 = 0,996$$

A becslő függvény



Kádas Kálmán-féle a vas-és fémiparra elvégzett Solow termelési függvényszámítás eredményei

Autokorreláció nincs

Tetszőleges	ρ	t	t_{krit}	p-érték
1	-0,497	-1,619	2,306	0,1441

Regressziós együtthatók

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b_0	-0,7063	0,6913	-1,02	0,346	-2,398	0,985
b_1	0,6158	0,1006	6,12	0,001	0,370	0,862
b_2	0,5158	0,2431	2,12	0,078	-0,079	1,111
b_3	0,0183	0,0065	2,81	0,031	0,002	0,034

A Solow termelési függvény a statisztikai és közgazdasági feltételeknek részben eleget tett. A tőke változó regressziós paramétere (5 %) nem szignifikáns.

$\ln b_0 = -0,7063$

$b_0 = 0,4935$

A becslőfüggvény

$$y = 0,4935 x_1^{0,6158} x_2^{0,5158} e^{0,0183t}$$

A volumenhozadék nagyobb, mint 1. ($e_v = 1,1316$) és a λ pozitív.

Oktatási termelési függvények.

Az oktatási termelési függvényeknek az 1960-as évektől kezdve nagy irodalma van az USA-ban. Ld.: Education economics. [Wikipédia](#). A témakör egyik legismertebb kutatója [Eric Hanushek](#) (1943-)

Forrás: Varga Júlia: [Oktatási termelési függvények](#).

„Az oktatásra alkalmazott termelési függvények a következő elgondolásból indulnak ki. Az oktatási intézmények különböző erőforrásokat használnak fel, például a tanulók idejét, tanárokat, felszereléseket, és ezek segítségével növelik a tanulók tudását és képességeit. Az oktatási termelési függvény az iskolázási folyamat eredménye (outputja) és a mérhető ráfordítások (inputok) közötti kapcsolatot írja le. Ha ismernénk az oktatási termelési függvényt, akkor előre jelezhetnénk, hogy milyen hatása lesz annak, ha megnöveljük az oktatás különféle erőforrásait, például több tanárt alkalmazunk, csökkentjük az osztálylétszámot, vagy ha erőforrásokat vonunk ki az oktatásból.

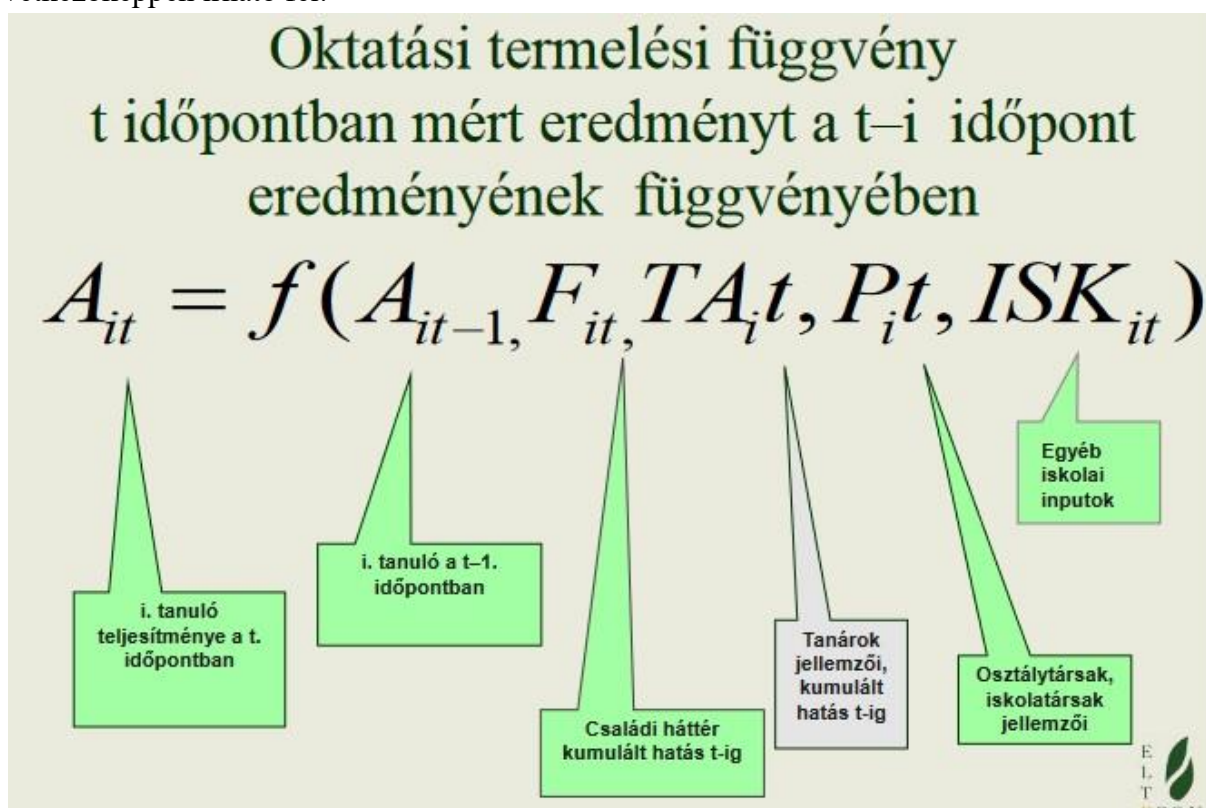
Az oktatási termelési függvények meghatározásához először meg kell határozni és meg kell mérni az oktatási outputot, az oktatási folyamat inputjait, és végül, szükség van a termelési függvény specifikációjára, azaz annak meghatározására, hogy milyen módon befolyásolják a bemeneti adatok a kimeneteket, vagyis, hogy milyen a termelési függvény alakja.

Az oktatás kibocsátásának, outputjának mérése. Az anyagi termelésre alkalmazott, hagyományos termelési függvények az output mennyiségét mérik. Az oktatási termelési függvények viszont inkább minőségi változást kívánnak vizsgálni: hogyan változott a résztvevők tudása, valamint azok a jellemzők, amelyek sikeresebbé tehetik a tanulókat későbbi pályafutásuk során (tanulási képesség, alkalmazkodóképesség stb.). Arról azonban, hogy pontosan milyen képességekről, készségekről van szó, s azok hogyan függenek össze egymással – erősítik-e vagy gyengítik egymás hatását –, nincs biztos ismeretünk. Az output meghatározásában tehát az jelenti az első nehézséget, hogy nem egy, hanem többféle outputot kellene mérnünk, például: az alapismeretek, a szakismeretek elsajátítását, a kreativitás fejlesztését, a továbbtanulási arányok növekedését, bizonyos hasznos magatartásformák megtanulását stb. Ezek egy részét viszonylag megbízhatóan mérhetjük, például erre a célra kidolgozott tesztek segítségével, más részük mérése kevésbé megbízható. Problémát jelent az is, hogy nem a tudás vagy képességek szintjét kell megmérnünk, hanem annak adott időszak alatti változását, tehát a mérést kétszer kell elvégezni. A legtöbb tanulmány tesztek segítségével próbálja felmérni a tanulók tudásának és képességeinek változását, de gyakoriak az olyan vizsgálatok is, amelyek egyszerűbb mérőszámokat alkalmaznak: például a továbbtanulási arányokat.

Az oktatási folyamat inputjainak mérése. Az oktatási folyamat eredménye sokféle tényezőtől, ráfordítástól függ. Ezek egy része iskolai input, és oktatáspolitikai eszközökkel befolyásolható. Ilyenek a tanári ráfordítások, amelyeket a tanárok statisztikailag könnyebben vagy nehezebben megfigyelhető jellemzőivel szoktak mérni: a tanárok gyakorlati ideje, keresete, képzettsége, verbális képességei stb. Az egyéb iskolai inputokat sokféle mérőszámmal szokták jellemezni: az osztálylétszám, az egy tanárra jutó diákok száma, az iskola felszereltsége, az egy tanulóra jutó könyvtári könyvek száma, az egy tanulóra jutó ráfordítások tartozhatnak például ebbe a csoportba.

Az inputok egy másik része nem iskolai input, oktatáspolitikai eszközök segítségével nem befolyásolható, de az iskolai eredményességet éppúgy befolyásolja, mint az iskolai ráfordítások. Ez utóbbi csoportba tartozik például a tanulók képessége, az oktatási folyamat kezdetéig már felhalmozott tudása, a családi ráfordítások, a tanulási környezet jellemzői és a tágabb környezet jellemzői, például az átlagos iskolázottsági szint az adott településen, iskolakörzetben. Sem a családi, sem a többi környezeti inputot nem tudjuk közvetlenül mérni, hanem csak olyan mérőszámokkal, amelyekről feltételezzük, hogy jól jelzik ezeket az ráfordításokat. A családi inputokat a jövedelmi helyzettel, a szülők iskolázottságával szokták közvetetten mérni, feltételezve, hogy a kedvezőbb társadalmi-jövedelmi helyzet nagyobb ráfordítást tesz lehetővé. Az oktatási termelési függvények eredményeit gyakran oktatáspolitikai célra használják fel, ezért általában a legfontosabb kérdés, hogy az iskolai vagy oktatáspolitikai eszközökkel befolyásolható inputok hozzájárulásának mekkora a

relatív súlya a többi inputhoz képest. Az oktatási termelési függvény általános alakban a következőképpen írható fel:”



Forrás: Varga Júlia. [Oktatásgazdaságtan](#).

A felsőfokú végzettséggel rendelkezők százalékos aránya és az egy főre jutó GDP alakulása között kapcsolat mutatható ki, országonkénti bontásban. Feltételezhető, hogy az egy főre jutó GDP növekedésével a felsőfokú végzettséggel rendelkezők százalékos átlagos aránya is növekszik.

Vizsgálni szokták az alaphér, illetve a kereset, jövedelem (menyiségi változó) és az iskolai végzettség (minőségi változó) közötti kapcsolatot leíró bérregressziós függvényt.

A feldolgozásokban fontosak az [OECD oktatási statisztikák](#).

Az Egyesült Államokban készült 187 oktatási termelési függvény becsült regressziós paramétereinek előjele.

Forrás: Hanushek, E. A.: [Education Production Functions](#). Oxford: Pergamon Press 1995.

Hanushek, E. A. [Teljes publikációs jegyzéke](#) a honlapján.

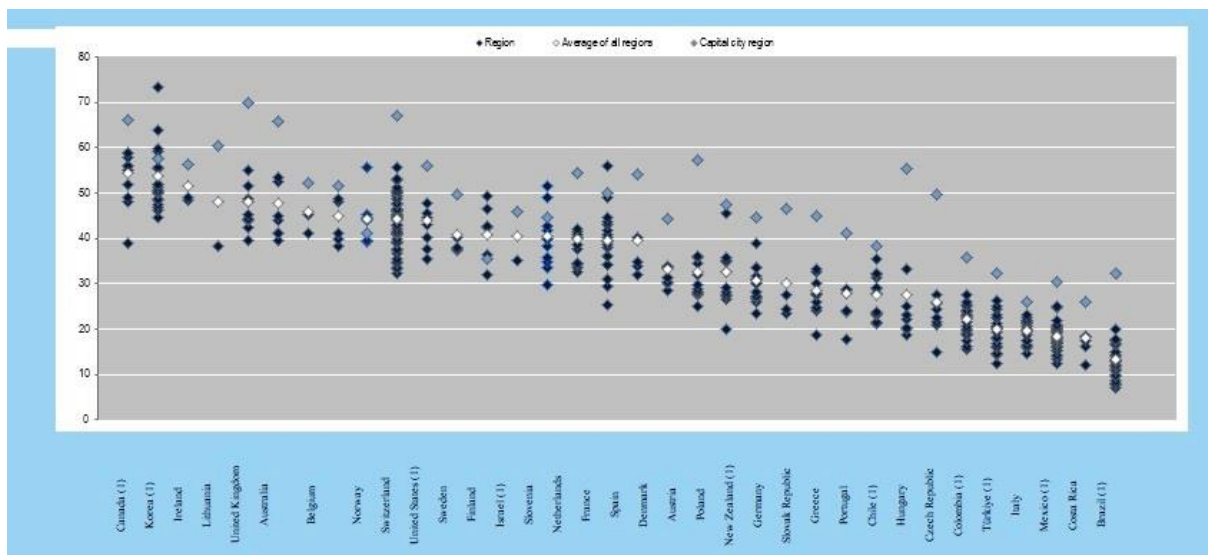
Inputváltozó	Tanulmányok száma	Statisztikailag szignifikáns		Statisztikailag nem szignifikáns		Ismeretlen előjelű
		+	-	+	-	
Tanár-diák arány	152	14	13	34	46	45
Tanárok iskolázottsága	113	8	5	31	32	37
Tanárok gyakorlottsága	140	40	10	44	31	15
Tanári fizetések	69	11	4	16	14	24
Egy tanulóra jutó ráfordítások	65	13	3	25	13	11
Felszereltség	74	7	5	17	14	31

Oktatási termelési függvények becsült regressziós paramétereinek előjele a fejlődő országokban.

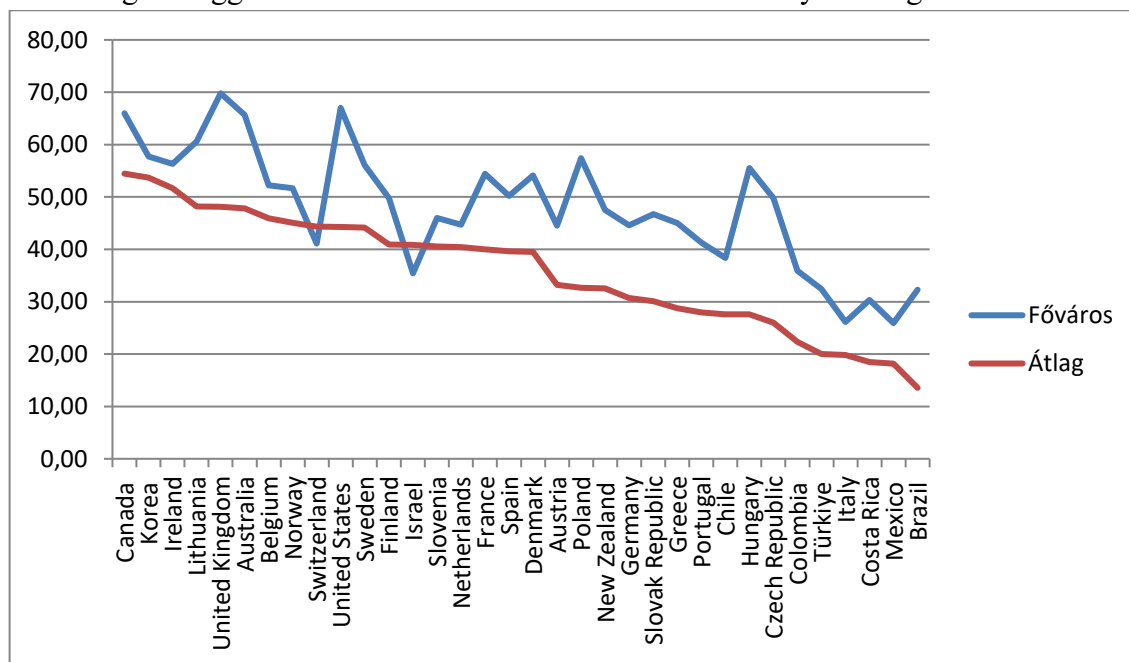
Inputváltozó	Tanulmányok száma	Statisztikailag szignifikáns		Nem szignifikáns
		+	-	
Tanár-diák arány	30	8	8	14
Tanárok iskolázottsága	63	35	2	26
Tanárok gyakorlottsága	46	16	2	28
Tanári fizetések	13	4	2	7
Egy tanulóra jutó ráfordítások	12	6	0	6
Felszereltség	34	22	3	9

A felsőfokú végzettséggel rendelkező 25-64 évesek százalékos aránya országok szerint (2021)

Az adatok (a felsőfokú végzettséggel rendelkező 25-64 évesek százalékos aránya) bontása: 1. országok, 2. országokon belüli átlag és az 3. az országok fővárosa szerint. A 34 megfigyelt ország esetében Magyarország a 27-ik helyen található:



A felsőfokú végzettséggel rendelkező 25-64 évesek százalékos aránya országok és a főváros szerint:



Hatványkitevős regresszió számítás eredményei.

(Felsőfokúvégzettségük és az egy főre jutó GDP kapcsolata országoként.xls):

Változók

n= 34 ország megfigyelt adata

y= a felsőfokú végzettséggel rendelkező 25-64 évesek százalékos átlagos aránya országok szerint 2021-ben

x= az egy főre jutó GDP 2019-ben országok szerint 2019-ben. (\$/fő)

Forrás: Országok egy főre jutó GDP szerinti listája (nominális) 2019. [Wikipédia](https://hu.wikipedia.org/wiki/Országok_listája_nominális_GDP_szerinti_sorrendben).

A becslőfüggvény:

$$\ln \hat{y} = \ln b_0 + b_1 \ln x_1$$

$$\hat{y} = b_0 x_1^{b_1}$$

A számítások eredményei (regresszio-egy főre jutó GDP és a felsőoktatásban részesülők arányahatványkitevős.xls)

Varianciaanalízis

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	1	0,5	0,5	10,5	0,002817
Maradék	32	1,7	0,1		
Összesen	33	2,2			

Regressziós együtthatók

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	1,8149	0,6272	2,89	0,007	0,537	3,092
b₁	0,1960	0,0606	3,24	0,003	0,073	0,319

A homoszkedaszticitás tesztjei

Próba	Jelölés	R ²	F	F _{krit}	p-érték
Glejser	$R^2(e ;x)$	0,0020	0,065	4,149	0,801
BPG	$R^2(e^2;x)$	0,0012	0,040	4,149	0,843
KB	$r^2(e^2;(y^{\wedge})^2)$	0,0016	0,051	4,149	0,822

Glejser		r	t-érték	p-érték
$r(e_{\text{abs}}; \ln(\text{Egy főre jutó GDP -USD}))$		-0,045	-0,255	0,8005

BPG		r	t-érték	p-érték
$r(e^2; \ln(\text{Egy főre jutó GDP -USD}))$		-0,035	-0,200	0,8430

A regressziós modell az elméleti feltételeknek eleget tett.

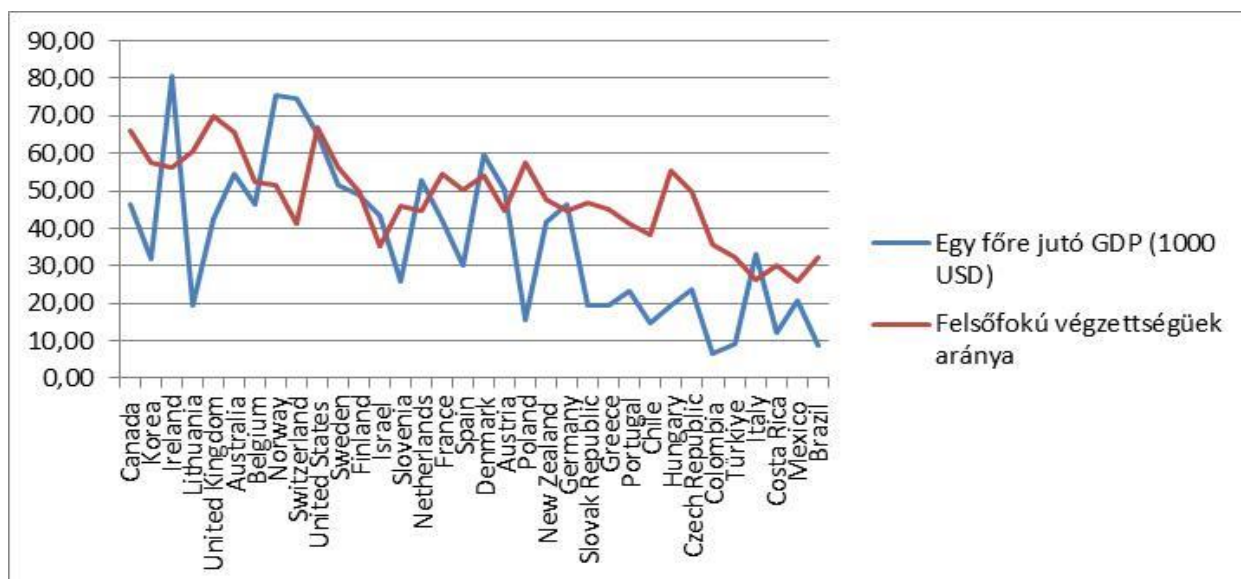
A becsülő függvény:

$$\ln \hat{y} = \ln 1,8149 + 0,196 \ln x_1$$

$$\hat{y} = 6,14 x_1^{0,196}$$

Ha az egy főre jutó GDP 1 %-kal nő, akkor a felsőfokú végzettséggel rendelkező 25-64 évesek százalékos átlagos aránya 0,196 %-kal emelkedik.

Az alábbi ábra a felsőfokú végzettséggel rendelkező 25-64 évesek százalékos átlagos arányát és az egy főre jutó GDP alakulását mutatja országok szerint (1000 \$/fő)



Nemzetközi kitekintés ([KSH](#)): 2019-ben az Európai Unió 28 tagállamában átlagosan 4,7% volt a kormányzat oktatási kiadásainak nagysága a GDP-hez képest. Svédországban költöttek a legnagyobb arányban oktatásra a GDP-hez viszonyítva (6,9%), amelyet Dánia, Belgium, Észtország és Lettország követett. A legkevesebbet Írországban költötték (a GDP 3,1%-át), de Románia, Bulgária és Olaszország ráfordításai sem érték el a 4%-ot. Svédország és Írország között a különbség több, mint kétszeres. (2,23-szoros)

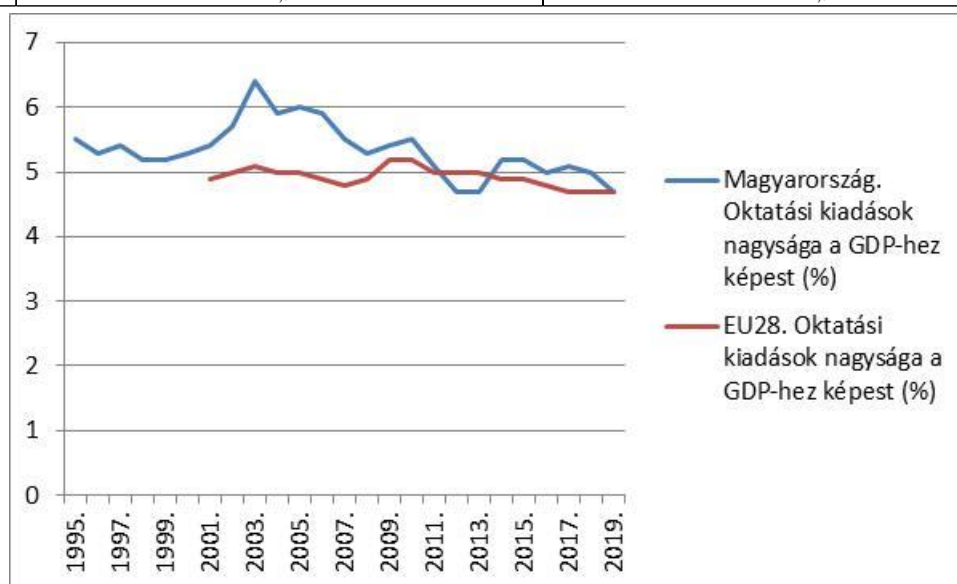
EU országok	Oktatási kiadások nagysága a GDP-hez képest (%)
Svédország	6,9
Dánia	6,3
Belgium	6,2
Észtország	6
Lettország	5,8
Finnország	5,6
Szlovénia	5,5
Ciprus	5,4
Málta	5,3
Franciaország	5,3
Hollandia	5
Lengyelország	5
Egyesült Királyság	4,9
Csehország	4,9
Horvátország	4,8
Ausztria	4,8
Magyarország	4,7
EU28	4,7
Luxemburg	4,7
Litvánia	4,6
Portugália	4,4
Németország	4,3
Szlovákia	4,2
Spanyolország	4
Görögország	4
Olaszország	3,9
Bulgária	3,9
Románia	3,6
Írország	3,1

Grafikus ábrában:



A magyar kormányzat oktatási kiadásainak GDP-hez mért aránya az 1995 és 2019 közötti időszakban átlagosan 5,3% volt. 2003 és 2006 között az átlag elérte a 6,1%-ot is (2003-ban 6,4%-ot), utána viszont csökkenő trend érvényesült. A mélypont 2012-ben és 2013-ban volt, ekkor csupán 4,7%-ot tett ki, ezt követően is a mutató alig haladta meg az 5%-os értéket, valamint 2019-ben újra mindössze 4,7% volt. Az EU átlag hasonló tendenciát követett.

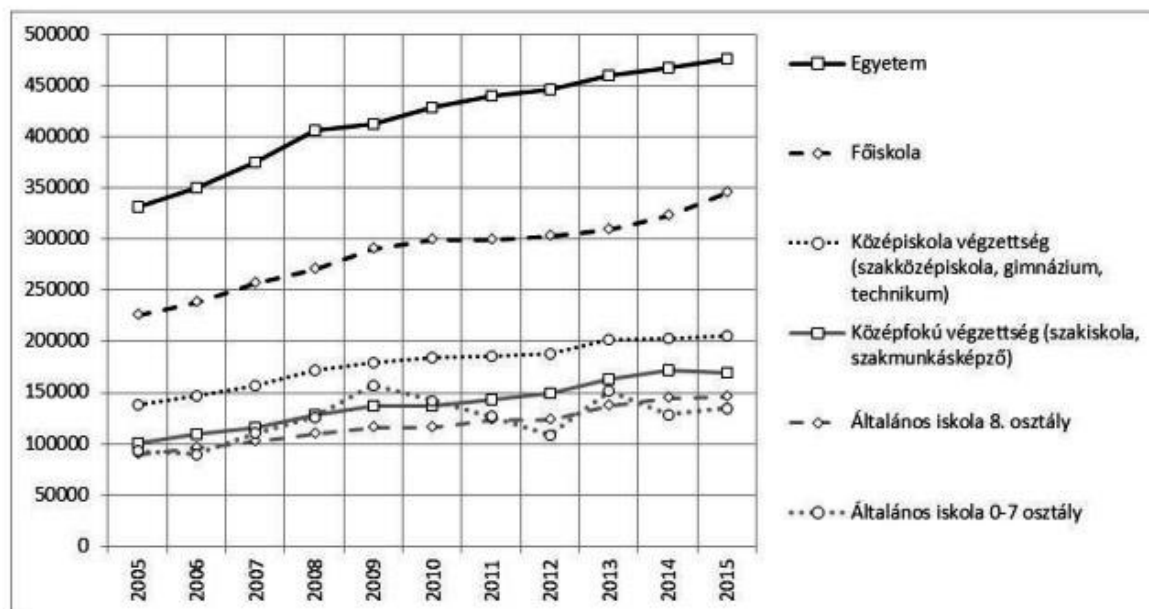
Év	Magyarország. Oktatási kiadások nagysága a GDP-hez képest (%)	EU28. Oktatási kiadások nagysága a GDP-hez képest (%)
1995.	5,5	
1996.	5,3	
1997.	5,4	
1998.	5,2	
1999.	5,2	
2000.	5,3	
2001.	5,4	4,9
2002.	5,7	5
2003.	6,4	5,1
2004.	5,9	5
2005.	6	5
2006.	5,9	4,9
2007.	5,5	4,8
2008.	5,3	4,9
2009.	5,4	5,2
2010.	5,5	5,2
2011.	5,1	5
2012.	4,7	5
2013.	4,7	5
2014.	5,2	4,9
2015.	5,2	4,9
2016.	5	4,8
2017.	5,1	4,7
2018.	5	4,7
2019.	4,7	4,7



Az alábbi ábra a havi átlag kerestek (Ft/hó) alakulása befejezett legmagasabb iskolai végzettség szerint. (2004–2015) Forrás: Nagy Katalin. Az oktatás gazdasági értékei. [Opus et Educatio](#). 3. évf. 3. sz.

Az adatok forrása: Iskolai végzettség szerinti alapter- és kereset átlagok a nemzetgazdaságban fizikai-szellemi bontásban, nemenként, (közfoglalkoztatottak nélkül) 2018. [Nemzeti Foglalkoztatási Szolgálat. \(NFSZ\)](#)

A legalsó négy szinten, 1. általános iskola 07. osztály, 2. általános iskola 8. osztály, 3. középfokú végzettség (szakiskola, szakmunkásképző), 4. középiskolai végzettség (szakközépiskola, gimnázium, technikum) az iskolai végzettség és a havi átlagkeresetek között nincs jelentős különbség. 5. főiskolai és 6. egyetemi végzettségek már jelentős hatást gyakorolnak a havi átlagkeresetek nagyságára.



Az alábbi (Ft/fő,hó) illetve a kereset (Ft/fő,hó) és az iskolai végzettség közötti kapcsolatot mutatja az alábbi két tábla és két ábra. Iskolai végzettség szerinti alapbér- és keresetátlagok a nemzetgazdaságban fizikai-szellemi bontásban, nemenként. (közalkalmazottak nélkül) Magyarország. 2018. Forrás: [Nemzeti Foglalkoztatási Szolgálat. \(NFSZ\)](#)

Adatokat, számításokat ld.: Felsőfokú végzettségük és az egy főre jutó GDP kapcsolata országoként.xls iskolai végzettség-bér munkalapon.

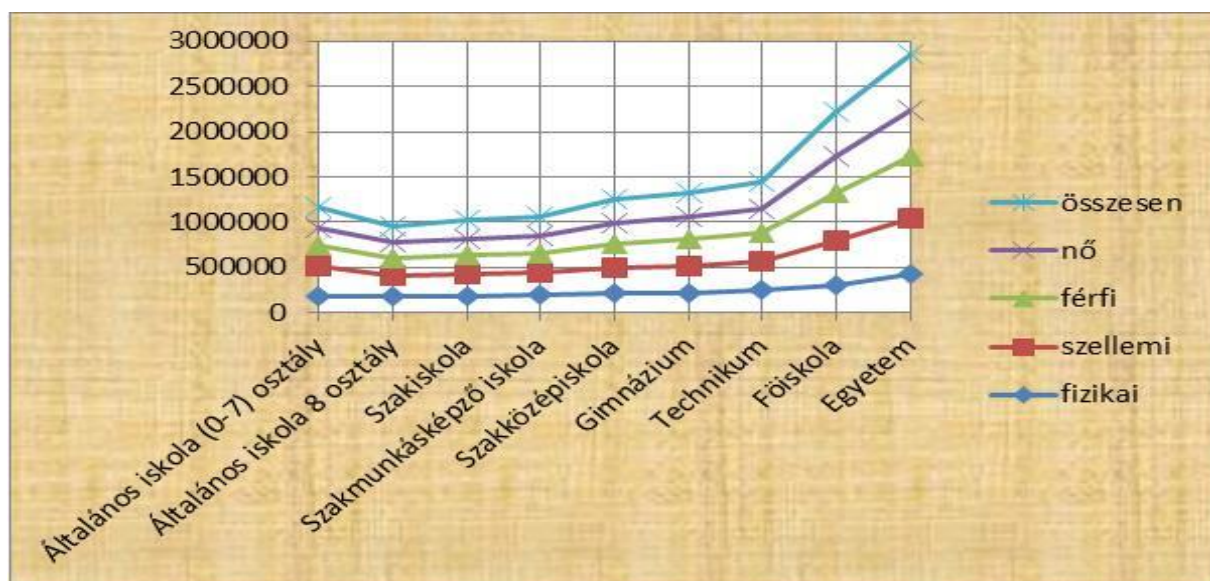
Az alábbi tábla az alapbér és az iskolai végzettség közötti adatokat tartalmazza.

Iskolai végzettség	Fizikai	Szellemi	Férfi	Nő	Összesen
Általános iskola 0-7 osztály	183100	330257	225336	205918	218658
Általános iskola 8 osztály	174135	242871	186142	169824	179585
Szakiskola	186924	243190	200154	190911	197096
Szakmunkásképző iskola	204534	237124	214893	187724	208516
Szakközépiskola	218500	279062	260373	239591	251750
Gimnázium	212932	300494	292942	251528	271058
Technikum	248073	326612	303920	272478	296715
Főiskola	297143	492170	531907	416303	481516
Egyetem	433159	617645	682634	504158	613222

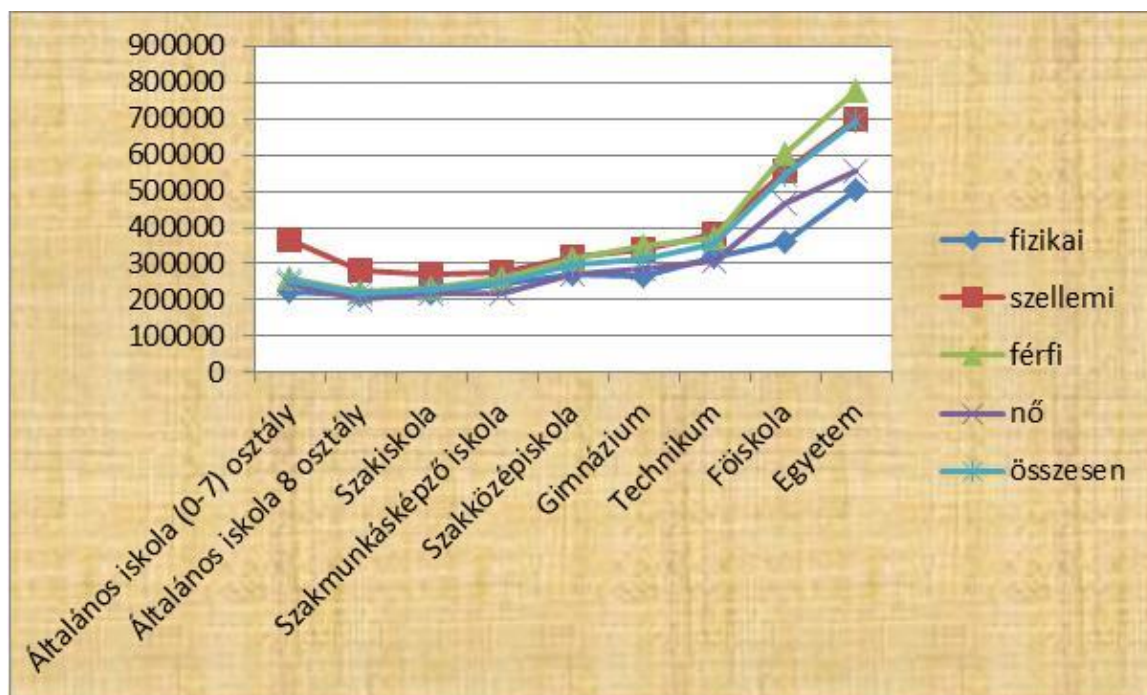
Az alábbi tábla a kereset és az iskolai végzettség közötti adatokat tartalmazza.

Iskolai végzettség	Fizikai	Szellemi	Férfi	Nő	Összesen
Általános iskola 0-7 osztály	222104	363326	261780	245635	256228
Általános iskola 8 osztály	210104	283843	224518	203197	215950
Szakiskola	221198	272550	235735	219855	230482
Szaktanulmányi iskola	245719	275699	258537	219532	249382
Szakközépiskola	270587	318570	314706	271868	296930
Gimnázium	267260	339257	347759	285865	315053
Technikum	319093	381647	372539	308371	357835
Főiskola	358711	554739	605057	465053	544030
Egyetem	502134	697721	779124	557758	693031

Az alaphív (Ft/fő,hó) és az iskolai végzettség közötti kapcsolatot mutatja az alábbi ábra. Magyarország. 2018.



A kereset (Ft/fő,hó) és az iskolai végzettség közötti kapcsolatot mutatja az alábbi ábra. Magyarország. 2018.



A fenti táblákból és ábrákból látható, hogy a főiskolai és az egyetemi végzettségek már jelentős hatást gyakorolnak az átlagbérek és az átlagkeresetek nagyságára.

Bérregressziós számítások.

A számításokat ld.: regresszio-alapbérek-iskolaivégzettség.xls

Az alapbér és az iskolai végzettség közötti kapcsolatot vizsgáltuk. Az adatmátrix:

Iskolai végzettség	Alapbér összesen	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
Általános iskola 0-7 osztály	218658	0	0	0	0	0	0	0	0
Általános iskola 8 osztály	179585	1	0	0	0	0	0	0	0
Szakiskola	197096	0	1	0	0	0	0	0	0
Szakmunkásképző iskola	208516	0	0	1	0	0	0	0	0
Szakközépiskola	251750	0	0	0	1	0	0	0	0
Gimnázium	271058	0	0	0	0	1	0	0	0
Technikum	296715	0	0	0	0	0	1	0	0
Főiskola	481516	0	0	0	0	0	0	1	0
Egyetem	613222	0	0	0	0	0	0	0	1

A minőségi ismérveket mesterséges változókká kellett alakítani. (ezeket dummy változóknak (0, 1) hívjuk)

Általános iskola 0-7 osztály minden mesterséges változónál 0.

$x_1 = 1$ ha Általános iskola 8 osztályra vonatkozik, különben 0.

$x_2 = 1$ ha Szakiskolára vonatkozik, különben 0.

$x_3 = 1$ ha Szakmunkásképző intézetre vonatkozik, különben 0.

$x_4 = 1$ ha Szakközépiskolára vonatkozik, különben 0.

$x_5 = 1$ ha Gimnáziumra vonatkozik, különben 0.

$x_6 = 1$ ha Technikumra vonatkozik, különben 0.

$x_7 = 1$ ha Főiskolára vonatkozik, különben 0.

$x_8 = 1$ ha Egyetemre vonatkozik, különben 0.

A megfigyelések száma 9 és a magyarázó változók száma 8, így a becslés nem adott értékelhető eredményt, de a felesleges változók elhagyásával statisztikai szempontból elfogadható két tényezőváltozós eredményt kaptunk.

Varianciaanalízis

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	2	962926249065,0	481463124532,5	89,6	0,000034
Maradék	6	32250772225,0	5375128704,2		
Összesen	8	995177021290,0			

A regressziós modell homoszkedasztikus

Glejser	r	t-érték	p-érték
$r(e_abs; x_7)$	-0,622	-2,104	0,0734
$r(e_abs; x_8)$	-0,622	-2,104	0,0734

BPG	r	t-érték	p-érték
$r(e_2; x_7)$	-0,537	-1,684	0,1361
$r(e_2; x_8)$	-0,537	-1,684	0,1361

Regressziós együtthatók

	Ehátó	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b7	481516	179585	2,681271	0,036474	42087,33521	920944,6648
b8	613222	179585	3,414662	0,014237	173793,3352	1052650,665

Tehát a két szignifikáns változó, ahogy ezt az adatokból már sejteni lehetett:

x_7 = a Főiskola

x_8 = Egyetem

$$y = 481516x_7 + 613222x_8$$

A regressziós paraméterek értelmezése, a főiskolát végzettek átlagosan és a másik tényezőváltozót kiszűrve 481516 forinttal keresnek havonta többet, mint az Általános iskola 0-7 osztályt végzettek.

Az egyetemet végzettek átlagosan és a másik tényezőváltozót kiszűrve 613222 forinttal keresnek havonta többet, mint az Általános iskola 0-7 osztályt végzettek. Miután a $b_0 = 0$ volt, a regressziós együtthatók megegyeztek a mért bér adatokkal vagyis 0-nak becsülték az általános iskola 0-7 osztály megfigyelt bérét.

Ha a b_0 -t is bevonjuk, akkor a becslőfüggvény:

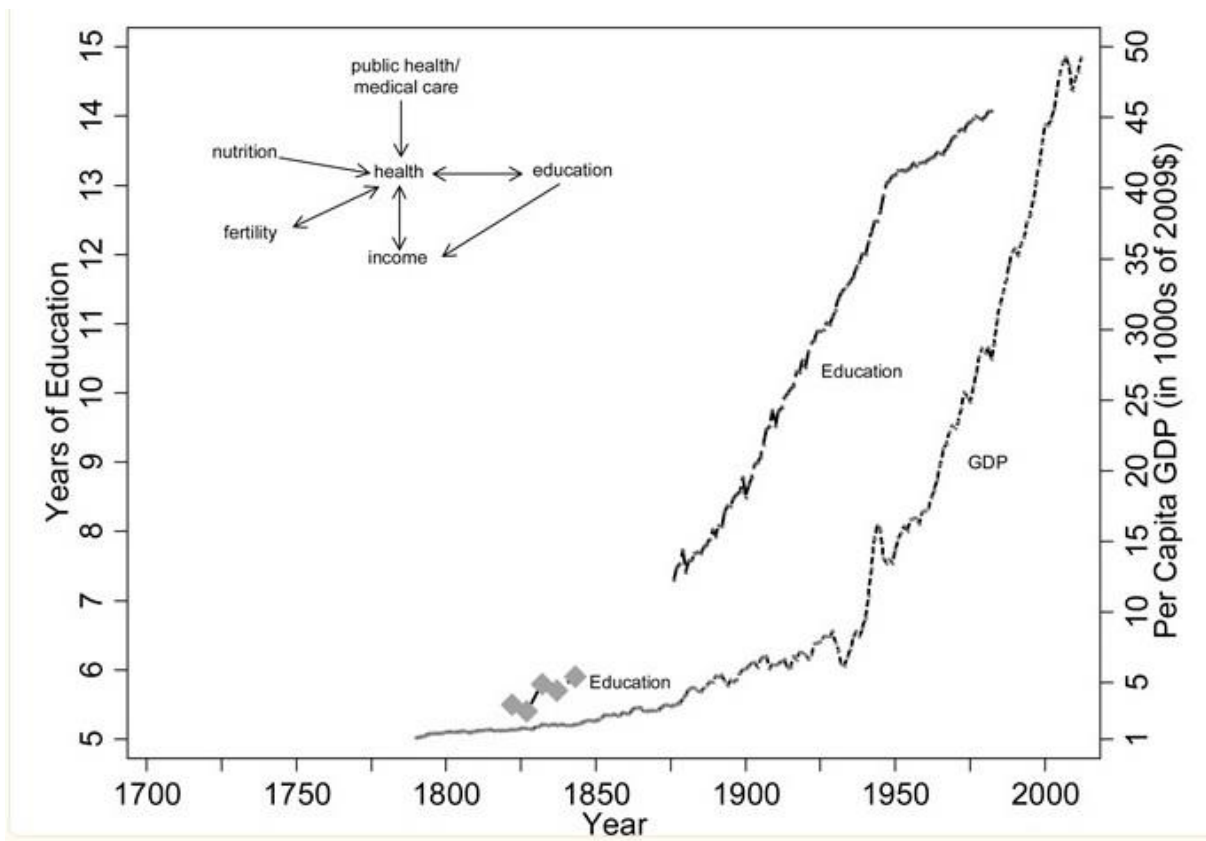
$$y = 231911 + 249605x_7 + 381311x_8$$

A főiskolát végzettek átlagosan és a másik tényezőváltozót kiszűrve 249605 forinttal keresnek havonta többet, mint az Általános iskola 0-7 osztályt végzettek.

Az egyetemet végzettek átlagosan és a másik tényezőváltozót kiszűrve 381311 forinttal keresnek havonta többet, mint az Általános iskola 0-7 osztályt végzettek. A $b_0 = 231911$ valamilyen minimál bérként értelmezhető, ha valakinek nincs iskolai végzettsége, akkor ennyi az átlagos keresete.

Közgazdaságilag a regressziós modell a konstans bevonásával értelmezhető, de statisztikailag nem. (Variancia analízis, F-próbánál 0 osztó, regressziós paraméterek, a t-próbát nem tudta megbecsülni)

Az alábbi ábra [az USA-ban](#) az egy főre jutó GDP-t (2009-es ezer \$-ban, \$/fő) mutatja 1790-2014 között és az oktatásban töltött évek számát mutatja 1876 és 2014 között. A két görbe lefutása hasonló, az oktatásban eltöltött idő és az egy főre jutó GDP között a grafikonon a visszaeséseknél késleltetett kapcsolat látható.



A translog termelési függvény

A [translog termelési függvény](#), amely a Cobb– Douglas függvény általánosítása, a következő alakban írható fel:

$$\ln y = \ln b_1 + b_2 \ln L + b_3 \ln K + b_4 \frac{\ln^2 L}{2} + b_5 \frac{\ln^2 K}{2} + b_6 \ln L \ln K + e$$

A Cobb-Douglas által használt adatbázis esetén az regressziószámítás eredményei (regresszioC-D-függvény-translog.xls):

Autokorreláció nem szignifikáns:

Autokorreláció rendje	ρ	t	t_{krit}	p-érték
1	0,145	0,686	2,074	0,5001
2	-0,197	-0,944	2,080	0,3558
3	-0,310	-1,528	2,086	0,1422
4	-0,359	-1,803	2,093	0,0872
5	-0,379	-1,923	2,101	0,0705
6	-0,077	-0,363	2,110	0,7213
7	0,266	1,295	2,120	0,2138
8	0,156	0,739	2,131	0,4716
9	0,232	1,121	2,145	0,2811
10	0,397	2,027	2,160	0,0637
11	0,142	0,672	2,179	0,5142
12	-0,172	-0,817	2,201	0,4315

Durbin-Watson bizonytalanság

D-W	1,711
dL (5%)	0,925
dU (5%)	1,902
dL' (5%)	2,098
dU' (5%)	3,075

Varianciaanalízis, a modell elfogadható

	df	SS	MS	F	p-érték
Regresszió	5,0000	1,6147	0,3229	110,7992	0,0000
Maradék	18,0000	0,0525	0,0029		
Összesen	23,0000	1,6672			

A konstanst leszámítva a tényezőváltozók és a termelés között nincs szignifikáns kapcsolat.

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	-33,4276	15,2818	-2,1874	0,0422	-65,5336	-1,3216
b₁	19,0387	9,8616	1,9306	0,0694	-1,6798	39,7572
b₂	-4,3809	3,7691	-1,1623	0,2603	-12,2996	3,5377
b₃	-4,5123	3,1572	-1,43	0,170	-11,145	2,121
b₄	0,0812	0,4994	0,16	0,873	-0,968	1,130
b₅	0,8239	1,1959	0,69	0,500	-1,689	3,336

Kihagyva a nem szignifikáns változókat, az eredeti Cobb-Douglas termelési függvényt kapjuk meg, amit már korábban kiszámoltunk

	Eható	St. hiba	t-érték	p-érték	Alsó 95%	Felső 95%
b₀	-0,1773	0,4670	-0,3797	0,7080	-1,1485	0,7938
b₁	0,8073	0,1560	5,1750	0,0000	0,4829	1,1317
b₂	0,2331	0,0683	3,4116	0,0026	0,0910	0,3751

A nem lineáris regressziós függvények jellemzői

Linearizálhatók az alábbi nem lineáris termelési (regressziós) függvények is, a függvények jellemzőit az alábbi táblában foglaljuk össze:

Függvénytípus	A függvény	A függvény meredeksége	A függvény elaszticitása
Lineáris (lin-lin)	$\hat{y} = b_0 + b_1 x$	b_1	$b_1 \frac{x}{\hat{y}}$
Hatványkitevős (log-log)	$\hat{y} = b_0 x^{b_1}$ $\ln \hat{y} = \ln b_0 + b_1 \ln x$	$b_1 \frac{\hat{y}}{x}$	b_1
Exponenciális (log-lin)	$\hat{y} = b_0 b_1^x$ $\ln \hat{y} = \ln b_0 + x \ln b_1$	$\hat{y} \ln b_1$	$x \ln b_1$
Féllogaritmikus (lin-log)	$\hat{y} = b_0 + b_1 \ln x$	$b_1 \frac{1}{x}$	$b_1 \frac{1}{\hat{y}}$
Hiperbolikus (reciprok)	$\hat{y} = b_0 + b_1 \frac{1}{x}$	$-b_1 \frac{1}{x^2}$	$-b_1 \frac{1}{x\hat{y}}$
Log- reciprok	$\ln \hat{y} = b_0 + b_1 \frac{1}{x}$	$-b_1 \frac{\hat{y}}{x^2}$	$-b_1 \frac{1}{x}$
Másodfokú parabolikus (kvadratikus)	$\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$	$b_1 + 2b_2 x$	$\frac{(b_1 + 2b_2 x)x}{\hat{y}}$
Log- kvadratikus	$\ln \hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$	$\hat{y}(b_1 + 2b_2 x)$	$x(b_1 + 2b_2 x)$