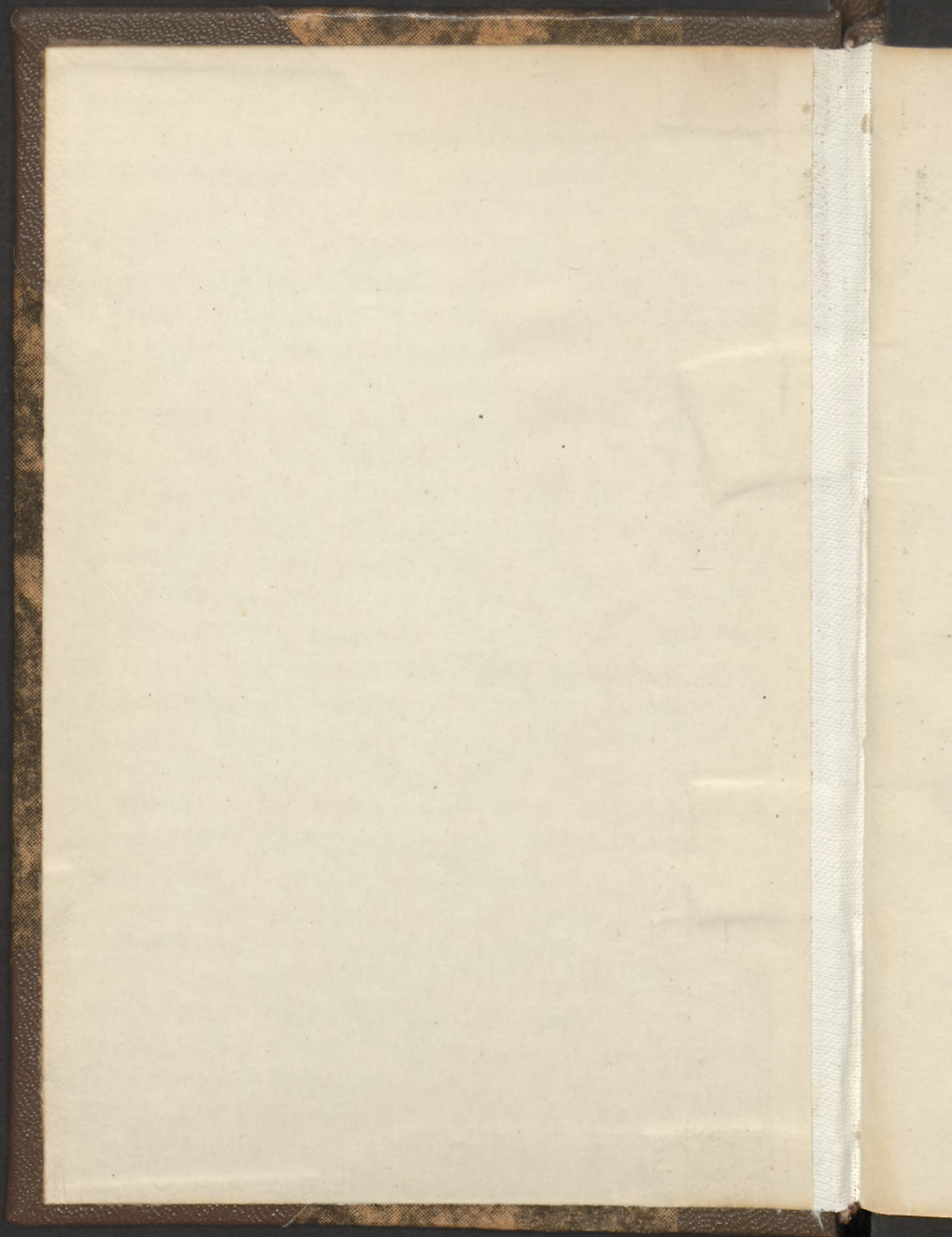
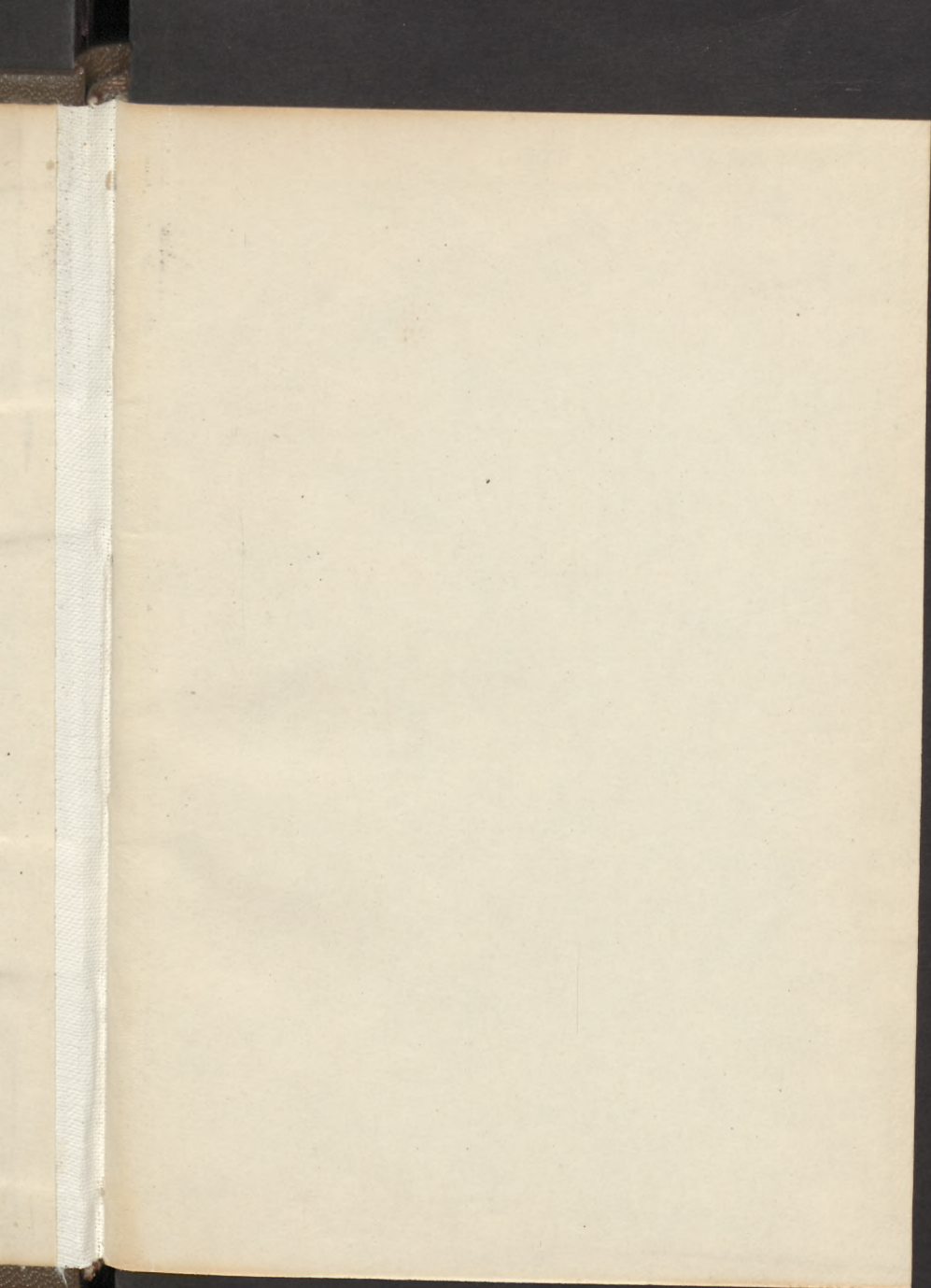


288.375







GALLIA  
AFFLICTA

DIEBIS PAL

VALÓSZÁG ÉS  
MATEMATIKA

II. 14 SZ. 8. ÉZER ÁRA 60 FILL.

ADAL  
ADAL  
ADAL  
ADAL

11-11





# GALILEI FÜZETEK

288375

DIENES PÁL

## VALÓSÁG ÉS MATEMATIKA

11-14. SZ. 6. EZER. ÁRA 60 FILL.

HALADÁS  
KÖNYVKIADÓ  
VÁLLALAT  
KIADÁSA



A *Galilei Füzetek* célja a természettudományok, a társadalomtudományok, a modern filozófia eredményeinek népszerű ismertetése. Elsősorban azt az ismeretanyagot igyekeznek felölelni, melyet a középiskola hiányosan vagy elferdítve közöl vagy teljesen elhallgat.

A *Galilei Füzetek* minden egyes száma valamely ismeretkör bevezető, összefoglaló tájékoztatóját adja és alkalmas további behatóbb speciális tanulmányok előkészítésére.

A *Galilei Füzetek* egyszerű, világos, vonzó modorban vannak írva. 32–64 lapnyi terjedelemben, 2–3 füzetként jelennek meg, úgy hogy lehetőleg minden hónapra egy szám megjelenése essék.

Egyes szám ára 30 fillér. Minden további szám 10 fillér.

Az eddig megjelent füzetek: 1. *A történelmi materializmus I.* (ismertetés). Írta dr. Fazekas Sándor és dr. Székely Artur. 2. *A származástan mai állása.* Írta dr. Kende Zsigmond. 3. *A vallás keletkezése.* Írta dr. Rubin László. 4. *Az új világszemlélet.* Írta dr. Lóránd Jenő. 5–6. *Bevezető az élet kémijába.* Írta Strophantus. 7. és 8. *A mai lélektan főbb irányai I. és II.* Írta dr. Dienes Valéria. 9–10. *Az anyag szerkezete.* Írta Szántó Hugó. 11–14. *Valóság és matematika.* Írta dr. Dienes Pál egyetemi m.-tanár. A gyűjtemény legközelebbi számai a következő kérdésekkel fognak foglalkozni: *A történelmi materializmus II.* (értékelés és kritika). *Biológiai alapfogalmak.* *Bevezető a közgazdaságba.* Ezenkívül az alább felsorolt tárgyakról szóló füzetek kiadása van tervbe véve:

### I. A természettudományok köréből.

A biológia fontosabb problémái.	A tudományos tereméstartótenet.
Vitalizmus és mechanizmus.	A föld fejlődése.
A célszerűség a természetben.	Az energetika elemei.
Az emberi test szerkezete, működése.	Az energia körforgása.
A baktériumok világa.	Elektromos sugárzások
Nemi betegségek.	Radioaktivitás.
Az ember egyéni és faji fejlődése.	Az élet keletkezése.

### II. A szociológia köréből.

Bevezető a szociológiába.	Az állam.
Az emberi társadalom kialakulása.	A nőkérdés.
Társadalmi fejlődés.	Fejezetek a magyar történelemből
Az emberi gazdálkodás fejlődése.	a történelmi materializmus meg-
A tőkés termelés.	világításában.
A munkásmozgalmak és a szocializmus.	Fejezetek a világtörténelemből a
A család fejlődése.	történelmi materializmus meg-
	világításában.

### III. A világszemléleti ismeretek és a filozófia köréből.

Filozófiai alapfogalmak.	Modern bibliakritika.
A régi filozófia kritikája.	A vallás mint világszemlélet.
A bölcsélet újabb irányai.	A tudományos világszemlélet.
Test és lélek.	A tudomány kialakulása és fejlődése
Determinizmus és indeterminizmus.	A tudományos módszer.
Lélekelemzés.	A cél és okság kritikája.
A monizmus.	A természetbölcsélet elemei.

Kiadja a Haladás könyvkiadóvállalat Budapest, V. Széchenyi-utca 10. sz. Telefon 42—59.



# VALÓSÁG ÉS MATEMATIKA

BETEKINTÉS A MENNYISÉGTAN  
FOGALOMRENDSZERÉBE

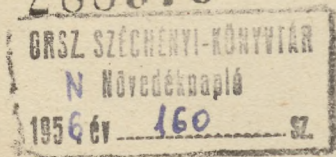
IRTA

DR DIENES PÁL  
EGYETEMI MAGÁNTANÁR



BUDAPEST, 1914  
A HALADÁS KÖNYVKIADÓ-  
VÁLLALAT KIADÁSA

288375





## Előszó.

Ez a füzet nem azoknak van szánva, akik a felsőbb matematika számolóeszközeinek használatába akarják begyakorolni magukat, erre már vannak jól megírt füzetek és könyvek magyar nyelven is, hanem azoknak, akik az emberi tudás e legprecízebb, legkidolgozottabb és egyszersmind legemberibb ágának fogalmi alkatára és problémáira kíváncsiak. Magukat az alapvető fogalmakat szedjük itt majd széjjel avégett, hogy összerakásukat, egymásbaszövődésüket és valósággyökereiket lehető élesen kipécézhessük. E célnak megfelelőleg nincs is e füzetben semmiféle műveletszabály, sem kiszámításra váró feladat, tehát az olvasótól nem kíván semmiféle számolásbeli készséget, sőt előleges matematikai ismereteket sem. Csak a tizes számrendszerben felírt számok kezelésmódját tételezi fel ismeretesnek, ezenfelül csupán igen komoly és egyetlen részletet ki nem felejtő, feszült figyelmet kíván. Aki ezt a tárgyhöz pontosan illeszkedő figyelmet rászánja erre az olvasmányra (ideértve az összevontabb helyeken mondottaknak számbeli kiírását vagy lerajzolását is), azt e füzetke végigvezeti a közönséges egész számoktól indulva a matematika legfontosabb útjain és egy-két legkönnyebben megközelíthető kilátónál, nyílt problémánál, még bejáratlan területekre is bepillantást nyújt munkája fejében. De dolgoznia kell: oly, óriási, századok megfeszített munkájából fakadó szellemi kincset, mint a matematika, kényelmesen, futtában való olvasással még távolról és nagy vonásokban sem lehet megpillantani.

Budapest, 1913 október hó.

*Dienes Pál.*

## TARTALOM

Előszó	3
<b>Első fejezet. Egész és törtszám.</b>	
A mennyiségtan kivételes helyzete	5
A tárgyak a világban egymás által és mégis külön vannak	6
Egész szám	8
Tört szám	13
Végtelen számhalmazok. Határérték	18
<b>Második fejezet. Irracionális szám és a végtelen problémái.</b>	
Irracionális szám	25
A mennyiségtan két alaptétele	32
A végtelen függő kérdései	35
<b>Harmadik fejezet. Differenciálhányados.</b>	
A függvény fogalma	42
Algebra és komplex szám	46
Végtelen sor. Analitikai függvény	52
Derivált függvény. Primitív függvény	60
Differenciál- és integrálegyenlet	64
Ajánlható kézikönyvek	67



## I. Fejezet.

### Egész és törtszám.

#### A mennyiségtan kivételes helyzete.

3 A mennyiségtan helyzete a tudományok között  
egészen sajátos. Megállapított igazságai annyira  
biztosak, hogy bennök még a bölcselkedők sem igen  
5 szoktak kételkedni. Szeretnők tehát a pontos természet-  
6 tudományok közé sorolni, annál is inkább, mint-  
8 hogy ezek, különösen a csillagászat, természettan,  
13 vegytan stb. lépten-nyomon felhasználják eredményeit  
18 és módszereit. Semmi esetre sem vagyunk hajlandók  
a pontossággal éppen nem dicsekedő történeti vagy  
szellemi tudományok közzé iktatni. Egy különös körülménynél fogva azonban mégsem tudjuk fentartás  
25 nélkül egy kalap alá szorítani pl. a természettannal.  
32 Ugy látszik ugyanis, hogy a mennyiségtan nem szól  
35 a természetről, a tárgyak valóságos eseményeiről,  
amiknek törvényszerűségeit meg éppen a természet-  
tudományok kutatják. Hogy a másodfokú egyenletnek  
42 hogyan keressük ki a gyökeit, az közvetlen vonatkozás-  
46 ban nem áll semmiféle tényleges természeti tünemény-  
52 nyel. Innen van az az elterjedt hiedelem, hogy a  
60 mennyiségtan inkább légvár, mint erődtítmény s éppen  
64 megfoghatatlansága az ereje. A természettanhoz ké-  
pest mintha semmit se markolna.

Ennek a bizonytalanságnak, amit különben majd  
mindenki érezhetett középiskolai pályafutása alatt, az  
okai nem egészen hiúak. Hiszen a tantervbe bevett  
algebraészlet annyira nem jellemzi azt az óriási szellemi  
tőkét, mit matematika név alá a legerősebb gondolkodó  
fők összehordtak. Még az alapvető fogalmak meg-

ismerését sem teszi lehetségessé. Megkíséreljük ebben a kis füzetben lehetőleg közvetlen úton-módon, főfogalmainak boncolásával vázolni azt a gondolatrendszert, minek kiépítéséhez legelőbb fogott hozzá az ember esze s el is ért már benne valami maradandót, értjük a mennyiség tudományát, mit mint minden logikai egészet csodálatosképen nem részeiből összerakva, hanem ellenkezőleg, folyton az egészet vázolva s a vázlatot folyton fejlesztve lehet csak igaz ismerősünnké tennünk. Közben igyekszünk majd mindenütt rámutatni tudományunk valóságelemeire, még pedig nem csupán a kiinduló helyeknél, hanem a szerkezeti sajátosságokban is. Így majd némileg megérezhetjük, hogy a mennyiség *abc*-jéből készült bonyolult jelrendszerünk a legtökéletesebb valóságnyelv. Az eseménygördülések tényleges meghatározásánál nincs ugyan szava, belső megismerésük azonban általa válik lehetségessé. A fizikai okhálózatból kiesik, de a szálak bogozódását csakis vele követhetjük.

### **A tárgyak a világban egymás által és mégis külön vannak.**

Első dolgunk röviden vázolni a tárgyi világnak azt az arculatját, amit éppen a mennyiség fogalma igyekszik visszatükrözni. A természettudományoknak a maguk összességében nincsen talán mélyebbre szántó általános eredménye, mint az, hogy a tárgyak minden tulajdonságát a többi tárgy határozza meg. Így például a kő súlya nem valami ráragadt, őt jellemző minőség, mert a holdon vagy a napban egészen megváltozna s ha a kődarab egyedül lenne, súlyáról semmikép se beszélhetnénk. Még világosabban látszik ez a színeknél és hangoknál. Hogy a fotelem sötétvörös, az csak jelezni kíván egész sor változást: napfényben világos, árnyékba eső része sötét, néhol egész fehér, másutt



rózsaszín vagy feketés, amilyenné válik az egész félhomályban. Világító test kell tehát, meg még sok más külső feltétel teljesülése ahhoz, hogy a tárgynak meglegyen valaminő színessége. És ugyanígy áll a dolog a tárgyak bensőbb eseményeinél is. Például az erőkifejtésnek értelme sincs szembenálló, tehát külső meghatározó nélkül. (Gondoljunk *Newton* harmadik törvényére, miszerint a hatás mindig ugyanakkora ellenhatással jár együtt.) Már pedig erőhatásnak képzeljük az összes mozgás, hő, elektromágneses, sőt vegyi és szervezeti történéseket is. *Faraday*, a legnagyobb kísérletező a fizikusok között, megmondta már, hogy igazában minden atom mindenütt van, ahol hat s így betölti a világot. Elhatárolásuk tapintás útján önkényes, mert így csak egy hatást tekintünk a sok közül, amit a test kifejt. *Az egyes tárgy mibenléte tehát a környező világ erőhatásainak rajta történt összevörösése.* Ő maga is belejátszik mivoltjának meghatározásába, de csak olyformán, hogy felel a rátörő hatásokra, még pedig sokszor nagyon különböző erőket egyesítő egységes magatartással, minéműséggel. Épp ebben és csakis ebben mutatja meg, hogy milyen. Az eleven test, ebből a szempontból kiindulva, abban különbözik a nem élő tárgytól, hogy kezdeményezni is tud, célja, szempontja van, mi miatt az eredmény számára többé nem közömbös. Nem akar minden áron érvényesülni az eredőben mint alkotó rész. Ha az alakulás nem kedve szerint folyik, gátolni törekszik az egész esemény létrejöttét: nem cselekszik.

Az egyes tárgyak nem külön valóságok tehát. Mint valók, levők egymásba kapcsoltak, egymást meghatározók. A természetkutató előtt a világ szövevényes egymásrahatás, erőhálózat, hol az egyes a sok által, némileg azonban azzal szemben jut csak létezéshez, megjelenéshez.



Ez azonban nem azt mondja, hogy az egyes tárgy semilyen módon sincs külön. Azért, hogy ő maga egyáltalán nem lehet, mégis, mikor a többi segítségével van, külön egyén is, a maga sajátos felelősmódjával a többi tárgyból eredő hatásokra, a maga hatáskörével a körötte alakuló folyamatokra. Hiszen maga az erő is ilyen elemi egyén s így, ha egyének nem lennének, a világ — legalább is mint fizikai megjelenés, mint tünemény — nem lenne.

### Egész szám.

*Egész szám  
és valóság.*

Az egyén és a minden e különös kapcsolatát itt nem boncoljuk tovább, mert a számfogalom jelentése leginkább abból az előbb említett tényből ered, hogy sok hatás válhatik eggyé s hogy egyetlen felelő hatás számtalan alkotó megindulás összeolvasztása. Összefogni, egyesíteni többet s érezni, hogy az egységes összefogásban a részek tovább is fenmaradnak, ez az egész szám. Hét tárgy például, mint csomó, egy, aminek mint ily hetes csomónak külön sajátságai vannak. A csomóssága, számossága egyéni, egyetlenegy. Másrészt éppen azért hét s nem egy, mert csomó, mert tagokból, részekből áll. Egy és mégse egy — mint minden valósággal levő a világon. A szám nem fejt meg ezt a tényleg mindenütt jelenlevő rejtvénytérültséget, csak jelzi gondolatunknak, szimbolizálja azt egyetlen jelrendszerrel s épp ebből vesszük észre, hogy ugyanez a különösség fordul elő számtalan esetben. Így válik ismerősünnké, megértetté, ami eszünknek előbb talán furcsa volt. *Az egész szám tehát elsősorban a dolgok összenőtt s mégis külön életének jelképes gondolata.* A szám így a legáltalánosabb forma, amiben a tényleges valóságot gondolnunk kell. Ugyanis magát a puszta levést, ténylegességet sem lehet végiggon-



dolni sokszerűség és egybetartozás, egység nélkül, de még ha lehetne is, a már ténylegesen jelentkező valóság — mint saját éünk eseményei vagy a fizikai világ bármely folyamata — okvetlen „több és mégis egy” tagozódású. Az egész számok a „több és mégis egy”, „egy és mégis több” általános világtagozódást jelzik. Ezért alkalmazható — legalább elvben — a tényleges világ minden tüneményére a szám fogalma. Mindenben, mit egy pillanatra egynek gondolunk, lehet többet felfedezni; ezeket hívjuk részeknek. Másrészt bármelyik csoportja a tüneményeknek mutathat együvé-tartozást, egységet. A világ azonban még sem pusztá számbeliség. Például a lelki tüneményekben kifejezésre jut olyasvalami is, amire a szám éppenséggel nem illik: a választás, eldöntés folyamatába rejtőző határozatlanság, a „nem kész”, a „még sokfélévé válható”, az élő-ható lehetőség. Ezért hangsúlyoztuk fentebb, hogy a szám a ténylegesre, a már adottra, készre vonatkozik s nem magára a valamivé válásra.

*Az egész szám  
mint jelrendszer.*

Ezek a meggondolások, mik a szám-fogalom valósággyökerére igyekeztek rámutatni, nem mondhattak még semmit az egész számnak, mint jelrendszernek saját-ságairól. Pedig csak ott kezdődik a matematika — még az elemi iskoláé is —, mikor a valóságra rá se hederítve, magának a jelrendszernek önmagából fakadó rejtvényeit kezdjük fejtegetni. Ilyen már a szorzótábla (egyszeregy) összeállítás is. Egyáltalában nem hivatkozunk itt semmi külső valóságra, hanem azzal, hogy bármeddig el tudunk szaladni a jelrendszerben (t. i. az egész számok sorában), megállapítjuk előbb az összeadás szabályait, majd ezekből a szabályokból a szorzáséit. Ezért érezzük sokszor, hogy mihelyt matematizálni kezdünk, kicsúszik a talaj a lábunk alól. Pedig egyszerűen nem gondolunk a



talajra, mert szükségtelen. Ebből a szempontból megítélve, a nyelvtudományhoz is szokták hasonlítani a mennyiségtant. A nyelv is jelhalmaz és a nyelvtudomány eme jelhalmaz sajátosságaival foglalkozik. Van tehát némi hasonlatosság, de ez nagyon sántít. Két okból. Először is a nyelvet alkotó jelek, a szavak nem alkotnak igazi *rendszer*-t. Az egyes tárgyak, események, érzések külön-külön sugalltak az embernek valamilyen hangot, jelet, mit hogy úgy mondjuk erőszakosan, önkényesen kapcsolt külső megfelelőjéhez. Mutatja ezt a nyelvek sokfélesége is. Ami rend van benne, azt később hozta létre az utánzás (minden ígét önkéntelenül egyformán ragozunk), az egyszerűsítés és takarékoság. Az egész szám ellenben maga a megtestesült *rend* már kezdeteiben is. Másrészt a mód, ahogyan a szavak összefüggenek a valósággal, nem jelent ki semmi fontosat magáról a valóságról, míg a mennyiségjelek annak legáltalánosabb s egyik legmélyebb tulajdonságát szemléltetik. Ezért oly mérhetetlenül hatalmas eszköz a matematika a természetkutató kezében, míg a nyelv megmarad leíró szerszám szerepénél. Viszont ugyanezért a határozatlanságért van a nyelvnek művészete is — az irodalom — míg a mennyiségjeleknek éppen szigorú rendszerőségük miatt csak tudományuk lehet.

*A matematika problémáinak főforrása a végtelenség gondolata.*

Az egész számnak mint jelrendszernek önmagából előálló rejtvényei között legrejtélyesebb a végtelensége. Éppen a rendszer szerkezeténél fogva — ami, ismételjük, a továbbbszámlálásból áll — a jel-sereg kimeríthetetlen. Az utolsónak mondott jel után a képezési törvény szerint még mondok egyet, ami még nem lehetett az utolsó előtt, tudniillik eggyel tovább számlálok. A továbbbszámlálás tehát, ha akarjuk, ha nem, egy csapásra minden tagot megad és ténylege-



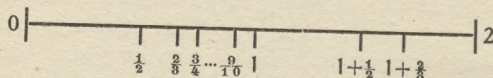
sen egyszerre előállítani mégse tudjuk őket. Ugyanis nem lehet a rendszert úgy kibontani egyes tagjaira, hogy azok mind a maguk teljes egyéni mivoltjában egyszerre megjelenjenek, mert akárhányat alkottam is, mindig marad még alkotni való s azért az egyes tagok mégis a legszigorubb teljességgel megvannak határozva, egymástól elkülönítve. *Mindeniket ismerem, mégsem állíthatom elő valamennyit. Ez a matematika legcsodálatosabb ténye.* Csaknem minden feladatába befurakodik s mindenütt ez képezi a kérdés bibéjét. Az egész úgynevezett felsőbb mennyiségtant az jellemzi legjobban, hogy szántszándékkal nekimegy ennek a csodának és megpróbálja, ha nem is megérteni, legalább kezelni. A fentebb mondottakból nyilvánvaló, hogy ez a kényelmetlen tényállás, ami annyi fejtörést okozott már a legokosabb embereknek, nem onnan ered, mintha a jelrendszer — mit ezután számnak fogunk emlegetni — nem sikerült volna. Hiszen egyszerűen kifejezi jelekben, a rendszer és a tagok szembeállításával a világ együvértartozásának és az egyén külön mivoltjának ellentétét. Mutatja ezt különben utólagosan a felsőbb mennyiségtan mélységes sikere is a természeti tünemények pontos megfogásában. Szerkezeti hiba bajosan járhatna ilyen eredményességgel. Látjuk tehát, hogy nemcsak kiindulásában, hanem feladatai, kérdései alakulásában is mennyire valóság-nyomon halad a matematika.

*A végesentűli  
rendszámok.*

Az egész számok általános vizsgálatát Cantor, német matematikus, üzte legmeszebb s jutott így el a legkülönösebb eredményekhez, mikor megállapította a végesentűli (transzfinit) egész számok fogalmát. Ime az okoskodása. Az egész szám azt jelenti, hogy valahonnan kiindulva megteszek egy újabb jelt éppen utána jövő egész számnak s ezt csinálom vég nélkül. Képzeljük most



már el, hogy az első nekifogással ily módon megvan már egytől kezdve valamennyi egész szám: száz, ezer, millió, billió stb. A másik nekifogáskor ugyanaz a képezési elv — hogy tudniillik előveszek egy újabb jelt s azt nagyobb nak teszem meg valamennyi előzőnél — oly  $\omega$  (mondd: *ómega*) betűvel jelölt számot fog adni, mi egyrészt az egész számok előre elfogadott képezési elve szerint készült, másrészt a meghatározása szerint túl van valamennyi közönséges, azaz véges nagyságú egész számon. Ez az első végesentűli egész szám. Újabb nekifogás megadja  $\omega + 1$ ,  $\omega + 2$ , ... stb. végtelen sorozatot csupa végesentűli egész számokból és így tovább. Egyszerű téri ábrázolás mutatja, hogy ez a tréfásnak feltűnhető gondolatjáték mennyi valóságot tud kifejezni a világnak arról az arculatjáról, tudniillik a részek egymásra vonatkozásáról, a rendről, mit a matematika van hivatva szemléltetni. Vegyünk elő egy két centi hosszú egyenes vonalat s vegyük szemügyre rajta azokat a pontokat, amelyek a 0-tól számítva



1. ábra.

$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$  stb. távolságra esnek. Csatoljuk még ezekhez a 0-tól  $1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{2}{3}$  stb. távolra esőket és próbáljuk meg ezeket legtermészetesebb rendben, nagyságuk szerint felsorolni. Első lesz a 0, 2-ik az  $\frac{1}{2}$ , 3-ik a  $\frac{2}{3}$ , stb.;  $n$ -edik az  $\frac{n-1}{n}$ , hol  $n$  valamelyik, különben bármelyik, egész szám helyett áll ( $n$  a numerus szó kezdőbetűjére emlékeztet). Annyit mond ez, hogy a vizsgált pont annyiadik a sorrendben, amekkora egész szám a nevezője. Hányadik most már az 1? Túl van



valamennyin, nagyobb mindegyik egész-számúadiknál. A vizsgált ponthalmazban az 1, nagyságrend szerint az  $\omega$ -adik. Az  $1 + \frac{1}{2}$  az  $\omega + 1$ -edik, és így tovább. Az  $\omega$  jel nyílt vagy rejtett használata nélkül nem is lehetne a megadott pontok (illetve távolságok) nagyságrendjét szemléltetni.

### Törtszám.

*Törtszám és valóság.*

Az egész számok csupa egészekből rakódnak össze, bennök még nem jut eléggé kifejezésre az a tény, hogy maga az egységül vett sem különb a belőle összerakottaknál, azaz hogy ő is részekből állónak tekinthető. Ezt szemléltetik részletesen a törtszámok:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$  általában  $\frac{m}{n}$  hol  $m$  is,  $n$  is bármelyik egész szám lehet.

A nevező megnevezi a felosztásmódot, hogy például 4 felé osztandó, a számláló megmutatja, hogy az így képzett részekből hányat kell összeszámlálnunk. Az  $m$  egyelőre kisebb, mint az  $n$ , jelekben,  $m < n$ , vagy egyenlők s ekkor az értelmezés szerint újra az egységet magát kapjuk, mert a gondolt felosztás után ismét összeszedjük valamennyi részt. A törtszámoknak, mint mennyiségtani lényeknek (ez alatt magát a jelrendszert értjük valóság-vonatkozás nélkül) megoldásra váró feladatai pedig onnan erednek, hogy minden egész szám egység is lévén, arra is alkalmazandó az  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  stb. felosztásmód s így megvizsgálandóvá válik, mi is történik akkor, ha az egész számot a maga teljes értelmében gondolom el, tudniillik egyidőben mint egységet és mint többséget veszem szemügyre. Hogyan kell például kifejeznem a nyolc felezését, ha nemcsak arra akarok gondolni, hogy a nyolc valami és ennek felét jelzem (ekkor



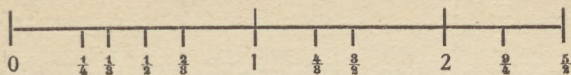
megmaradnék a nyolc fele, mondjuk  $\frac{1}{8}$  kifejezésnél), hanem arra is, hogy az a valami, amire gondolok, nyolc egységből áll? Ekkor juthatok csak el ahhoz az eredményhez, hogy a nyolc fele éppen 4, jelekben  $\frac{1}{8}=4$ . Ez az egyenlet nem hiú tehát, azaz nem azt mondja, hogy  $A=A$ , hanem érdekes összefüggést fejez ki két lehetséges felosztás között.

Bármelyik felosztás után továbbá az eredményt újra egységnek is kell gondolnom, mert valaminő felosztással nyert részekből — tehát ha akarom, egységekből — valahányat összefoglaltam s így ugyanazt műveltem, mint mikor egész számot képeztem, tehát folytathatom rajta a felosztást. Bonyolult feladatok ezek az elemi iskolásoknak, amiket nem is ők oldanak meg, hanem a törtszámokra megállapított négy alpművelet: összeadás, kivonás, szorzás, osztás intéz el rövidesen, gépiesen és végérvényesen. Itt kezd bonyolódni a mennyiségtan gépezete s viszont itt tűnik ki legegyszerűbben hatalma is. Mennyivel egyszerűbb és biztosabb a jelek kezelése — pár, kivételt nem ismerő rövid szabály — mint maguknak az egymásra halmozott felosztásoknak elgondolása. *S mivel az így alkotott jelrendszer éppen szerkezetével sem többet, sem kevesebbet nem jelez, mint a valóság egyik alapformáját, az egység-többség egyidejű megvalósulását, a szerkezeti sajátosságok is egytől-egyig valóság jelentésűek lesznek.* Nem kell félnünk, hogy vissza nem néző, önmagukból meritő mennyiségtani feladatok továbbfűzése elterelhet bennünket a valótól. Nem, mert annak egyik igazi megjelenésmódja lüktet tovább bonyolult gondolatjárásainkban.

*A törtszámok az egyenesen.*

A törtszámokat ráképzeltük az egyenes vonalra. Kezdőpontot veszünk fel az egyenesen (0) s onnan jobbra felmérjük az 1-et (például a centimétert választva egységnek), a 2,





2. ábra.

3, ... egész számokat, majd közbük az  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{2}{8}$ ,  $\frac{3}{8}$ , ... valamennyi törtet. Így minden egész és törtszámnak lesz helye s jelzik helyük távolságát a kezdőponttól. Az egyenest sűrűn ellepik, mert adott tizedestörthöz mindig van tőle csakis nagyon távoli tizedesjegyen s így akármilyen kevésbé különböző másik szám.

**Negatív szám.**

Valamint a törtszámok a lehetséges felosztások jelhalmaza, éppúgy a negatív számok a lehetséges kivonásoknak összeadásától független jelzései. A  $-12$  jel annyit mond, hogy, ha majd lehet és kell, 12-vel kevesbitünk; jelez tehát például 12 kor. adósságot. A  $-12 + 8$  jel szerint már csak 4 marad levonandó, tehát  $-12 + 8 = 4$ . Használati szabályai közül csak azt említjük meg, hogyha a levonandó maga is negatív szám, akkor levonása abban áll, hogy pozitívvá lesz. Például  $-8$  előfordulhat  $-(10 - 2)$  alakban, vagyis úgy, hogy előbb  $+10$ -et, azután  $-2$ -t kell levonni. Ha pl. az első tag egyelőre ismeretlen,  $x$ , s csak később derül ki, hogy éppen  $10$ :  $-(x - 2)$ .  $A + 10$  levonva  $-10$ , a  $-2$  levonva  $+2$  lesz, mert a levonandó nyolcat úgy foghatom fel, hogy előbb veszek levonandó  $10$ -et ( $-10$ ), most azonban sokat vontam le s így a kettőt hozzáadandóul, azaz  $+$  jellel kell már vennem; tehát  $-(10 - 2) = -10 + 2 = -8$ . Innen van az a szabály, hogy negatív szám szorozva negatív számmal pozitívot ad. Természetesen törtszám is lehet levonandó s így vannak negatív törtszámok is. A negatív számokat az egyenesen a kezdőponttól balra képzeljük.

**Végtelen tizedestört.**

Nézzük meg még, hol bujkál itt a végtelen s micsoda új feladatokra hívja ki a dacos ész. A törtszámokat kétféleképp is



jelöljük:  $\frac{m}{n}$  alakban, ezt közönséges törtnek hívjuk, és tizedestört alakban. E két jelzésmód megfeleltetésénél lép fel legelőször a végtelen. Egyelőre nagyon szerény formában, csakis a jelek felírásában. Ugyanis a  $\frac{8}{5}$  alakból úgy megyünk át tizedestört alakba, hogy a 8-at osztjuk szabály szerint 5-tel:  $\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}=1\frac{6}{10}$ . Ha ugyanezt meg tesszük például  $\frac{1}{5}$ -del, akkor egészül 0-t kapunk, tizedesül pedig folyton egyet:  $\frac{1}{5}=0\cdot IIII \dots$ , ugyanígy  $\frac{1}{3}=0\cdot 3333 \dots$ , stb. Némelyik közönséges törtnek tizedestört alakja végtelen sok számjegyből áll, végtelen hosszú tizedestörtet alkot. Megjegyzendő, hogy minden végtelensége dacára az ilyen tizedestörtet fenéig ismerjük, hajszálnyi határozatlanság vagy titokzatosság sincs benne.

*Tetszésszerinti megközelítés.*

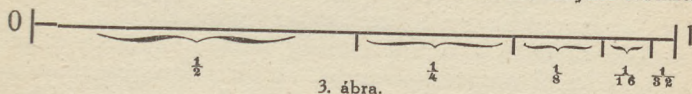
A végtelen tizedestört tovább vezet a tetszésszerinti megközelítés fogalmához. Bárhol szakítom is meg a  $0\cdot IIII \dots$  számjelben az egyesek írását, az így nyert véges tizedestört nem lesz éppen  $\frac{1}{5}$ , azonban nem is fog attól nagyon különbözni, mert az 1:9 osztás keresztülvitelekor például a hatodik 1-es felírása után a maradék, ami ezután kerülne ujjabb kilencedelésre, csak  $\frac{1}{1000000}$ . Ha tehát olyasmi felosztásáról van szó (1 koronáról), aminek a milliomodrészét már úgy sem tudom megvalósítani, akkor mondhatom, hogy megközelítőleg (itt 6 tizedes pontossáig)  $\frac{1}{5}=0\cdot IIIIII$ . Ami ebben a matematikusnak érdekes, az az, hogy ez a megközelítés teljesen tetszésszerinti pontossáig vihető, és mindegyik esetben már előre egész pontosan tudom, mekkora hibát követek el. Magát ezt a folyton fokozódó megközelítést megint keresztül-kasúl tökéletes szigorúsággal ismerem, bár ez is végtelenbe menő felsorolást igényel, mint az egész számok sora.



Mivel pedig a végtelen tizedestörtet magát egészen úgy sem tudom felírni, legegyszerűbben úgy fejezhetem ki az  $\frac{1}{2} = 0\cdot1111 \dots$  egyenlet tartalmát, ha azt mondom, hogy az  $\frac{1}{2}$ -et vég nélkül megközelíti a  $0\cdot1$ ,  $0\cdot11$ ,  $0\cdot111$ ,  $0\cdot1111$ , .... (1) véges tizedestörtekből álló számhalmaz. Az osztás, amellyel a  $0\cdot1111 \dots$  alakhoz jutunk, közvetlenül szintén csak ezt a megközelítést adja.

A tetszőszerinti megközelítés téri képe.

Szögezzük le jól a most tapasztaltakat. Folyton nagyobb és nagyobb véges tizedestörtek végnélküli sorozata határozott szám (a példánkban  $\frac{1}{2}$ ) felé tart s a sorozat tagjainak nagyobbodás módja pontosan meghatározza ezt a számot és csakis ezt. Rögzítsük meg a tetszőszerinti megközelítés tisztán mennyiségi fogalmát téri képben. Vegyünk elő 1 cm hosszú egyenest és felezzük meg. Az így keletkező két félcenti darabból tartjuk meg a baloldalt, a jobboldalt pedig felezzük meg újra s a negyedcenti hosszú balfelét adjuk hozzá



3. ábra.

az előbb megtartott félcentis darabhoz. A hátramaradó negyedcentivel (amelyik  $\frac{3}{4}$ -től 1-ig terjed) járjunk el ugyanígy és így tovább. Megkapjuk így a

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}, \dots$$

számsorozatot, mit nagyon könnyen átírhatunk véges tizedestört alakba, mert a nevezők mind 2 hatványai:  $0\cdot5$ ,  $0\cdot75$ ,  $0\cdot875$ ,  $0\cdot9375$ , ....

A téri szemléletből világos, hogy ezek a számok folyton nagyobbodva éppen az 1-et közelítik meg. Az (1) sorozat is éppen így szemléltethető, csak ott nem felezni kell az 1 cm hosszát, hanem tízfelé osztani s csak egy részt tartani meg, így kapjuk  $0\cdot1$  tagot;



majd az  $\frac{1}{10}$  hosszú darabkát osztjuk ismét tíz részre s tartunk meg belőle egyet és így tovább.

*A végnélküli oszt-hatóság gondolata.*

*A végtelen tehát itt mint határtalan oszthatóság jelentkezik.* A jelenségeknek az a sokat emlegetett tulajdonsága, hogy egységességükben is sokszorosak nem függ a téri kiterjedés nagyságától, sem semmiféle más nagyságtól. Komolyan véve, atom vagy elektrón, mi — ha nem is térben —, de hatásaiban, tulajdonságaiban ne lenne bonyolult, tisztára képtelenség. Hiszen erő-kifejtésére (például súlyára), színére stb., mindenére mások is befolyhatnak s így részenként is változhatnak. Különben a csupasz *egy* elgondolása egy irányba esik a mozdulatlanság, hatástalanság, a nem levő, a semmi elgondolásával. Látjuk, hogy a matematika mennyire a valóságba igyekszik belelátni. Az „*egy és mégis több*” a világ általános megjelenésformája s így bármire is alkalmazandó. A mindenütt érvényesülő többség, az akármeddig vitt szétosztás gondolata a valóságból sarjadt s a mennyiség tudományában kikerülhetetlenül megvizsgálandó. A törtszám jelentősége a matematika fejlődésére éppen az, hogy a vég nélkül folytatható felosztás valóságsugallta gondolatát teljes tisztaságában tárja elénk. Ezt a mélységes gondolatot végig kell gondolnunk, ki kell bontanunk, hogy eszünk besurranhasson legtitkosabb redőibe is. *Ez a nagy elgondolás a matematika.*

### Végtelen számhalmazok. Határérték.

*Képezési törvény.*

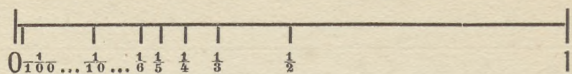
Feladatunk most már világosan áll előttünk. A következőkben a megoldó gondolat sor — ez a matematika — tagozódásának főbb vonalain síklunk végig. Elsőbben is ahhoz kell hozzászóknunk, hogy végtelen sok számból álló halmazt is kimerítő pontossággal meg tudunk adni. Így



például az (1) sorozatot vagy pedig az  $\frac{1}{n}$  ( $n$  egész szám) alakú valódi törtek halmazát. Az épp most jelzett  $\frac{1}{n}$  forma, vagy mondjuk inkább *képezési törvény* tényleg eldönthetővé teszi, hogy bármelyik adott törtszám benne van-e a halmazban vagy sem, másrészt annyi tagot és azt a tagot képezhetjük vele, amennyit s amelyiket csak akarjuk. A képezési törvényt gépnek tekinthetjük, a halmaz tagjai ekkor ennek termékei lesznek. *Azzal tartom össze a végtelen sok számot, hogy tudom hogyan kell képeznem bármelyiket, mindegyiket.* Ilyen képezési törvény például:  $\frac{n-1}{n}$  ( $n$  sorban  $= 1, = 2, = 3, \dots$  stb.); ennek első tagjai:  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$ . Vagy pedig:  $\frac{3n+1}{n}$  ( $n=1, 2, 3, \dots \infty$ ); ennek kezdő tagjai:  $4, \frac{7}{2}, \frac{10}{3}, \frac{13}{4}, \dots$ . Könnyebben áttekinthető ez a halmaz, ha képezési törvényét  $3 + \frac{1}{n}$  alakba irom. Nem érdektelen még az  $\frac{n \pm 1}{n}$  halmaz sem, hol a  $\pm$  azt jelenti, hogy mikor  $n$  helyébe valamelyik egész számot irom, mindig két tagot kapok  $\frac{n+1}{n}$  és  $\frac{n-1}{n}$  tagokat. Tekinthető  $\frac{n+1}{n}$  és  $\frac{n-1}{n}$  halmazok egyesítésének is.

**Elkülöníthető tag.** Vegyük most szorosabb vizsgálat alá az egyetlen, 0, tagból álló és a már említett  $\frac{1}{n}$  halmazok egyesítéséből keletkező  $\left(0, \frac{1}{n}\right)$  halmazt. Nehány tagját 4. ábránk téri képben is mutatja. Azt állítjuk, hogy a halmaz nem minden számának egy-

forma a szerepe. Vegyük elő ugyanis például az  $\frac{1}{4}$ -et. Láttuk ugyan, hogy a  $\frac{1}{4}$ -hez, mint minden törtszámhoz, akármilyen közel is van még törtszám, de *nem*



4. ábra.

a most vizsgált halmazból. Mert a  $\frac{1}{4}$ -től jobbra-balra menve, például:  $\frac{1}{10}$ -del ( $\frac{1}{4} - \frac{1}{10}$ -től  $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ -ig), oly számközt jelölünk ki, melyben a  $\frac{1}{2}$  egyedül van, pontosabban: melyben a vizsgált halmaznak már nincs másik száma. Az ilyen tagra azt mondjuk, hogy ez a halmaznak különálló, jobban mondva a többitől számközzel *elkülöníthető* tagja. Láthatólag ilyen a vizsgált halmaz minden  $\frac{1}{n}$  alakú tagja, azaz valamennyi az 0-t

kivéve. Ugyanis  $\frac{1}{n}$  okvetlen  $\frac{1}{n+1}$  és  $\frac{1}{n-1}$  között fekszik akármilyen  $n$ , mert a halmaz tagjai fogyva következnek egymásra. Ha tehát  $n$  nagyon nagy (például 1000000), azaz  $\frac{1}{n}$  nagyon kicsiny ( $\frac{1}{1000000}$ ) akkor a számköz is nagyon kicsiny, melyben az  $\frac{1}{n}$  ( $\frac{1}{1000000}$ ) már magában van. Fontos azonban csak az, hogy elkülöníthető a többi tagtól, *van* olyan számköz, melyben a halmaznak másik száma már nincsen.

*El nem különíthető tag.*

Próbáljuk meg ugyanezt a 0-sal. Ha a 0-től jobbra balra például

$\frac{1}{1000000}$ -dal megyünk, ( $\frac{1}{1000000}$ -tól a 0-on át  $\frac{1}{1000000}$ -ig tart így a számköz) rögtön tudunk még



mondani olyan tagot, amelyik belől esik ezen a számközön, például  $\frac{1}{1000001}$  s általában valamennyi  $\frac{1}{n}$  alakú tört, hol az  $n$  nagyobb, mint 1000000. Ha megmondják a számközt, amivel el akarják különíteni a 0-t a többi,  $\frac{1}{n}$  alakú tagtól, magából a számköz széléből rögtön tudom, mily tagok esnek még okvetlenül a számköz belsejébe. Hiába igyekszem tehát a 0-t különválasztani bármilyen kicsiny számközzel, előre tudom, hogy ez a kísérlet csakis eredménytelen lehet. A 0 tehát halmazunknak valami különös tagja. Fontossága is világos, mert körülötte — pontosabban: bármily piciny számközben, amelyik a 0-t magába zárja — végtelen sok tagja van a halmaznak. Az ilyen tagot a többitől *el nem különíthető* tagnak, a halmaz sűrűsödési helyének hívjuk. A  $(0, \frac{1}{n})$  halmaznak tehát valamennyi tagja elkülöníthető, kivéve az egyetlen 0-t, amelyik el nem különíthető tag. Világos, hogy az  $\frac{1}{n}$  halmazra nézve, bár formailag bele nem tartozik, a 0-nak épp oly fontossága, épp az a szerepe van, mint a  $(0, \frac{1}{n})$  halmazban. Ezért egyszerűség kedvéért azt is mondjuk, hogy a 0 az  $\frac{1}{n}$  halmaznak el nem különíthető tagja. Könnyen beláthatjuk, hogy az  $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$  képezési törvénnyel megadott halmaznak is minden tagja elkülöníthető, mert a tagok folyton nagyobbodnak s így akármelyik az előtte levő és utána jövő között egyedül van. Sűrűsödési helye pedig az 1, mit

ha csatolunk a halmazunkhoz, az új  $\left(1, \frac{n-1}{n}\right)$  halmaznak lesz szintén egyetlen el nem különíthető tagja, t. i. az 1. Az  $\left(1, \frac{n \pm 1}{n}\right)$  halmaznak szintén az 1 az egyetlen el nem különíthető tagja. A  $\frac{3n+1}{n}$ -nél ez a 3. Általában  $c \pm \frac{1}{n}$  halmaznál a  $c$  ( $c$ -nek különben bármelyik egész vagy tört szám is választható).

*Hány el nem különíthető tag tartozhat egy halmazhoz?*

Vannak azonban oly halmazok is, melyekben nem egy, hanem több el nem különíthető tag is van. Például a  $\left(0, \frac{1}{n}, 1, \frac{n-1}{n}\right)$  egyesített halmazban kettő van: a 0 és az 1. Ugyanigy lehet olyformán összerakni a képezési törvényeket, hogy az ujonnan előálló halmazban bármekkora (de véges) számú el nem különíthető tag legyen. Ezek kissé mesterkélt példáknak látszanak s így adunk még egyet, amelyiknek ezt igazán nem lehet felróni. Nézzük a valódi törtek halmazát, valamennyit. *Ennek minden tagja ilyen el nem különíthető tag.* Bármelyiket válasszuk ki ugyanis, nem lehet számközzel kirekeszteni, mert mint láttuk (7. lap) akár milyen közel hozzá még mindig van másik törtszám.

Ha tehát például azt állítják, hogy  $\frac{1}{2}$  az  $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ -től  $\frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ -ig terjedő számközből egyedül van, rögtön cáfolhatok, amennyiben az  $\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$  is törtszám és belől esik. (Oda esik, ha  $m > n$ , minden  $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{m}$  alaku törtszám,



azaz végtelen sok.) Az  $\frac{1}{n}$ -et nem lehet tehát elkülöníteni s ugyanezen okból egyiket sem. Az  $\frac{1}{n}$  nem különíthető tagok száma változhat tehát a 0-tól a végtelenig. Véges számú tagból álló halmazban például nem lehet egy ily rendkívüli, el nem különíthető tag sem, mert az egyes tagok között kijelölhető legkisebb különbségük (távolságuk) s ezt véve számközü alkotónak jobbra-balra, bármelyik tagnál elértem, hogy a kijelölt számközü belsejében egyedül legyen.

*Határérték.  
Limes.*

A véges számból álló halmazokban nincs tehát el nem különíthető tag. Ezekhez szerkezetileg legközelebb állanak az olyan végtelen sok számból álló halmazok (röviden: végtelen számhalmazok), melyekben *csak egy* el nem különíthető tag van (a tag szót általánosabb értelemben véve, mely szerint a sűrűsödési helyeket okvetlen tagoknak minősítjük). Az ily halmazok szerepe, hol a végtelen legegyszerűbb formájában jelenik meg, döntő jelentőségű abban a hatalmas fejlődésben, mit a matematikai probléma-szövedék szálainak kifejtése elibénk tár.

Ezért van az ily halmazoknak és el nem különíthető tagjuknak külön, kényelmesen kezelhető szó- és írásjelek. Magát a halmazt szabályos sorozatnak, sűrűsödési helyét pedig a szabályos sorozat *határértéké*-nek, *limesé*-nek mondjuk. Nemzetközi írásjelekkel, például

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

hol  $\frac{1}{n}$  mint képezési törvény arra gondoltat, hogy itt végtelen számhalmazról van szó, melynek tagjai mind azok a törtek, melyeknek számlálója 1, nevezője pedig valamelyik egész szám. Az  $n = \infty$  jelzés azt hangsúlyozza, hogy  $n$  helyébe be kell tenni valamennyi egész számot a végtelenig, hogy a halmazt egészen megkapjam. Ez a jelzés azért kell, mert sokszor



több betű is van a képletben például  $x$  is, és ekkor meg kell mondanunk melyik betű helyére teendők be a számértékek, nehogy a felírás kétértelmű legyen. Végre a  $\lim$  azt jelenti, hogy nem a halmazra akarunk gondolni, hanem annak egyetlen sűrűsödési helyére. A (2) baloldalát tevő összetett kifejezés végeredményben *egyetlen* számot jelöl tehát, a 0-t, csak hogy ezt a számot végtelen halmaz határozza meg. Így volt az (1)-ben is, hol a sorozat  $\frac{1}{n}$ -et adta meg.

Ugyanígy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( c \pm \frac{1}{n} \right) = c, \text{ stb.}$$

*A határérték  
létkérdése.*

Ha valamelyik számhalmazomról az derül ki, hogy nem egy, hanem több el nem különíthető tagja is van, arról a halmazról azt fogjuk mondani, hogy nincs határértéke, tudniillik nincs *egyetlen egy* el nem különíthető tagja, mert több van. Azért mondjuk így, mert az ily halmazokat éppen bonyolultságuknál fogva nem tudjuk semmire se használni s a „nincs határértéke” kitétellel mintegy kiselejtezzük a használható egyszerű halmazok közül. Azt is lehet mondani, hogy a halmaz nem szabályos sorozat.

A legelemibb s egyszersmind a legmélyebbre nyúló kérdés most az, hogy van-e okvetlen minden végtelen számhalmaznak legalább egy el nem különíthető tagja. Azt láttuk, hogy lehet több, sőt végtelen sok is. De hogy feltétlenül lennie kell legalább egynek, az nem bizonyos. Sőt meg is esik, hogy egy sincs, mint azt az egész számok halmaza tüstént megmutatja. Végtelen sok tagja van s mindegyik különálló. Szemébe nézünk ennek a kérdésnek s mélyén megpillantjuk majd — az irracionális számokat, a középiskolai matematizálás kísértetét.



## II. Fejezet.

### Irracionális szám és a végtelen problémái.

#### Irracionális szám.

*A racionális számok  
helyeinek sűrűsége az  
egyesen.*

Láttuk fentebb (15. oldal), hogy ha az egész és tört — egybevéve racionális — számokat felrajzoljuk az egyenes vonalra, oly pontthalmazt nyerünk kép gyanánt, melynek minden tagja sűrűsödési hely. A racionális számok minden számközt végtelen sűrűn lepnek be. Ebből könnyen azt gondolhatnók, hogy ha valamelyik végtelen sok számból álló halmaz, mint például az  $\frac{1}{n}$ , a maga egészében véges hosszúságú számközbe esik bele (0—1 közbe a jelzett példában), akkor okvetlen lesz legalább egy tagja a halmaznak, amelyik mellett végtelen sok tag van, vagy ha ilyen tag nincs is, mint szorosan véve az  $\frac{1}{n}$ -ben sincs, mert a 0 nem ilyen alakú szám, akkor is van legalább egy, ha nem is belőle való, *racionális* szám, amelyik sűrűsödési helye a halmaznak. Felezem ugyanis (vagy például 10 részre osztom) a véges hosszúságú számközt, amelyikből az egész halmaz való s úgy okoskodom, hogy valamelyik felébe (tizedrészébe) végtelen sok tag esik, mert ha mind a kettőbe (mind a tizbe) csak véges számú tagja esnék a halmaznak, akkor nem lenne neki végtelen sok tagja. Azt a felét a számköznek hová végtelen sok tag esik (ha mind a kettőbe, illetve mind a tizbe, akkor akár melyiket) újból felezem (tizedelem) és így tovább.

Ezzel az eljárással folyton kisebbedő s egymás bel-sejébe eső számközöket kapok, mik végül feltétlenül egyetlen ponttá zsugorodnak, mivel az  $n$ -edik lépéssel

nyert számköz az eredetinek  $\frac{1}{2^n}$  (illetve  $\frac{1}{10^n}$ ) része.

Miután pedig — itt lesz hiba gondolatmenetünkben — az eredeti számközt végtelen sűrűn lepik el a racionális számok, azaz *mindenütt van egy*, úgy látszik a most nyert pont is egyik racionális szám helye. Ilyen módon be lenne bizonyítva egy nagyon fontos alaptétel, amely szerint véges számközbe eső végtelen halmaznak okvetlenül van legalább egy, még pedig egész vagy tört, sűrűsödési helye. A hiba ebben az okoskodásban felette jellemző a mennyiségtani gondolatmenetekre s különösen viszonyukra a téri szemlélethez. Csupán abból, hogy az egész és törtszámok *képei az egyenesen* ilyen vagy olyan sűrűn fekszenek, véglegesen semmi mennyiségtani eredmény meg nem állapítható. Eszünkbe juttathat ez vagy az a geometriai tényállás mennyiségtani gondolatokat, *de azokat tisztára a mennyiségrendszer saját szerkezetéből kell végérvényesen meglátni*. Mig ez meg nem történt, csak több kevesebb mély-ségű hasonlaltal van dolgunk.

*Az irracionális szám  
nélkülözhetetlen volta.*

Tanulságos az előző példa, mert tényleg tudunk megadni olyan tört-számhalmazt, amelyik nyilvánvalóan megcáfolja a látszólag — azaz geometriailag — be-bizonyított eredményt. Véges számközbe esik és még sincs olyan egész vagy törtszám, amelyik sűrűsödési helye lenne. Ilyen a véges tizedestörteknek minden sorozata, amelyik csak nem szakaszos végtelen tizedes-törtet állít elő. Irjuk fel például a 0 egész után tizedes-jegyekül sorban az összes egész számokat. Így kapjuk az

$A = 0.123 \dots 89101112 \dots 2021 \dots 99100101102 \dots$



végtelen tizedestörtre emlékeztető alakot. Ebben nincs szakasz. Ez tehát nem lehet törtszám s így egyelőre nem is szám. Az

(a)  $0\cdot1, 0\cdot12, 0\cdot123, \dots, 0\cdot123 \dots 8, 0\cdot123 \dots 89,$   
 $\dots, 0\cdot123 \dots 89 \dots 20 \dots 9 \ 9, \dots$  stb.

véges tizedestörtekből, tehát törtszámokból álló sorozat; tagjai még hozzá folyton nagyobbodnak, másrészt mindannyian  $0\cdot1$  és  $0\cdot2$  számok közé, tehát véges számközbe esnek. És még sincs racionális sűrűsödési helye, mivel ettől a sorban távol levő tagok mind kevésbé tartoznak különbözni, s így a sűrűsödési hely tizedesjegyeinek sorba össze kellene esni az (a)-ban egymásután fellépő tizedesjegyekkel, azaz végtelen tizedestörtnek kellene lennie szakasz nélkül; ilyen egész vagy törtszám azonban nincs s így egyelőre semilyen sincs. Az (a) halmaznak, bármennyire hasonlít is szabályos sorozatokhoz, egyáltalán nincs sűrűsödési helye.\*

Geometriai ábrázolás.

Mit jelent ez téri szemléletben? Képzeliük el, hogy egy 10–12 centiméter hosszú vonalat nagyon pontosan meg akarunk

\* Részletesen bizonyítva: tegyük fel, hogy a  $B$  sűrűsödési hely egyik — mondjuk  $i$ -edik — tizedesjegye nagyobb, mint az ugyanannyiadik  $A$ -ban (kisebb nem lehet, mert ekkor két tag közé esne vagy éppen egyik tag lenne s így külön állana). Az  $A$ -ban nem minden tizedesjegy 9-es az  $i$ -edik után sem, mert hiszen nem szakaszos tizedestörtet vizsgálunk. Legyen az  $i$ -edik után a legelső nem 9-es jegy a  $k$ -adik. Képezzük most  $B$ -ből a nála kisebb  $B_1$  számot akképen, hogy az  $i$ -edik tizedest kisebbítsük meg eggyel s írjunk az  $i$ -edikről a  $k$ -adikig mindenüvé 9-et. Mindegyik (a)-ból való szám kisebb, mint  $B_1$ , mert  $k$ -adik tizedesük kisebb  $B$   $k$ -adik tizedesénél, az ez előtti tizedesjegyeik pedig megegyeznek a  $B_1$  megfelelő jegyével (legfeljebb az  $i$ -edikben különbözhetnek  $B_1$ -től, de ott is az utóbbi javára).  $B_1$  és  $B$  közé egy sem esik, tehát ( $B$ -n túlra meg éppenséggel nem) a  $B$  így tényleg el van tőlük különítve. A sűrűsödési hely tizedestört alakjának össze kellene esni az  $A$  alakkal. Egész vagy törtszám azonban ilyen alakú — tudniillik végtelen és szakasz nélküli tizedestört — nem lehet.



mérni s méterekben fejezzük ki magunkat. Először azt találjuk, hogy megvan tíz centiméter (0'1 méter); a hátramaradó rész is kiad még két centimétert, tehát a pálca kissé nagyobb, mint 0'12 méter. Így folytatva kapjuk, hogy még 3 millimétert kiad, azután 4 tizedmillimétert, 5 századmillimétert, stb. Minthogy egész pontosan úgy sem mérhetjük meg, nincs semmi jogunk feltenni, hogy a végigvitt mérés ne adhatná meg az

(a) sorozatot, hiszen akkor például  $\frac{1}{3} = 0.33333 \dots$

hosszaság se lehetne. Bármily sűrűn beborították is az egész és törtszámok az egyenest, még mindig vannak tehát pontok rajta, amelyek nem kaptak számnevet. A geometriát sem elégíti ki az egész és törtszám. Az akárhogyan végezhető felosztás gondolatát nem lehet velük végiggondolni. Ehhez még nélkülözhetetlenül kellenek a nem szakaszos tizedestörtek is. Kötelessége tehát a mennyiség tudományának, hogy ezeket a jeleket — vagy ezekkel egyhatalmúakat — polgárjogosítsa, azaz a velük való bánásmódot, a négy alapműveletet, rájuk meghatározza s hogy ily módon minden határozatlanságtól menten s most már velejéig megismerhetően szimbolizálja a világ egység-többség megjelenés módját, mint a végtelen oszthatóság rejtvényének kibontását.

*Az irracionális  
számok összeadása.*

A nem szakaszos végtelen tizedestörtek összeadása, kivonása, szorzása, osztása visszamegy a véges tizedestörtek megfelelő műveleteire. Ugyanis minden végtelen tizedestört-alak felaprózva véges tizedestörtek sorozataként gondolható, mint fentebb a példánkban.

Legyen ilyformán

$$\begin{array}{ll} a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots & (a) \\ \text{és} & b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots & (b) \end{array}$$



két, mondjuk  $A$  és  $B$  végtelen tizedestört sorozatos alakja. Legyenek pl. az  $A$  tizedesjegyei a páros egész számok,  $B$  jegyei a páratlanok. Akkor a két sorozat lesz

0,2, 0,24, 0,246, 0,2468, ... és 0,1, 0,13, 0,135, 0,1357 ...

Az  $A$  és  $B$  összege alatt az

$$a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n, \dots \quad (\ddot{o})$$

számbeli példánkban: 0,3, 0,37, 0,381, 0,3825, szintén folyton nagyobbodó tagokból álló sorozat meghatározta végtelen tizedestörtet értjük. Arra kell itt jól rágondolnunk, hogy ha ily sorozat tagjai folyton nagyobbodnak, akkor okvetlenül meghatároznak egy és csak egy végtelen tizedestörtet, mert pl. ha az első tizedes legnagyobb értékét (ami legfeljebb 9 lehet) egyszer felvette, azontúl már minden utána jövő tagban ugyanaz marad. Pl. az összegben az első tagnál az első tizedes 3 s az is marad. Induljunk most meg ki abból a tagból, ahonnan kezdve ez már így van s okoskodjunk a második tizedesre ugyanígy. Innen kezdve ez a második tizedes csak nőhet (egyforma is maradhat). Valahol tehát elkezdi felvenni legnagyobb értékét s azontúl ő se változik. Számpéldánk második tizedese az első tagban 0, a másodikban 7, a harmadikban 8-nál felvette legnagyobb értékét s ezentúl minden tagban megtartja. Így folytatva látjuk, hogy *véges tizedestörtek növvő sorozata* (hacsak egész részük nem nő végtelenbe) *mindig meghatároz egyetlen egy végtelen tizedestörtet*. Ugyanígy okoskodhatunk természetesen, ha a tagok folyton kisebbbednek, feltéve, hogy egész részük nem fogy le mínusz végtelenre.

Az irracionális  
számok szorzása.

Mivel

$$a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3, \dots, a_n \times b_n, \dots \quad (sz)$$

sorozat tagjai szintén folyton nagyobbodnak, mert hiszen  $a_2$  nagyobb, mint  $a_1$ , meg  $b_2$  is

nagyobb, mint  $b_1$ , az  $A \times B$  művelet eredményeül az (sz) sorozat által meghatározott végtelen tizedestörtet tekintjük. Ez a szorzás-szabály.

Az irracionális  
számok kivonása.

Nem egészen ilyen egyszerű a kivonás és osztás műveleteinek megállapítása, mert az előbbi eljárás nem vezet mindig növekvő sorozatra s így egyelőre nem tudjuk, mit tekintsünk a művelet eredményének. Nézzük a kivonást. *A különbség-sorozat:*

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \dots, a_n - b_n, \dots \quad (k)$$

tagjai mind egyforma előjelűek: vagy mind pozitívok, vagy mind negatívok. Az elején azonban lehetnek 0 tagok. Az első nemzérus tag eldönti az előjelet. Ha pl.  $a_1 > b_1$ , akkor  $a_1$  nagyobb mindegyik  $b$ -nél, mert az a tizedes, amelyik miatt  $b_1$  kisebb  $a_1$ -nél, t. i. az első tizedes amiben különböznek, ugyancsak meglesz a többi  $b$ -ben is, a bennök ez után fellépő tizedesek pedig akárhányan vannak is, sohasem tesznek ki egészen egy előttük álló tizedesértéket. Ekkor azonban a többi  $a$  is mind nagyobb valamennyi  $b$ -nél, tehát a saját kivonandójánál is. Ha ellenben  $b_1$  nagyobb, mint  $a_1$ , akkor meg a  $b$ -k nagyobbak valamennyi  $a$ -nál. Végül ha  $a_1 = b_1$ , akkor elővesszük az  $a_2 - b_2$  tagot s erre gondoljuk végig az okoskodásunkat. Csak akkor eshetik meg, hogy mindegyik különbség nulla, ha az  $a$ -k és  $b$ -k sorozata éppen egyforma. Ekkor természetesen mind a ketten ugyanazt a végtelen tizedestörtet ábrázolják. A másik két eset adja az  $A > B$  és  $A < B$  viszonylatokat.

A  $(k)$  sorozat tagjai azonban nem okvetlenül nagyobbodnak állandóan, pl. ha  $A$  és  $B$  így kezdődnek:

$$\begin{array}{l} \text{illetve} \quad 7, 7\cdot7, 7\cdot79, \dots \\ \quad \quad 3, 3\cdot9, 3\cdot90, \dots \end{array}$$



Ekkor ugyanis a  $(k)$  különbség-sorozat első tagjai: 4, 3·8, 3·89, ... Azonban az új tizedesjegy hatása nem terjedhet túl az első nem-nulla tizedesjegyen. Emiatt elég messze menve a  $(k)$  sorozatban az egész jegy, első, második, stb. tizedesjegyek sorban állandókká válnak s a nagyobbodás-kisebbedés eltolódik mindig messzebb kieső tizedeshelyekre. A  $(k)$  sorozat szintén meghatároz tehát egyetlenegy végtelen tizedestörtet.

Ugyanigy áll a dolog az osztással; ennek pontos elgondolását helyszüke miatt az olvasóra bizzuk.

*Az irracionális számok és a valóság.*

A nem-szakaszos végtelen tizedestörtek a most megállapított négy kezelési szabállyal ellátva az irracionális számok. Látjuk, mily természetesen folytatják és egészítik ki az egész és törtszámok osztályát. Sok közönséges törtszámnak is végtelen tizedestört az alakja, régi és új számaink között fogalmi szempontból alig van tehát komoly különbség. A racionális és irracionális számok együtt alkotják a valós számok halmazát. Az egyenes minden pontjának van számneve, valamelyik valós szám s minden valós számnak van helye az egyenesen.

Új számaink fontossága legelsőbbben is abból érezhető meg, hogy minden felosztás, minden mérés (mint fentebb láttuk) folyton nagyobbodó véges tizedestörtek végtelen sorozatául fogható fel s másrészt minden ilyen sorozat megállapít egyetlenegy egész, tört vagy irracionális számot. Minden felosztásnak van tehát ezentúl jele, még pedig nem úgy, hogy minden egyes felosztáshoz tartoznék egy-egy önkényesen odabiggyesztett jelkép, hanem az összes lehetséges felosztások tényleges rendszere van szimbolizálva olyan jelrendszerrel, amelyik a valóság vizsgálat alá vett formáját kimerítően és semmit hozzá nem toldva, egyedül szerkezeti sajátosságaival, nem pedig pusztá jeleivel szemlélteti.



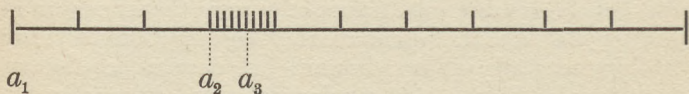
Megjegyzésre méltó, hogy az irracionális szám fogalmát teljesen a limes használata nélkül építettük fel. Egyedül arra támaszkodtunk, hogy mikor az  $(\ddot{o})$ ,  $(sz)$  és  $(k)$  sorozatokon végighaladunk mégpedig úgy, hogy minden tagban kizárólag valahányadik (például a 2-ik) tizedesjegyet vesszük szemügyre, bizonyos tagtól kezdve ez a tizedesjegy minden ezután jövő tagban ugyanaz lesz. Ilyenformán minden tizedeshelyre meghatározódik egy-egy tizedesjegy, mik együtt egyetlen végtelen tizedestörtöt alkotnak.

### A mennyiségtan két alaptétele.

Az irracionális számok döntő szerepe legszembeötlőbben a következő két tételben jut kifejezésre.

**Első alaptétel.**

*I. Véges számközbe eső végtelen számhalmazhoz okveilen tartozik legalább egy tőle számközzel el nem különíthető szám.* Ez lehet egész, tört vagy irracionális, lehet a halmaz tagja, de eshetik rajta kívül is, lényeges csak az, hogy egyáltalán ki lehet jelölni oly számot, amelyik környezetében a halmaznak végtelen sok tagja van. (Most már irracionális számok is lehetnek a halmaz tagjai.) Ez az egész felsőbb mennyiségtan egyik alaptétele. Igazságát könnyen beláthatjuk, ha ismétljük a fentebb (25. lap) boncolt hibás okoskodást, kikerülve természetesen a hibát.



5. ábra.

Feltételünk szerint az egész halmaz véges számközbe esik. Erről a számközzől mindig feltehetjük tehát, hogy hosszúságát és határait véges tizedestörtek jelzik.



(Ha az eredeti nem ilyen, választok ennél kissé nagyobb-  
bat, ami már ilyen legyen.) Tíz részre osztom a szám-  
közt. Legalább az egyik tizedrészben végtelen sok  
tagja van a vizsgált halmaznak. Az egész számköz  
kisebbik (balsó) határát vegyük egy alkotandó sorozat  
első,  $a_1$ , tagjának, a végtelen sok tagot magában foglaló  
tizedszámköz kisebbik (balsó) határát pedig vegyük  
a sorozat második,  $a_2$ , tagjának. Folytassuk most ezt  
az eljárást a kiszemelt tizedszámközön, tudniillik  
összük tíz részre s vegyük sorozatunk harmadik,  $a_3$ ,  
tagjának a most kapott tíz kis számköz közül annak  
a balsó határát, amelyikben megint végtelen sok tag  
van. És így tovább. Ezzel az eljárással folyton na-  
gyobbodó, esetleg nem változó véges tizedestörtek  
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  sorozatát kapjuk. Azt állítjuk, hogy  
az a szám, mondjuk  $A$ , amit ez a sorozat megállapít,  
a halmaz sűrűsödési helye. Próbáljuk meg ugyanis  
ezt az  $A$ -t a többitől számközzel különválasztani: legyen  
 $\varepsilon$  az a kis távolság, amelyet  $A$ -tól jobbra-balra lemérünk,  
remélve, hogy ebben a  $2\varepsilon$  hosszúságú számközben  
 $A$  már egymaga lesz. Igen ám, de az  $a_1, a_2, a_3, \dots$   
számok mind távolabbi tizedesben, tehát kevesebbel-  
kevesebbel különböznek  $A$ -tól s így van olyan  $a_n$   
(meg valamennyi utánajövő), amelyik  $A$ -tól keve-  
sebbel különbözik, mint  $\varepsilon$ .  $A$  elkülönítése nem sike-  
rülhet tehát s ezzel alaptételünk be is van bizonyítva.  
Hibát itt azért nem követtünk el, mert már előzete-  
sen beláttuk, hogy minden növény sorozat határoz meg  
számot. Az, esetleg irracionális,  $A$  szám létezése min-  
den kétségen kívül áll, mégpedig mennyiségtani okos-  
kodások alapján.

*A téri szemlélet elég-  
telensége a matemati-  
kai okoskodásban.*

Láthatjuk itt, hogy a téri szemlélet  
— ami még közelebb látszik lenni a  
valósághoz, mint a matematika —  
hogyan csusztathat bennünket hibás



gondolatmenetbe. Tényvolta ugyanis annyira leköti figyelmünket, eszünket, hogy nem tudunk egykönnyen *mindazokra* a lehetőségekre is gondolni, amik nem bontakoznak ki önmaguktól vagy már kevés érintésre az előttünk nyüzsgő valóságból. Mindig csak véges tizedestörtekben gondolkozunk. Nem jut mindjárt eszünkbe, hogy a méréssel nyert véges tizedestörtek sorozata épp úgy vezethet nem-szakaszos, mint szakaszos végtelen tizedestörthöz. Ezt átlátva azonban rögtön megérezzük, hogy az új jelek behozatalára feltétlen szükségünk van. Enélkül nem tudjuk végiggondolni azt, aminek elgondolásához fogtunk: a vég nélkül ismétlődő részekből állás és egységgtömörülés gondolatát.

*A határértékszámítás alaptétele.*

Íme a második alaptétel:

*II. Minden véges számközbe eső, folyton nagyobbodó végtelen számsorozatnak van határértéke, azaz van egy és csak egy a sorozattól számközzel el nem különíthető szám.*

Az irracionális számok összeadásánál (28. oldal) használt eljárással tüstént beláthatjuk, hogy akármilyen számok (véges vagy végtelen tizedestörtek) folyton nagyobbodó sorozata, hacsak egész részük nem nő végtelenbe, meghatároz egyetlen —  $A$  — tizedestörtet, azt t. i., amelynek egész része egyenlő a sorozat számaiban előjövő legnagyobb egésszel, első tizedese pedig a legnagyobb egésszel kezdődő tagok legnagyobb első tizedesével és így tovább. Ez a szám nem különíthető el halmazunk számaitól, az egyes tagok ugyanis mindig kisebb-kisebb tizedesben különböznek tőle s így bármily kis környezetében még végtelen sok tag van. Viszont minden  $A$ -tól különböző, mondjuk  $B$ , szám el van különítve halmazunktól. Ha ugyanis  $B$  nagyobb  $A$ -nál, akkor  $A \rightarrow B$  számköz tényleg elkülöníti  $B$ -t, mert halmazunk tagjai



már  $A$ -nál is mind kisebbek. Ha meg  $B$  kisebb  $A$ -nál, akkor szorzatunkban elég messze menve találunk olyan tagot, hogy az utána jövők már mind nagyobbak mint  $B$ , mert az egyes tagok folyton kisebb-kisebb tizedesben különböznek  $A$ -tól s így  $B$ -n is túl kell haladniuk  $A$  közelébe. Ekkor azonban  $B$  a sorozat elején levő véges számú tag között van s ezek között maga van. Tehát tényleg  $A$  az egyetlen szám, ami sorozatunktól nincs elkülönítve.

Ez a tétel teszi lehetségessé a legtöbb határérték tényleges meghatározását. Ezzel pedig nagyon sokat mondtunk, mert a súlyos matematikai feladatok csaknem kivétel nélkül ebben a formában jelentkeznek: adott végtelen számhalmaznak van-e határértéke s ha van, melyik szám az. A kérdés súlyos volta így legszembeötlőbben abban nyilvánul, hogy nincs általános, minden esetre szóló eljárásunk még csak annak a megállapítására sem, hogy van-e valamely elibénk kerülő halmaznak határértéke, nemhogy magát a limes-számot ki tudnánk számítani a halmaz tagjaiból. Pedig sokszor egész feladat-sereg sorsa függ attól, van-e bizonyos halmaznak határértéke vagy nincs.

### A végtelen függő kérdései.

*A matematikai végtelenből fakadó nehézségek.*

Megvan a teljes felszerelésünk arra, hogy követhessük a matematika nagy probléma-hálózatának legfinomabb szárait is. De mielőtt ennek nekilátnánk, rámutatunk szerszámunknak, a számfogalomnak, néhány éppen vizsgálat alatt levő pontjára, ahol a végtelen, amit már markunkban éreztünk, abból ismét kisiklani látszik. A jelzés most már nem lehet elég-telen, hiszen az összes lehető eseteknek van neve. A



végtelességgel való bánás nehézsége most logikai képtelenség formájában üti fel fejét. Előre hangsúlyozzuk, hogy ez nem az előző megfontolások csődje lesz, azok nem is akarták megoldani a végtelen kérdését, egyelőre csak a jelrendszer szerkezeti sajátágaiba bujtatták, hogy ott — már amennyire az emberi ész megteheti — végiggondolható legyen. Minden újabb nehézség újabb oldaláról mutatja be az üldözött ismeretlent s így ha nem is simítjuk el véglegesen a nehézséget, de küzködve vele szétboncoljuk és beléje látunk, igazán tettünk lépést előre, tanultunk valamit a való világ tényleges megjelenés-formájáról. Az meg csak nem búsíthat, hogy fenéig ki nem meritjük soha a tanulni valót, bármennyire megszorítsuk is körét. Elég, hogy az, amit tudunk, valóságos tudás és ezt folyton gyarapíthatjuk, mélyíthetjük.

*A racionális számok megszámozhatók.*

A végtelen eddig csak két alakban jött elénk. Legvilágosabban, mert megszoktuk, az egész számmal volt szemlélhető. Az egész szám képezésmódja olyan, hogy sorának nem lehet vége. Ha megpróbálunk egy utolsó egész számot gondolni, nem térhetünk ki az elől, hogy, mint minden számhoz, úgy ehhez is, meg ne alkothassuk a rákövetkezőt. A továbbszámlálás lehetséges volta nem függ a már megalkotott számok tömegétől, nagyságától; mindentől függetlenül bármelyik számtól kezdve végezhető. Szóról-szóra ugyanez volt az eset, mikor két szám osztásakor a végtelen tizedestörthöz jutottunk. Minden egyes osztás adott egy-egy — mind több tizedesjegyű — számot s a továbbsztás lehetősége nem függhetett a maradék nagyságától. Az így keletkező véges tizedestörteket megszámozva kaptuk. Volt első, második, stb. És, durván szólva, annyi törtszám jött ki, ahány egész szám van, mert mindegyik egész számra mint sorszámmra



egy és csak egy jutott e tört-  
számok közül. S tényleg az összes  
törtek együtt, akár az egész szá-  
mok törtalakját is beleértve, meg-  
számozhatók, adhatok valamennyi-  
nek más meg más sorszámot s  
az így készült sorban valóban  
benne lesznek mind. A mellékelt  
táblával ezt tüstént megtehetem.  
Legyen az első 1, a második és  
harmadik 2, illetve  $\frac{1}{2}$ , a harmadik,  
negyedik és ötödik pedig 3,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ;  
a hatodik, hetedik, nyolcadik,  
kilencedik a 4,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$ ; stb. Így minden racionális szám  
meglesz a sorozatban

1	2	3	4	.....
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{4}$	.....
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{5}{5}$	.....
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	.....
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	

6. ábra.

Van-e többféle végtelen?

Egész másképp állt eléink a vég-  
telen, mikor az irracionális számo-  
kat alkottuk. Akkor ugyanis azt gondoltuk el, hogy  
mind pontosabb és pontosabb mérés (felosztás) folyton  
nagyobbodó véges tizedestörteknek bármely sorozatá-  
hoz vezethet. Ezért kellett valamennyi ilyen sorozathoz  
jelt rendelni s éppen ezek lettek megfelelő utasítással  
az ugynevezett irracionális számok. Ez a „bármely“  
nem azt mondja egyszerűen, hogy valami egyvonalú  
haladásban nincs megállás, nincs vég, hanem azt, hogy  
végtelen sok számból, tudniillik a véges tizedestörtek-  
ből, bármely módon képezzünk végtelen sorozatokat  
azzal a kikötéssel, hogy a tagok nagyobbodjanak.  
Végtelen sok tag kombinációiról van itt szó, ez pedig  
nem egy, hanem végtelen sokirányú haladásnak lát-  
szik, mihielyt hozzáfogunk valamiképp a megvalósítá-  
sához. Mégis sokáig — egész a XIX. század második  
feléig — azt gondolták a matematikusok, hogy lényeges  
különbség nincs, nem lehet, két végtelen között, mind  
a kettő egyszerűen minden véges számot túlhaladó



számosságot jelöl. Már pedig lehet-e komoly különbséget tenni végtelen és végtelen között? Cantor megmutatta, hogy lehet. Bebizonyította, hogy az irracionális számok jelei számosságuk miatt nem számozhatók meg többé olyformán, hogy valamennyinek jusson külön egész szám. Ime az okoskodása.

Megszámozható  
halmazok egyesítése.

Előbb egy kis megjegyzés, hogy egyszerűbbé tegyük a gondolatmenet fontos részét. *Ha két halmaz külön-külön megszámozható, akkor egyesített halmazuk is az.* Cserélgetve veszek ugyanis egyet az elsőből, egyet a másodikból s így rakom sorba. Ekkor tényleg egy-számozásu sort kapok s ebben mind a két halmaz egészen benne van. Ebből kifolyólag nem az irracionális, hanem az összes számokat állítjuk szembe a megszámozó egész számokkal. Mert ha az összes számok, tudniillik a racionálisak és irracionálisak együtt, meg nem számozhatók, a racionálisak pedig (mint láttuk) igen, akkor — mivel az előbbi megjegyzés szerint mind a kettő nem lehet megszámozható anélkül, hogy egyesített halmazuk is az ne lenne — az irracionális rész lesz meg nem számozható. Sőt ha nem is vesszük valamennyi számot, csak a 0 és 1 között levőket, már ezekre ki fog derülni, hogy túlsokan vannak ahhoz, hogy megszámlálhatók lennének.

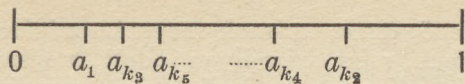
Cantor tétele a valós  
számok számosságáról.

Gondoljuk el, hogy az összes számok 0 és 1 között, ez utóbbiakat is beleértve, meg vannak számozva. Azt mondaná ez, hogy van olyan

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots \quad (a)$$

sorozat, amelyikben minden tekintetbe jövő szám megvan valahol, van mindegyiknek határozott sorszáma. Ki fogunk jelölni a sorozat tagjai közül folyton nagyobbakat s ezek határértékéről látjuk majd be, hogy





7. ábra.

okvetlen hiányzik a sorból. Az első kiszemelt tag  $a_1$ ; az  $a_3$  lehet kisebb nála (a vonalon balra tőle) vagy nagyobb (jobbra). Az utóbbi esetben ő lesz a második tag, az előbbi esetben pedig tovább megyünk a sorban, mindaddig, míg rá nem találunk az elsőre, amelyik már  $a_1$ -nél nagyobb. Ez lesz a második tag. Mondjuk, hogy sorszám (indexe)  $k_2$  volt ( $a_{k_2}$ ). Harmadik tagul azt választjuk, amelyik legelsőnek esik az  $a_1$  és  $a_{k_2}$  közé. Mondjuk, hogy ez a sorban  $k_3$ -ik volt. Negyedik lesz a legelső az  $a_{k_3}$  és  $a_{k_2}$  között és így tovább. Így kapjuk az  $a_1, a_{k_3}, a_{k_5}, a_{k_7}, \dots$  növe sorozatot azzal a tulajdonsággal, hogy mindegyik tagtól jobbra van egy kis számköz ( $a_1 \rightarrow a_{k_3}, a_{k_3} \rightarrow a_{k_4}, a_{k_5} \rightarrow a_{k_6}, \dots$  stb.), amelybe a sorozat elejéről egészen a szemügyre vett tagig nem kerül szám. Mindegyik ilyen számköz (az egyenesen szemlélve) az összes előbbieket belsejében van s így az új sorozat határértéke,  $A$ , valamennyibe beleesik. Vegyük elő az  $(a)$  sorozat akármelyik tagját, mondjuk az  $i$ -ediket és nézzük az új sorozat egyik messze fekvő tagját, amelyiknek sorszám,  $k_i$ , amazénál nagyobb ( $k_i > i$ ). Bizonyos, hogy az egyenesen  $a_i$  nem fekszik  $a_{k_i}$  és  $a_{k_i+1}$  között. Ugyanis az  $a_i$  az  $(a)$  sorozatban  $a_{k_i}$  előtt van s a számközök szerkesztése szerint az  $a_{k_i}$ -hez tartozó  $a_{k_i} \rightarrow a_{k_i+1}$  számközbe nem esik  $k_i$ -nél kisebb sorszámú tag egy sem. A  $a_i$  nem lehet tehát az új sorozat határértéke, mert hiszen az éppen  $a_{k_i}$  és  $a_{k_i+1}$  között van. Az  $(a)$  sorozat egyik tagja se lehet tehát e határérték, mert mindegyikre, épp úgy okoskodhatunk, mint  $a_i$ -re. Az  $A$  tényleg hiányzik tehát  $(a)$  sorozatból. Kísérletünk a 0 és



1 között levő összes számok megszámozására csakis meddő lehet, mert bármilyen adott megszámozást tételezve is fel, a most vázolt eljárás mindig mutat a 0 és 1 között oly számot, mely nem lehetett a megszámozottak között. *A valós és egész számok nem hozhatók „egy-egy” viszonylatba, nem feleltethetők meg egymásnak tökéletesen.* Az irracionális számok végtelensége nem mérhető össze az egész számokéval. *A véges halmazok számosságán kívül van még ezek szerint legalább kétféle végtelen-számosság.* Vajjon van-e még többféle is?

*A végtelen számosság problémája.*

Lehet-e oly számhalmazt kijelölni, amelyik már ne lenne megszámozható és azért közte és az összes számok között mégse lehetne tökéletes „egy-egy” megfelelés? Valamennyi számnak együttesen, téri szemlélet alapján, *continuum* a neve. (Folytonosságot, szakadástalanságot jelent.) Kérdésünket tehát így is fogalmazhatjuk: *az egész számoké után vajjon a continuumé-e az első számosság vagy van-e még más számosság is e kettő között?* Ez a híres *continuum-probléma*. Még ma is megoldásra vár.

*Végesentúli rendszámok:  
Burali-Forti antinómiája.*

Egész más természetű a nehézség a végtelen egész számok kérdésében. Képzeliük el, hogy a már (II. old.) jelzett módon első nekifogásra — a művelet korlátozhatatlanságát véve észbe — rágondolunk valamennyi egész számra. Képezésük határozottsága folytán kész rendet, lezárt halmazt alkotnak, amit most már a maga egészében is szemügyre vehetünk. Vegyük tehát s jelentsük ki, hogy: amint minden közönséges szám után szabad volt, tehát kellett, az éppen rákövetkezőt hozzáfűznünk, épp úgy most is szabad, tehát kötelességünk, a legelső náluk nagyobbbat utánuk tenni. Ez az  $\omega$ , a legelső végtelen egész szám. Ez után jön  $\omega + 1$ ,  $\omega + 2$  . . . . . és így tovább egész



$\omega + \omega$ -ig, amit most röviden  $\omega \cdot 2$ -vel jelzek; még tovább menve megkapom  $\omega \cdot 3$ ,  $\omega \cdot 4$ , . . . . .  $\omega \cdot \omega$ -t, ez az  $\omega^2$  jelet kapja; majd  $\omega^2$ ,  $\omega^3$ ,  $\omega^4$  . . . . adja

$\omega^\omega$ , ez tovább  $\omega^{\omega^\omega}$ ,  $\omega^{\omega^{\dots^\omega}}$  jeleket, stb. Ha ki-

fogytam az  $\omega$ -ból, gondolhatok természetesen más  
jelre is (például egy picit nagyobbra rajzolt  $\omega$ -ra).  
Az így alakult sorozatban nem érdektelen, hogy minden  
tagnak van közvetlen követője, de *nincs mindegyiknek*  
( $\omega$ -nak sincs) *közvetlen megelőzője*. Gondoljuk el, hogy  
az *akármедdig* vitt s így a teljes sorozatot nézzük,  
azaz *valamennyi rákövetkezőt* vegyünk most már szim-  
bolizáltnak. A rákövetkezés szemléletéből ily módon  
fakadó összes lehetséges szimbolizáló aktusok halm-  
zát  $W$ -nek hívjuk. Híre nagyon rossz. Képezése  
eléggő hasonlít ugyan a közönséges egész számok  
halmazba fogásához, de a különbség is nagy ám a  
két eset között. Az egész számok a legelső nekilen-  
dülés eredményei s így folytathatók, a  $W$  azonban  
éppen értelmezése szerint már nem folytatható, mert  
bele akarjuk gondolni az összes lehetséges folytatá-  
sokat. Másrészt azonban — s ez a bökkenő — ha  
van, jobban mondva megvan, kész ez a  $W$ , akkor leg-  
alább gondolatban, ismét lehet, tehát kell, az összes  
jelnél, ami csak benne van, nagyobbbnak minősítendő  
jelet képezni. Eszerint tehát ez az új jel nem lesz  
benne a  $W$ -ben. A  $W$  saját értelmezése szerint pedig  
minden folytatás benne van már, tehát ez az ujnak  
gondolt is. Benne is van, nincs is. Ez a *Burali-Forti*  
*antinómiája*. A  $W$ -t nem lehet elkészültnek, teljesen meg-  
határozott valaminek venni. Nemcsak hogy valamennyi  
tagját nem lehet ténylegesen elkészíteni, hiszen az  
egész számokat se lehet mind. Hanem már akkor  
képtelenséghez jutunk, mikor *legalább fogalmilag* az

összes tagokat elkészültnek akarjuk venni, össze akarjuk fogni határozott halmazba, lezárt összességbe. Így formán ez a halmaz ésszel átgondolhatatlan, kívül esik nemcsak a matematikán, de még a logikán is. Kénytelenek vagyunk még fogalmát is félbenlevőnek, most alakulónak

*A matematikai valóság-leírás korlátozása.*

venni, mintha nem tudna egészen megszületni, határozott formát felvenni, hanem folyton *in statu nascendi* lenne. Mikor a matematika legmélyebbre hatol a világ megjelenés-formájának titkaiba, találkozik az alakulás, valamivéválás határozatlanságával. S a gondolatiság legbelsejében tanyát ütő határozatlanság — a se-nem-ilyen, se-nem-olyan — ésszel, matematikával teljességgel megfoghatatlan. A matematika nem meritheti ki a valóságosat, mert az nem pusztán jelen van, nemcsak ténylegesen valami — *ennek* az általános formáját taglalja a menyiség tudománya —, hanem vajúdó történet, határozatlanság, lehetőségek ütköző valósulása (dinamizmus); éppen ez az utóbbi szüli a ténylegeset, természetes tehát, hogy e ténylegesnek elgondolása önmagában be nem fejezhető, le nem zárható.

### III. Fejezet.

#### Függvény. Differenciálhányados.

##### A függvény fogalma.

*Egyetlen szám elszigetelve nem érte'mezhető.*

Számnak hívott jelszerkezetünk avégett készült, hogy benne végig-gondolhassuk a világ általános egység-többség megjelenésformáját. Eddigelé annyira ju-



tottunk, hogy megalkottuk magát a jelrendszert és közben rámutattunk főbb sajátosságaira, valóság-forrásaira, valamint korlátaira is. Most az a kérdés, mit tudunk vele elérni. Fizikai alkalmazásainak méretei óriásiak, egész művelődésünket át meg át ható változásokat okoztak éppen azért, mert általa a valóság megjelenésmódját hűen és teljesen visszaadó szerszám került végre az emberek kezébe. Itt csak arra mutatunk rá, miféle önmagában rejlő tulajdonságok teszik ily hatalmasra gépezetünket és hogy miképpen kell ezt — előnyei kihasználása végett — továbbfejleszteni, bonyolítani.

A számokat rendszeren olyan sorozatnak képzelik, ahol az egyes tagok, a számok, egymástól egész különálló darabok. Nem mondjuk, hogy ebben semmi igazság sincs. Próbáljunk meg mégis például a 8 *jelentésére*, ne pedig papírra festett rajzára vagy hangjeleire gondolni. Nagyságát okvetlen eszembe kell hoznom. Ez azonban azt jelenti, hogy *tudom, melyik számnál nagyobb, melyiknél kisebb, azaz ismerem helyét a teljes végtelen sorozatban.* Többi számtani tulajdonságai is — ami mind a vele való bánásmódban, a vele végrehajtott alapl műveletekben nyilvánul — ugyancsak megköveteli, hogy társaival vonatkozásba hozzuk. A 8 egymagában különös figuránál egyéb nem lehetne. *Egyetlen egész szám jelentése magába zárja az összes egész számokét. Csak együtt gondolhatók.* Nagyon fontos megjegyeznünk itt, hogy az egész számok pompásan végiggondolhatók törtek nélkül. Az egész számokat kénytelenek vagyunk folyton együtt gondolni, a törtszámokat meg csak az egészek után, azok segítségével gondolhatjuk. A számok halmazbaverődése nem önkényes tehát, ellenkezőleg, kikerülhetetlen kényszerűség. A mennyiségtan nem tisztán tőlünk függő megállapodások hosszú sora hát, mint sokan, még matematikusok is, képzelik. Logikai



tagozódását semmikép meg nem másíthatjuk. Csak az elnevezés önkényes és ennek bonyolításai.

*Kölcsönös meghatározás a valóságban.*

Az egész számok — a többiek is — együttesen, kölcsönösen határozzák meg egymást. (Vesd össze az 11-ik lapon csodálatosnak jelzett ténnyel.) A tárgyi világban is, előbb már fejtegettük, az egyén minéműségét az összes többi hozza létre s viszont ez az egyén befoly az összes többi egyén mivoltjának, legtágabb értelemben vett „megjelenés”-ének meghatározásába. Mikor végiggondoljuk a számok logikai összebogozottságát, kölcsönös meghatározódásukat, akkor igazában a tárgyak összeszövődésének, kölcsönös meghatározódásuknak összes lehető formáin megyünk végig. *A mennyiség tudománya a kölcsönös meghatározódás formáinak tudománya.*

*A függvény fogalma.*

Amint azonban a fizikai világban ezeknek csak egyszerűbb alakjaival találkozunk, azonképen a matematika is — már csak azért is, hogy dolgát könnyebbé tegye — a legegyszerűbb eseteket veszi előbb szemügyre.

Például. Az egész számok egymás-meghatározása szemlélhető mint a haladás, az egymásra következés legkevésbé kibontott szimbolizálása. A folyton tartó kiindulás és megérkezés elvezet előbb az 1-től a 2-höz, majd a 2-től a 3-hoz és így tovább. Itt tehát minden egyes számhoz egyetlen másik rendelődik — az utána-jövő. Hogy könnyebben átgondolhassuk az efajta meghatározódásokat, három tagra szakítjuk szét: két számhalmazra — a függetlenül megadhatónak tekintett számokéra és az ezekhez rendeltékére — továbbá a kettőt összekötő, az egymáshoz rendelést, azaz a meghatározást ténylegesen végbevívő műveletre (funkcióra). Ha  $x$  valamelyik egész szám, akkor  $x+1$  a hozzárendelt szám  $s$  az eggyel való megnövelés a



művelet, mi átvezet  $x$ -től a hozzátartozó számhoz. A két számhalmazra azt mondjuk, hogy egyik *függ* a másiktól, egyik *függvénye* a másiknak.

Igen egyszerű példa még a hatványozás (négyzetre emelés) művelete. Legyen az első halmaz az összes valós számok  $s$  rendeljük mindegyikhez önmagának második hatványát (szorozzuk önmagával). Az így kijövő számok alkotják a másik halmazt. Ha  $x$  az elsőből való szám, akkor hozzá  $x^2$  tartozik, például 4-hez 16, a 11-hez 121, stb. Sokszor — különösen ha nem egyes függvényről van szó, hanem a függvények általános tulajdonságairól — a második halmaz számait együttesen  $y$  betűvel jelezzük. Az  $x^2 = y$  egyenlet tehát azt mondja, hogy van két számhalmazunk ( $x$  és  $y$ ) és úgy jutunk el az első halmaz akármelyik számától a másik halmazban neki megfelelő számhoz, hogy az első négyzetre emeljük. Kijelöl tehát egy műveletet, ami megfelelteti egymásnak a két halmazt. Általában  $y = f(x)$  jelet használjuk, hol  $f$  csak annyit jelent, hogy két számhalmaz között közvetítő műveletre (funkcióra) gondoljunk. Ha részletezni kívánjuk, hogy milyen műveletre, matematikai jelekben vagy a közönséges nyelv szavaival kell ehhez még hozzáfűznünk a gondolandókat.

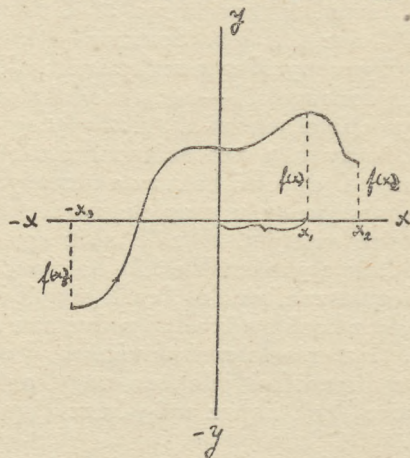
*Fizikai példa  
a függvényre.*

A függvény szerepét a természetleírásban legegyszerűbben példázza a leejtett kő mozgása. Az első másodpercben megtesz mondjuk  $a$  métert. Az első és második másodpercben nem kétannyit, hanem  $4a$  méter utat tesz meg. A harmadik másodperc végéig összesen megtesz  $9a$ -t és így tovább. Ha a másodpercek számát  $t$  (tempus) betűvel, a megtett méterek számát pedig  $s$  (spatium) betűvel jelöljük, törvényszerűségünk  $s = at^2$  alakot kap. Itt az egyik számhalmaz a másodpercek száma, a másik meg a megtett métereké, *a kettőt egyesítő művelet* pedig —

példánkban a másodpercek száma szorozva önmagával és egy fix számmal — a természettörvény.

A függvény térbeli ábrázolása.

A függvénynek a síkban görbe felel meg. Gondoljuk rá ugyanis az  $x$  illetve az  $y$  értékeket két egymásra merőleges egyenesre. Mérjük fel minden  $x$ -hez a hozzá tartozó  $f(x)=y$ -t, mégpedig felfelé ha ez pozitív, lefelé ha negatív. Az így szerkesztett  $y$  magasságok végpontjai görbét



8. ábra.

alkotnak s ez a függvény geometriai képe. Világos másrészt, hogy matematikus szemmel nézve minden görbe függvény. Mert hiszen a rajz hozzárendeli minden  $x$ -hez a görbe magasságát abban a pontban. (8. ábra.)

### Algebra és komplex szám.

Gyökvonás.

Fordítsuk meg a hatványozás műveletét. Az  $y$  is meghatározza az  $x$ -et. Azaz, ha megmondják a leeső test megtett útját, meg tudom mondani



mennyi idő kellett ehhez. Ha például  $y = 25$ , akkor olyan keresendő ki az  $x$ -ek közül, hogy  $x^2 = 25$  legyen. Ilyen szám van kettő: az 5 és a  $-5$ . Fizikai eseteknél mindig el tudom dönteni melyiket kerestem a kettő közül, a matematikus pedig folyton az összes lehetőségre ügyel s így egyszerűen tanulmányozás alá veszi a meghatározódásnak azt a módját is, mikor egy művelet (itt a hatványozás eredményéből visszamenni az alapszámra: *gyökvonás*) több számhoz is vezet.

Elég nehéznek látszik megoldani  $x^3 = 24$  egyenletet. Ha valamelyik pozitív  $x$  kielégíti, akkor ugyanez az  $x$ , negatív előjellel véve, szintén eleget tesz neki, elég tehát pozitív megoldó számot keresni. Valahol 4 és 5 között van, azaz tizedestört alakja 4 egésszel kezdődik. Fűzzünk most a 4 egészhez tizedrészeket s számítsuk ki az így kapott 9 szám ( $4\cdot1$ ,  $4\cdot2$ ,  $4\cdot3$ ,  $4\cdot4$ ,  $4\cdot5$ ,  $4\cdot6$ ,  $4\cdot7$ ,  $4\cdot8$ ,  $4\cdot9$ ) négyzetét. Látjuk így, hogy  $4\cdot8^2 < 24$ ,  $4\cdot9^2 > 24$ . Keresett számunk első tizedese 8. Így tovább haladva kapjuk 4, 48,  $4\cdot89$ , . . . . . növe sorozatot; ez, a sorba kijövő tizedesekkel, meghatároz egy,  $A$ , végtelen tizedestörtet. Az  $A$  irracionális szám szorzata önmagával éppen 24: ugyanis  $4\cdot4$ ,  $4\cdot8$ ,  $4\cdot89$ ,  $4\cdot89$  . . . . . sorozat határértéke — s értelme szerint ez az irracionális számunk négyzete — tényleg 24, mert a szerkesztéséből kifolyólag mindig csak távolabbi tizedesben különbözik tőle. Matematikus nyelven: 24 második gyöke  $A$ . Ha tehát az  $x$  és  $y$  halmazokba irracionális számokat is beleértünk — ezt pedig a fentiek szerint meg kell tennünk —, az  $y$  tényleg határoz meg  $x$ -et (példánkban pontosan kettőt).

Pozitív számok négyzete, de negatívoké is, csak pozitív lehet; negatív  $y$ -unk tehát nincs. Köztük van azonban minden pozitív szám. Ha tehát — mint a fizikai példánkban (45. lap) — csak pozitív  $x$ -eket (ott  $t$ -ket) nézünk, akkor az  $y$ -ok halmaza épp azok-



ból a számokból áll, mint az  $x$ -eké (tudniillik az összes pozitív számokból). Az  $y=2x$  függvényben is az összes pozitív  $x$ -ekhez az összes pozitív számok jönnek ki  $y$ -úl. A függvényértékek összessége nem jellemzi tehát, nem határozza meg a függvényt: *a közvetítőművelet alkotja a függvényt, nem a függvényértékek halmaza.*

*Az algebra feladata.*

Véges számú különböző hatványfüggvény összeadásából áll elő a legegyszerűbb függvénycsalád:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n,$$

mit többtagúaknak, *polinómoknak* (algebrai egész függvényeknek) hívunk. Az  $a_0, a_1, a_2$ , stb. fix számok: *együtthatók* (coefficiensek). Ezeket kell számbelileg megadni, úgy jutunk el a függvénycsalád valamelyik tagjához. *Az algebra ennek a függvénycsaládnak a tanulmányozása.*

Ha megadják az  $x$ -et, könnyen ki tudjuk számítani a hozzátartozó függvényértéket: behelyettesítjük, szorzunk s összeadunk. Egyik főfeladata az algebrának, megfelelni a fordított kérdésre. Milyen  $x$ -nél (vagy  $x$ -eknél) lesz a függvény adott ( $c$ ) értékű? Keresendők az  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n = c$ , azaz  $a_0 - c + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n = 0$  egyenlet gyökei. Negyedfokú egyenletnél gyökvonással (a hatványozás fordítottjával) mindig elintézhethetjük a dolgot, hanem ha 4-nél nagyobb hatványok is vannak, ( $n > 4$ ), általában nemcsak hogy nem tudunk, de nem is lehet vele célt érni (*Abel tétele*). Némelyik egyenletnél igen s az ilyen egyenlet kijelölése az algebra egyik érdekes feladata.

*A mennyiségtani problémák önálló alakulása.*

Ebből a pár megjegyzésből is érezhető már, mennyire saját-magából szövődik itt tovább a matematika kérdéshálózata. Felesleges többé a való-

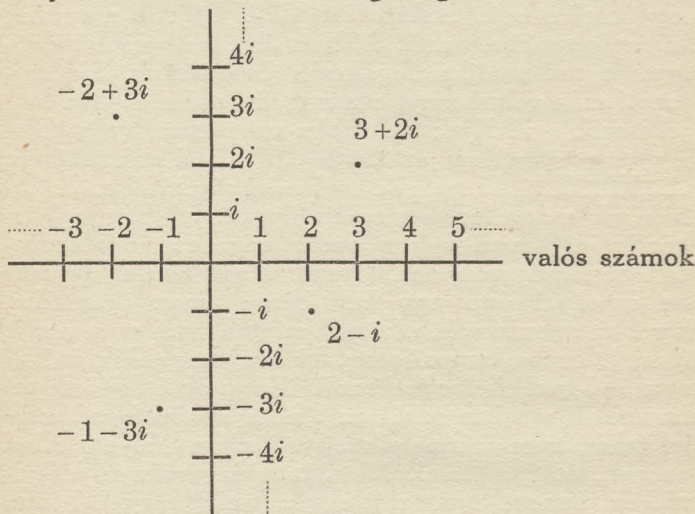


ságra visszamenni. A tőle kapott feladat, eszünk járásának megfelelően, szertebomlott s ugyancsak erőlködnünk kell, hogy az egyes szálak menetét és kapcsolataikat követhessük. Emiatt könnyen csak erre az észmunkára gondolunk, szinte azt hisszük, az egész feladat csak bontóköti észtorna, szellemes játék. S tényleg ennek a szétszedő és összerakó tevékenységnek vannak saját nehézségei s így, azok legyőzésére, *saját eszközei* is. Minél beljebb megyünk tudományunkba, annál több nehézségre és több különlegesen matematikai fogalomra bukkanunk. Ide tartozott már valamennyire a negatív szám is. De legjellemzőbb példájuk a *komplex szám*. Ennek megalkotását az algebra feladatai erőszakolták ki, nélküle csak mint utvesztőben botor-kálnánk már a legegyszerűbb függvények viszonylatai között is. A valósághoz pedig egyenes vonatkozásban éppenséggel nincs. Olyan  $i$  jelt vezet ugyanis be, amellyel épp úgy kell bánni (azaz összeadni, kivonni, szorozni és osztani), mintha nem pusztán rajz (hang), hanem szám lenne, kivéve, hogy 2-ik hatványa  $-1$ -gyel helyettesítendő. Ez utóbbi különleges használati utasítás miatt az  $i$  nem közönséges betűjel tehát, ami bármelyik egyes szám helyett állna avégett, hogy a kijelentés általános érvénye kifejeződjék, hanem határozott egyén; mintha eggyel több jelünk lenne. Az adott szabály szerint a többihez keverve mindig  $a + bi$  alakhoz jutunk, hol  $a$  és  $b$  valós számok, mert  $i$  magasabb hatványai is ( $i^2 = -1$  s így  $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ,  $i^4 = 1$ , stb. képletek folytán) vagy közönséges valós számot vagy valahányszor  $i$ -t adnak. Az ilyen „ $i$ -vel kevert” jelek között a régiek is ott vannak, amikor tudniillik az  $i$  szorzója 0. A megállapodás szerint  $a + 0i$ -t nemcsak, hogy  $a$ -nak írhatom, de még hozzá — miután a különleges  $i^2 = -1$

*A komplex szám.*

szabály nem szerepelhet — az  $a + 0i$  jelhalmaz kezelési módja összeesik a valós számok kezelési módjával. Ezért tekinthetem az új,  $a + bi$ , jeleket a valós számok kibővítésének, általánosításának. Ezek a *komplex számok*.

A síkon ábrázolhatjuk őket. Egyik egyenesre rágon-  
doljuk az  $a$  (azaz  $a + 0i$ ) valós számokat. Az  $a + bi$  helye az  $a$  felett van  $b$  magasságban. Lásd 9. ábrán.



9. ábra.

A komplex szám  
fontossága.

Az  $x^2 = -4$  egyenletnek nincs valós gyöke, mert valós szám második hatványa nem lehet negatív. A  $2i$  és a  $-2i$  azonban eleget tesznek neki. Általában  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n = 0$   $n$ -ed fokú egyenletnek mindig  $n$  gyöke van, ha a komplexeket is hozzávesszük (a többszörösöket megfelelően többször véve). Ez az *algebra alaptétele*. Sok más ilyen



egyszerű és általános tételre jutunk rá a komplex szám révén. Ő teszi lehetővé számunkra a betekintést a polinómok szerkezetébe. Főereje azonban abban rejlik, hogy a legbonyolultabb függvények vizsgálatában is segítségünkre van. A geometriában is szerephez jutott, sőt néhol a fizikai elméletekben sem nélkülözhető.

Komplex számok  
halmazának határértéke.

Jegyezzük meg még róla, hogyan értelmezzük határértékét. Akkor mondjuk, hogy a

$$a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, a_3 + b_3 i, \dots, a_n + b_n i, \dots$$

sorozatnak van limes-e, ha külön az  $a$ -k és külön a  $b$ -k halmazának van. És pedig ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  és

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  azt mondjuk, hogy komplex számhalmazunk limes-e:  $a + bi$ , jelekben:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n i) = a + bi$

Kezelési törvények.

A mennyiségtan fogalomrendszerét mélyen jellemzi az a tény, hogy nem lehet még tovább általánosítani a számfogalmat anélkül, hogy e fogalom leglényegesebb sajátosságai el ne tűnének. A komplex számokat a valósakból úgy képeztük, hogy vettünk két ( $e=1$  és  $i$ ) egységet s megalkottuk  $a, b$  valós számokkal az  $a \cdot e + b \cdot i$  alakzatokat azzal a kikötéssel, hogy harmadik egység már nincs, tehát  $e \cdot e, e \cdot i$ , valamint  $i \cdot i$  megint  $a + bi$  alakúak ( $e \cdot e=1, e \cdot i=i, i \cdot i=-1$ ). Legfőbb sajátosságuk, ami a velök való számolást lehetővé teszi az, hogyha  $A, B, C$  ilyen komplex számok, akkor

$$A + B = B + A, A \cdot B = B \cdot A \text{ (kommutatív törvény).}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C), (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ (assziociatív törvény).}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ (distributív törvény).}$$

Azaz épp úgy kell velök számolni, mint az egész, tört vagy irracionális számokkal.



Többszörös  
komplex számok.

Arra lehetne gondolnunk, hogy tovább  
menve vegyünk elő  $n$  egységet  $i_1, i_2, \dots, i_n$ -et  
és képezzük

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n$$

alakzatot, ahol az  $a$ -k általában komplex számok.  
Természetesen az  $i$  egységek szorzataira:  $i_1 \cdot i_1, i_1 \cdot i_2$  stb.  
kifejezésekre, szabályt kell adnunk, miáltal ezek is  
 $a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n$  alakba legyenek írhatók (külön-  
ben  $i_1 \cdot i_1, i_1 \cdot i_2$  stb. újabb független egységeket alkot-  
nának).

Bármilyenek legyenek is az egységsszorzatokra kijelölt  
szabályok, ha új,  $n$  egységű számainktól megköveteljük,  
hogy eleget tegyenek a három kezelési törvénynek, akkor  
nem jutunk új számokhoz. Bebizonyítható ugyanis (Hankel-  
tétel), hogy ily körülmények között minden új egy-  
ségnek gondolt  $i$  egyenlő valamelyik közösleges  
komplex számmal. Csak úgy juthatunk új egységek-  
hez, ha feladjuk valamelyik kezelési szabályt.

Quaterniók és  
vektoranalízis.

Például, ha feladjuk  $A \cdot B = B \cdot A$  sza-  
bályt, lehet négy egységű új számokhoz  
jutni, a Hamilton-féle quaterniók-hoz és  
másokhoz nem (Frobenius-tétel). Ezekből a quater-  
niókból készült — Grassmann Ausdehnungslehre-je  
nyomán — a vektoranalízis, a fizika legmegfelelőbb  
nyelve. A matematika legelvontabb spekulációiból  
eredt a legkonkrétabb természettudománynak, a fizi-  
kának természetes kifejező eszköze.

### Végtelen sor. Analitikai függvény.

Egyszerű függ-  
vényosztályok.

Eddigi függvényeink összeadás és szor-  
zás, illetve hatványozás útján állottak  
elő. Ezek voltak a műveletek, melyek-  
nek bizonyos egymásra halmozása vezetett át az  
 $x$ -ből az  $y$ -ba. A szereplő műveletek egyszerűsége és



véges száma tette lehetővé, hogy az algebra csaknem ideális tökéletességgel végezhesse el feladatát. Mihelyt az  $x$  és  $y$ -t bonyolultabb műveletek kötik össze, olyan nehézségekkel kerülünk szembe, amelyek miatt lehetetlen az algebraéhoz hasonló befejezettséget elérnünk. Kijutunk a problémák nyílt tengerére. Elkezdődik ez már a hatványozás megfordításánál. A hatványozásnál három szám szerepel: alap, (hatvány)-kitevő és a hatványozás eredménye, hatványmennyiség. Ha az alap és kitevő van adva, például  $5^3$ , könnyű eljutni a harmadikhoz (a hatványmennyiséghez). Tudniillik hatványozunk. Ha az eredmény van adva és a kitevő, már nehezebb a harmadik, az alap kiszámítása: gyököt kell vonnunk. Például 125 és 3-hoz az 5 tartozik, mert  $5 \cdot 5 \cdot 5$  tényleg 125. Formulában:  $125^{\frac{1}{3}} = 5$ . De 124 és 3, azaz  $124^{\frac{1}{3}}$  esetében az eljárás már hosszadalmassá válik. A hatványozásnak ebből a megfordításából erednek  $x^{\frac{1}{2}}$ ,  $x^{\frac{1}{3}}$ ,  $x^{\frac{2}{3}}$ , stb. függvények, általában  $x^a$ , hol  $a$  valamelyik valós szám. Ezek a *gyökfüggvények*.  $a^{\frac{1}{3}}$  értelme:  $a^2$ -ből 3-ik gyök vonandó, vagy  $a^{\frac{1}{3}}$  ( $a$  harmadik gyöke) önmagával szorozandó. Ily módon törtszámu kitevőnek is van értelme, sőt végtelen sok ilyennek a határértékét véve, irracionálisnak is.

Utolsó lehetséges eset, hogy az eredmény van adva és az alap. Kérdés, mi a hatványkitevő (exponens), azaz mekkora hatványra kell emelni az alapot (hányszor kell önmagával szorozni), hogy kijöjjön az eredmény. Ez nagyon bonyolult már s így alapul kiválasztanak egy bizonyos számot, például a tízet s így vetik fel a kérdést: minő hatványra kell emelni a 10-et, hogy kijöjjön a megadott szám? A kiadódó kitevő — ami rendszeren nem nagy — az adott szám 10-alapú logaritmusa; 1000-é például 3, mert  $10^3 = 1000$  egyenletnek megoldása  $x = 3$ . A most felírt egyenlet bal oldala uj



fajtajú, *exponenciális*, függvényt ad,  $a^x$ -et, hol az  $x$ -et sem hatványozni nem kell, sem pedig belőle gyököt vonni; ő csak kijelöli, hányszor kell szorozniul venni az alapot s esetleg hányadik gyököt kell venni az így kapott szorzatból.  $\text{Log. } x$  jelöli a sorra vett pozitív ( $x$ ) számokhoz tartozó kitevőket, logaritmusokat. Például:  $\text{Log. } 1000 = 3$ ,  $\text{Log. } 100 = 2$ ,  $\text{Log. } 10 = 1$ . Az  $x^a$ ,  $a^x$  és  $\text{log. } x$  és az ezekből formált függvények alkotják a második nagy függvényosztályt, az „elemi” függvényekét, mik egyszerűségben mindjárt a polinómok után jönnek.

Ávégtelen sor.

Láttuk, milyen nehéz megtalálni adott számhoz a logaritmust, sőt adott szám magasabb gyökeit is. Függvénytulajdonságaik tanulmányozása is azt követeli, hogy megpróbáljuk az átmenetet, például a számból a logaritmusához, lehetőleg összeadásra és szorzásra (hatványozásra), illetve ezek egymásra halmozására visszavezetni. Ekkor markoljuk meg igazán a függvényt, mert összealkotását nyomról-nyomra követhetjük. Erre szolgál a *végtelen sor*, a matematikai kutatás legfontosabb és legjellemzőbb eszköze. Láttuk (17. oldal), hogy bármelyik vonaldarab folytonos felezés és összeadással végtelen sok kisebb vonaldarab végösszegeként fogható fel. Pontosabban

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

végtelen sok kijelölt összeadás-művelet eredményeül a  $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$  sorozat határértékét tekintjük. Ha tehát ennek nincs határértéke, akkor az előbbi sor végösszegének semmi értelme sincs, a sorral nem tudunk mit kezdeni: *divergensnek*, széltartónak mondjuk. Ha van, akkor ez a határérték a *konvergensnek*, összetartónak mondott sor összege. (Sor alatt ezentúl csakis



ilyen végtelen összeadás-sorozatot fogunk érteni, hol tehát a tagok között + (vagy —) jel van. Sorozat marad egymásután következő, vesszővel elválasztott számok halmaza.)

Végtelen  
függvénysor.

Ha akármilyen  $f(x)$  függvénybe  $x$  helyére határozott számot,  $a$ -t teszünk,  $f(a)$  már egyetlen számot jelöl, azt tudniillik, amit a vizsgált függvény rendel  $a$ -hoz. A végtelen sok különböző függvényből álló

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

sornak értelme tehát az, hogy minden egyes  $a$  számhoz, ha ugyan

$$f_1(a) + f_2(a) + f_3(a) + f_4(a) + \dots + f_n(a) + \dots$$

sor konvergens, rendel — végtelen sok összeadás végösszegeként — egyetlen számot: a most felírt sor összegét. Gyakran előfordul, hogy függvénysorunk egész számköz minden egyes számára konvergens. Ekkor a sor összege, ebben a számközben, függvényt alkot, az úgynevezett összegfüggvényt. Ilyenkor tehát a sor tagjai is függvények és a sor összege is függvény: mondjuk  $F(x)$ . Jelekben

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

A  $\Sigma$  az egymást követő összeadásokat jelzi (summa). Az alá-fölé írt jelek pedig azt, hogy l-től végig kell futni az összes egész számokon. Például

$$\sum_{n=1}^5 n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5$$

Hatványsor.

A legegyszerűbb végtelen függvénysort úgy kapjuk, ha a polinóموkat — azaz hatványösszegeket — folytatjuk a végtelenig:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (t)$$

Ezek ugyanis tisztára összeadás, szorzás meg még

határérték-kiszámítás műveletekből vannak összerakva. Rendkívül fontosak ezek a *hatványsorok*, mert kiderült, hogy akármelyik ismert, de komplikált függvényt szedjük is elő, lehet olyan  $a$ -számokat, együtthatókat, megállapítani, hogy az ezekkel felírt  $(t)$  sor összege minden  $x$ -re — már ahol van összege, azaz amelyik  $x$ -nél a sor konvergens — egyenlő legyen az előszedett függvény éppen ahhoz az  $x$ -hez tartozó értékével. A hatványsor *előállítja* azt a függvényt. A nevezetes ebben az, hogy a konvergens végtelen sorban, mivel véges összegnek kell kijönni, elég messze elmenve az ezután jövő tagok összege már nagyon kicsiny s így igazában — ha a sor végösszegét csak megközelítőleg akarjuk kiszámítani — elég a sor elejéről több-kevesebb tagot összeadni. Az előállított függvény értékét bárhol csupán *véges számú* összeadással és szorzással oly pontossáig kiszámíthatjuk, ahogy csak akarjuk. A függvény kezünkbe került. Egész pontos kiszámításra gondolva úgy is fogalmazhatjuk sikerünket, hogy a négy alpművelethez csak a limes kitalálását kell még ötödik műveletként csatolnunk, ezzel pótolhatunk gyökvonást, logaritmus-kiszámítást stb., általában minden műveletet, ami a négy elsőtől különbözik.

Taylor-sor. A *logaritmus* esetében, mint sok más függvényénél is, kényelmesebb  $x$  helyett kissé általánosabban az  $x-c$  hatványai szerint haladó  $b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + \dots + b_n(x-c)^n + \dots$   $(T)$  sort megalkotni, hol  $c$  adott szám. Bármeddig vigyem is az összeadást, itt is mindig polinómot kapok és bármilyen  $x=a$  számra keresem a sor végösszegét, növvő hatványokat kell szoroznom és összeadnom. Ez is hatványsor tehát. *Taylor-sornak* is hívjuk, mert ilyen általánosan *Taylor*, angol matematikus vezette be.



Arra is nélkülözhetetlenek, hogy komplex számokhoz is rendelkezünk függvény-értéket. Például ha a *logaritmust* előállító sorban  $x$  helyébe komplex számot teszünk, a sor sok esetben konvergens lesz; ha negatív számot, akkor is. Így lesz negatív és komplex számoknak is logaritmus. S ez a folytatása a függvénynek nemcsak játék, mert enélkül nem bírtak áttekintést nyerni még a gyökfüggvények legegyszerűbb eseteire nézve sem. A végtelen sor és komplex szám együttes és rendszeres használata vetett véget a XVIII. század végtelen vitáinak s alapozta meg ezáltal a mai, fenéig átgondolható, precíz matematikát.

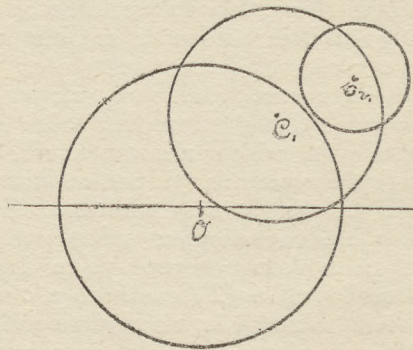
**Konvergenca-kör.**

A legfontosabb, mondhatnánk életbevágó, kérdés a *Taylor-sorra* nézve az, hogy hol, melyik  $x$ -ekre konvergens. Ez természetesen az együtthatóktól függ. Ha az együtthatók kicsinyek, még elég nagy  $x$ -eket betéve is kapunk konvergens sort. Ha az  $a$ -k nagyok, akkor meg csak kis  $x$ -eket betéve lesz konvergens. Általában csak annyit mondhatunk (*Abel tétele*), hogy komplex szám behelyettesítésére is gondolva, mindig a komplex sík valamelyik körén belül fekvő valamennyi pontra konvergensek, a rajta kívül fekvő összes pontokra divergensek. Magán a körön levő komplex számokra nagyrészt divergensek, néha konvergensek. Van tehát a  $(t)$  esetében a kezdőpont, a  $(T)$  esetében a  $c$  körül, mint középpont körül rajzolt kör, amelyen belül eső valamennyi komplex számra kapunk összeget, a kívül esőkre pedig egyikre sem. *Taylor-sorunk konvergenca-tartománya mindig köralakú.* A legtöbb függvénynek azonban nemcsak egyetlen kör belsejéből vett  $x$ -ekre van értéke. Ebből a szempontból nézve a *Taylor-sor* háromféle eshetőséget ad: megesik először, hogy  $x$  helyébe bármelyik komplex számot téve is, mindig konvergens; konvergenca tartománya az egész

komplex sík, a függvényt minden  $x$ -re előállítja. Másodszor, hogy mindenütt divergens (kivéve  $x=0$ , illetve  $x=c$  esetet, ahol csak konvergens lehet, mert egyetlen tagból,  $a_0$ -ból áll). Ekkor sorunk egyetlen  $x$ -hez rendel egyetlen függvényértéket  $s$  így igazában nem ad függvényt, a sor semmire sem jó. Harmadszor, néhol konvergens, néhol nem.

Análitikai  
folytatás.

Ekkor a fentiek szerint van egy kör, amelyen belül  $e$  sor összege pontosan meghatároz egy függvényt. Legyen  $c_1$   $e$  körön belül eső pont. A most meghatározott függvényt — mint általában akármilyen függvényt — a  $(T)$  sor alakjában írjuk fel. (Az új alak, azaz a  $b$ -k meghatározása igen bonyolult.) Konvergencia tartománya kör alakú és meg-  
*esik, hogy az új kör ( $c_1$  körül) túlmenjen az elsőn.* (10.



10. ábra.

ábra.) Új sorunk az első kör belsejébe eső részében ugyanazt adja, mint ugyanott az első sor; ez jelenti azt, hogy ismét az első függvényt állítottuk elő másik sorral. Kívül azonban az első sor semmit sem adott, hisz ott divergens volt, az új sor pedig ad  $s$  ezáltal tovább folytatja a függvény meghatározását. Ha össze-



veszem valamennyi ilyen úgynevezett *analitikai folytatását* az előbb csak az első körben meghatározott függvényemnek, kapok eljárást, amivel a komplex sík jó részén (esetleg egy-két pont híján az egész komplex síkon) fekvő komplex számokhoz tudok kiszámítani függvényértéket. *Ez az analitikai függvény.*

**Függvény és formula.**

Szétválik itt a matematikai formula és a függvény fogalma. Azelőtt úgy értelmezték ugyanis a függvényt, hogy meg kell adni egy bizonyos képletet, formulát — ilyenek a polinómok vagy például:  $\sqrt{x+2}$ ,  $\log(3x-1)$  — s azokra az  $x$ -ekre lesz értelme a függvénynek, amelyekre a képlet határozott számot ad. Ez nagyon természetesnek is hangzik: egy formula, egy függvény; egy függvény, egy formula. A *Taylor-sornál* azonban *egy* formula, tudniillik az első *Taylor-sor*, csak részben állítja elő a függvényt. Teljes előállítását általában *végtelen sok Taylor-sor* meríti csak ki. Itten tehát *egy* függvény és *több* (sőt *végtelen sok*) formula van. Más a függvény és más annak matematikai, formulás előállítása. Felszabadul a függvényfogalom. Igazában rendelhetek bármilyen számot bármelyik  $x$ -hez, csak függvényt kapok. Más és sokszor igen nehéz kérdés, milyen formulával vagy formulasereggel juthatok el az  $x$ -től a hozzá rendelt számhoz. Cantor bebizonyította, hogy az így értett *függvények halmazát nem lehet a valós számokkal sem megszámlálni*, ezeknél többen vannak, számosságuk *újabb, 3-ik fokozatot ad*.

**A függvénytan megteremtői.**

Az analitikai függvények elmélete, azaz általános tulajdonságaik megállapítása és egyes csoportjaik tüzetes tanulmányozása foglalkoztatta leginkább a matematikusokat a XIX. század folyamán. Ez az elmélet a leg-sajátságosabb és leghatalmasabb alkotása a mai matematikának. Oly problémásereggé nyílt széjjel,

amin még manapság is nagyban dolgoznak a leg-  
erősebb matematikusok. Megalapítója a francia *Cauchy*  
(mint az algebráé *Gauss*), főkiépítői pedig: *Abel*,  
*Riemann*, *Weierstrass*, *Poincaré*, *É. Picard*, *Hadamard* stb.

### Derivált függvény. Primitív függvény.

*A differenciál  
hányados.*

Minden függvényvizsgálat fő szer-  
száma a *differenciál-hányados* fogalma.  
Az  $x$ -et változtatva a függvény értéke  
is változik. Milyen arányban változik a függvény az  
 $x$ -hez képest? Az  $a$  és  $a+h$  között a függvény  
 $f(a+h)-f(a)$ -val változik meg (az új értékből le-  
vontuk a régít). Megnézzük hány  $x$ -változás ( $h$ ) kerül  
ki a függvényváltozásból, azaz képezzük

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

hányadost. Más  $h$ -t véve azonban, más lesz számláló  
is, nevező is, s így általában hányadosuk is. Pontos  
mértéket a függvény változására az  $a$  pont körül csak  
úgy adhatok, ha mindig kisebb  $h$ -t veszek s meg-  
keresem az így kapott végtelen sok (átlag) mérték  
határértékét. Alkossuk tehát meg

$$\frac{f(a+h_1)-f(a)}{h_1}, \frac{f(a+h_2)-f(a)}{h_2},$$

$$\frac{f(a+h_3)-f(a)}{h_3}, \dots, \frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}, \dots$$

sorozatot. Ha abból az úgysis elengedhetetlen feltétel-  
ből, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  már következik, hogy a soro-

zatnak van határértéke,  $A$ , ezt a határértéket a vizs-  
gált függvény *differenciál-hányadosának* mondjuk az  $a$   
helyen. Ha megesik, hogy sorozatunknak nincs határ-  
értéke, habár  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ , akkor azt mondjuk, hogy



függvényünknek az  $a$  helyen nincs differenciál-hányadosa. Differenciál-hányados = differencia-hányadosok limes-e. Innen a neve. Jele a differencia (különbség, változás) szó kezdőbetűjéből ered oly módon, hogy deltával ( $\Delta$ ) jelöljük a véges változásokat, például:  $f(a+h) - f(a) = \Delta f$ ,  $h = \Delta x$  és  $d$ -vel a differenciák hányadosainak limes-ét.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Például: ha a differenciálandó függvény  $x^3$ , keresendő  $\frac{(a+h_n)^3 - a^3}{h_n} = \frac{a^3 + 3a^2h_n + 3ah_n^2 + h_n^3 - a^3}{h_n} = 3a^2 + 3ah_n + h_n^2$  limes-e mikor  $h_n$  a 0 felé tart, azaz  $x^3$  differenciál-hányadosa az  $a$  helyen  $3a^2$ .

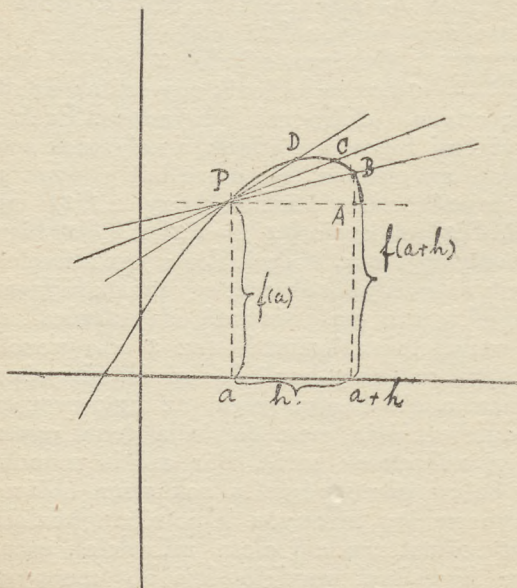
**Derivált függvény.** Ilyképen minden  $x$ -hez — úgy, mint  $a$ -hoz — tartozik egy szám: adott függvényünk odavaló differenciálhányadosa. Ezek a számok együtt új függvényt adnak, amelyiknek sok köze van ugyan az elsőhöz, mindamellett nagyon más is lehet. Kifejezést adandó annak, hogy az  $f(x)$  függvényből ered,  $f'(x)$  jelt kapja  $[(x^2)]' = 2x$ . Ez  $f(x)$  függvénynek *derivált függvénye*. A deriválás olyan művelet tehát, ami egyik függvényből átvezet egy másik függvényhez, még pedig kivonás, osztás és határértékkiszámítás útján. Eddigi műveleteink számból (az  $x$ -ből) vezettek át másik számhoz (az  $y$ -hoz). A derivált függvény meghatározása adott függvényhez, az úgynevezett deriválás, differenciálás, nem folytatja tehát egyszerűen az eddigi műveletek sorát. Bár azt is mondhatnók, hogy a határértéknél végtelen sok szám határoz meg egyet s hogy így bizonyos tekintetben közbül áll a számhoz számot rendelő elemi műveletek és a függvényhez függvényt rendelő felsőbb mennyiségtani műveletek között.

**Primitív függvény.**

A derivált függvény meghatározásának fordítottja a primitív függvény felkeresése, azé a függvényé, amelynek éppen az adott függvény a deriváltja. Például  $2x$  függvény primitív függvénye  $x^2$ . Legyen ez a primitív függvény  $F(x)$ , ekkor  $F'(x)$  nem egyéb, mint az adott  $f(x)$  függvény:  $F'(x) = f(x)$ . Magának az  $f(x)$  függvénynek a deriváltja  $f'(x)$ , a  $F(x)$ -nek már második deriváltja.

**A differenciál-hányados geometriai jelentése.**

A derivált és primitív függvény geometriai jelentése nagyon nevezetes. Rajzoljuk le  $f(x)$ -et. A II. ábrán  $f(a+h) - f(a)$  az  $AB$  távolság. Az  $x$  változása  $AP$ -vel egyenlő, tehát



II. ábra.



$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{AB}{AP} (=tg\alpha)$$

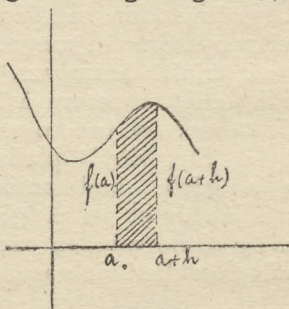
Ez a viszonyszám meghatározza a  $P$  és  $B$  pontokon átmenő szelőt. Ugyanis, ha megadják e viszony nagyságát, például a  $\frac{1}{2}$ -ot, akkor rajzolok egy derékszöveget, mint  $A$ -nál van, alapjára felmérek 3 akármilyen egységet, a merőleges szárra 2-t. A kapott pontokat összekötő egyenes párhuzamos lesz a vizsgált szelővel. Ha tehát  $P$  ponton át a nyert egyeneshez párhuzamost húzok, megkapom a szelőt. Válasszunk most kisebb  $h$ -t, ehhez másik szelő tartozik másik viszonyszámmal. Így továbbmenve, végtelen sok szelőt kapok egy-egy viszonyszámmal megadva. A viszonyszámok limes-e az érintőt határozza meg, a szelők határhelyzetét. Ha tehát ismerem a függvény differenciálhányadosát  $a$ -ban, fel tudom rajzolni e pontban az érintőt a függvényt ábrázoló görbéhez. Lényeges, hogy a görbe matematikai formájából tisztán számítás útján jutok el a görbe geometriai tulajdonságaihoz. A görbe minden szemléleti sajátossága számtani műveletekkel kiolvasható matematikai formulájából.

*Az integrál geometriai jelentése.*

A primitív vagy *integrál* függvény legközvetlenebb geometriai alkalmazása a következő: Valamelyik egyszersmindenkorra megadott függvényértéktől, illetve magasságvonaltól kezdődőleg a görbe és az  $x$  tengely között mindegyik függvényérték lezár bizonyos nagyságú területet. (A terület mérőszámát görbe határok esetében a beleírt négyszögek területösszege határozza meg, ha a négyszögelést mindig kisebb oldalakkal végezzük s a határra megyünk.) Más  $x$ -et véve, más területet kapunk. A terület tehát  $x$  függvénye:  $T(x)$ . Határozzuk meg derivált függvényét.  $T(a+h) - T(a)$

nem egyéb, mint az  $a$  és  $a+h$  közé eső bevonalkázott terület (12. ábra); ez pedig nagyon kevés, a fenti, háromszöghöz hasonló területtel, különbözik  $h \cdot f(a)$ -tól. A különbség köztük kisebb mint  $h$  szorozva az  $a$  és  $a+h$  közé eső függvényértékek legnagyobb különbségével.

Mikor tehát a  $T(a+h) - T(a)$  különbséget osztjuk  $h$ -val, hogy megkapjuk a differenciálhányadost,  $f(a)$ -tól nagyon kicsit különböző hányadost kapunk. Mikor pedig  $h$ -t kisebb kisebbnek vesszük, hányadosunk  $f(a)$  felé közeledik s így tényleg,  $T(x)$  differenciálhányadosa  $a$ -nál éppen a görbe magasságával,  $f(a)$ -val egyenlő.



12. ábra.

S ugyanigy valamennyi  $x$  pontban:  $T'(x) = f(x)$ . Ha tehát adott görbe formulájához megkeresem a primitív függvényt, fontos geometriai kérdést is intézek el, tudniillik meg tudom mondani, hogy bármelyik  $x$ -ig menve, mekkora terület van a görbe és az  $x$  tengely között. Egy csapásra elvégeztem végtelen sok terület-számítást.

### Differenciál- és integrálegyenlet.

**Függvény-egyenlet**

A felsőbb mennyiségtan egyik fő jellemzője, amint láttuk, hogy a „szám-



hoz szám“ viszony helyett a „függvényhez függvény“ kapcsolatot vizsgálja. Például a deriválás művelete minden függvényhez rendel másik függvényt olyformán, mint a hatványozás  $(x^2)$  minden számhoz rendelt másik számot. Az integrálás szintén. „Függvényhez függvényt“ rendelő művelet van sok. Például  $f(x) \cdot f(x)$  szorzás. Fontosságuk rendkívüli, mert a természet ily függvénykapcsolatok hálózata. A nagy, átfogó természettörvények pedig feltételeket szabnak ki arra nézve, hogy a vizsgált jelenségkörben miféle függvénykapcsolatok lehetségesek és mik nem.

A matematika megvizsgálja tehát elvben az összes lehető megszorításokat, amit csak függvényre ki lehet gondolni. Például: van-e olyan függvény, esetleg több is, amelyik minden  $a$  és minden  $b$  értékre eleget tesz  $f(a+b)=f(a)+f(b)$  függvényegyenletnek? (Azért minden  $a$  és minden  $b$  értékre, mert maga a függvény köteles eleget tenni a feltételeknek.) A  $c \cdot x$  függvények mind ilyenek, hol  $c$  akármelyik szám s más ilyen nincs is. Másik példa:  $f(a \cdot b)=f(a)+f(b)$  egyenlet, aminek megoldása a  $\log x$ , mert szorzat,  $a \cdot b$ , logaritmusa tényleg a tényezők logaritmusainak összege. Bonyolultabb függvényegyenlet

$$a_0(x) + a_1(x)f(x) + a_2(x)[f(x)]^2 + a_3(x)[f(x)]^3 + \dots + a_n(x)[f(x)]^n = 0$$

ahol  $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x)$  megadott függvényegyütthatók,  $f(x)$  pedig az ismeretlen függvény helyett áll, ami majd eleget tesz az egyenletnek bármilyen  $x$ -nél. Az írás megkönnyítése végett itt már célszerű az ugysis ismeretlen függvényt jelző  $f(x)$  jel helyett  $y$ -t írni. Az ilyfajta egyenletet kielégítő függvények képezik az *algebrai függvények* csoportját. Elméletük



— mi nem tévesztendő össze az algebrával — jól ki van építve.

Differenciál- és  
integrálegyenletek.

Legfontosabbak azonban azok a függvényegyenletek (*differenciál- és integrálegyenletek*), hol a keresett függvény deriváltja, esetleg integrálja is benn van. Például olyan  $f(x)$  függvény keresendő, hogy minden  $x$ -re  $xy' = 2y$  legyen. Ilyen például  $x^2$ , általában  $c \cdot x^2$ , hol  $c$  valamelyik valós vagy komplex szám. Az  $x^2$  függvény eleget tesz még  $yy'' = xy'$  egyenletnek is. Ha se  $y$ , se előforduló deriváltjai nincsenek hatványra emelve (azaz első hatványon vannak) se egymást nem szorozzák, a differenciálegyenlet lineáris. Első példánk ilyen, a második nem. Az  $y$  és deriváltjai mellett levő függvényegyütthatók  $x$ -nek tetszőleges adott függvényei.

Láttuk, egyetlen függvény- (differenciál-) egyenletnek végtelen sok függvény tehet eleget. Minden ilyen egyenlet kikerekít a függvények közül egy családot. A főkérdés következtetni az adott függvényegyütthatók tulajdonságaiból és az egyenlet formájából a neki eleget tevő függvények tulajdonságaira. Egy-egy ilyen kérdés nagyon precíz, nem mozog általánosságban, innen van, hogy a függvénytanulmányozás ez irányban érte el legteljesebb sikereit. Itt a problémahálózat továbbszövését nem kizárólag matematikai egymásrakövetkezések határozzák meg, a fizikai elméletek szükségleteit kell első sorban kielégítenünk. A XIX. században indult csak meg a teljes elmélet kiképzése, de még végtelen messze járunk a befejezettségtől. Az integrálegyenleteket meg csak manapság kezdik rendszeres vizsgálat alá fogni, sok tekintetben megint fizikai szempontok szerint indulva.



## Ajánlható kézikönyvek.

### I. Középiskolai anyag:

**Beke**, *Algebra*, 7. kiadás, a differenciál- és integrál-számítás elemeit adó függelékkal (legjobb középiskolai tankönyvünk, magántanulásra is ajánlható.)

Németül például a *Grundlehren der Mathematik*; ennek megjelent eddig két kötete: **Färber**, *Arithmetik* és **Thieme**, *Geometrie*.

Franciául: **Borel**, *Cours de mathématiques* (németre is le van fordítva), **Tannery** (németül is) és **Hadamard** tankönyvei.

### II. Átmenetül a felsőbb mennyiségtanhoz:

**König**, *Bevezetés a felsőbb algebra*ba.

**Beke**, *Bevezetés a differenciál és integrál számításba*.  
3 korona.

**Rácz—Mikola**, *Az infinitezimális számítás elemei a középiskolában*. 2 korona.

**Lévy**, *A differenciál és integrálszámítás elemei példákkal középiskolai használatra*. 60 fillér.

### III. Felsőbb mennyiségtan:

**König**, *Analízis* (csak első kötete jelent meg.)

**Beke**, *Differenciál és integrál számítás* (legjobb és legteljesebb egyetemi tankönyvünk) I—II. 20 korona.

**Serret—Scheffers**, *Differencial und Integralrechnung* I—III. (Nálunk is legelterjedtebb tankönyv a németnyelvűek között. Franciából van fordítva s kibővitve.)

**Tannery**, *Leçons d'algebre et d'analyse* I—II. (Legjobban ajánlható bevezetésül. A középiskolai és egyetemi tananyagot hidalja át.)

**Goursat, Cours de mathématiques** 2<sup>e</sup> édition I—III.  
(Pontos és rendszeres áttekintése a diff. és int.  
számításnak beleértve geometriai alkalmazásait  
is, valamint a diff. egyenletek elméletét.)

**Picard, Traité d'analyse** I—III. (Válogatott fejezetek-  
ben, problémakörök szerint tárgyalja a matema-  
tikát, bevezetésül az elméleti fizika egész komoly  
átértéséhez. Szellemes, érdekes könyv, legszebb  
valamennyi összefoglaló munka között.)



A „Galilei Füzetek”-et dr. Lóránd Jenő szerkeszti.  
Szerkesztőség: I. ker., Kende-utca 12, II. emelet 10.



# A SZABADGONDOLKOZÁS MAGYARORSZÁGI EGYESÜLETE

BUDAPEST, VI, ANDRÁSSY-ÚT 48. SZ., I. EMELET

Alapító tagok tagsági díja egyszersmindenkora	100 korona
Támogató rendes tagok tagsági díja évi	10 korona
Rendes tagok tagsági díja évi	6 korona

Valamennyi tag ingyen kapja az egyesület hivatalos lapját, a Szabadgondolat-ot. Fiókok alapítására vagy a belépésre vonatkozólag felvilágosítást nyújt a titkári hivatal.

## Galilei Kör a Szabadgondolkodás Magyarországi Egyesületének főiskolai fiókja.

Budapest, VI. ker., Anker-köz 2. szám, II. emelet.

A Galilei Kör — egyetemünk legnagyobb ifjúsági egyesülete — 5 év óta áll fenn. 1908-ban alakult 256 taggal és az ötödik év végén tagjainak száma 1000.

Az előítéletek nélküli tudományos gondolkodás védelme és terjesztése a Kör célja. Tanulás és tanítás az eszközei a vallási, faji és osztály-előítéletek ellen való küzdelmében.

Előadásaiban és szemináriumában a modern tudományos ismereteket, az erkölcsi, művészeti és tudományos élet korszerű szemlélését és a belőlük sarjadzó világnézetet terjeszti. Öt év alatt több mint 200 természet-tudományi, filozófiai, lélektani, művészeti, társadalomtudományi és kulturpolitikai előadást tartottak a Galilei Körben — melyek egy része nyomtatásban is megjelent — egyetemi tanárok, hazai és külföldi szakemberek s több mint 25 szemináriumban foglalkoztak a tagok e kérdések tüzesebb megbeszélésével.

Az első ötévi működés kimagasló mozzanatai: diákgyűlések rendezése az általános választójog és a szekularizáció mellett, statisztikai felvétel a budapesti diákság gazdasági helyzetéről, sorozatos előadások Magyarország közállapotairól és Magyarország történelméről, a nőkérdésről, Ostwald, Sombart és más világhírű tudósok előadásai, továbbá Mach ismeretelméletének magyar nyelven való kiadása.

A Kör tagjai munkáselőadásokat tartottak.

A Kör klubhelyiséget tart fenn, melyben a napilapokon kívül számos tudományos, szépirodalmi és egyéb (magyar, német, angol és francia nyelvű) folyóirat áll a tagok rendelkezésére. Ezenkívül a Kör állandóan gyarapodó könyvtára.

A Galilei Kör tagjai ingyen látogathatják a Társadalomtudományok Szabadiskolája előadásait.

Tagja lehet minden főiskolai hallgató. Évi tagdíj 2 korona.

A Galilei Kör második, harmadik és negyedik évi működéséről szóló jelentést kívánatra bárkinek megküldik.



## A Galilei Kör kiadásában megjelent

1. *Harkányi Ede*: Tudomány és katolicizmus. Ára 40 fillér.
2. *Mach Ernő*: Az érzéklétek elemzése. Fordította Pólányi Károly. Ára 50 fillér. (Elfogyott. Új, bővített kiadás sajtó alatt.)
3. *Szende Pál*: A nagybirtok és Magyarország jövője. Ára 40 fillér.
4. *Jászi Oszkár* márciusi beszéde. Ady Endre ünnepi versével. Ára 20 fillér.
5. *Jászi Oszkár*: A nemzetiségi kérdés és Magyarország jövője. Ára 40 fillér.
6. *Bosnyák Béla*: Oros község társadalmi rajza. Ára 40 fillér.
7. *Jászi Oszkár*: A kapitalizmus felbomlása. Ára 20 fillér.
8. *Agoston Péter*: A vármegye. Ára 40 fillér.
9. *A budapesti diáknyomor*. A Galilei Kör statisztikai felvétele. Feldolgozta Bosnyák Béla. Ára 40 fillér.
10. *Lassalle Ferdinand*: Mi az alkotmány? Fordította Fazekas Sándor. Ára 50 fillér.
11. Három március. 1911, 1912, 1913.

## SZABADGONDOLAT

A Szabadgondolkodás Magyarországi Egyesületének és fiókjainak: a Galilei Körnek stb. hivatalos lapja, a legolcsóbb és legértelmesebb népszerű szociológiai és természettudományi folyóirat. A Szabadgondolat programja a szabadgondolkodás elméleti alapjainak fejlesztése és gyakorlati követeléseinek propagálása: szembe száll a vallási, faji, erkölcsi és osztályelőítéletekkel s harcot folytat minden intézmény ellen, mely ezeken alapszik. Megalkuvás nélkül való hirdetője a klerikalizmus és a felekezeti szellem elleni küzdelemnek. Terjeszti a természettudományos világnézetet és tanítja az ennek alapját tevő természettudományi ismereteket. Ismerteti a magyar és külföldi szabadgondolkodó mozgalmat és irodalmat. A Szabadgondolat munkatársai a progresszív magyarság legkiválóbbjai.

Havonként egyszer két ivnyi terjedelemben jelenik meg. Előfizetési ára egész évre 4 korona, fél évre 2 korona. Egyes számai tőzsdékben és könyvkereskedésekben 40 fillérért kaphatók. Szerkesztőség VI. Andrassy-út 48, I. em. Mutatványszámot kívánatra díjtalanul küld.



nt

ér.

yi

ás

ie.

pi

ag

er.

er.

l-

a

-

k

a

s

-

-

s

n

s

a

-

-

-

-

-

-

