

UNIVERSITAS FRANCISCO-JOSEPHINA  
— KOLOZSVÁR —

---

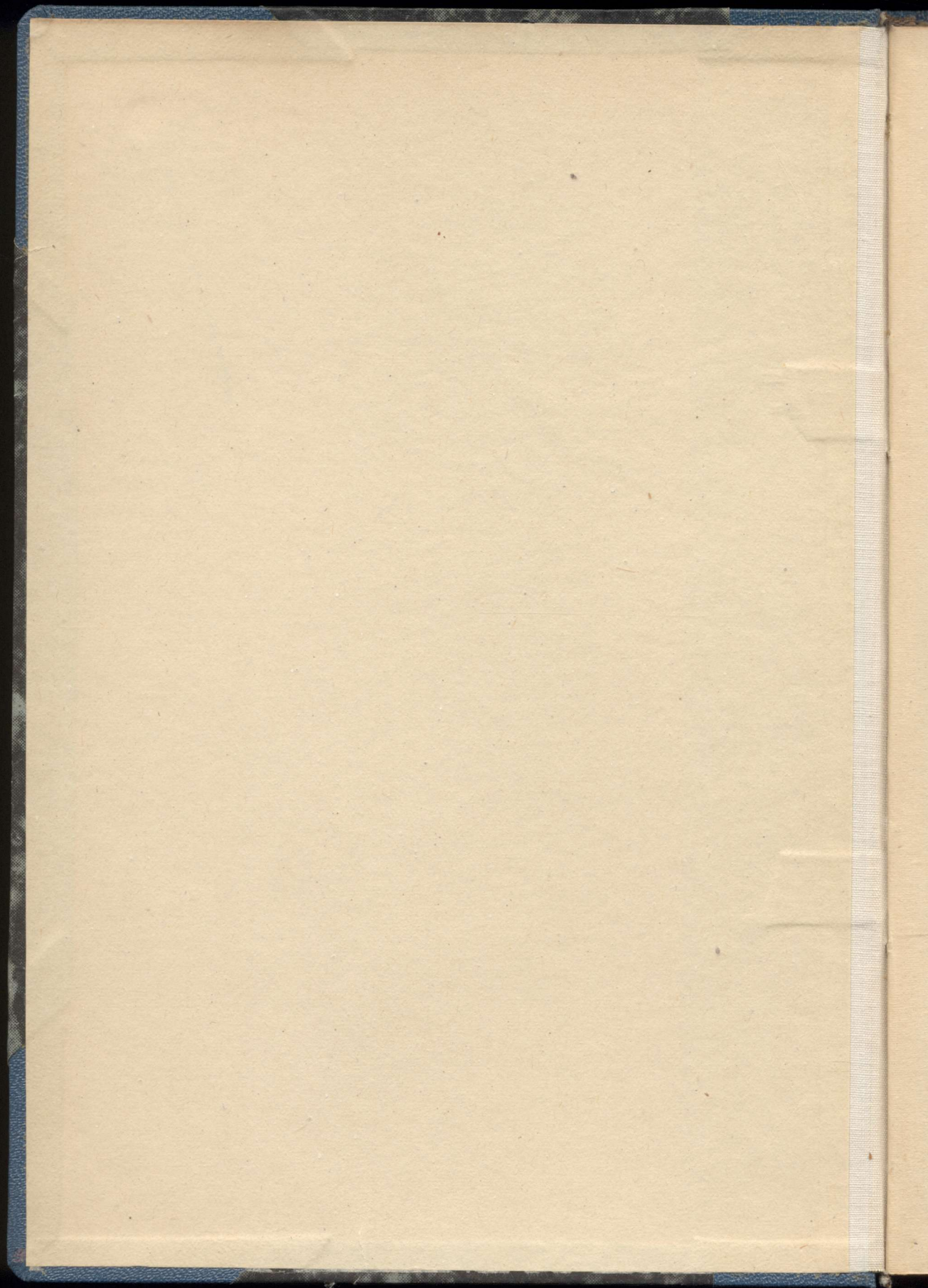
604275

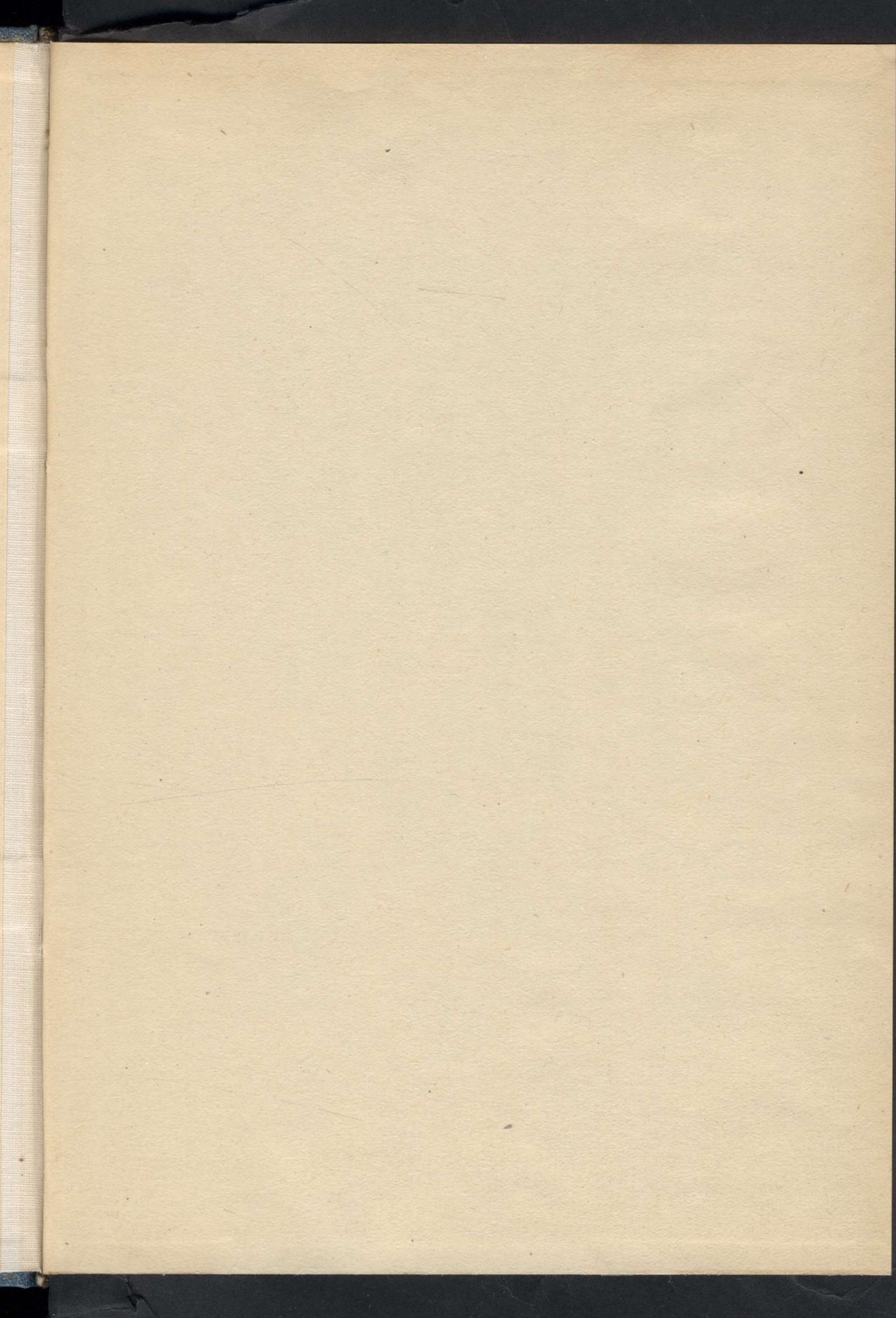
ACTA SCIENTIARUM  
MATHEMATICARUM ET NATURALIUM  
18.

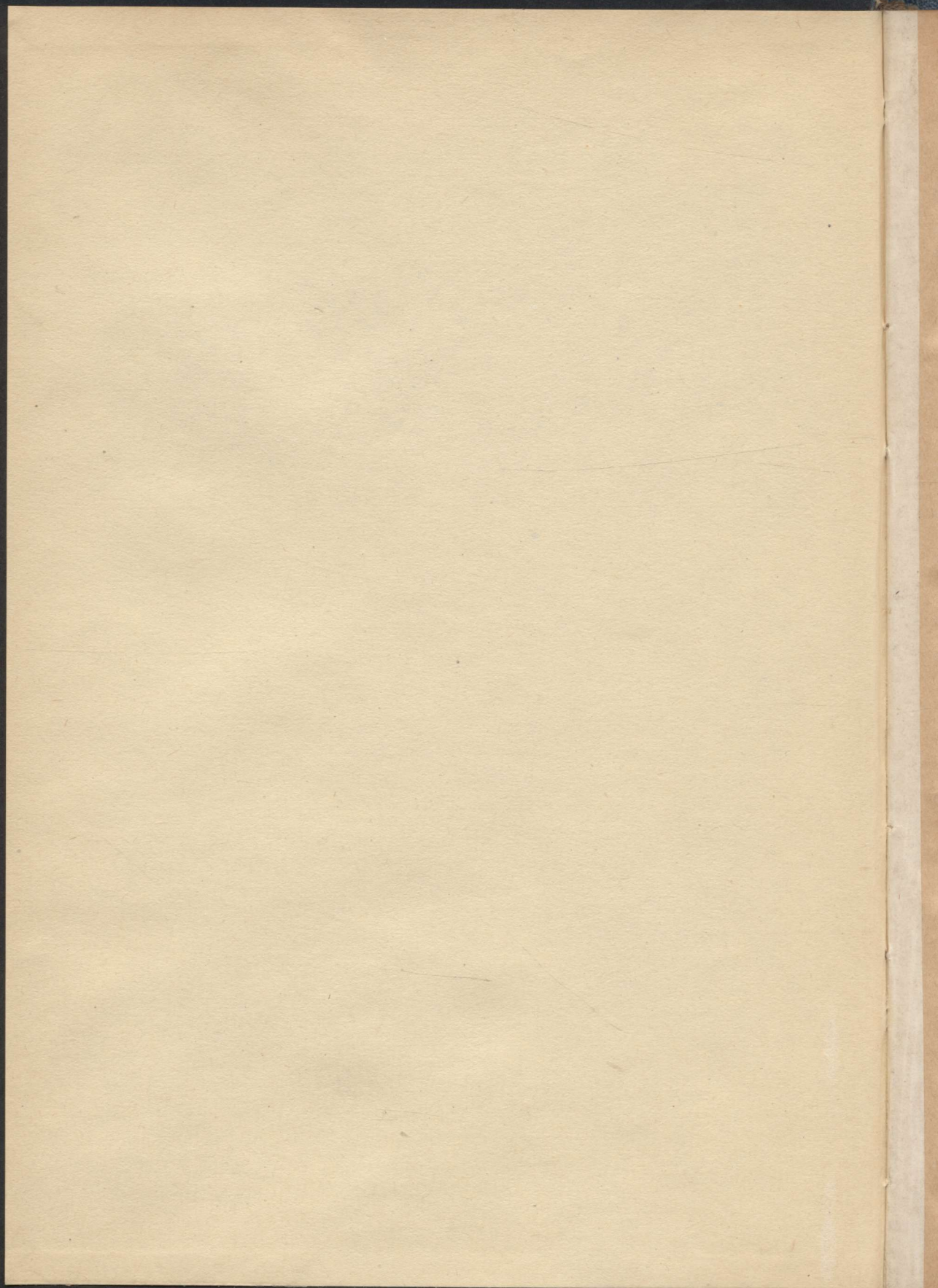
DR. SZŐKEFALVI NAGY GYULA

A  
GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK  
ELMÉLETE

KOLOZSVÁR  
1943







513.49

UNIVERSITAS FRANCISCO-JOSEPHINA  
— KOLOZSVÁR —

---

ACTA SCIENTIARUM  
MATHEMATICARUM ET NATURALIUM

18.

DR. SZÓKEFALVI NAGY GYULA

A  
GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK  
ELMÉLETE

KOLOZSVÁR  
1943

A  
GEOMETRIAI SZERKESZTÉSEK  
ELMÉLETE

ÍRTA

DR. SZÓKEFALVI NAGY GYULA

KOLOZSVÁR

1943



Felelős kiadó: Dr. Szőkefalvi Nagy Gyula.

Minerva-nyomda R. T. Kolozsvár 2675 — Felelős ny. vezető: Major József.

## TARTALOMJEGYZÉK.

Előszó .....	Lap VII
--------------	------------

### I. A körzővel és vonalzóval végezhető szerkesztések algebrai vizsgálata.

1. §. A körzővel és vonalzóval végezhető geometriai szerkesztések és algebrai ismertetőjelek.....	1
2. §. Harmadfokú irreducibilis egyenletnek egy gyökét sem lehet körzővel és vonalzóval szerkeszteni.....	4
3. §. Déloszi probléma. Triszekció. Szabályos kilencszög és hétszög.	7
4. §. Szabályos tízszög és ötszög.....	10
5. §. Szabályos 34-oldalú és 17-oldalú sokszög.....	11
6. §. Az olyan irreducibilis algebrai egyenletek fokszáma, amelyeknek van körzővel és vonalzóval szerkeszthető gyökük. ....	13

### II. Körosztás.

7. §. A körosztás feladata. Gauss általános tétele.....	16
8. §. Körzővel és vonalzóval való szerkesztések a komplex síkon.	18
9. §. Páratlan törzsszámhoz tartozó körosztási egyenlet irreducibilitása. Törzsszámnégyszeghez tartozó körosztási egyenlet.....	19
10. §. A Gauss-féle tétel tagadó részének bizonyítása. A $2^k+1$ alakú törzsszámok.....	22
11. §. A Gauss-féle tétel állító részének bizonyítása.....	23
12. §. Körlapnak egyenlő területű részekre való osztása.....	26

### III. Geometriai szerkesztések a körző és a vonalzó korlátozott használatával.

13. §. A Mohr-Mascheroni-féle szerkesztések.....	27
14. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések.....	31
15. §. Véges vonalzóval végezhető szerkesztések. A sík határolt részén vonalzóval végezhető szerkesztések.....	35
16. §. Vonalzóval végezhető affin szerkesztések.....	37
17. §. Vonalzóval végezhető metrikus szerkesztések.....	41
18. §. A Poncelet-Steiner-féle szerkesztések.....	44
19. §. Az alapkör középpontjának nélkülözhetetlensége a Poncelet-Steiner-féle szerkesztésekben.....	46

20. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések egy akármilyen kicsiny körív és a hozzátartozó kör középpontjának felhasználásával.	Lap 49
21. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések egy ismeretlen középpontú kör, vagy egy kúpszelet felhasználásával. Projektív másodfokú szerkesztések.	50

#### IV. Geometriai szerkesztések a vonalzó használatának kiterjesztésével. Geometriai kísérletek.

22. §. Geometriai szerkesztések egységátrakó vonalzóval.	53
23. §. Párhuzamos élű vonalzóval végezhető szerkesztések.	55
24. §. Szögvonallal végezhető geometriai szerkesztések és kísérletek.	55
25. §. Geometriai szerkesztések és kísérletek derékszögvonallal. Harmadfokú egyenletek megoldása két derékszögvonallal	56
26. §. Egységátrakó vonalzóval végezhető geometriai kísérletek. Szög-harmadolás. Köbgyökvonás. Harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása.	59
27. §. Papírhajtogatással végezhető szerkesztések.	62

#### V. Körzővel és vonalzóval végezhető szerkesztések, ha meg van rajzolva egy körtől különböző kúpszelet, vagy egy harmadrendű görbe.

28. §. Geometriai szerkesztések körtől különböző megrajzolt kúpszelet felhasználásával.	64
29. §. Geometriai szerkesztések harmadrendű görbék segítségével.	67

#### VI. Geometrográfia.

30. §. Geometrográfikus képlet	69
31. §. A geometriai szerkesztések egyszerűsége.	70

#### VII. Körnégyszögesítés

32. §. A körnégyszögesítés és a körkiegyenesítés feladata.	72
33. §. Lindemann általános tételének bizonyítása.	73
34. §. Lindemann általános tételének néhány következménye. Kör-, ellipszis-, hiperbola- és parabolaszélet négyszögesítése.	77
35. §. Négyszögesíthető körkétszögek. Hippokrates holdacskái.	79
Irodalom.	82
Név- és tárgymutató.	83

## ELŐSZÓ.

A geometriai szerkesztések elméletének ez az összefoglalása azokban az előadásokban gyökeredzik, amelyeket a Ferenc József-tudományegyetemen több ízben tartottam. Ahhoz az elhatározáshoz, hogy ez az összefoglalás napvilágot lásson, nem kis részben járult hozzá az a több oldalról kifejezett óhajtás, hogy a középiskolai matematikus tanárok részére 1942 nyarán rendezett továbbképző tanfolyamon erről a tárgyról tartott előadásaim szélesebb körök részére hozzáférhetőek legyenek.

A geometriai szerkesztések elmélete a legklasszikusabb tudományágak közé tartozik. Varázsát a régi görögök óta a mai napig nem veszítette el. Ennek a munkának célja az, hogy a geometriai szerkesztések elméletének főbb eredményeit lehetőleg röviden, de azért könnyen, érthetően és áttekinthetően összefoglalja. Ennek a célnak megfelelően néhány olyan eredményt, amelyet jelentőségéhez képest túlságosan hosszadalmasan, vagy nehézkesen lehetne megokolni, szövegalatti jegyzetben bizonyítás nélkül közlünk.

A munka — címének megfelelően — a geometriai szerkesztések elméletét és nem egyes szerkesztéseket kíván ismertetni. Emiatt egyes szerkesztéseket csak akkor tárgyal, ha azok az elmélettel szoros összefüggésben vannak, vagy annak megvilágítására szükségesek és alkalmasak. Ezért nem törekszik arra, hogy a tárgyalt szerkesztéseket a legegyszerűbb alakban állítsa elő, hanem csak arra, hogy a megengedett rajzeszközökkel való keresztülvitelük lehetőségét igazolja.

A munka terjedelmének korlátozása miatt nem lehetett a szerkesztések elméletével összefüggésben levő minden szempontot figyelembe venni. Ez a munka csak az euklidesi és a projektív síkon való szerkesztéseket tárgyalja, noha a gömbön és a Bolyai-síkon való szerkesztéseknek is egész irodalmuk van. Ez magyarázza meg azt is, hogy a geometriai szerkesztések elméletének a gyakorlati matematikust különösen érdeklő következő kérdései: a geometriai szerkesztések módszerei, a szerkesztési hibák elmélete és a különböző geometriai műszereknek és alkalmazásuknak ismertetése ebben a munkában nem jutnak, vagy alig jutnak szóhoz.

Nem tárgyalja ez a munka a közelítő szerkesztéseket sem, de ismeret harmadfokú és negyedfokú feladatok megoldására szolgáló geometriai kísérleteket. Ezek azonban nem megközelítések, hanem pontos szer-

kesztések. A kísérlet szó azt akarja jelenteni, hogy alkalmazásakor a vonalzónak a kívánt helyzetbe való hozása — a két adott ponton átmenő egyenes húzásával szemben — bizonyos kísérletezéssel, próbálgatással történik. Amíg ugyanis két adott ponton átmenő egyenes húzásakor a vonalzó helyzetének két föltételt kell kielégítenie, addig geometriai kísérlet alkalmazásakor a vonalzó helyzetére három föltételnek kell teljesülnie. Ilyen pl. a következő három föltétel: a vonalzó élének adott ponton kell átmennie, két megjelölt pontjának pedig egy-egy adott vonalra kell esnie; vagy: egy derékszög vonalzó két szárának egy-egy adott ponton kell átmennie, csúcának pedig egy adott vonalra kell esnie. Ha a vonalzót sikerült a kívánt helyzetbe hozni, akkor a geometriai kísérlet pontos szerkesztést szolgáltat.

Ez a könyv az olvasótól általában nem kíván meg több matematikai és geometriai ismeretet, mint amennyivel egy alsóbb éves matematikus egyetemi hallgató rendelkezhetik. A szükséges algebrai kiegészítéseket ott adjuk meg, ahol azokra éppen szükség van. Megjegyezzük, hogy az 1. §-on kívül az I. és II. fejezet algebrai vizsgálatai nem szükségesek a III—VI. fejezet fejtegetéseinek megértéséhez.

A matematikai irodalom a geometriai szerkesztések elméletére vonatkozólag több kitűnő munkával rendelkezik. Ezeknek jegyzékét e könyv végén található irodalmi összeállítás tartalmazza. Legtöbbet Vahlen munkájából merítettünk, de felhasználtuk Enriques és Adler könyvét és az újabb irodalmat is. Ahol lehetett, az ismert tárgyalásmódokon kisebb-nagyobb mértékben egyszerűsítettünk. Több olyan eredményt is ismertettünk, amelyet tankönyvszerűen még nem dolgoztak fel. Nem tartottuk szükségesnek az egyes olyan részletek megjelölését, amelyek — véleményünk szerint — ebben a könyvben látnak először napvilágot.

Könyvünk csak a legszükségesebb irodalmi idézetekre szorítkozik. A részletes irodalmi adatok iránt érdeklődő olvasó bőséges tájékozást találhat az irodalmi összeállításban idézett német és olasz enciklopédiacikkekben, továbbá Vahlen és Enriques könyvében.

A geometriai szerkesztések elméletében rejlik az az érdekesség, amely harmadfélezer éven át annyi embernek okozott gyönyörűséget és elmélyedést, e könyv szerzőjét arra a reményre biztatja, hogy könyvének tárgya a magyar olvasóban is kíváncsi érdeklődést és vonzalmat fog kelteni.

Kolozsvárt, 1943. július havában.

*Dr. Szökefalvi Nagy Gyula*  
egyetemi ny. r. tanár.

## I. A körzővel és vonalzóval végezhető szerkesztések algebrai vizsgálata.

### 1. §. Körzővel és vonalzóval végezhető geometriai szerkesztések és algebrai ismertetőjelek.

Az elemi geometriai szerkesztések segédeszköze a *vonalzó* és a *körző*. A *vonalzót* két adott ponton átmenő egyenes húzására, a *körzőt* adott pont körül adott sugarú kör rajzolására használjuk<sup>1)</sup>. A geometriai szerkesztések klasszikus elmélete Euklides követelményeivel megegyezésben föltételezi, hogy bármely két ponton át lehet vonalzóval egyenest húzni és bármely pont körül bármely sugárral lehet kört rajzolni.

A vonalzóval és körzővel végezhető szerkesztéseket a következő háromféle alapszerkesztésből tehetjük össze:

1. két egyenes metszéspontjának meghatározása,
2. egyenes és kör metszéspontjainak meghatározása,
3. két kör metszéspontjainak meghatározása.

Bármely geometriai szerkesztést következőkép lehet fogalmazni:

Adva van a síkban bizonyos számú pont; olyan pontot vagy pontokat kell szerkeszteni, amelyeknek egymáshoz és az adott pontokhoz viszonyított helyzetét adott távolságok és szögek adott módon jellemzik.

Azt a kérdést, hogy valamely szerkesztés körzővel és vonalzóval elvégezhető-e, legkönnyebben úgy dönthetjük el, hogy a geometriai szerkesztést algebrai alakra hozzuk. Sokszor ez az egyetlen eljárás, amely célhoz vezet.

A geometriai szerkesztésnek algebrai köntösbe való öltöztetése végett a síkon felvesszünk egy derékszögű koordinátarendszert. Egyszerűség kedvéért ezt a koordinátarendszert úgy választjuk meg, hogy kezdőpontja és  $x$ -tengelyének egységpontja egy-egy adott pontba essék. Az ilyen koordinátarendszert az adatokhoz kapcsoltnak nevezzük. Ha csak egy  $O$  pont van megadva, akkor bármely olyan derékszögű koordinátarend-

<sup>1)</sup> A vonalzó és körző más módon való alkalmazása geometriai kísérlet. Pl. egy körhöz a rajta kívül fekvő  $P$  pontból az érintéspont előzetes meghatározása nélkül is lehet érintőt húzni. Az érintőnek az érintéspont meghatározása nélkül való meghúzása nem szerkesztés, hanem geometriai kísérlet.

szer, amelynek  $O$  a kezdőpontja és egyik adott szakasz az egysége, az adatokhoz kapcsolt. Ha nincs adott pont, akkor bármely olyan derékszögű koordináta-rendszer, amelyben az egységsszakasz egy adott szakasszal egyenlő, az adatokhoz kapcsolt.

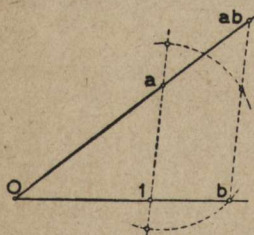
A koordináta-rendszer megválasztása után az adott szakaszokat és szögeket is pontokkal ábrázolhatjuk, mégpedig a  $(d, 0)$  ponttal a  $d$  hosszúságú szakaszt, a  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$  ponttal pedig az  $\alpha$  szöget.

Ha  $a$  és  $b$  az így kapott véges számú pontból körzővel és vonalzóval szerkeszthető két pontnak egy-egy koordinátája, vagy egy pontnak két koordinátája, vagyis más szóval kifejezve: ha  $a$  és  $b$  szerkeszthető szám, akkor

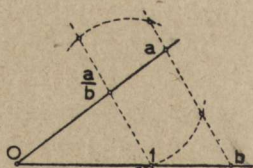
$$a + b, a - b, ab, \frac{a}{b} (b \neq 0) \text{ és } \sqrt{a} (a > 0)$$

is szerkeszthető szám.

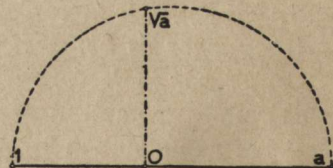
Az  $a + b$  és  $a - b$  szerkesztése közismert. Az  $ab$  és az  $\frac{a}{b}$  szám szerkesztése végett feltételezhetjük, hogy  $a$  és  $b$  pozitív,  $\sqrt{a}$  szerkesztése végett pedig fel is kell tételeznünk, hogy  $a$  pozitív. A szerkesztést az alábbi három ábra mutatja:



1. ábra.



2. ábra.



3. ábra.

Az első két ábrában egy szög szárainak egy párhuzamos egyenes-párral való metszésével kapjuk az  $ab$  és az  $\frac{a}{b}$  számot. Adott ponton átmenő és adott egyenessel párhuzamos szerkesztésére azt a tételt használtuk fel, hogy az olyan konvex húrnégyszög, amelynek szemközt fekvő két oldala egyenlő, vagy trapéz, vagy parallelogramma.

A harmadik ábrában a mértani középárányos ismert szerkesztésével kapjuk a  $\sqrt{a}$  számot.

A számoknak egy olyan összességét, amely hozzátartozó bármely két számmal együtt azok összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát is tartalmazza (zérust, mint osztót kizárva), *számtestnek* nevezzük. A legkisebb, legszűkebb olyan számtest, amelyben van zérustól különböző szám is, a racionális számok összességéből álló *racionális számtest*. Ez a számtest az egységből racionális műveletekkel nyilvánkép felépíthető

és bármely olyan számtestnek része, amelynek van zérustól különböző száma. Ha ugyanis egy számtest tartalmazza az  $a (\neq 0)$  számot, akkor tartalmazza az  $\frac{a}{a} = 1$  számot és ezzel együtt a racionális számtestet is.

A számtest értelmezésével kimondhatjuk a következő tételt:

*Egy derékszögű koordinátarendszerben az adott pontokból az adott távolságok és szögek felhasználásával körzővel és vonalzóval szerkeszthető pontok koordinátái egy  $S^*$  számtestet alkotnak. Ennek a számtestnek jellemző tulajdonsága, hogy bármely pozitív számának négyzetgyökét is tartalmazza.*

Az adatokhoz kapcsolt koordinátarendszerben ez a tétel is igaz:

*Adott pontokból adott távolságok és szögek felhasználásával körző és vonalzó segítségével olyan és csak olyan pontok szerkeszthetők, amelyeknek az adatokhoz kapcsolt egy tetszőleges derékszögű koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái abban a legkisebb  $S^*$  számtestben vannak, amely magában foglalja az adatokhoz tartozó pontok koordinátáit és bármely pozitív számának négyzetgyökét.*

Ennek a tételnek igazolására nyilvánkép elég azt kimutatnunk, hogy olyan pontokból, amelyeknek koordinátái az  $S^*$  számtesthez tartoznak, az alapszerkesztésekkel szintén  $S^*$ -hoz tartozó koordinátákkal bíró pontokat kapunk.

Ha ugyanis a  $P_1 = (x_1, y_1)$  és a  $P_2 = (x_2, y_2)$  pont koordinátái és  $r$  az  $S^*$  számtesthez tartoznak, akkor a  $P_1 P_2$  egyenes, illetőleg a  $P_1$  pont körül  $r$  sugárral leírt kör

$$\text{illetőleg} \quad \begin{aligned} x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 &= 0, \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

egyenletének együtthatói is nyilvánképen hozzátartoznak az  $S^*$  számtesthez.

Azoknak a pontoknak koordinátái tehát, amelyekhez az 1., 2., illetőleg 3. alapszerkesztéssel jutunk,

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 & \text{és} & & A_1 x + B_1 y + C_1 &= 0, \\ Ax + By + C &= 0 & \text{és} & & (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

illetőleg

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{és} \quad (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$$

alakú két egyenletnek tesznek eleget, amelyekben  $A, B, C, A_1, B_1, C_1, a, b, a_1, b_1, r$  és  $r_1$  az  $S^*$  számtesthez tartozó szám.<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Vannak olyan geometriai szerkesztések, amelyekben paraméterek szerepelnek. Az  $AB$  szakasz felezőpontja pl.  $A$  és  $B$  körül az  $AB$  szakasz felénél nagyobb bármely  $r$  sugárral leírt körpár metszéspontjait összekötő egyenesnek az  $AB$  egyenessel való metszéspontja. Az  $r$  sugár itt paraméter. Minthogy tetszőlegesen vehetjük fel, azért

Az ilyen egyenletrendszerek megoldásai azonban vagy  $R$ , vagy  $R + R_1/\sqrt{R_2}$  alakú számok, ahol  $R$ ,  $R_1$  és  $R_2$  a két egyenlet együtthatóinak racionális kifejezése és emiatt az  $S^*$  számtesthez tartozó szám. Valós metszéspontokat csak akkor kapunk, ha  $R_2 \geq 0$ . A geometriai szerkesztésekben a képzetes metszéspontokat figyelmen kívül hagyhatjuk.<sup>3)</sup>

Egymást (valós pontokban) nem metsző  $K_1$  és  $K_2$  kör képzetes metszéspontjait össze lehet ugyan kötni valós egyenessel, a két kör hatványvonalával. Ennek szerkesztése azonban csupa valós pontok felhasználásával úgy történik, hogy olyan  $K_3$  és  $K_4$  kört veszünk fel, amely mind a  $K_1$ , mind a  $K_2$  kört metszi. A  $K_1$  és  $K_2$  kör hatványvonala a  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  és a  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_4$  körhármashatványpontjának összekötő egyenese.

Hasonlóképp meg lehet szerkeszteni egy  $K$  körhöz és a  $K$  kört nem metsző  $e$  egyeneshez azt az adott  $P$  ponton átmenő  $K'$  kört, amelynek a  $K$  körrel való hatványvonala az  $e$  egyenes. Ez a  $K'$  kör tehát átmegy a  $P$  ponton és az  $e$  egyenesnek a  $K$  körrel való képzetes metszéspontjain.

Ezzel a kimondott tételt teljesen bebizonyítottuk.

## 2. §. Harmadfokú irreducibilis egyenletnek egy gyökét sem lehet körzövel és vonalzóval szerkeszteni.

Föltételezzük, hogy a valós együtthatókkal bíró

$$f(x) = x^3 + H_1 x^2 + H_2 x + H_3 = 0$$

harmadfokú egyenlet a  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  együtthatót magában foglaló  $S_0$  számtestben irreducibilis. Ez azt jelenti, hogy az  $f(x)$  polinom nem írható fel olyan első és másodfokú kifejezés szorzataként, amelynek együtthatói az  $S_0$  számtestnek szintén számai.

Az  $f(x) = 0$  egyenlet gyökeinek szerkesztése végett a derékszögű koordinátarendszert tetszőlegesen vehetjük fel. Ennek felvétele után az  $x$ -tengely 1,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  abszcisszájú pontja meghatározza az  $f(x) = 0$

az  $AB$  szakasz felénél nagyobb akármelyik adott szakasszal, pl. az  $AB$  szakasszal egyenlőnek választhatjuk. Így elérhetjük azt, hogy még átmenetileg se szerepeljenek szerkesztéseinkben olyan pontok, amelyeknek koordinátái nem tartoznak az  $S^*$  számtesthez. Ugyanezt meg lehet tenni bármely olyan szerkesztésben, amelyben paraméterek szerepelnek.

<sup>3)</sup> A szerkeszthető számok  $S^*$  számteste a koordinátarendszer megválasztásától független a következő értelemben. Ha egy olyan más  $x'$ ,  $y'$  derékszögű koordinátarendszert veszünk fel, amelynek kezdőpontja és egységpontja (az  $x' = 1$  és  $y' = 1$  koordinátájú pont) adott, vagy az adatokból körzövel és vonalzóval szerkeszthető pont, akkor egy  $P$  pontnak  $x, y$  és  $x', y'$  koordinátái között olyan lineáris transzformációs egyenletek vannak, amelyeknek együtthatói hozzátartoznak az adatok  $x$  és  $y$  koordinátáival meghatározott  $S^*$  számtesthez. Ha tehát az  $x, y$  és  $x', y'$  koordinátapár közül az egyik hozzátartozik az  $S^*$  számtesthez, akkor a másik is.

egyenletet. Az egyenlet gyökeinek meghatározására irányuló szerkesztésben tehát ez a négy pont megadott pont.

Föltesszük, hogy az  $f(x) = 0$  harmadfokú egyenlet  $x_1$  gyöke körzővel és vonalzóval szerkeszthető. Ez az  $x_1$  szám nem tartozik az  $S_0$  számtesthez, mert ha hozzátartoznék, akkor  $f(x)$  az  $S_0$  számtestben reducibilis volna, mivel  $f(x)$  osztható  $(x - x_1)$ -gyel.

Az a föltevés, hogy  $x_1$  körzővel és vonalzóval szerkeszthető, azt jelenti, hogy a három alapszerkesztésnek *véges számú* megfelelő alkalmazásával az  $x$  tengely  $1, H_1, H_2, H_3$  pontjából eljuthatunk az  $x_1$  ponthoz.

Az  $x_1$  pont szerkesztése végett egymásután véges számszor alkalmazott alapszerkesztésekben új pontokat az adott és a belőlük szerkesztett pontokkal meghatározott egyenesek és körök metszéspontjai szolgáltatnak. A már szerkesztett pontokat a következő szerkesztésekre nézve adott pontoknak kell tekintenünk. A további szerkesztésekben az  $S_0$  számtest szerepét tehát az a számtest veszi át, amely  $S_0$  számain kívül a szerkesztett pontok koordinátáit is magában foglalja. Ez az  $S$  számtest akkor egyezik meg  $S_0$ -lal, ha a szerkesztett pontok koordinátái  $S_0$ -hoz tartoznak. Ha azonban valamelyik szerkesztett pont koordinátája nem száma  $S_0$ -nak, akkor az  $S$  számtest  $S_0$ -nak egy kibővítése. Ez a számtest tartalmazza  $S_0$  számain és mindazokat a számokat, amelyek  $S_0$  számaiból és a már szerkesztett pontok koordinátáiból a racionális műveletek tet-szőleges alkalmazásával származnak.

Mivel  $x_1$  nincs az  $S_0$  számtestben, de föltevésünk szerint véges számú alapszerkesztéssel megkaphatjuk az  $x$ -tengely  $x_1$  abszcisszájú pontját, azért  $S_0$ -ból a már szerkesztett pontok koordinátáinak a számtesthez való fokozatos hozzácsatolása után végül olyan számtesthez kell jutnunk, amely az  $x_1$  számot magában foglalja.

Egy újonnan kapott  $P$  pont koordinátái csak akkor bővítik az előzőleg szerkesztett pontok koordinátáit tartalmazó  $S$  számtestet, ha  $P$ -t körnek egyenessel, vagy körrel való metszéspontjaként kapjuk. Ekkor  $P$  koordinátái olyan másodfokú egyenleteknek gyökei, amelyeknek együtthatói  $S$ -hez tartozó számok.  $S$ -nek tehát legalább egyik koordinátája  $u = p + q\sqrt{c}$  alakú, ahol  $p, q (\neq 0)$  és  $c (> 0)$  hozzátartozik az  $S$  számtesthez,  $\sqrt{c}$  azonban nem.

Az  $u = p + q\sqrt{c}$  számnak az  $S$  számtesthez való csatolása, adjungálása a számtestet  $S' = S(u) = S(p + q\sqrt{c})$  számtestté bővíti. A számtest értelmezése szerint  $S'$  számai  $u$ -ból és  $S$  számaiból racionális műveletekkel származnak és emiatt  $u$ -nak olyan racionális kifejezései, amelyeknek együtthatói  $S$ -hez tartoznak. Mivel  $p$  és  $q$   $S$ -hez tartozik és mivel  $\sqrt{c} = \frac{u-p}{q}$  és  $u = p + q\sqrt{c}$ , azért az  $S(u) = S(p + q\sqrt{c})$  és az  $S(\sqrt{c})$  számtest összeesik.

Az  $S' = S(p + q\sqrt{c}) = S(\sqrt{c})$  számtest bármely száma  $a + b\sqrt{c}$  alakú, ahol  $a$  és  $b$  az  $S$  számteshez tartozó szám.

Egyfelől ugyanis bármely ilyen alakú szám  $S'$ -höz tartozik, mivel az  $a$ ,  $b$  és  $\sqrt{c}$  számmal együtt  $a + b\sqrt{c}$  is száma az  $S'$  számtestnek; másfelől pedig bármely két ilyen  $A_1 = a_1 + b_1\sqrt{c}$  és  $A_2 = a_2 + b_2\sqrt{c}$  számnak nemcsak az összege és különbsége, hanem a szorzata és hányadosa is ilyen alakú, mivel

$$A_1 A_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2 c) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \sqrt{c} \quad \text{és ha } A_2 \neq 0, \text{ akkor}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_1 + b_1 \sqrt{c}}{a_2 + b_2 \sqrt{c}} = \frac{a_1 + b_1 \sqrt{c}}{a_2 + b_2 \sqrt{c}} \cdot \frac{a_2 - b_2 \sqrt{c}}{a_2 - b_2 \sqrt{c}} = \frac{(a_1 a_2 - b_1 b_2 c) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) \sqrt{c}}{a_2^2 - b_2^2 c}$$

és itt a nevező zérustól különbözik. Ha ugyanis  $a_2^2 - b_2^2 c = 0$  volna, akkor föltevésünkkel ellentétben  $\sqrt{c} = \frac{a_2}{b_2}$  és ezzel együtt  $u = p + q\sqrt{c}$  is hozzátartoznék az  $S$  számtesthez.

Ezzel az előbbi állítást bebizonyítottuk.

Az  $f(x) = 0$  harmadfokú egyenletnek az  $S_0$  számtestben nincs gyöke, de föltevésünk szerint  $S_0$ -ból a leírt módon való fokozatos bővítéssel el lehet jutni olyan számtesthez, amelyben van gyöke. Ezért feltételezhetjük, hogy az  $f(x) = 0$  egyenletnek még nincs gyöke az  $S$  számtestben, de már van gyöke az  $S' = S(\sqrt{c})$  számtestben, ahol  $c$  az  $S$  számtest egy pozitív száma. Ha  $x_1$  az  $f(x) = 0$  egyenletnek az  $S'$  számtestben levő gyöke, akkor az előzők szerint  $x_1 = a + b\sqrt{c}$  alakban írható, ahol  $a$ ,  $b$ , és  $c (> 0)$   $S$ -hez tartozik,  $\sqrt{c}$  azonban nem.

Mivel  $f(x_1) = 0$ , azért

$$f(a + b\sqrt{c}) = A + B\sqrt{c} = 0,$$

ahol

$$A = (a^3 + 3ab^2c) + H_1(a^2 + b^2c) + H_2a + H_3$$

és

$$B = (3a^2b + b^3c) + 2H_1ab + H_2b.$$

Az  $A + B\sqrt{c} = 0$  egyenlet csak akkor állhat fenn, ha  $B = 0$ . Ha ugyanis  $B \neq 0$  volna, akkor föltevésünkkel ellentétben  $\sqrt{c} = -\frac{A}{B}$  és  $x_1 = a + b\sqrt{c}$  már az  $S$  számtestnek is száma volna.

Ha azonban  $B = 0$ , akkor egyúttal  $A = 0$  és így

$$f(a - b\sqrt{c}) = A - B\sqrt{c}$$

is eltűnik. Az  $f(x) = 0$  egyenletnek tehát nemcsak  $x_1 = a + b\sqrt{c}$ , hanem  $x_2 = a - b\sqrt{c}$  is gyöke. Ha ennek az egyenletnek  $x_3$  a harmadik gyöke, akkor a gyökök és az egyenlet együtthatói között levő összefüggések miatt

$$x_1 + x_2 + x_3 = -H_1, \quad \text{vagyis } x_3 = -H_1 - (x_1 + x_2) = -H_1 - 2a.$$

Ez azonban ahhoz az ellentmondáshoz vezet, hogy az  $f(x)=0$  egyenletnek már az  $S$  számtestben is van gyöke.

Ebből az ellentmondásból következik, hogy az  $f(x)=0$  irreducibilis harmadfokú egyenletnek  $x_1$  gyöke körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

*Irreducibilis harmadfokú egyenleteknek gyöke körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető.*

Ha a racionális együtthatókkal bíró harmadfokú  $f(x)=0$  egyenlet (a racionális számtestben) reducibilis, akkor van racionális gyöke, mert az  $f(x)$  polinomnak van racionális együtthatókkal bíró elsőfokú tényezője. Ha pedig  $x_1$  az egyenlet racionális gyöke, akkor az egyenlet reducibilis, mert  $f(x)$  osztható az  $x-x_1$  tényezővel. Ezért az előbbi tételt így is kimondhatjuk:

*Racionális együtthatókkal bíró olyan harmadfokú egyenletnek, amelynek nincs racionális gyöke, nincs körzővel és vonalzóval szerkeszthető gyöke sem.*

Ha a harmadfokú  $f(x)=0$  egyenlet  $H_1$ ,  $H_2$  és  $H_3$  együtthatója egész szám, akkor véges számú lépéssel el lehet dönteni, hogy az egyenletnek van-e racionális gyöke, mivel az egyenlet racionális gyöke szükségképpen egész szám és  $H_3$  szám osztója.

Ha ugyanis  $a$  és  $b$  ( $b>0$ ) olyan közös osztó nélküli egész szám, hogy

$$b^3 f\left(\frac{a}{b}\right) = a^3 + b(H_1 a^2 + H_2 a b + H_3 b^2) = 0 \\ = a(a^2 + H_1 a b + H_2 b^2) + H_3 b^3 = 0,$$

akkor az előző kifejezés két alakja közül az elsőből az következik, hogy  $b=1$ , a másodikból pedig az, hogy  $H_3$  osztható  $a$ -val.

### 3. §. Déloszi probléma. Triszekció. Szabályos kilencszög és hétszög.

#### a) Déloszi probléma.

Ez a feladat: egy kocka éléből a kétszer akkora térfogatú kocka élének, vagyis a hosszúság egységéből a  $\sqrt[3]{2}$  hosszúságú szakasznak szerkesztése.<sup>4)</sup> A déloszi feladat tehát az  $x^3-2=0$  harmadfokú egyenlet

<sup>4)</sup> A feladat keletkezését Plutarchos görög történetíró írta meg. Egyszer Délosz szigetén pestis dühöngött. A délosziak szorultságukban a delfii jósdához fordultak. Onnan arra a kérdésükre, hogy mitevők legyenek, azt a feleletet kapták, hogy cseréljék ki Apollo delfii kockaalakú oltárkövét kétszer akkora kockaalakú oltárkövével, ha a pestistől meg akarnak szabadulni.

Ez az aránylag könnyűnek látszó feladat a régi görögöknek legyőzhetetlen nehézséget okozott, de egyúttal számos értékes geometriai vizsgálatnak megindítója lett. A feladat megoldására Plato mekhanikai eszközt készített, Archytas térgörbét vizsgált, Menaechmus felfedezte a kúpszeleteket, Nikomedes a konchoist, Diokles a cissoist stb.

gyökének körzővel és vonalzóval való szerkesztését kívánja meg.

*A déloszi probléma körzővel és vonalzóval nem oldható meg.*

Ennek kimutatására az előző § utolsó tétele alapján csak azt kell igazolnunk, hogy az  $x^3 - 2 = 0$  egyenletnek nincs racionális gyöke.

Ha ugyanis volna ennek az egyenletnek racionális gyöke, az egész szám és  $-2$ -nek osztója volna. Mivel  $+1, -1, +2$  és  $-2$  közül egyik sem gyöke az egyenletnek, azért az egyenletnek nincs racionális gyöke.

Hasonlóképp az  $x^3 - A = 0$  egyenletnek sincs szerkeszthető gyöke, ha  $A$  olyan racionális szám, amely nem egyenlő egy racionális szám harmadik hatványával, mivel ekkor az egyenletnek nincs racionális gyöke.

**b) Triszekció, szögharmadolás, vagyis szögnek vagy körívnek három egyenlő részre osztása.**

Mivel a  $\varphi$  szögből  $\cos \varphi$  és  $\sin \varphi$ -ből a  $\varphi$  szög egyszerűen szerkeszthető, azért a triszekció feladatát  $\cos \frac{\varphi}{3}$ -nak  $\cos \varphi$ -ből való szerkesztésére vihetjük át.

Moivre képlete szerint

$$\left( \cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3} \right)^3 = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Ennek az egyenletnek valós részére fennáll a

$$\cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3} = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3} = \cos \varphi,$$

vagyis a

$$\left( 2 \cos \frac{\varphi}{3} \right)^3 - 3 \left( 2 \cos \frac{\varphi}{3} \right) - 2 \cos \varphi = 0$$

egyenlet. Ebből a szögharmadolás, triszekció egyenlete

$$(2) \quad x^3 - 3x - C = 0, \text{ ahol } C = 2 \cos \varphi, \quad x = 2 \cos \frac{\varphi}{3}.$$

Ennek a harmadfokú egyenletnek a  $C = -2$  ( $\varphi = \pi$ ) esetben  $x = 1 = 2 \cos \frac{\pi}{3}$  gyöke. A  $\pi$  szögnek és vele a derékszögnek harmadolása tehát körzővel és vonalzóval elvégezhető. Ha azonban  $C$  tetszőleges szám, akkor az  $x^3 - 3x - C = 0$  egyenlet gyökét körzővel és vonalzóval általánosságban nem lehet szerkeszteni, noha végtelen sok olyan  $C$  szám van, amelyre nézve az egyenletnek van szerkeszthető gyöke. Ilyenek pl. a  $C = (a + b\sqrt{c})^3 - 3(a + b\sqrt{c})$  alakú számok, ahol  $a, b$  és  $c$  racionális szám.

*Tetszőlegesen megadott szöget körzővel és vonalzóval nem lehet három egyenlő részre osztani.*

Ennek igazolására elég kimutatnunk azt, hogy a legkönnyebben szerkeszthető szöget, a  $\frac{\pi}{3}$  szöget sem lehet körzővel és vonalzóval három

egyenlő részre osztani. Erre az esetre a szögharmadolás egyenlete

$$(3) \quad x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek nincs racionális gyöke mivel a  $-1$  szám két osztója közül sem  $+1$ , sem  $-1$  nem gyöke a (3) egyenletnek.

A 2. § utolsó tétele szerint ebből következik a kimondott tétel igazsága és egyúttal a következő tétel:

*Az egyenes szöget nem lehet körzővel és vonalzóval kilenc egyenlő részre osztani.*

### c) Szabályos kilencszög.

Mivel bármely szöget lehet körzővel és vonalzóval felezni és kettővel szorozni, azért  $n$ -oldalú és  $2n$ -oldalú szabályos sokszög közül vagy mindkettő szerkeszthető, vagy egyik sem. Mivel a 18-oldalú szabályos sokszög egy oldalához tartozó  $\frac{\pi}{9}$  középponti szög az előbb kimutatott tétel szerint körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető, azért igaz a következő tétel:

*Szabályos kilencszöget körzővel és vonalzóval nem lehet szerkeszteni.*

### d) Szabályos hétszög.

Kimutatjuk, hogy körzővel és vonalzóval nem lehet 14-oldalú szabályos sokszöget szerkeszteni. Ez ugyanazt jelenti, mint a következő tétel:

*Szabályos hétszöget nem lehet körzővel és vonalzóval szerkeszteni.*

Az egységsugarú körbe írt 14-oldalú szabályos sokszög  $x = a_{14}$  oldalának trigonometrikus kifejezése

$$x = a_{14} = 2 \sin \frac{\pi}{14} = -2 \cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{14} \right) = -2 \cos 2 \frac{2\pi}{7}.$$

$$\text{Ha } \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}, \text{ akkor } x = a_{14} = -(\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}).$$

$\varepsilon$  mint hetedik egységgyök eleget tesz a

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

egyenletnek és így  $\varepsilon^{-3}$ -val való szorzás után az

$$(\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3}) + (\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}) + (\varepsilon + \varepsilon^{-1}) + 1 = 0$$

egyenlőséghez jutunk. Ebből az  $\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = -x$  egyenlőség felhasználásával és négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$(x-1)^2 = [(\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3}) + (\varepsilon + \varepsilon^{-1})]^2 = (\varepsilon^6 + 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-6}) + 2(\varepsilon^4 + 2 + \varepsilon^{-4}) = -x^3 + 2x^2.$$

Az egységsugarú körbe írt szabályos 14-oldalú sokszög oldala tehát gyöke az

$$(4) \quad x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

egyenletnek. Ennek az egyenletnek gyöke körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető meg, mivel nincs racionális gyöke. Ezt épúgy lehet kimutatni, mint ahogy a (3) egyenletről kimutattuk.

#### 4. §. Szabályos tízszög és ötszög.

Eddig olyan feladatokat vizsgáltunk, amelyek megoldása körzővel és vonalzóval vagy sohasem, vagy, miként a triszekció, általánosságban nem lehetséges. Ezekkel szemben a szabályos tízszög és ötszög szerkesztése körzővel és vonalzóval keresztülvihető. Ezt már Euklides észrevette.

Az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög  $x = a_{10}$  oldalára az

$$(5) \quad x = a_{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \right) = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$$

egyenlőség érvényes. Ha  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ , akkor  $x = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$ .

Az  $\varepsilon$  szám, mint ötödik egységgyök, gyöke a

$$\frac{z^5 - 1}{z - 1} = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

egyenletnek. Ezért

$$\varepsilon^{-2}(\varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = (\varepsilon^2 + 2 + \varepsilon^{-2}) + (\varepsilon + \varepsilon^{-1}) - 1 = x^2 + x - 1 = 0.$$

Az egységsugarú körbe írt szabályos tízszög  $x$  oldala tehát gyöke az

$$(6) \quad x^2 + x - 1 = 0$$

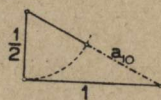
egyenletnek. Ezt az egyenletet

$$1 : x = x : (1 - x)$$

alakban is írhatjuk. Ebből következik, hogy az  $r$  sugarú körbe írt szabályos tízszög oldala a sugár aranymetszésekor kapott nagyobbik szakasszal egyenlő.

A (6)-os egyenletből kapjuk, hogy

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}.$$



Ebből következik  $a_{10}$  derékszögű háromszöggel való ismert szerkesztése (4. ábra):

4. ábra.

Az egységsugarú körbe írt szabályos ötszög  $a_5$  oldalára fennáll az

$$a_5 = 2 \sin \frac{\pi}{5} = 4 \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \sqrt{4 - \left(2 \sin \frac{\pi}{10}\right)^2}$$

egyenlőség. Mivel az (5)-ös és (6)-os egyenletből

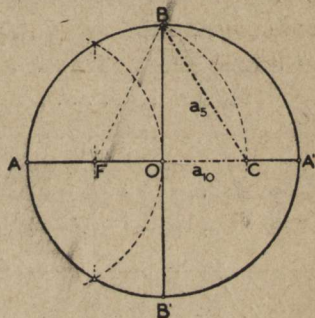
$$a_{10} = 2 \sin \frac{\pi}{10} \quad \text{és} \quad a_{10}^2 - 1 = -a_{10},$$

azért

$$a_5^2 = a_{10}^2 (4 - a_{10}^2) = 1 + 2 a_{10}^2 - (a_{10}^2 - 1)^2 = 1 + a_{10}^2.$$

Ezzel igazoltuk a szabályos ötszög és tizszög következő szerkesztését:

Az  $O$  középpontú  $K$  körben megrajzoljuk a merőleges  $AA'$  és  $BB'$  átmérőpárt. Ha az  $AO$  sugár  $F$  felezőpontja körül a  $BF$  sugárral leírt kör  $C$  pontban metszi a  $K$  kör  $OA'$  sugarát, akkor a  $BC$ , illetőleg  $OC$  szakasz a  $K$  körbe írt szabályos ötszögnek, illetőleg tizszögnek oldalával egyenlő.



5. ábra.

## 5. §. Szabályos 34-oldalú és 17-oldalú sokszög.

Gauss 18 éves korában mutatta ki a következő tételt:

*Szabályos tizenhétszög körzövel és vonalzóval szerkeszthető.*

Ennek a tételnek kimutatása végett azt igazoljuk, hogy az egység-sugarú körbe írt 34-oldalú szabályos sokszög

$$(7) \quad x = a_{34} = 2 \sin \frac{\pi}{34} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{34} \right) = 2 \cos 4 \cdot \frac{2\pi}{17}$$

oldala körzövel és vonalzóval szerkeszthető.

Ha

$$(8) \quad \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17} \quad \text{és} \quad c_h = \varepsilon^h + \varepsilon^{-h} = 2 \cos h \frac{2\pi}{17},$$

akkor  $\varepsilon$  mint 17-dik egységgyök a

$$\frac{z^{17} - 1}{z - 1} = z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1 = 0$$

körösztási egyenlet gyöke. Ha ebben a  $z = \varepsilon$  helyettesítést végezzük és azután a kapott egyenlőséget  $\varepsilon^{-8}$ -val átszorozzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$(9) \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 = -1.$$

A  $c_h = 2 \cos h \frac{2\pi}{17}$  ( $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) számok mind valósak és közöttük

nyilvánképen a

$$(10) \quad 2 > c_1 > c_2 > 2 \cos \frac{\pi}{3} > c_3 > c_4 = a_{31} > 0 > c_5 > c_6 > c_7 > c_8 > -2$$

nagyságviszony van.

A  $c_h$  számok értelmezéséből következnek a

$$(11) \quad c_h = c_{-h}, \quad c_{17-h} = c_h, \quad c_h c_k = c_{h-k} + c_{h+k}$$

könnyen igazolható összefüggések. Ezek miatt negatív indexű  $c_h$  pozitív indexűvel, 8-nál nagyobb indexű  $c_h$  8-nál nem nagyobb indexűvel helyettesíthető és  $c_h$  számok szorzata ilyen számok összegével kifejezhető.

Ha a  $c_1, c_2, \dots, c_8$  számot az

$$y_1 = c_1 + c_2 + c_4 + c_8 \quad \text{és} \quad y_2 = c_3 + c_5 + c_6 + c_7$$

összegbe, Gauss-féle félperiodusba foglaljuk, akkor a (9)-es és (11)-es összefüggések felhasználásával

$$y_1 + y_2 = -1 \quad \text{és} \quad y_1 \cdot y_2 = 4(c_1 + c_2 + \dots + c_8) = -4.$$

$y_1$  és  $y_2$  tehát az

$$y^2 + y - 4 = 0$$

másodfokú egyenlet gyöke. Mivel a (10)-es egyenlőtlenségsorozat miatt  $y_1 > 0$ , azért

$$(12) \quad y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2} \quad \text{és} \quad y_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2}.$$

A Gauss-féle félperiodusokat a következő módon két-két negyedperiodusba osztjuk:

$$y_{11} = c_1 + c_4 \quad \text{és} \quad y_{12} = c_2 + c_8; \quad y_{21} = c_3 + c_5 \quad \text{és} \quad y_{22} = c_6 + c_7.$$

A (11)-es összefüggések miatt

$$y_{11} + y_{12} = y_1 \quad \text{és} \quad y_{11} \cdot y_{12} = -1; \quad y_{21} + y_{22} = y_2 \quad \text{és} \quad y_{21} \cdot y_{22} = -1.$$

Emiatt  $y_{11}$  és  $y_{12}$ , illetőleg  $y_{21}$  és  $y_{22}$  gyöke az

$$y^2 - y_1 y - 1 = 0, \quad \text{illetőleg az} \quad y^2 - y_2 y - 1 = 0$$

másodfokú egyenletnek. Mindkét egyenletnek egyik gyöke pozitív, másik negatív. Mivel a (10)-es egyenlőtlenségsorozat miatt  $y_{11} > 0$  és  $y_{22} < 0$ , azért

$$(13) \quad y_{11} = \frac{y_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_1}{2}\right)^2 + 1^2} \quad \text{és} \quad y_{21} = \frac{y_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{y_2}{2}\right)^2 + 1^2}.$$

Minthogy  $c_1 + c_4 = y_{11}$  és  $c_1 c_4 = c_3 + c_5 = y_{21}$  és minthogy  $c_1 > c_4$ , azért  $c_1$  és  $c_4 = a_{34} = x$  az

$$x^2 - y_{11} x + y_{21} = 0$$

másodfokú egyenletnek gyöke és

$$(14) \quad c_4 = a_{34} = \frac{y_{11}}{2} - \sqrt{\left(\frac{y_{11}}{2}\right)^2 - y_{21}}.$$

Ha tehát

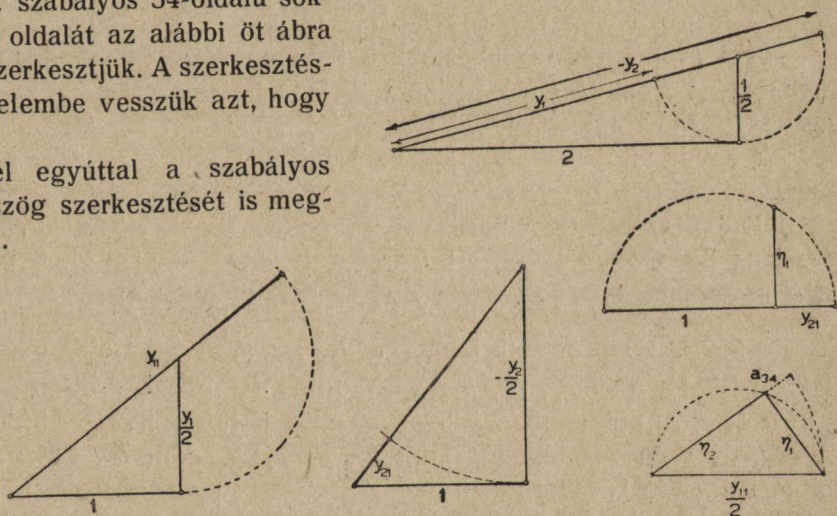
$$(15) \quad \eta_1 = \sqrt{y_{21}} \quad \text{és} \quad \eta_2 = \sqrt{\left(\frac{y_{11}}{2}\right)^2 - \eta_1^2},$$

akkor

$$(16) \quad a_{34} = \frac{y_{11}}{2} - \eta_2.$$

A (12), (13), (15) és a (16) jelzésű képlet szerint az egységsugarú, körbe írt szabályos 34-oldalú sokszög  $a_{34}$  oldalát az alábbi öt ábra szerint szerkesztjük. A szerkesztésben figyelembe vesszük azt, hogy  $y_2 < 0$ .

Ezzel egyúttal a szabályos tizenhétszög szerkesztését is megmutattuk.



6., 7., 8., 9. és 10. ábra.

6. §. Az olyan irreducibilis algebrai egyenletek fokszáma, amelyeknek van körzővel és vonalzóval szerkeszthető gyökük.

Bebizonyítottuk, hogy harmadfokú irreducibilis egyenletnek gyöke körzővel és vonalzóval nem szerkeszthető. Arra a kérdésre, hogy milyen tulajdonságú irreducibilis egyenletek gyöke szerkeszthető körzővel és vonalzóval, a következő tétel ad választ:

*Csak olyan, (együtthatóinak számtestében) irreducibilis egyenletnek lehet körzővel és vonalzóval szerkeszthető gyöke, amelynek fokszáma 2-nek hatványa.*

Ez a feltétel szükséges, de nem egyszersmind elégséges.

Ennek a tételnek kimutatása végett előbb a következő tételt bizonyítjuk be:

Ha az

$$f(x) = x^n + H_1 x^{n-1} + \dots + H_n$$

polinom irreducibilis az együtthatóit magában foglaló  $S$  számtestben, de reducibilis az  $S(\sqrt{c})$  számtestben, ahol  $c$  az  $S$  számtesthez tartozó szám, akkor  $f(x)$  az  $S(\sqrt{c})$  számtestben két egyenlőfokú irreducibilis polinom szorzatára bomlik fel.

A tétel feltevései miatt nincs olyan két polinom, amelyek együtthatói  $S$ -hez tartoznak és amelyek szorzata  $f(x)$ -szel egyenlő, de létezik olyan  $f_1(x)$  és  $f_2(x)$  polinom, amelyeknek együtthatói az  $S(\sqrt{c})$  számtestben vannak és amelyekre vonatkozólag

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x).$$

Mivel  $f(x)$ -ben a legmagasabb hatványnak egység az együtthatója, ugyanezt az  $f_1(x)$  és  $f_2(x)$  polinomról is feltételezhetjük. Az ellenkező esetben ugyanis ezt elérjük, ha az  $f_1(x)$  polinomot legmagasabb hatványának együtthatójával elosztjuk és ezzel a számmal az  $f_2(x)$  polinomot megszorozzuk.

Mivel  $f_1(x)$  és  $f_2(x)$  együtthatói az  $S(\sqrt{c})$  számtesthez tartoznak és mivel az ilyen számoknak  $a + b\sqrt{c}$  az általános alakja, ahol  $a, b$  és  $c$  az  $S$  számtestnek száma, azért  $f_1(x)$  és  $f_2(x)$  nyilvánképen

$$f_1(x) = g_1(x) + \sqrt{c} h_1(x), \quad f_2(x) = g_2(x) + \sqrt{c} h_2(x)$$

alakban írható, ahol  $g_1, g_2, h_1, h_2$  együtthatói az  $S$  számtesthez tartoznak, a  $g_1(x)$  és  $g_2(x)$  polinomban  $x$  legmagasabb hatványának együtthatója az egység, és  $g_1$  magasabbfokú, mint  $h_1$ ,  $g_2$  pedig, mint  $h_2$ . (A  $h_1$  vagy  $h_2$  polinom állandó is lehet.)

Ebből következik, hogy

$$f = f_1 f_2 = (g_1 + \sqrt{c} h_1)(g_2 + \sqrt{c} h_2) = (g_1 g_2 + c h_1 h_2) + \sqrt{c}(g_1 h_2 + g_2 h_1) = F + \sqrt{c} G$$

és hogy

$$G \equiv g_1(x) \cdot h_2(x) + g_2(x) \cdot h_1(x) \equiv 0.$$

Ha ugyanis  $G \not\equiv 0$  volna, akkor a

$$\sqrt{c} = \frac{f(x) - F(x)}{G(x)}$$

egyenlőség miatt  $\sqrt{c}$  is száma volna az  $S$  számtestnek és így  $f(x)$  már az  $S$  számtestben reducibilis volna.

Mivel

$$(g_1 - \sqrt{c} h_1)(g_2 - \sqrt{c} h_2) \equiv (g_1 g_2 + c h_1 h_2) - \sqrt{c}(g_1 h_2 + g_2 h_1) \equiv F - \sqrt{c} G$$

és mivel  $G$  azonosan eltűnik, azért

$$f \equiv (g_1 + \sqrt{c} h_1)(g_2 + \sqrt{c} h_2) \equiv (g_1 - \sqrt{c} h_1)(g_2 - \sqrt{c} h_2)$$

és emiatt

$$f^2 = (g_1 + \sqrt{c} h_1)(g_2 + \sqrt{c} h_2)(g_1 - \sqrt{c} h_1)(g_2 - \sqrt{c} h_2) = (g_1^2 - c h_1^2)(g_2^2 - c h_2^2).$$

Az  $f$ ,  $g_1^2 - c h_1^2$  és  $g_2^2 - c h_2^2$  polinom együtthatói az  $S$  számtesthez tartoznak és  $S$ -ben  $f$  irreducibilis. Mivel a  $(g_1^2 - c h_1^2)(g_2^2 - c h_2^2)$   $2n$ -edfokú polinom osztható az  $n$ -edfokú  $f$  polinom négyzetével, azért  $g_1^2 - c h_1^2$  és  $g_2^2 - c h_2^2$  csak állandó tényezőben különbözhetik az  $f$  polinomtól. Mivel mindhárom polinomban a legmagasabb hatvány együtthatója az egység, azért

$$f \equiv g_1^2 - c h_1^2 \equiv g_2^2 - c h_2^2$$

és így

$$f \equiv (g_1 + \sqrt{c} h_1)(g_1 - \sqrt{c} h_1).$$

Ezzel kimutattuk, hogy  $f(x)$  az  $S(\sqrt{c})$  számtestben két egyenlőfokú polinom szorzatára bomlik fel. Ki kell még mutatnunk, hogy az  $S(\sqrt{c})$  számtestben mindkét tényező irreducibilis.

Ha pl. a  $g_1 + \sqrt{c} h_1$  polinom az  $S(\sqrt{c})$  számtestben szétesnék két polinom szorzatára, akkor fennállana egy

$$g_1 + \sqrt{c} h_1 \equiv (\varphi_1 + \sqrt{c} \psi_1)(\varphi_2 + \sqrt{c} \psi_2) \equiv (\varphi_1 \varphi_2 + c \psi_1 \psi_2) + \sqrt{c}(\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1)$$

alakú azonos egyenlet, amelyben nemcsak a  $g_1$  és  $h_1$ , hanem a  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\psi_1$  és  $\psi_2$  polinom együtthatói is az  $S$  számtesthez tartoznak és amelyben  $\varphi_k$  magasabbfokú, mint  $\psi_k$  ( $k = 1, 2$ ).

De akkor

$$(\varphi_1 - \sqrt{c} \psi_1)(\varphi_2 - \sqrt{c} \psi_2) \equiv (\varphi_1 \varphi_2 + c \psi_1 \psi_2) - \sqrt{c}(\varphi_1 \psi_2 + \varphi_2 \psi_1) \equiv g_1 - \sqrt{c} h_1$$

volna és így az

$$f \equiv (g_1 + \sqrt{c} h_1)(g_1 - \sqrt{c} h_1) \equiv (\varphi_1^2 - c \psi_1^2)(\varphi_2^2 - c \psi_2^2)$$

azonos egyenlet miatt  $f(x)$  — feltevésünk ellenére — az  $S$  számtestben is reducibilis volna.

Ezzel a második tételt teljesen bebizonyítottuk.

Most feltesszük, hogy az  $S$  számtestben irreducibilis  $n$ -edfokú  $f(x)$  polinomnak  $x_1$  gyöke körzővel és vonalzóval szerkeszthető. Ekkor az  $S$  számtestből kiindulva véges számú megfelelő négyzetgyökkel való fokozatos bővítéssel olyan  $S'$  számtesthez jutunk, amelyben benne van az  $x_1$  szám és amelyben  $f(x)$  reducibilis és egyik tényezője  $x - x_1$ . A fokozatos bővítés úgy történik, hogy a számtesthez hozzákapcsoljuk, adjunkáljuk egy számának (a számtesthez nem tartozó) négyzetgyökét és az így kapott számtestet bővítjük tovább egy száma négyzetgyökének hozzákapcsolásával.

Amikor az  $S$  számtest fokozatos bővítésével először jutunk olyan számtesthez, amelyben  $f(x)$  reducibilis, akkor  $f(x)$  két egyenlőfokú  $f_1(x)$

és  $f_2(x)$  polinom szorzatára bomlik. Ebből következik, hogy  $n = 2n_1$  páros szám. Ha  $x_1$  az  $n_1$ -edfokú  $f_1(x)$  polinomnak zérushelye, akkor a számtest további bővítése közben egyszer  $f_1(x)$  is két irreducibilis és-egyenlőfokú polinom szorzatára esik szét, mivel az utolsó számtestben, az  $S'$  számtestben  $x - x_1$  az  $f_1(x)$  polinomnak is irreducibilis tényezője. Emiatt  $n_1 = 2n_2$  és hasonló okból  $n_2 = 2n_3$ ,  $n_3 = 2n_4, \dots$  is páros szám. Ebből következik, hogy az  $n$  szám 2-nek hatványa, mivel az utolsó irreducibilis tényező lineáris.

Ezzel az első tételt is teljesen igazoltuk.

A most kimutatott tételből következik, hogy irreducibilis harmadfokú egyenleteknek gyöke körzövel és vonalzóval nem szerkeszthető, és következnek a 2. § tételei. De nem szerkeszthetők irreducibilis 5-öd, 6-od, 7-ed, 9-ed, 10-edfokú egyenletek gyökei sem.

Annak eldöntésére, hogy egy algebrai egyenlet gyökét lehet-e körzövel és vonalzóval szerkeszteni, vagy sem, egyik legfontosabb feladat annak megállapítása, hogy az egyenlet az együtthatóit tartalmazó legkisebb számtestben irreducibilis, vagy reducibilis. Ez különlegesebb vizsgálatot igényel.

## II. Körosztás.

### 7. §. A körosztás feladata. Gauss általános tétele.

Egyik legfontosabb és legértékesebb szerkesztési feladat a körosztás. Ez a körön megadott  $n$ -számú olyan pont szerkesztését kívánja, amely a kört  $n$  egyenlő ívre bontja. Az ilyen  $n$  pont egy  $n$ -oldalú szabályos sokszögnek  $n$  szögpontja. Megfordítva: egy  $n$ -oldalú szabályos sokszög  $n$  szögpontja a sokszög köré írt kört  $n$  egyenlő körívre osztja. A körnek  $n$  egyenlő ívre való osztása és  $n$ -oldalú szabályos sokszög szerkesztése tehát lényegében azonos feladat.

A körosztást az ókorban az  $n$  szám páratlan értékei közül a 3, 5 és 15 számra tudták csak elvégezni. Az így kapott körívek folytatólagos felezésével a körosztás körzövel és vonalzóval való szerkesztését még a  $3 \cdot 2^k$ ,  $5 \cdot 2^k$  és a  $15 \cdot 2^k$  számra is ismerték, ahol  $k$  akármilyen nem negatív egész számot jelenthet.

Az ókori eredmények után a körosztásban az első jelentős lépést Gauss tette, amikor felfedezte a szabályos tizenhétszög szerkesztését.

A körosztás lehetőségének további vizsgálatában elég azokra az esetekre szorítkoznunk, amikor  $n$  páratlan törzsszám, vagy ilyen szám négyzete. Ha ugyanis  $n$  a páratlan  $n_1$  és  $n_2$  viszonylagos törzsszám szorzata, akkor a kör  $n_1 n_2$  egyenlő ívre való osztását vissza lehet vezetni  $n_1$  és  $n_2$  ívre való osztására.

Mivel  $n_1$  és  $n_2$  viszonylagos törzsszám, azért az

$$x n_2 - y n_1 = 1$$

határozatlan egyenletnek mindig van  $x = k_1$  és  $y = k_2$  egész szám megoldása. Ha a  $k_1 n_2 - k_2 n_1 = 1$  egyenlőséget a  $\frac{2\pi}{n_1 n_2}$  számmal szorozzuk, akkor a

$$\frac{2\pi}{n_1} k_1 - \frac{2\pi}{n_2} k_2 = \frac{2\pi}{n_1 n_2}$$

egyenlőség szerint a körosztásnak  $n_1$  és  $n_2$  esetre való ismerete után a körosztás az  $n = n_1 n_2$  esetre körzővel elvégezhető. Ha ugyanis a kört az  $A_0 \equiv B_0$  pontjából kiindulva  $n_1$  és  $n_2$  egyenlő ívre osztjuk és  $A_k$ -val, illetőleg  $B_k$ -val jelöljük az első, illetőleg második körosztásban a közös osztóponttól ugyanabban a forgásértelemben számított  $k$ -adik osztópontot, akkor az  $A_{k_1} B_{k_2}$  körív a körnek  $\frac{1}{n_1 n_2}$  része.

Ennek a tételnek és az eddig bebizonyított tételeknek felhasználásával a körosztás minden olyan páratlan számra, amely a  $3 \cdot 5 \cdot 17 = 255$  számnak osztója, körzővel és vonalzóval elvégezhető.

A körosztás szerkeszthetőségének elméletében a következő és egyúttal befejező lépést szintén Gauss tette meg Disquisitiones arithmeticae (sect. VII. 1801.) c. művében. Gauss általános tétele a következő:

*A körnek  $n$  egyenlő ívre való osztását körzővel és vonalzóval csak olyan  $n$  számra lehet elvégezni, amelynek törzstényezőkre való bontásában a páratlan törzsszámok legfeljebb első hatványon fordulnak elő és mind*

$$p_m = 1 + 2^{2^m}$$

*alakúak. Bármely ilyen  $n$  számra a körosztást valóban el lehet végezni.*

Ez a tétel tehát két részből: egy tagadó és egy állító részből áll.

A  $p_m$  alakú számok közül az első öt:  $p_0 = 3$ ,  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 17$ ,  $p_3 = 257$  és  $p_4 = 65537$  mind törzsszám. Gauss általános tétele szerint tehát a kört körzővel és vonalzóval nem lehet  $n$  egyenlő ívre osztani, ha  $n$  értéke 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21–23, 25–29, 31, 33, 35–39, 41–47 stb.

A komplex síkon a  $z^n = 1$  egyenlet gyökei a  $|z| = 1$  kört  $n$  egyenlő ívre osztják. Ennek az egyenletnek  $+1$ -től különböző gyökei a

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$$

egyenletnek, a körosztási egyenletnek tesznek eleget. A körosztásnak az euklidesi síkon és a körosztási egyenlet gyökeinek a komplex síkon való szerkeszthetősége nyilvánkép azonos feladat. Az általános Gauss-féle tételt a körosztási egyenlet vizsgálatával fogjuk bebizonyítani.

## 8. §. Körzővel és vonalzóval való szerkesztések a komplex síkon.

Az eddigi vizsgálatokban valós pontokat és valós együtthatós egyenletek valós gyökeit szerkesztettük. Ezeket egyenesek és körök valós metszéspontjai szolgáltatták.<sup>5)</sup>

A komplex síkon egy komplex szám adott komplex számokból körzővel és vonalzóval akkor szerkeszthető, ha a komplex számot ábrázoló pont az adatokból körzővel és vonalzóval szerkeszthető. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy egy komplex szám akkor szerkeszthető, ha valós és képzetes része, vagy abszolút értéke és szöge szerkeszthető. A szerkesztéstől megkívánjuk, hogy kört és egyenest csak véges számszor használjon fel.

A komplex számokra vonatkozó számolási szabályok tekintetbevételével az 1. § tételeit a következőképp lehet megfogalmazni:

*Adott komplex számokból körzővel és vonalzóval szerkeszthető komplex számok olyan számtestet alkotnak, amely bármely számának négyzetgyökét is tartalmazza. Az adott komplex számokat magában foglaló ilyen tulajdonságú legkisebb számtestnek bármely száma körzővel és vonalzóval szerkeszthető.*

Ha ugyanis  $z_1 = a_1 + i b_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = a_2 + i b_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , akkor a komplex számokra vonatkozó szabályok szerint  $z_1 + z_2$ ,  $z_1 - z_2$ ,  $z_1 z_2$  és  $\frac{z_1}{z_2}$  ( $z_2 \neq 0$ ) a  $z_1$  és  $z_2$  szám ábrázoló pontjából könnyen szerkeszthető.

A  $z = a + i b = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  szám négyzetgyökének, a

$$\sqrt{z} = \sqrt{a + i b} = \sqrt{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{2} \right) = x + i y \quad (k=0, 1)$$

számnak szerkesztése is elvégezhető körzővel és vonalzóval, mivel pozitív szám négyzetgyökének szerkesztését és szögnek felezését kívánja meg. Könnyű  $x$  és  $y$  közvetlen szerkesztése is az  $a$  és  $b$  számból.

Az  $a + i b = (x + i y)^2 = x^2 - y^2 + 2 i x y$  egyenletből következik, hogy

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{és} \quad 2 x y = b.$$

Ebből a két egyenletből

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2 x y)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{és így} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x^2 - y^2 = a.$$

Ebből következik, hogy

<sup>5)</sup> A komplex síkon bármely számhoz *valós pont* tartozik és bármely ponthoz egy egyértelműen meghatározott szám tartozik, még pedig az a szám, amelynek valós része a pont abszcisszája, képzetes része pedig a pont ordinátája. A komplex síkon tehát nem egyenes és kör, vagy két kör képzetes metszéspontjait szerkesztjük meg, hanem egyenesek és körök valós metszéspontjaihoz tartozó komplex számokat határozzunk meg.

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt{\frac{+a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

ahol a belső négyzetgyök előjelét pozitívnak, a két külső négyzetgyök előjelét pedig egyezőnek, vagy ellenkezőnek kell választani aszerint, amint  $b$  pozitív, illetőleg negatív.

Ebből következik ez a tétel:

*Bármely másodfokú egyenlet gyökeit körzővel és vonalzóval lehet szerkeszteni.*

Komplex síkon történő szerkesztéssel a 2. § általános tétele nyilvánképen akkor is érvényes, ha az egyenlet együtthatói komplexek, vagyis:

*Egy irreducibilis harmadfokú egyenlet gyökét sem lehet körzővel és vonalzóval szerkeszteni.*

Egy szám köbgyökének szerkesztése abszolút értéke köbgyökének és szöge harmadrészésének szerkesztését és így lényegében a déloszi problémának és a triszekciónak együttes megoldását kívánja meg. Ezért körzővel és vonalzóval csak kivételes esetekben lehet egy szám köbgyökét szerkeszteni.

A 6. § második tételének bizonyítása alkalmából nem hangsúlyoztuk, hogy  $c$  pozitív. A bizonyítás arra az esetre is érvényes, amikor az  $S$  számtest komplex számokat is tartalmaz és amikor  $c$  is komplex szám. Ennek megfelelően komplex együtthatókkal bíró egyenletekre és ezeknek komplex gyökeire is érvényes a következő tétel:

*Ha egy irreducibilis algebrai egyenletnek fokszáma nem hatványa 2-nek, akkor az egyenletnek sem valós, sem képzetes gyöke nem szerkeszthető körzővel és vonalzóval.*

## 9. §. Páratlan törzsszámhoz tartozó körosztási egyenlet irreducibilitása Törzsszámnégyszethez tartozó körosztási egyenlet.

G a u s s általános tételének bebizonyításához szükségünk van a következő tételre:

*Ha  $p$  páratlan törzsszám, akkor a*

$$z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1 = 0$$

*körosztási egyenlet a racionális számtestben irreducibilis.*

Ennek a tételnek kimutatására felhasználjuk G a u s s -nak egy tételét, az úgynevezett G a u s s-féle lemmát és a S c h o e n e m a n n-E i s e n s t e i n-féle irreducibilitási tételt.

A G a u s s-féle lemma a következő:

*Ha az egész együtthatókkal bíró*

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

polinom a racionális számtestben két polinom szorzatára bomlik, akkor  $F(x)$  egyúttal két egész együtthatós polinom szorzataként is felírható.

(Ez a tétel akkor is érvényes, ha  $x^n$  együtthatója,  $A_0$  egységtől különböző egész szám.)

Ha ugyanis

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n = \\ = (x^\mu + b_1 x^{\mu-1} + \dots + b_\mu) (x^\nu + c_1 x^{\nu-1} + \dots + c_\nu),$$

ahol  $\mu + \nu = n$  és a  $b_h$  és  $c_k$  együtthatók racionális számok, és ha  $B_h$  és  $C_k$  ( $h = 1, 2, \dots, \mu$ ;  $k = 1, 2, \dots, \nu$ ) olyan egész szám, hogy

$$b_h = \frac{B_h}{B_0}, c_k = \frac{C_k}{C_0}, [B_0, B_1, \dots, B_\mu] = [C_0, C_1, \dots, C_\nu] = 1,$$

ahol a szögletes zárójel a benne foglalt számok legnagyobb közös osztóját jelenti, akkor

$$B_0 C_0 F(x) = (B_0 x^\mu + B_1 x^{\mu-1} + \dots + B_\mu) (C_0 x^\nu + C_1 x^{\nu-1} + \dots + C_\nu).$$

Ebből a megfelelő hatványok együtthatóinak összehasonlításával kapjuk, hogy

$$B_0 C_0 A_1 = B_0 C_1 + B_1 C_0, B_0 C_0 A_2 = B_0 C_2 + B_1 C_1 + B_2 C_0, \dots, B_0 C_0 A_{h+k} = \\ = B_0 C_{h+k} + B_1 C_{h+k-1} + \dots + B_{h-1} C_{k+1} + \underline{B_h C_k} + B_{h+1} C_{k-1} + \dots + B_{h+k} C_0.$$

Ha  $p$  a  $B_0 C_0$  számnak egy olyan törzsszám osztója, amely osztója a  $B_0, B_1, \dots, B_{h-1}, C_0, C_1, \dots, C_{k-1}$  számnak, de nem osztója a  $B_h$  és  $C_k$  számnak, akkor  $p$  az előbbi kifejezés baloldalát osztja, de a jobboldalát nem, mert a jobboldalon egy tag (az aláhúzott tag) kivételével minden tagot oszt.

Ebből az ellentmondásból következik, hogy a  $B_0 C_0$  számnak nem lehet törzsszám osztója és így  $B_0 C_0 = 1$ , tehát  $B_0 = C_0 = 1$ .

Schoenemann és Eisenstein tétele<sup>6)</sup> a következő:

Ha az egész együtthatókkal bíró

$$F(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

polinom  $A_1, A_2, \dots, A_n$  együtthatója osztható a  $p$  törzsszámmal, de  $A_n$  nem osztható  $p^2$ -tel, akkor a polinom irreducibilis a racionális számtestben.

Ha föltételezzük, hogy

$$(17) \quad F(x) = (x^\mu + B_1 x^{\mu-1} + \dots + B_\mu) (x^\nu + C_1 x^{\nu-1} + \dots + C_\nu)$$

és hogy  $B_1, B_2, \dots, B_\mu, C_1, C_2, \dots, C_\nu$  racionális szám, akkor ezek az együtthatók a Gauss-féle lemma szerint egyúttal egész számok. Mivel

<sup>6)</sup> Schoenemann, Journal f. d. reine und angew. Mathematik 32. k. (1846) 100. l., Eisenstein, u. ott 39. k. (1850), 166. l.

az  $A_n = B_\mu C_\nu$  szám osztható  $p$ -vel, de  $p^2$ -tel nem, azért  $B_\mu$  és  $C_\nu$  közül az egyik, de csak az egyik osztható  $p$ -vel. Ha  $C_\nu$  osztható  $p$ -vel, akkor az  $A_{n-1} = B_\mu C_{\nu-1} + B_{\mu-1} C_\nu$  összefüggés miatt  $C_{\nu-1}$  is osztható  $p$ -vel, mivel  $A_{n-1}$  és  $C_\nu$  osztható  $p$ -vel, de  $B_\mu$  nem.

Hasonlóképp láthatjuk be a (17)-es azonosság jobb és baloldalának összehasonlításával kapott

$$A_k = B_\mu C_{k-\mu} + B_{\mu-1} C_{k-\mu+1} + \dots + B_0 C_k, \\ (k = n-1, n-2, \dots, 1; C_0 = 1, C_{\nu+1} = C_{\nu+2} = \dots = 0)$$

összefüggéssorozaton, hogy  $C_\nu, C_{\nu-1}, \dots, C_1$  és  $C_0 = 1$  is osztható  $p$ -vel.

Ebből az ellentmondásból következik Schoenemann és Eisenstein tételének igazsága.

E szerint a tétel szerint az

$$F(x+1) = \frac{(x+1)^{p-1}}{x} = x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \dots + \binom{p}{2} x + p$$

polinom irreducibilis és ezzel együtt az

$$F(z) = \frac{z^p - 1}{z - 1} = z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1 = 0$$

körosztási egyenlet is.

Ha  $n = p^2$  és  $p$  páratlan törzsszám, akkor a  $z^p - 1 = 0$  egyenlet bármely gyöke egyúttal a  $z^{p^2} - 1 = 0$  egyenletnek is gyöke. Ebben az esetben a körnek  $p^2$  számú egyenlő ívre való osztására a

$$(18) \quad \frac{z^{p^2} - 1}{z^p - 1} = z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \dots + z^p + 1 = 0$$

egyenletet vizsgálhatjuk.

Ennek az egyenletnek gyökei a kört  $p(p-1)$  ívre bontják. Ezek közül az ívek közül az a  $p$  ív, amely a  $z^p - 1 = 0$  egyenlet egy-egy gyökét tartalmazza, nyilvánképpen kétszer akkora, mint a többi  $p(p-1) - p$  ív. Felezésükkel tehát a kört  $p^2$  egyenlő ívre lehet osztani.

Ebből következik, hogy abban az esetben, amikor  $n = p^2$  és  $p$  törzsszám, a (18) egyenletet lehet körosztási egyenletnek tekinteni.

Kimutatjuk a következő tételt:

Ha  $p$  páratlan törzsszám, akkor a

$$z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \dots + z^p + 1 = 0$$

egyenlet a racionális számtestben irreducibilis.

Ez a tétel is lehozható a Schoenemann–Eisenstein-féle tételből, mivel a (18)-as egyenlet  $z = x + 1$  helyettesítés után

$$x^{p(p-1)} + p x G(x) + p = 0$$

alakú, ahol  $G(x)$  egész együtthatós  $p(p-1) - 2$  fokú polinom.

Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$$(x+1)^p = x^p + 1 + p x g(x)$$

alakban írható, ahol  $g(x)$  egész együtthatós  $(p-2)$ -edfokú polinom. A (18)-as egyenlet tehát következő alakú:

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{p-1} [(x^p + 1 + p x g(x))^h] &= \sum_{h=0}^{p-1} (x^p + 1)^h + p x H(x) = \frac{(x^p + 1)^{p-1}}{x^p} + p x H(x) = \\ &= x^{p(p-1)} + \binom{p}{1} x^{p(p-2)} + \dots + \binom{p}{1} + p x H(x) = x^{p(p-1)} + p x G(x) + p, \end{aligned}$$

ahol  $H(x)$  és  $G(x)$  egész együtthatós  $p(p-1)-2$  fokú polinom.

### 10. §. A Gauss-féle tétel tagadó részének bizonyítása.

A  $2^k + 1$  alakú törzsszámok.

A  $p$  páratlan törzsszámhoz tartozó

$$z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1 = 0$$

körosztási egyenlet a racionális számtestben irreducibilis (9. §). Ahhoz, hogy ennek az egyenletnek gyökét körzővel és vonalzóval meg tudjuk szerkeszteni, szükséges feltétel (6. és 8. §.), hogy az egyenlet fokszáma 2-nek hatványa legyen.

Ebből következik, hogy, ha a  $p$  törzsszám nem  $1 + 2^k$  alakú, akkor a kört körzővel és vonalzóval nem lehet  $p$  egyenlő részre osztani. Körzővel és vonalzóval nem lehet tehát  $n$  egyenlő ívre osztani a kört, ha az  $n$  számnak van legalább egy olyan páratlan törzstényezője, amely nem  $1 + 2^k$  alakú.

Kimutatjuk a következő tételt:

*Ha egy törzsszám  $2^k + 1$  alakú, akkor a  $k$  kitevő 2-nek hatványa.*

Ha ugyanis  $k$  nem volna 2-nek hatványa, akkor volna egy  $q (> 1)$  páratlan osztója. Ha  $k = qs$  és  $2^s = a$ , akkor

$$2^k + 1 = (2^s)^q + 1 = a^q + 1 = (a + 1) [a^{q-1} - a^{q-2} + \dots + (-1)^q]$$

volna, vagyis  $2^k + 1$  nem volna törzsszám.

Az  $1 + 2^m$  alakú számok közül az  $m = 0, 1, 2, 3$  és  $4$  kitevőhöz tartozó szám: 3, 5, 17, 257 és 65537 mind törzsszám. Még nincs bebizonyítva, hogy ezen az öt számon kívül van-e még ilyen alakú törzsszám. Ki van mutatva, hogy  $m$ -nek 5, 6, 7, 9, 11, 12, 18, 23, 36 és 38 értékéhez összetett szám tartozik.

Ha  $p$  bármilyen páratlan törzsszám, akkor a körnek  $p^2$  egyenlő ívre való osztását szolgáló

$$\frac{z^{p^2} - 1}{z^p - 1} = z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \dots + z^p + 1 = 0$$

egyenlet irreducibilis (9. §). Ennek az egyenletnek  $p(p-1)$  fokszáma nem lehet 2-nek hatványa, gyökei tehát körzövel és vonalzóval nem szerkeszthetők.

Ha tehát  $p$  akármilyen páratlan törzsszám, akkor a kört körzövel és vonalzóval nem lehet  $p^2$ , s még kevésbé  $p^3, p^4, \dots$  egyenlő ívre osztani. A kört tehát nem lehet körzövel és vonalzóval 9, 25,  $17^2 = 289$ , stb. egyenlő ívre osztani.

Ezzel Gauss tételének tagadó részét teljesen bebizonyítottuk.

## 11. §. A Gauss-féle tétel állító részének bizonyítása.

Az előzők kiegészítése végett kimutatjuk a következő tételt:

Ha  $p$  Gauss-féle törzsszám, vagyis ha  $p = 2^k + 1$  alakú törzsszám, akkor lehet a kört körzövel és vonalzóval  $p$  egyenlő ívre osztani.

Ennek igazolása végett bebizonyítjuk, hogy ilyen  $p$  törzsszám esetén a

$$(19) \quad z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + z + 1 = 0$$

körosztási egyenlet másodfokú egyenletek egymásutánjával megoldható.

Ennek a körosztási egyenletnek gyökei  $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$ , ahol

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}.$$

A bizonyításban szükségünk van a következő számelméleti tételre:

Ha  $p$  törzsszám, akkor a 2, 3, ...,  $p-1$  szám között mindig van olyan  $g$  szám, hogy a

$$g, g^2, \dots, g^{p-1}.$$

hatványok  $p$ -vel való osztásakor kapott maradékai csak sorrendben különböznek az 1, 2, ...,  $p-1$  számcsoporttól. Az ilyen  $g$  számot a  $p$  modulusra vonatkozólag primitív gyöknek nevezzük.

Pl.  $p = 5$ -re primitív gyök 2 és 3, de nem primitív gyök 4,  $p = 17$ -re 3, 5, 6 és 7 primitív gyök, 2, 4 és 8 nem.

Föltételezzük, hogy  $g$  primitív gyök a  $p = 2^k + 1$  törzsszámmodulusra vonatkozólag. Ekkor az

$$\varepsilon^g, \varepsilon^{g^2}, \dots, \varepsilon^{g^{p-1}} \text{ és az } \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$$

számcsoport csak sorrendben különbözik egymástól. Mivel a kis Fermat-féle tétel szerint  $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , azért  $\varepsilon^{g^{p-1}} = \varepsilon$ .

A (19)-es körosztási egyenletnek  $\varepsilon^g, \varepsilon^{g^2}, \dots, \varepsilon^{g^{p-1}}$  tehát egymástól különböző  $p-1$  gyöke. Ezeket a gyököket az

$y_1 = \varepsilon^g + \varepsilon^{g^2} + \dots + \varepsilon^{g^{p-2}}$  és az  $y_2 = \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^4} + \dots + \varepsilon^{g^{p-1}}$  összegbe, Gauss-féle félperiodusba foglaljuk.

Ez a két félperiodus az

$$y^2 + y - \frac{p-1}{4} = 0$$

másodfokú egyenlet gyöke. Bebizonyítjuk ugyanis, hogy

$$y_1 + y_2 = -1 \quad \text{és} \quad y_1 y_2 = \frac{p-1}{4}.$$

Az  $y_1 + y_2 = -1$  összefüggés a (19)-es egyenletből következik, az  $y_1 y_2 = \frac{p-1}{4}$  összefüggést a következőkép láthatjuk be:

Az  $y_1 y_2$  szorzat  $\varepsilon^{g^{2r+1}} \cdot \varepsilon^{g^{2s}} = \varepsilon^{gu}$  alakú tagokból áll, ennél fogva

$$y_1 y_2 = a_1 \varepsilon^g + a_2 \varepsilon^{g^2} + \dots + a_{p-1} \varepsilon^{g^{p-1}} \quad (\varepsilon^{g^{p-1}} = \varepsilon)$$

alakban írható, ahol  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$  nem negatív egész szám. Ha  $\varepsilon$  helyébe  $\varepsilon^g$ -t helyettesítjük, akkor  $y_1$  és  $y_2$  egymásba megy át, szorzatuk tehát változatlan marad. Emiatt

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= a_1 \varepsilon^g + a_2 \varepsilon^{g^2} + \dots + a_{p-1} \varepsilon^{g^{p-1}} = \\ &= a_1 \varepsilon^{g^2} + a_2 \varepsilon^{g^3} + \dots + a_{p-2} \varepsilon^{g^{p-1}} + a_{p-1} \varepsilon^g \end{aligned}$$

és így

$$(a_1 - a_{p-1}) \varepsilon^g + (a_2 - a_1) \varepsilon^{g^2} + \dots + (a_{p-1} - a_{p-2}) \varepsilon^{g^{p-1}} = 0.$$

Ezt az egyenletet

$$\varepsilon (c_0 + c_1 \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + \dots + c_{p-2} \varepsilon^{p-2}) = 0$$

alakban lehet írni, ahol a  $c_0, c_1, \dots, c_{p-2}$  együttható az előbbi egyenlőségben szereplő  $a_1 - a_{p-1}, a_2 - a_1, \dots, a_{p-1} - a_{p-2}$  együtthatótól csak sorrendben különbözhetik. Az utóbbi egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha

$c_0 = c_1 = \dots = c_{p-2} = 0$ , vagyis csak akkor, ha  $a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = a$ .

Ha ugyanis legalább egy  $c_k \neq 0$  volna, akkor  $\varepsilon$  nemcsak a (19) egyenletnek, hanem az egész együtthatókkal bíró legfeljebb  $p-2$ -edfokú

$$g(z) \equiv c_0 + c_1 z + \dots + c_{p-2} z^{p-2} = 0$$

egyenletnek is gyöke volna. Ekkor a (19)-es egyenletnek és a  $g(z) = 0$  egyenletnek volna közös osztója, s ez az osztó  $(p-1)$ -nél alacsonyabbfokú volna. Ez azért lehetetlen, mivel a (19)-es egyenlet irreducibilis.

Emiatt az  $y_1 y_2$  szorzat  $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$  tagja közül  $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$  mind ugyan-

annyiszor, mégpedig  $a = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 : (p-1) = \frac{p-1}{4}$ -szer szerepel, ennél fogva

$$y_1 y_2 = a(\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{p-1}) = -\frac{p-1}{4}.$$

Az  $y_1$  és  $y_2$  félperiodust az

$$y_{11} = \varepsilon^g + \varepsilon^{g^5} + \dots + \varepsilon^{g^{p-4}} \quad \text{és az} \quad y_{12} = \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^7} + \dots + \varepsilon^{g^{p-2}},$$

illetőleg az

$$y_{21} = \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^6} + \dots + \varepsilon^{g^{p-3}} \quad \text{és az} \quad y_{22} = \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^8} + \dots + \varepsilon^{g^{p-1}}$$

negyedperiodusba osztjuk. E szerint

$$y_1 = y_{11} + y_{12} \quad \text{és} \quad y_2 = y_{21} + y_{22},$$

és az  $y_{11} y_{12}$  és az  $y_{21} y_{22}$  szorzat nem változik, ha benne  $\varepsilon$ -t  $\varepsilon^{g^2}$ -tel helyettesítjük, mert ez a helyettesítés  $y_{11}$ -et  $y_{12}$ -vel és  $y_{21}$ -et  $y_{22}$ -vel csupán felcseréli. Ebből következik, hogy az  $y_{11} y_{12}$  szorzatban az  $y_1$  félperiodus tagjai ugyanazon  $a_{11}$  számszor és az  $y_2$  félperiodus tagjai ugyanazon  $a_{21}$  számszor fordulnak elő, vagyis hogy

$$y_{11} y_{12} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2, \quad \text{és hasonlóképp} \quad y_{21} y_{22} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2.$$

Ezt épúgy lehet belátni, mint ahogyan az  $y_1 y_2$  szorzaton beláttuk. (Ha ugyanis

$$y_{11} y_{12} = b_1 \varepsilon^g + b_3 \varepsilon^{g^3} + \dots + b_{p-2} \varepsilon^{g^{p-2}} + b_2 \varepsilon^{g^2} + b_4 \varepsilon^{g^4} + \dots + b_{p-1} \varepsilon^{g^{p-1}}$$

és ha a jobboldali összeget összehasonlítjuk azzal az összeggel, amelybe  $\varepsilon$ -nek  $\varepsilon^{g^2}$ -val való helyettesítése után átmegy, akkor azt kapjuk, hogy

$$(b_1 - b_{p-2})\varepsilon^g + (b_3 - b_1)\varepsilon^{g^3} + \dots + (b_{p-2} - b_{p-4})\varepsilon^{g^{p-2}} + (b_2 - b_{p-1})\varepsilon^{g^2} + \dots + (b_{p-1} - b_{p-3})\varepsilon^{g^{p-1}} = 0.$$

Ha ebben az egyenletben nem mindegyik együttható zérusértékű, akkor  $\varepsilon$  az irreducibilis (19)-es egyenleten kívül eleget tesz egy egész együtthatós alacsonyabbfokú egyenletnek is, ami pedig lehetetlen. Ebből következik, hogy  $b_1 = b_3 = \dots = b_{p-2} = a_{11}$  és  $b_2 = b_4 = \dots = b_{p-1} = a_{12}$ .)

$y_{11}$  és  $y_{12}$ , illetőleg  $y_{21}$  és  $y_{22}$  eleget tesz tehát az

$$y^2 - y_1 y + (a_{11} y_1 + a_{12} y_2) = 0, \quad \text{ill.} \quad y^2 - y_2 y + (a_{21} y_1 + a_{22} y_2) = 0$$

egyenletnek.

Az  $y_{11}$ ,  $y_{12}$ ,  $y_{21}$  és az  $y_{22}$  negyedperiodust az

$$y_{111} = \varepsilon^g + \varepsilon^{g^9} + \varepsilon^{g^{17}} + \dots \quad \text{és} \quad y_{112} = \varepsilon^{g^5} + \varepsilon^{g^{13}} + \varepsilon^{g^{21}} + \dots,$$

$$y_{121} = \varepsilon^{g^3} + \varepsilon^{g^{11}} + \varepsilon^{g^{19}} + \dots \quad \text{és} \quad y_{122} = \varepsilon^{g^7} + \varepsilon^{g^{15}} + \varepsilon^{g^{23}} + \dots,$$

$$y_{211} = \varepsilon^{g^2} + \varepsilon^{g^{10}} + \varepsilon^{g^{18}} + \dots \quad \text{és} \quad y_{212} = \varepsilon^{g^6} + \varepsilon^{g^{14}} + \varepsilon^{g^{22}} + \dots,$$

illetőleg az

$$y_{221} = \varepsilon^{g^4} + \varepsilon^{g^{12}} + \varepsilon^{g^{20}} + \dots \quad \text{és} \quad y_{222} = \varepsilon^{g^8} + \varepsilon^{g^{16}} + \varepsilon^{g^{24}} + \dots$$

nyolcadperiodusba osztjuk. Ezek a nyolcadperiodusok is másodfokú egyenletnek tesznek eleget, pl.  $y_{111}$  és  $y_{112}$  az

$$y^2 - y_{11}y + (a_{111}y_{11} + a_{112}y_{12} + a_{121}y_{21} + a_{122}y_{22}) = 0$$

alakú másodfokú egyenletnek tesz eleget, amelyben  $a_{111}$ ,  $a_{112}$ ,  $a_{121}$  és  $a_{122}$  nem negatív egész szám.

Ez abból következik, hogy az  $y_{111}y_{112}$  szorzat nem változik meg, amikor  $\varepsilon$ -t  $\varepsilon^4$ -val helyettesítjük. Emiatt az  $y_{111}y_{112}$  szorzat az  $y_{11}$  negyedperiodus tagjait ugyanannyiszor tartalmazza. Ugyanez érvényes az  $y_{12}$ ,  $y_{21}$  és  $y_{22}$  negyedperiodus tagjaira is.

Így haladva tovább az eredeti  $p-1$  tagból álló periodusból másodfokú egyenletek segítségével  $\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{4}, \frac{p-1}{8}, \dots$  tagból álló periodusokhoz és végül a  $\frac{p-1}{2^k} = 1$  tagból álló periodusokhoz, a  $p$ -edik egyseggyökökhöz jutunk.

Minthogy másodfokú egyenletek gyökeit a komplex síkon körzővel és vonalzóval lehet szerkeszteni, azért a  $p$ -edik egyseggyököket is tudjuk szerkeszteni és ezzel a körosztást  $p = 2^k + 1$  alakú törzsszámokra körzővel és vonalzóval el tudjuk végezni.

Ezzel Gauss tételét teljesen bebizonyítottuk, mivel a 8. §-ban kimutatott tétel szerint a körosztás körzővel és vonalzóval az  $n_1 n_2$  számra is lehetséges, ha az  $n_1$  és  $n_2$  viszonylagos törzsszámra elvégezhető.

A körosztás  $2^k + 1$  törzsszámra vonatkozó bizonyításában maradt némi bizonytalanság és épen ez könnyítette a bizonyítást. Nem vizsgáltuk meg ugyanis, hogy egy-egy másodfokú egyenlet két gyöke közül melyik adja az egyik és melyik a másik periodust. Ha a szerkesztést valóban el akarjuk végezni, akkor ez a vizsgálat nem maradhat el. Ez a vizsgálat nagyon hosszadalmas és körülményes.

Richelot a szabályos 257-szög szerkesztését a Crelle-féle Journal 9. kötetében (1832) 84 lapon még el tudta végezni. A 65537-oldalú szabályos sokszög szerkesztésére Hermes német matematikus életének 10 évét fordította. Az erre vonatkozó számításai és szerkesztései egy egész utazó bőröndöt kitevő és terjedelménél fogva maig is kiadatlan munkában foglaltatnak. A munka a göttingai matematikai szeminárium birtokában van.

## 12. §. Körlapnak egyenlő területű részekre való osztása.

A kört  $n$  egyenlő ívre osztó pontokat a középponttal összekötő sugarak a körlapot  $n$  egybevágó körcikkre osztják. Könnyű belátni, hogy a körlapot körzővel és vonalzóval akkor és csak akkor lehet  $n$  egybevágó tartományra osztani, ha a körvonalat is lehet  $n$  egyenlő ívre osztani.

Ha a körlap részeitől nem kívánjuk meg az egybevágóságot, hanem

csak területük és kerületük egyenlőségét, akkor a következő egyszerű tétel mondható ki:

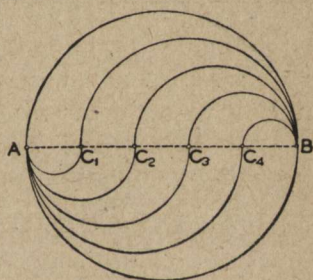
*Ha  $n$  tetszőleges pozitív szám, akkor a körlapot körzővel és vonalzóval fel lehet osztani  $n$  egyenlő területű és kerületű tartományra.*

A felosztást úgy végezzük, hogy a kör  $AB$  átmérőjét a  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  ponttal  $n$  egyenlő szakaszra osztjuk. Ez a felosztás körzővel és vonalzóval mindig lehetséges.  $AB$  átmérő egyik oldalán megrajzoljuk azokat a félköröket, amelyeknek átmérője  $AC_1, AC_2, \dots, AC_{n-1}$ , az  $AB$  átmérő másik oldalán pedig azokat a félköröket, amelyeknek átmérője  $BC_1, BC_2, \dots, BC_{n-1}$ . Az így kapott két-két félkörből álló  $n-1$  számú  $AC_k B$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) görbevonala a körlapot könnyen belátható módon az eredeti körrel egyenlő kerületű és egymással egyenlő területű  $n$  tartományra bontja.

Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a körosztásnak a térben megfelelő feladat, a gömbfelületnek egyenlő felszínű részekre való felosztása is bármely pozitív  $n$  számra könnyen elvégezhető, ha nem kívánjuk meg, hogy a gömbfelületrészek egyúttal egybevágók is legyenek.

Ha ugyanis a gömbnek egy átmérőjét  $n$  egyenlő részre osztjuk, akkor az osztópontokon átmenő és az átmérőre merőleges síkok a gömb felületét  $n$  egyenlő felszínű gömbövre és gömbcsüvegre osztják.

A gömbfelületnek ezt az  $n$  egyenlő részre való osztását síkok nélkül körzővel el lehet végezni a gömbfelületen. A gömbbel egyenlő  $AB$  átmérőjű kör  $AB$  átmérőjét a  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$  ponttal  $n$  egyenlő szakaszra osztjuk és ezekben a pontokban az átmérőre merőleges  $D_k D'_k$  húrokat ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) állítunk. A gömb egy átmérőjének  $A'$  és  $B'$  végpontja körül az  $AD_k = BD_{n-k}$  körzőnyílással ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ) leírt körök a gömb felületét  $n$  egyenlő részre osztják.



11. ábra.

### III. Geometriai szerkesztések a körző és vonalzó korlátozott használatával.

#### 13. §. A Mohr—Mascheroni-féle szerkesztések.

Mohr G. dán matematikus „Euclides Danicus” c. munkájában 1672-ben és tőle függetlenül Mascheroni L. olasz matematikus „Geometria del compasso” c. munkájában 1797-ben kimutatta a következő tételt:

*Minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés egyedül körzővel is elvégezhető.*

Mohr munkája teljesen feledésbe merült és csak 1928-ban szerzett arról tudomást a matematikus világ. Mascheroni munkája annak idején nagy feltűnést keltett. Napoleon is érdeklődött az iránt.

Tulajdonképpen sem Mohr, sem Mascheroni nem mondotta ki az előbbi általános tételt, hanem mindkettő megmutatta, hogy az Euklides munkáiban előforduló, körzövel és vonalzóval elvégezhető szerkesztések csak körzövel is elvégezhetők. Ebből azonban az általános tétel is következik, mivel Euklides Elemeiben megvannak azok az alapszerkesztések, amelyekből minden körzövel és vonalzóval való szerkesztés összetehető.

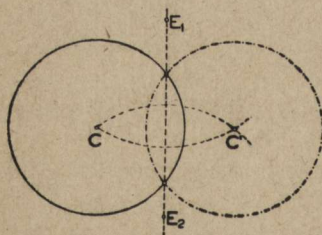
A körzövel és vonalzóval elvégezhető szerkesztések a következő három alapszerkesztésből tehetők össze: I. két egyenes, II. egyenes és kör és III. két kör metszéspontjainak szerkesztéséből.

A Mohr—Mascheroni-féle tétel bebizonyítása végett tehát csak azt kell kimutatnunk, hogy csupán körzövel meg tudjuk szerkeszteni két pontja által megadott egyenesnek egy körrel, vagy egy másik, szintén két pontja által megadott egyenessel való metszéspontját.

A bizonyítást egyenesre és körre vonatkozó tükrözés segítségével végezzük el. Ebből a célból szükségünk van öt elemi szerkesztésre.

1. Pont és kör tükrörképe az  $E_1 E_2$  egyenesre vonatkozólag.

A  $C$  ponton át az  $E_1$  és  $E_2$  pont körül rajzolt két kör másik metszéspontja  $C'$ -nek az  $E_1 E_2$  egyenesre vonatkozó tükrörképe. A  $C$  és  $C'$  középpontú egyenlő sugarú  $K$  és  $K'$  kör az  $E_1 E_2$  egyenesre vonatkozólag egymásnak tükrörképe.



12. ábra.

Ha az  $E_1 E_2$  egyenes nem megy át a  $K$  kör  $C$  középpontján, akkor ezzel a II. alapszerkesztést is elvégeztük, mivel az  $E_1 E_2$  egyenesnek a  $K$  körrel való metszéspontjai a  $K$  és  $K'$  kör metszéspontjaival összeesnek.

2. Az  $OA$  szakasz egész számmal való szorzása.

Az  $A$  pont körül  $OA$  sugárral leírt  $K$  körre az  $O$  pontból kiindulva háromszor rámérjük az  $OA$  sugarat mint húrt. A harmadik húr  $B$  végpontja a  $K$  körbe írt szabályos hatszög  $O$ -val szemközt fekvő szögpontja. Emiatt  $O$ ,  $A$  és  $B$  egy egyenesen van és  $\overline{OB} = 2 \cdot \overline{OA}$ . Hasonlóképp szerkeszthető az  $\overline{OC} = 3 \cdot \overline{OA}$ ,  $\overline{OD} = 4 \cdot \overline{OA}$ , ... szakasz is. (13. ábra).

3. Az  $A$  pontnak a  $K_0$  körre vonatkozó  $A'$  tükrörképe.

Az  $O$  középpontú és  $R$  sugarú  $K_0$  körre vonatkozólag az  $A$  pont tükrörképe, vagy inverz képe az az  $A'$  pont, amely az  $OA$  félegyenesen van és amelyre vonatkozólag

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2.$$

Ha  $\overline{OA} > \frac{R}{2}$ , akkor  $A'$  szerkesztése a következőképp végezhető el:

Az  $A$  pont körül  $OA$  sugárral rajzolt kör a  $K_0$  kört  $P$  és  $Q$  pontban metszi. Az  $O$  ponton átmenő  $P$  és  $Q$  középpontú kör másik metszéspontja  $A$ -nak  $K_0$ -ra vonatkozó  $A'$  tükörképe.

$O$ ,  $A$  és  $A'$  ugyanis egy egyenesen van, mert  $P$  és  $Q$  mind az  $OA$ , mind az  $OA'$  egyenesre vonatkozólag egymásnak tükörképe. Emiatt az  $AOP$  és a  $POA'$  egyenlőszárú háromszög hasonló és így

$$\overline{OA} : \overline{OP} = \overline{OP} : \overline{OA'}, \text{ vagyis } \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2.$$

Ha  $\overline{OA} < \frac{R}{2}$ , akkor ez a szerkesztés nem végezhető el, mivel az  $A$  középpontú és  $OA$  sugarú kör nem metszi a  $K_0$  kört. Ekkor az  $OA$  félegyenesen előbb olyan  $N$  pontot szerkesztünk (2. szerkesztés), hogy  $\overline{ON} = n \cdot \overline{OA} > \frac{R}{2}$  legyen. Ennek az  $N$  pontnak  $N'$  tükörképére áll az

$$\overline{ON} \cdot \overline{ON'} = n \cdot \overline{OA} \cdot \frac{\overline{OA'}}{n} = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2$$

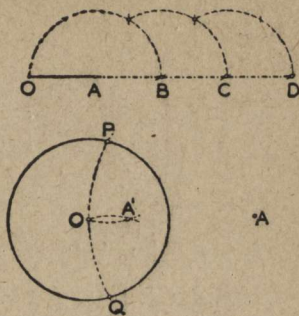
egyenlőség. Emiatt az  $A'$  pontot az  $\overline{OA'} = n \cdot \overline{ON'}$  egyenlőségnek megfelelően a 2. szerkesztéssel kaphatjuk meg.

Ezek szerint az  $O$  ponttól különböző bármely  $A$  pontnak a  $K_0$  körre vonatkozó tükörképét körzővel szerkeszthetjük,

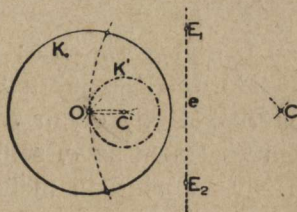
4. Az  $E_1$  és  $E_2$  pontjával megadott  $e$  egyenesnek olyan  $K_0$  körre vonatkozó tükrözése, amelynek  $O$  középpontja nem esik az  $e$  egyenesre.

Az ilyen  $e$  egyenesnek a  $K_0$  körre vonatkozó tükörképe olyan  $K'$  kör, amely  $O$ -n átmegy. Ha  $C$  a  $K_0$  kör  $O$  középpontjának az  $e$  egyenesre vonatkozó tükörképe (1. szerkesztés) és  $C'$  a  $C$  pont tükörképe  $K_0$ -ra nézve (3. szerkesztés), akkor  $C'$  a  $K'$  kör középpontja.

A  $K'$  körnek  $O$ -val átellenes  $M'$  pontja ugyanis az  $e$  egyenes  $O$ -hoz legközelebb eső  $M$  pontjának tükörképe. Mivel  $C'$  felezi a  $K'$  kör  $OM'$  átmérőjét, azért  $C'$  az  $OM$  félegyenesen annak a  $C$  pontnak tükörképe, amely  $O$ -tól kétszer akkora távolságra van, mint  $M$ . A  $C$  pont tehát  $O$ -nak az  $e$  egyenesre vonatkozó tükörképe.

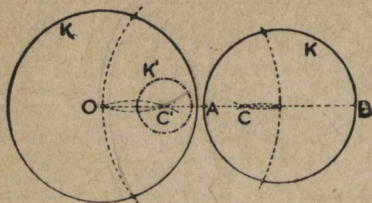


13. és 14. ábra.



15. ábra.

5. Egy  $K$  körnek egy olyan  $K_0$  körre vonatkozó tükörképe, amelynek  $O$  középpontján  $K$  nem megy át.



16. ábra.

Megszerkesztjük az  $O$  pont  $C$  tükörképét a  $K$  körre és  $C$ -nek  $C'$  tükörképét a  $K_0$  körre vonatkozólag és végül  $K$  egy  $Q$  pontjának  $Q'$  tükörképét a  $K_0$  körre vonatkozólag. A  $Q'$  ponton átmenő és  $C'$  középpontú  $K'$  kör a  $K$  körnek tükörképe a  $K_0$  körre vonatkozólag.

Ha  $A$  és  $B$  a  $K_0$  és  $K$  kör centrálisának  $K$ -val való metszéspontja, akkor e két pontnak a  $K_0$  körre vonatkozó  $A'$  és  $B'$  tükörképe nyilvánkép  $K'$  egy átmérőjének két végpontja. Azt kell tehát csak igazolnunk, hogy  $C'$  az  $A'B'$  szakasz felezőpontja.

Ennek igazolására azt a tételt használjuk fel, hogy az  $O$  ponton átmenő  $p$  egyenes  $P_1, P_2, P_3, P_4$  pontjának  $k$  kettősviszonya és e négy pont  $K_0$  körre vonatkozó  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$  tükörképének  $k'$  kettősviszonya egyenlő.

Ha ugyanis  $p_h$ , illetőleg  $p'_h$  jelöli a  $P_h$ , illetőleg  $P'_h$  pont abszcisszáját a  $p$  egyenesen  $O$  kezdőponttal bíró távolsági koordinátarendszerben, akkor

$$k' = \frac{P'_3 - P'_1}{P'_3 - P'_2} \cdot \frac{P'_4 - P'_1}{P'_4 - P'_2} = \frac{\frac{R^2}{P_3} - \frac{R^2}{P_1}}{\frac{R^2}{P_3} - \frac{R^2}{P_2}} \cdot \frac{\frac{R^2}{P_4} - \frac{R^2}{P_1}}{\frac{R^2}{P_4} - \frac{R^2}{P_2}} = \frac{P_3 - P_1}{P_3 - P_2} \cdot \frac{P_4 - P_1}{P_4 - P_2} = k.$$

Az  $A, B, C$  és  $O$  pont nyilvánkép harmonikus pontnégyest alkot, ennek a négy pontnak a  $K_0$  körre vonatkozó  $A', B', C'$  és  $O'$  tükörképe közül  $O'$  a  $p$  egyenes végtelen távoli pontja. Emiatt  $C'$  az  $A'B'$  szakasz felezőpontja.

Ezzel a  $K'$  kör szerkesztését igazoltuk.

Ezek után az I. és II. alapszerkesztést csupán körzővel következőkép végezhetjük el:

#### I. alapszerkesztés.

Megszerkesztjük a két-két pontjával megadott  $e$  és  $f$  egyenes  $e'$  és  $f'$  tükörképét egy olyan  $K_0$  körre vonatkozólag, amelynek  $O$  középpontja nem esik sem az  $e$ , sem az  $f$  egyenesre. Az  $e'$  és  $f'$  kör egymást  $O$ -ban és egy  $A'$  pontban metszi. Az  $A'$  pont  $K_0$  körre vonatkozó  $A$  tükörképe az  $e$  és  $f$  egyenes metszéspontja.

#### II. alapszerkesztés.

Ha az  $e$  egyenes nem megy át a  $K$  kör  $C$  középpontján, akkor a  $K$  körrel való metszéspontjait az 1. szerkesztés adja. Ha  $e$  átmegy a  $C$  középponton, akkor megszerkesztjük  $e$  és  $K$  tükörképét egy olyan  $K_0$  körre vonatkozólag, amelynek középpontján sem  $e$ , sem  $K$  nem megy át. Az

így kapott két kör metszéspontjainak a  $K_0$  körre vonatkozó tükörképei az  $e$  egyenesnek és a  $K$  körnek metszéspontjai.

Ezzel a Mohr—Mascheroni-féle tételt teljesen bebizonyítottuk.<sup>7)</sup>

#### 14. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések.

Csak vonalzóval olyan szerkesztések végezhetők el, amelyek pontoknak egyenesekkel való összekötését és egyenesek metszéspontjainak meghatározását kívánják meg.

Többek között csak vonalzóval is tudjuk szerkeszteni a következőket: teljes négyoldal segítségével harmonikus pontokat és sugarakat, perspektívásokkal projektív sorokban a megfelelő elemeket; a P a s c a l-féle hatszög és a B r i a n c h o n-féle hatoldal segítségével öt pontjával, vagy öt érintőjével megadott kúpszelet akárhány további pontját és érintőjét; az így megadott kúpszeletre vonatkozólag egy pont polárisát és egy egyenes pólusát.

Adott pontokból és egyenesekből vonalzóval szerkeszthető pontok jellemzésére olyan projektív koordinátarendszert veszünk fel, amelynek  $O$ ,  $X$ ,  $Y$  alappontja és  $E$  egységpontja adott pontokba esik.

A projektív sík egy  $P$  pontját két kettősviszonykoordinátával jellemezhetjük. Ha  $P_1$  és  $E_1$ ,  $P_2$  és  $E_2$ , illetőleg  $P_3$  és  $E_3$  a  $P$  és  $E$  pont vetülete az  $OXY$  háromszög  $Y$ ,  $X$  és  $O$  szögpontjaiból a szemközt fekvő háromszögdoldalra, akkor a  $P$  pont  $x$  és  $y$  projektív koordinátája az

$$x = (OX P_1 E_1), y = (OY P_2 E_2), \quad \frac{y}{x} = (XYP_3 E_3)$$

kettősviszonnyal értelmezhető,

<sup>7)</sup> Mohr—Mascheroni-féle tétel feltételezi, hogy körzővel bármilyen sugarú kört le lehet rajzolni. Yanagihara K. japán matematikus (The Tôhoku Mathematical Journal 34. k., 1931, 89. lap) azt is kimutatta, hogy körzővel végezhető bármely szerkesztés akkor is elvégezhető, ha körzővel nem lehet akármilyen nagy és akármilyen kicsiny sugarú kört rajzolni, hanem csak olyan  $\rho$  sugarú köröket, amelyeknek sugarára az  $r \leq \rho \leq R$  egyenlőtlenség áll fenn, ahol  $r$  és  $R$  előre megadott nagyságú szakasz és  $R > r$ .

A körző használatának további korlátozása az egyenlő sugarú körökre való szorítás. Ezzel a kérdéssel rokontárgyú Hjelmslev J. dán matematikusnak egy dánnyelvű dolgozata (Matematisk Tidsskrift A, 1938, 77. lap). A dolgozat célja azoknak a szerkesztéseknek vizsgálata, amelyeket körző és vonalzó használata nélkül egyetlen köralakú éremmel lehet végezni, ha az éremmel egyenlő sugarú köröket írunk le és föltételezzük, hogy egy körhöz egy pontjában az érintőkört is meg tudjuk rajzolni. Ezzel az eszközzel aránylag sok szerkesztés végezhető, de nem minden olyan szerkesztés, amely körzővel elvégezhető.

Nem ismeretes olyan vizsgálat, amely két vagy több, egymástól különböző sugarú érem használatára vonatkozik.

Az  $(\overline{ABCD})$  kettősviszony

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$$

értelmezéséből következik, hogy

$$(19) \quad (ABCD)(ABDE) = (ABCE) \quad \text{és} \quad (ABCD) + (ACBD) = 1.$$

Az első összefüggés közvetlenül belátható, a másodiktól legkönnyebben úgy győződhetünk meg, hogy az  $A, B, C$  és  $D$  pontot tartalmazó egyenesen olyan távolsági koordinátarendszert veszünk fel, amelyben az  $A, B, C$  és  $D$  pontnak abszcisszája  $a = 0, b, c$ , illetőleg  $d$ . Ekkor a  $b(c-d) + c(d-b) + d(b-c) = 0$  azonosság  $AB \cdot DC + AC \cdot BD + AD \cdot CB = 0$  alakban írható. Ebből  $AD \cdot CB$ -vel való osztás és megfelelő átalakítás után a kettősviszonyokra felírt második összefüggés egyszerűen következik.

$x$ -szel jelöljük a  $P$ ,  $x'$ -vel a  $P'$  pont projektív  $x$ -koordinátáját. Kimutatjuk, hogy vonalzóval lehet olyan  $U$  pontot szerkeszteni az  $x$ -tengelyen ( $OX$  egyenesen), amelyre vonatkozólag az  $u = (OXUE_1)$  projektív koordináta:

$$1. -x, 2. \frac{1}{x}, 3. 1-x, 4. xx', 5. \frac{x}{x'}, 6. x' - x, 7. x' + x.$$

$$1. u = (OXUE_1) = -x.$$

Ezt az  $U$  pontot a  $P_2P_3$  egyenes metszi ki az  $x$ -tengelyből, mivel  $U$  a  $P_1$  pontnak az  $OX$  pontpárra vonatkozó harmonikus társa. Az  $OP, OY, XP$  és  $XY$  egyenes ugyanis olyan teljes négyoldalt alkot, amelynek egyik átlója a  $P_1$ , a másik pedig az  $U$  ponton megy át.

$$2. u = (OXUE_1) = \frac{1}{x} = (OXE_1P_1).$$

Ha  $Q_1$  jelöli  $P_1$  vetületét az  $y$ -tengelyen ( $OY$  egyenesen) az  $E_1E_2$  és  $XY$  egyenes  $E'_3$  metszéspontjából és ha a  $Q_1E_1$  egyenes az  $XY$  egyenest a  $C_1$  pontban metszi, akkor  $U$  az  $E_2$  pont vetülete  $C_1$ -ből az  $x$ -tengelyre.

Pappus tétele szerint ugyanis a kettősviszony vetítéssel nem változik meg és így  $(OXE_1P_1) = (OYE_2Q_1) = (OXUE_1) = u = \frac{1}{x}$ .

$$3. u = (OXUE_1) = 1 - x = (OP, XE_1)$$

A  $P_1$  pontot  $E$ -ből az  $y$ -tengely  $Q_2$  pontjába vetítjük.  $E_2$ -nek az  $x$ -tengelyre való vetülete az  $XQ_2$  és  $EY$  egyenes  $D$  metszéspontjából  $U$ . Az  $E$  és  $D$  pontból való vetítés miatt ugyanis  $(OP_1XE_1) = (OQ_2E_2Y) = (OXUE_1) = u$ .

$$4. u = (OXUE_1) = (OX P_1 E_1)(OX P'_1 E_1) = xx'.$$

Ha  $U$  az  $a$  pont, amelyre vonatkozólag  $(OXUP_1) = (OX P_1 E_1) = x$ , akkor  $xx' = (OXUP_1)(OX P_1 E_1) = (OXUE_1) = u$ . Az  $U$  pont szerkesztése a

következő: Az  $XY$  és  $P_1P_2$  egyenes  $C_2$  metszéspontjából  $E_1$ -et az  $y$ -tengely  $O_3$  pontjába vetítjük. Az  $U$  pont  $P_2$ -nek az  $x$ -tengelyre való vetülete az  $XY$  és  $Q_3P_1$  egyenes  $C_3$  metszéspontjából. Erről Pappus tételével könnyű meggyőződni.

$$5. u = \frac{x}{x'} = (OXP_1E_1) : (OXP'_1E_1).$$

Megszerkesztjük 2. szerint azt az  $U_1$  pontot, amelyre vonatkozólag  $u_1 = \frac{1}{x'}$ , s azután 4. szerint azt az  $U$  pontot, amelyre  $u = x u_1 = \frac{x}{x'}$ .

$$6. u = x' - x.$$

Megszerkesztjük 5. szerint azt az  $U_2$  pontot, amelyre vonatkozólag  $u_2 = \frac{x}{x'}$ , azután 3. szerint azt az  $U_3$  pontot, amelyre  $u_3 = 1 - u_2 = 1 - \frac{x}{x'}$ , és végül 4. szerint azt az  $U$  pontot, amelyre  $u = u_3 x' = x' - x$ .

$$7. u = x' + x.$$

Megszerkesztjük 1. szerint azt az  $U_4$  pontot, amelyre vonatkozólag  $u_4 = -x$  és azután 6. szerint azt az  $U$  pontot, amelyre vonatkozólag  $u = x' - u_4 = x' + x$ .

(Ezekben a szerkesztésekben föltételeztük, hogy  $P$  nem esik össze  $P_1$ -gyel. Az ellenkező esetben  $P$ -nek tekinthetjük az  $YP$  és az  $E_1E_2$  egyenes metszéspontját. Ha  $P_1$  az  $O$  ponttal összeesik ( $x=0$ ), akkor a hét esetnek megfelelően  $U$  az  $O$ ,  $X$ ,  $E_1$  és  $P_1$  pont közül valamelyikkel összeesik, ha pedig  $P_1$  összeesik  $X$ -szel, akkor  $U$  vagy  $X$ -szel, vagy  $O$ -val esik egybe.)

Ezzel kimutattuk, hogy mindazok a pontok vonalzóval szerkeszthetők az  $x$ -tengelyen, amelyeknek  $x$ -koordinátája az adott pontok  $x$ -koordinátáit magában foglaló legkisebb számtesthez tartozik. Hasonló állítható az  $y$ -tengely pontjaira.

Ha  $E'_3$  jelöli az  $E_1E_2$  egyenesnek az  $XY$  egyenessel való metszéspontját ( $E'_3$  harmonikus társát az  $XY$  pontpárra vonatkozólag), akkor az  $E'_3$  ponton átmenő bármely egyenes az  $x$ - és  $y$ -tengelyt olyan  $R_1$ , illetőleg  $R_2$  pontban metszi, amelyre vonatkozólag  $x = (OXR_1E_1) = (OXR_2E_2) = y$ .

Ebből következik, hogy vonalzóval szerkeszthetők az  $x$ -tengelynek mindazok a pontjai, amelyeknek  $x$  koordinátája az adott pontok  $x$  és  $y$  koordinátáit tartalmazó legkisebb számtestben van.

A most kimutatott tételt ki lehet egészíteni a következő tétellel:

*Adott pontokból vonalzóval mindazok és csak azok a pontok szerkeszthetők, amelyeknek az adott pontokkal meghatározott valamelyik projektív koordinátarendszerre vonatkozó koordinátái az adott pontok projektív koordinátáit magában foglaló legkisebb számtest számai.*

Ez a tétel magában foglalja azt a csak fogalmazásra nézve általánosabb esetet, amikor pontokon kívül adva vannak egyenesek és adva vannak kettősviszonyok a szerkesztésben külön szerepet nem játszó pont-

négyesekkel. Ilyenkor az adott egyenesek helyett ezeknek más adott egyenesekkel és az adott pontokat összekötő egyenesekkel való metszéspontjait adott pontoknak tekintjük. Egy egyenesen fekvő adott és az előbbi módon adottnak tekintett pontok közül felvesszünk három különböző  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontot és perspektivitásokkal (tehát vonalzóval) meghatározzuk azon az egyenesen azt a  $D_1, D_2, \dots$  pontot, amelyre nézve az  $(ABCD_k)$  kettősviszony ( $k = 1, 2, \dots$ ) adott kettősviszonnyal egyenlő. Ezután az adott kettősviszonyok helyett a  $D_1, D_2, \dots$  pontot is adott pontnak tekintjük. (Ha a szerkesztési feladatban nincs lényeges pont és egyenes, hanem csak kettősviszonyok vannak megadva, akkor az egyik egyenesen az adott kettősviszonyt meghatározó négy pontot vesszük adottnak. A projektív koordináta-rendszer ezen az egyenesen kívül fekvő harmadik alappontját és egységpontját tetszőlegesen vehetjük fel).

A kimondott tétel igazolására szükségünk van az egyenes projektív koordinátás egyenletére.

Ha az egyenes az  $x$ -tengelyt  $A$ , az  $y$ -tengelyt  $B$  pontban metszi, ha továbbá  $a = (OXA E_1)$  és  $b = (OYB E_2)$ , és ha végül az egyenes egy tetszőleges  $P$  pontjának  $x$  és  $y$  a projektív koordinátája, akkor

$$\frac{x}{a} = \frac{(OXP_1 E_1)}{(OXA E_1)} = (OXP_1 A) \quad \text{és} \quad \frac{y}{b} = \frac{(OYP_2 E_2)}{(OYB E_2)} = (OYP_2 B).$$

Ha az  $O, Y, P_2$  és  $B$  pontot  $P$ -ből az  $x$ -tengelyre vetítjük, akkor  $(OYP_2 B) = (OP_1 XA)$ . A kettősviszonyokra vonatkozó megfelelő tétel szerint tehát

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \text{mert} \quad (OXP_1 A) + (OP_1 XA) = 1.$$

Az  $O$  ponton átmenő egyenesek egyenlete nem hozható ilyen alakra. Ezek közül az  $x$ -tengelynek  $y = 0$ , az  $y$ -tengelynek  $x = 0$  az egyenlete. Ha a  $P$  ponton átmenő ilyen egyenes az  $XY$  egyenest a  $P_3$  pontban metszi, akkor ennek az egyenesnek bármely  $P$  pontjára fennáll az

$$\frac{y}{x} = (XYP_3 E_3) = m = \text{állandó}$$

egyenlet.

Egy egyenes egyenlete tehát projektív koordinátákban is

$$Ax + By + C = 0.$$

Ha  $S$  jelöli az adott pontok koordinátáit magában foglaló legkisebb számtestet, akkor két adott ponton átmenő egyenes egyenletének együtthatói az  $S$  számtesthez tartoznak, mivel a két pont projektív koordinátáinak racionális kifejezésekké állíthatók elő. Két ilyen egyenes metszéspontjának koordinátái is  $S$ -hez tartoznak.

Ezzel a kimondott tétel második részét bebizonyítottuk, mivel a vonal-

zóval való szerkesztés adott és szerkesztett pontokból olyan pontokhoz juttat, amelyeknek koordinátái szintén  $S$  számok. A tétel első része abból következik, hogy az  $S$  számtest bármely  $c$  száma az adott pontok koordinátáinak racionális kifejezése és emiatt az 1—7. szerkesztés felhasználásával a  $c$  projektív koordináta szerkeszthető.

## 15. §. Véges vonalzóval végezhető szerkesztések.

A sík határolt részén vonalzóval végezhető szerkesztések.

1. Föltételezzük, hogy az egyenes húzására szolgáló eszközünk, a vonalzó véges hosszúságú. Az ilyen vonalzóval a korlátlan euklidesi síkon egyenesdarabot mindkét végpontján át határtalanul meg tudunk hosszabbítani, két pontot egyenes szakasszal azonban csak akkor tudunk közvetlenül összekötni, ha távolságuk a vonalzó hosszánál kisebb.

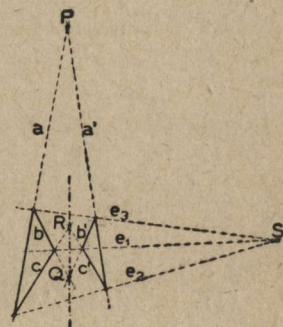
Kimutatjuk a következő tételt:

*Véges vonalzóval az euklidesi síkon mindazok a szerkesztések elvégezhetők, amelyek korlátlan vonalzóval elvégezhetők.*

Ennek igazolására csak azt kell kimutatnunk, hogy véges vonalzó segítségével a  $PQ$  egyenest akkor is meg lehet húzni, ha a vonalzóval a két pontot nem lehet közvetlenül összekötni.

Véges vonalzó által a  $P$  ponton át (egyenes szakasz kellő meghosszabbításával) nyilvánkép lehet olyan  $a$  és  $a'$  egyenest húzni, amely a  $PQ$  egyenes irányától keveset tér el. Ezt a két egyenest  $P$ -ből kiindulva úgy kell húznunk, hogy  $Q$ -hoz lehetőleg közel haladjon el.

A szerkesztés további részét a perspektív háromszögre vonatkozó Desargues-féle tétel felhasználásával végezzük. Ez a tétel azt mondja, hogy két perspektív háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai egy egyenesen, a perspektivitás tengelyén vannak, és megfordítva: két olyan háromszög, amelyeknek megfelelő oldalai egy egyenesen metszik egymást, perspektív, vagyis a megfelelő szögpontjaikat összekötő egyenesek egy ponton, a perspektivitás középpontján mennek át.



17. ábra.

A szerkesztést a mellékelt ábra mutatja. Olyan két perspektív háromszöget vettünk fel, amelyeknek  $a$  és  $a'$  megfelelő oldalpárja és amelyeknek megfelelő  $b$  és  $b'$  oldalpárja a  $Q$  pontban metszi egymást. A harmadik megfelelő oldalpár  $R$  metszéspontját a  $Q$  ponttal összekötő egyenes a perspektivitás tengelye és így  $P$ -n átmegy. A perspektivitás  $S$  középpontját és az  $e_1, e_2, e_3$  egyenest tetszőlegesen, de úgy vesszük föl, hogy a  $b, b', c, c'$  és a  $QR$

egyenes húzására szükséges két pontot a vonalzóval közvetlenül összeköthessük. Könnyű belátni, hogy ez lehetséges.

2. Az előbb felvetett kérdéssel rokon a következő: Mikép lehet a sík határolt részén, a rajzlapon vonalzóval olyan szerkesztéseket elvégezni, amelyekben pontok egymást a rajzlapon kívül metsző egyenespárokkal vannak megadva?

Az ilyen szerkesztések keresztülvitele is legtöbbször Desargues tételének alkalmazásával történik.

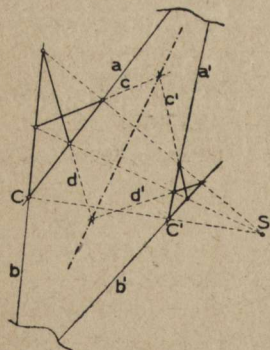
I. feladat: *Egyenes húzása olyan két ponton át, amelyek közül az egyik, az  $a$  és  $a'$  egyenes metszéspontja, a rajzlapon kívül esik.*

Az 1. pontban tárgyalt szerkesztést fordított sorrendben végezzük el. A  $P$  pont helyett most az  $a$  és  $a'$  egyenes van megadva.

II. feladat: *Az  $a, a'$  és  $b, b'$  egyenes pár rajzlapon kívül eső  $P$  és  $Q$  metszéspontján át egyenes húzása.*

Föltételezhetjük, hogy  $a$  és  $b$ , továbbá  $a'$  és  $b'$  a rajzlapon fekvő  $C$  és  $C'$  pontban metszi egymást. (Az ellenkező esetben a rajzlap  $C$  és  $C'$  pontján át az I. szerkesztéssel húzunk  $P$  és  $Q$  ponton átmenő egyenespárt.)

A  $CC'$  egyenesen föl vesszük a perspektivitás  $S$  középpontját és föl veszünk két olyan perspektív háromszögpárt, amelyeknek  $a$  és  $a'$ ,  $b$  és  $b'$  megfelelő oldalpárjuk. Az ilyen perspektív háromszögpárok perspektívítási tengelye a  $PQ$  egyenes, mivel az  $a$  és  $a'$ ,  $b$  és  $b'$  oldalpár ezen az egyenesen metszi egymást. A két háromszögpár harmadik oldalpárjának metszéspontja is a  $PQ$  egyenesre esik, ennél fogva ennek a két pontnak összekötő egyenese a  $PQ$  egyenes.



18. ábra.

Az ábrán  $abc$  és  $a'b'c'$  az egyik,  $abd$  és  $a'b'd'$  a másik perspektív háromszögpár. Ha a  $c$  és  $c'$ ,  $d$  és  $d'$  egyenespár metszéspontja közül legalább az egyik a rajzlapon esik, akkor a  $PQ$  egyenes megszerkeszthető.

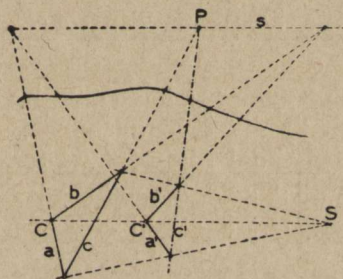
Előfordulhat az az eset, hogy a  $PQ$  egyenes teljesen a rajzlapon kívül esik. Ekkor a  $PQ$  egyenesnek egy darabja sem húzható meg, de az egyenes a következő feladat szerint felhasználható szerkesztésre.

III. feladat: *Az  $a, a'$  és  $b, b'$  egyenespár metszéspontján átmenő  $s$  egyenes a rajzlapon kívül esik. Szerkesztendő olyan  $c'$  egyenes, amely az  $s$  és az adott  $c$  egyenes metszéspontján átme gy.*

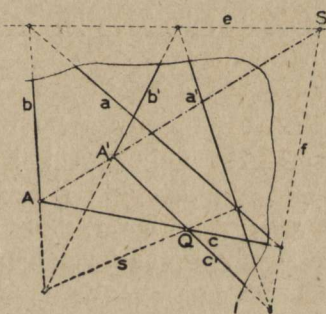
A perspektivitás  $S$  középpontjának alkalmas fölvétele után az  $abc$  háromszöggel perspektív  $a'b'c'$  háromszög  $c'$  oldala az  $s$  egyenesen, a perspektívítási tengelyén metszi a  $c$  egyenest. A szerkesztés elvégzése után egy  $Q$  pontnak az  $s$  és  $c$  egyenes  $P$  metszéspontjával való összekötése az I. feladatra vezethető vissza. (19. ábra.)

IV. feladat: Olyan egyenest kell rajzolni, amely a rajzlapon kívül eső  $e$  és  $f$  egyenes  $S$  metszéspontján átmegy.

Az  $S$  pontot két perspektív háromszög perspektivitási középpontjának tekintjük. Ha az  $e$  egyenesen az  $a, b$  és  $a', b'$  egyenespár metszi egymást, akkor az  $a, a'$  és  $b, b'$  egyenespár metszéspontját összekötő egyenes a perspektivitás tengelye. Ennek az egyenesnek egy  $Q$  pontjából a szintén két egyenespárral megadott  $f$  egyenesnek az  $a$  és  $a'$  egyenessel való metszéspontjához  $c$ , illetőleg  $c'$  egyenest húzunk (III. feladat). A  $b, c$  és a  $b', c'$  egyenespár  $A$  és  $A'$  metszéspontját összekötő egyenes az  $S$  ponton átmegy.



19. ábra.



20. ábra.

3. A 2. pontban ismertetett szerkesztéseket akkor is el lehet végezni, ha nemcsak a rajzlap határolt, hanem egyúttal a vonalzó is véges hosszúságú. Véges hosszúságú vonalzóval lehet ugyanis egyenes szakaszt meghosszabbítani és egy ponton át olyan egyenest húzni, amely két egyenesnek el nem érhető metszéspontján átmegy.

## 16. §. Vonalzóval végezhető affin szerkesztések.

Az előző két §-ban vonalzóval elvégezhető projektív szerkesztéseket, más kifejezéssel: projektív vonalas, vagy projektív lineáris szerkesztéseket tárgyaltunk.

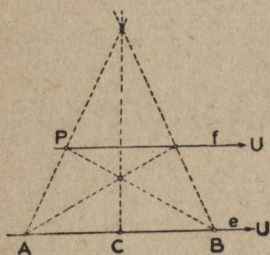
A projektív síkgeometria az olyan síkgeometriai fogalmak és vonatkozások összessége, amelyek nem változnak meg, ha egy síkról bármely (akár középpontos, akár párhuzamos) vetítéssel egy tetszőleges (párhuzamos, vagy nem párhuzamos) síkra térünk át. Egy geometriai szerkesztés a síkban akkor projektív, ha a szerkesztésnek egy tetszőleges új síkra való tetszőleges vetülete az első sík adatainak vetületéből kiindulva az új síkon ugyanazt a feladatot és ugyanúgy oldja meg. A projektív szerkesztési feladatok tehát nem kívánhatják párhuzamos egyenesek húzását, sem szakaszok felezését, mivel nem párhuzamos síkra történő közép-

pontos vetítés a párhuzamosságot és a szakaszfelezést általában megváltoztatja.

Affin síkgeometriának nevezzük azoknak a síkgeometriai fogalmaknak és vonatkozásoknak összességét, amelyek tetszőleges síkokra való párhuzamos vetítéskor változatlanok maradnak. A párhuzamosság és a szakaszfelezés affin fogalom. Az affin szerkesztésekben tehát szerepelhetnek párhuzamos egyenesek és szakaszfelezések, de nem szerepelhetnek derékszögek, mivel a szögek nagysága párhuzamos vetítéssel megváltoztatható.

Ahhoz, hogy a síkon az  $AB$  egyeneshez csupán vonalzóval párhuzamost tudjunk húzni, szükséges az  $AB$  egyenes  $U$  végtelen távoli pontjának valamilyen módon való megadása. Ezt az  $U$  pontot meghatározza az  $AB$  szakasz  $C$  felezőpontja, mint az  $U$  pontnak az  $AB$  pontpárra vonatkozó harmonikus társa.

Ha adva van az  $e$  egyenesen az  $AB$  szakasz  $C$  felezőpontjával, akkor egy  $P$  ponton át az  $e$ -vel párhuzamos  $f$  egyenes húzása teljes négyoldal segítségével történik. Az ábrán  $f$  a  $C$  pontnak az  $AB$  pontpárra vonatkozó harmonikus társát,  $U$ -t vágja ki  $e$ -ből és így  $e$ -vel párhuzamos.<sup>8)</sup>



21. ábra.

Ez az ábra egyúttal azt is megmutatja, hogy miképp lehet vonalzóval megszerkeszteni az  $AB$  szakasz felezőpontját, ha adva van az  $AB$  egyenessel párhuzamos  $f$  egyenes.

Ezzel kimutattuk a következő tételt:

*Ha ismerjük az  $e$  egyenesen egy szakasz felezőpontját, vagy ismerjük az  $e$ -vel párhuzamos  $f$  egyenest, akkor csupán vonalzóval a sík bármely pontján tudunk  $e$ -hez párhuzamost húzni és tudjuk az  $e$ -vel párhuzamos szakaszokat felezni.*

Kimutatjuk a következő tételt is:

*Vonalzóval az  $AB$  egyeneshez akkor is lehet párhuzamost húzni, ha rajta az  $AB$  szakasz felezőpontja helyett egy olyan  $C$  pontja ismeretes, amelyre vonatkozólag az  $(ABC) = \frac{AC}{BC} = \lambda$  osztóviszony tetszőleges racionális szám.*

Vonalzóval szerkeszthető  $C$ -nek az  $AB$  pontpárra vonatkozó  $D$  harmonikus társa. Ekkor

$$(ABC) = \lambda, (ABD) = -\lambda, (BAC) = \frac{1}{\lambda}, (BAD) = -\frac{1}{\lambda}.$$

E közül a négy osztóviszony közül az egyik egynél nagyobb. Fölté-

<sup>8)</sup> Az ebben a §-ban tárgyalt szerkesztések általában Steiner-től származnak, (Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, 1833).

telezhetjük, hogy  $\lambda = \frac{p}{q} > 1$  és  $p$  és  $q$  viszonylagos törzsszám. Ekkor

$$(ABC) - 1 = \frac{AC}{BC} - 1 = \frac{AC - BC}{BC} = \frac{AB}{BC} = -(ACB) = \lambda - 1 = \frac{p - q}{q}.$$

Az  $(ACB) = 1 - \lambda = -\frac{p - q}{q}$  osztóviszony tehát kisebb egész számok hányadosa, mint  $\lambda$ . Ha  $1 - \lambda \neq -1$ , akkor az  $AB$  egyenesen vonalzóval olyan pontháromashoz juthatunk, amelynek osztóviszonya kisebb egész számok hányadosa, mint  $1 - \lambda$ . Ezzel az eljárással végül az egyenes olyan  $P$ ,  $Q$  és  $R$  pontjához jutunk, hogy  $(PQR) = -1$ .

Ezzel a kimondott tételt igazoltuk, mivel  $R$  a  $PQ$  szakasz felezőpontja.

Ha ismerjük az  $e$  egyenessel párhuzamos  $e_1$  egyenest, akkor az  $e$  egyenesen egy  $AB$  szakaszt vonalzóval el lehet tolni, vagyis  $e$  adott  $A'$  pontjához lehet vonalzóval olyan  $B'$  pontot szerkeszteni, hogy  $AB = A'B'$ .

Az  $e$  és  $e_1$  egyenessel párhuzamos  $e_2$  egyenes egy  $P_2$  pontjából az  $AB$  szakaszt  $e_1$ -nek  $A_1B_1$  szakaszába vetítjük.  $B_1$ -nek az  $e_2$  és  $A'A_1$  egyenes  $P'_2$  metszéspontjából  $e$ -re való vetülete a  $B'$  pont.

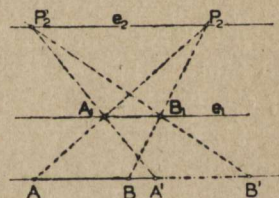
Az  $e$  egyenesen fekvő  $AB$  és  $CD$  szakasz  $AE$  összegének és  $AF$  különbségének meghatározására a  $CD$  szakaszt úgy toljuk el az  $e$  egyenesen, hogy  $C$  vagy  $D$  végpontja az eltolás után  $B$ -vel összeessék. A másik végpont a kívánt  $E$ , illetőleg  $F$  pont.

Kimutatjuk a következő tételt:

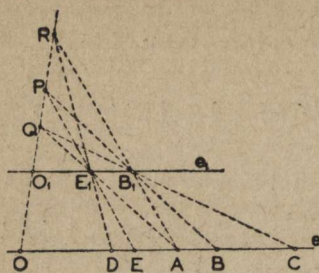
Legyen adva az  $e$  egyenesen bizonyos számú pont és szakasz, s legyen adva, vagy az adatok alapján legyen megszerkeszthető egy  $e$ -vel párhuzamos  $e_1$  egyenes. Az adott pontok közül egyik mint  $O$  kezdő, egy másik mint  $E$  egységpont az  $e$  egyenesen távolsági koordinátarendszert határoz meg. Ha ebben a koordinátarendszerben az adott pontok koordinátája és az adott szakaszoknak a fölveti egységgel mért hossza  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , akkor az adatokból vonalzóval az  $e$  egyenesnek azok és csak azok a pontjai szerkeszthetők, amelyeknek abszcisszái az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  számot tartalmazó legkisebb számtestnek számai.

Ennek igazolására elég kimutatni, hogy az  $a$ , ill.  $b$  abszcisszájú  $A$ , ill.  $B$  pontból vonalzóval lehet szerkeszteni a  $c = ab$  és  $d = \frac{a}{b}$  abszcisszájú  $C$ , ill.  $D$  pontot. Az  $a + b$  és  $a - b$  abszcisszájú pont szerkeszthetőségét ugyanis már megmutattuk.

Föltételezhetjük, hogy  $a$  és  $b$  pozitív, mivel a szakaszok összegére és különbségére adott szerkesztéssel az  $x$  és  $-x$  abszcisszájú pont egymásból vonalzóval szerkeszthető.



22. ábra.



23. ábra.

Az  $e$  egyenes  $O$ ,  $E$  és  $B$  pontját egy  $P$  pontból az  $e_1$  egyenes  $O_1$ ,  $E_1$  és  $B_1$  pontjába vetítjük. Ha  $Q$ , illetőleg  $R$  jelöli az  $OP$  egyenesnek az  $AE_1$ , illetőleg az  $AB_1$  egyenessel való metszéspontját, akkor  $Q$ -ból  $B_1$ -nek, illetőleg  $R$ -ből  $E_1$ -nek az  $e$  egyenesre való vetülete a  $C$ , illetőleg  $D$  pont.

A szerkesztés szerint ugyanis

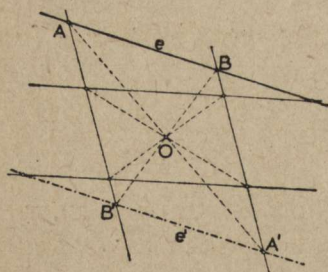
$$OC : OA = O_1B_1 : O_1E_1 = OB : OE, \text{ vagyis } c : a = b : 1, \text{ és}$$

$$OD : OA = O_1E_1 : O_1B_1 = OE : OB, \text{ vagyis } d : a = 1 : b.$$

Ebből következik a kimondott tétel igazsága.

A párhuzamos  $e$ ,  $e_1$  egyenespár megadásával még nem lehet csupán vonalzó segítségével másirányú  $f$ ,  $f_1$  párhuzamos egyenespárt húzni. Ez abból következik, hogy a síknak egy középpontos vetítése az  $e$  egyenesen átmenő más síkra az  $e$ ,  $e_1$ , illetőleg  $f$ ,  $f_1$  egyenespárt párhuzamos  $e'$ ,  $e'_1$ , illetőleg metsző  $f'$ ,  $f'_1$  egyenespárba viszi át. Az a vonalas szerkesztés tehát, amely az  $e$ ,  $e_1$  egyenespárból az  $f$ ,  $f_1$  egyenespárt adja, a második síkban a párhuzamos  $e'$ ,  $e'_1$  egyenespárból metsző  $f'$ ,  $f'_1$  egyenespárt szolgáltat.

Ha a síkban adva van egy paralelogramma, akkor vonalzó segítségével bármely  $e$  egyeneshez lehet párhuzamos  $e'$  egyenest húzni.



24. ábra.

Az  $e'$  egyenes szerkesztése az  $e$  egyenesnek a paralelogramma  $O$  középpontjára vonatkozó tükrözésével történik. (Ha az  $e$  egyenes a paralelogramma egyik oldalát  $A$  pontban metszi, akkor az  $AO$  egyenesnek a szemközt fekvő oldallal való  $A'$  metszéspontja az  $e'$  egyenes pontja).

Ha  $e$  átmegy  $O$ -n, akkor  $e'$ -vel egybeesik, ekkor azonban  $O$  felezi az  $e$  egyenesnek a paralelogrammába eső szakaszát és így lehet vonalzó segítségével  $e$ -vel párhuzamost húzni.

Az előzők szerint a paralelogrammát helyettesítheti egy párhuzamos egyenespár és egy másirányú, felezőpontjával együtt megadott szakasz, vagy felezőpontjával együtt megadott két különböző irányú szakasz.

Kimondhatjuk a következő tételt:

Legyen adva egy paralelogramma, amelynek  $O$  és  $E$  két szemközt fekvő szögpontja és legyen adva még véges számú  $P_1, P_2, \dots, P_n$  pont a síkban. Ha abban a Descartes-féle koordinátarendszerben, amelynek tengelyei tartalmazzák a paralelogrammának  $O$ -ból kiinduló két oldalát

és amelynek  $E$  az egységpontja, a  $P_1, P_2, \dots, P_n$  pontnak valamilyen sorrendben  $a, b, c, \dots$  a koordinátái, akkor vonalzó segítségével az adott pontokból a síknak mindazok és csak azok a pontjai szerkeszthetők, amelyeknek koordinátái az  $a, b, c, \dots$  számot magában foglaló legkisebb számtestnek számai.

Ebben a tételben feltételeztük, hogy vonalzó által adott pontokat egyenesekkel kötünk össze és az így kapott egyenesek metszéspontjait a további szerkesztésben adottaknak tekintjük.

Ha  $E_x$  és  $E_y$  az alapul vett paralelogrammának az  $x$  és  $y$ -tengelyre eső másik két szögpontja, akkor az  $x$ -tengelyen  $OE_x$ , az  $y$ -tengelyen  $OE_y$  az egység. Ha  $x_k$  és  $y_k$  a  $P_k$  pont két koordinátája, akkor az  $x$ -tengelyen az  $x_k$ , az  $y$ -tengelyen az  $y_k$  koordinátájú pont vonalzóval szerkeszthető.

Az  $OE$  egyenes egyenlete  $x = y$ . Ha a  $P_k$  ponton átmenő és az  $x$ -, illetőleg  $y$ -tengellyel párhuzamos az  $OE$  egyenest  $P'_k$ , ill.  $P''_k$  pontban metszi, akkor  $P'_k$  és  $P''_k$  mindkét koordinátája egyenlő, mégpedig  $y_k$ , ill.  $x_k$ .

Ezzel a kimondott tétel első részét bebizonyítottuk, mivel a jelen § első felében kimutatott tétel szerint az  $x$  és  $y$  tengelynek mindazok a pontjai vonalzóval szerkeszthetők, amelyeknek koordinátái az  $a, b, c, \dots$  számot magában foglaló legkisebb számtesthez tartoznak, és így mindazok a pontok is, amelyeknek mindkét koordinátája ilyen tulajdonságú szám.

Az, hogy vonalzóval más pont nem szerkeszthető, abból következik, hogy két olyan ponton átmenő egyenes egyenlete, amelyeknek koordinátái az  $S$  számtesthez tartoznak, Descartes-féle koordinátákban is előállítható olyan  $c_1x + c_2y + c_3 = 0$  alakú egyenlettel, amelynek együtthatói  $S$ -nek számai. Két ilyen egyenes metszéspontjának koordinátái tehát szintén  $S$ -hez tartoznak.

## 17. §. Vonalzóval végezhető metrikus szerkesztések.

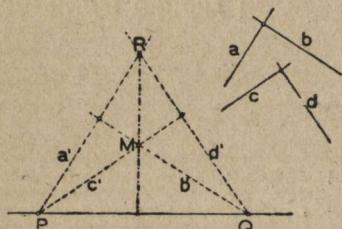
A metrikus síkgeometria mindazoknak a síkbeli geometriai fogalmaknak, vonatkozásoknak és tételeknek összessége, amelyek változatlanok maradnak, ha egy síkról tetszőleges vetítéssel egy vele párhuzamos síkra térünk át. A metrikus geometria tehát magában foglalja az affin síkgeometriát és ezzel együtt a projektív síkgeometriát.

A metrikus síkgeometriának azok a fogalmai, amelyek nem affin (s még kevésbé projektív) fogalmak, metrikus fogalmak. Ilyen metrikus fogalom a derékszög, a háromszögek osztályozása szögeik és oldalaik szerint, rombusz, négyzet stb.

Ha a síkban egy paralelogrammán kívül adva van egy derékszög, akkor lehet vonalzóval olyan derékszögeket szerkeszteni, amelyeknek szárai az adott derékszög száraival párhuzamosak, de más derékszöget nem. Ez abból következik, hogy derékszögnek párhuzamos vetülete a

száraival nem párhuzamos síkra általában nem derékszög.

Ha a síkban adva van egy paralelogramma és két nem párhuzamos szárú derékszög, akkor vonalzóval bármely egyenesre lehet merőlegest állítani.



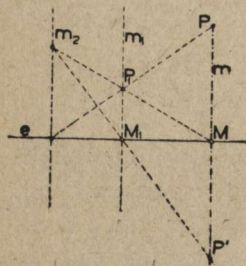
25. ábra.

Ha az így kapott egyik derékszög szárai a másiknak szárait ( $P$ -n és  $Q$ -n kívül) az  $R$  és  $M$  pontban metszik, akkor  $M$  a  $PQR$  háromszög magasságpontja és így  $RM$  merőleges a  $PQ$  egyenesre.

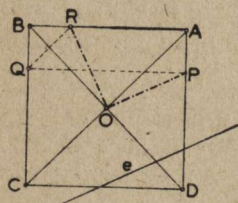
Ebből következik, hogy adott paralelogramma és nem párhuzamos szárakkal bíró két adott derékszög segítségével lehet vonalzóval bármely irányú oldalakkal bíró téglalapot és bármely irányú átlókkal bíró rombuszt szerkeszteni.

Ha adva van a síkban egy paralelogramma és két nem párhuzamos szárakkal bíró derékszög, akkor vonalzóval lehet szerkeszteni pontnak és egyenesnek egy egyenesre vonatkozó tükörképét.

$P$  pontnak az  $e$  egyenesre vonatkozó  $P'$  tükörképét úgy szerkesztjük meg, hogy az  $e$  egyenesre  $m_1$  merőlegest állítunk, azzal  $P$ -n át párhuzamos  $m$  egyenest húzunk és egy másik  $m_2$  párhuzamos segítségével az  $m$  egyenesen megszerkesztjük az  $MP' = PM$  szakaszt.



26. ábra.



27. ábra.

Ha  $a$  és  $b$  az egyik,  $c$  és  $d$  a másik derékszög szárai és ha  $P$  és  $Q$  annak az  $e$  egyenesnek két pontja, amelyre merőlegest akarunk állítani, akkor a paralelogramma segítségével olyan két derékszöget szerkesztünk, amelyeknek csúcsai az  $e$  egyenesnek ugyanarra az oldalára esnek, szárai  $P$ -n és  $Q$ -n mennek át és az adott két derékszög szárai párhuzamosak.

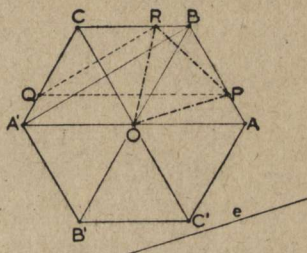
Az  $f$  egyenes  $e$ -re vonatkozó tükörképe  $f$  két pontjának tükörképén átmegy. Ha  $f$  metszi  $e$ -t, akkor az egyik pont helyett ezt a metszéspontot választjuk.

Tükrözéssel megszerkeszthetjük egy szög kétszeresét, háromszorosát stb. Ha ugyanis  $e_0$  és  $e_1$  az  $\alpha$  szög két szárai, akkor az  $e_0$  félegyenesnek az  $e_1$  tengelyre vonatkozó  $e_2$  tükörképe  $e_0$ -lál  $2\alpha$  szöget alkot, az  $e_1$  félegyenesnek az  $e_2$  tengelyre vonatkozó  $e_3$  tükörképe pedig  $e_0$ -lál  $3\alpha$  szöget alkot, stb.

Az adott paralelogrammát és a két derékszöget helyettesítheti egy adott négyzet, mivel a négyzet oldalai és átlói két nem párhuzamos szárú derékszöget határoznak meg. Ha azonban adva van egy négyzet, akkor vonalzóval olyan szerkesztést is el lehet végezni, amelyet paralelogramma és két derékszög alapul vételével általában nem lehet.

Ha adva van a síkban egy négyzet, akkor vonalzóval lehet szerkeszteni tetszőleges  $e$  egyenessel párhuzamos oldalú négyzetet.

A szerkesztést a 27. ábra mutatja. Ha ugyanis  $O$  az  $ABCD$  négyzet középpontja és ha  $OP \parallel e$ ,  $PQ \parallel AB$  és  $QR \parallel AC$ , akkor  $\overline{OR} = \overline{OP}$  és  $OR$  merőleges  $OP$ -re, mert az  $OAP$ ,  $OBQ$  és  $OBR$  háromszög egybevágó.



28. ábra.

Ebből következik, hogy négyzet alapul vételével vonalzó által lehet tetszőleges szakaszt derékszöggel elforgatni és tetszőleges derékszöget felezni.

A parallelogrammát és a két derékszöget helyettesítheti egy szabályos hatszög. Ha ugyanis  $ABCA'B'C'$  a szabályos hatszög, akkor  $ABA'B'$  és  $BCB'C'$  téglalap.

Ha adva van egy szabályos hatszög, akkor vonalzóval lehet szerkeszteni tetszőleges  $e$  egyenessel párhuzamos oldalú szabályos háromszöget.

A szerkesztést a 28. ábra mutatja. Ezen az ábrán  $OP \parallel e$ ,  $PQ \parallel AA'$  és  $QR \parallel A'B$ . Az  $OPR$  háromszög egyenlőoldalú, mivel az  $OAP$ ,  $OA'Q$  és  $OBR$  háromszög egybevágóságából következik, hogy  $\overline{OP} = \overline{OR}$  és  $\angle AOB = \angle POR$ .

Ha tehát meg van rajzolva egy szabályos hatszög, akkor vonalzóval lehet bármely szakaszt a derékszög kétharmad részével elforgatni és lehet bármilyen helyzetű és a derékszög kétharmad részével egyenlő szöget felezni, vagy bármily helyzetű derékszöget három egyenlő részre osztani.

Azok a vonalzóval végezhető szerkesztések, amelyekben négyzet van megadva, nem azonosak azokkal, amelyekben szabályos hatszög van megrajzolva. Az első esetben lehet négyzetet, de nem lehet egyenlőoldalú háromszöget szerkeszteni, a második esetben éppen megfordítva.

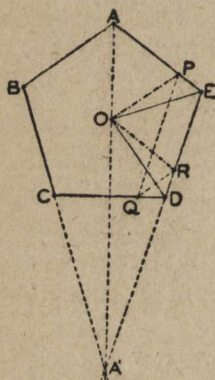
Ha ugyanis a négyzet két szemközt fekvő szögpontja közül az egyiket egy derékszögű koordinátarendszer kezdőpontjának, a másikat pedig egy-ségpontjának választjuk, akkor a négyzet szögpontjaiból vonalzóval szerkeszthető pontok koordinátái mind racionálisak. Az  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2, 0)$  és  $C = (1, \sqrt{3})$  csúcsú egyenlőoldalú háromszög  $C$  csúcsa azonban vonalzóval nem szerkeszthető.

Hasonlóképp lehet kimutatni, hogy szabályos hatszögből kiindulva vonalzóval nem szerkeszthető négyzet.

Egy egyenlőoldalú háromszögből csupa párhuzamos egyenes húzásával lehet szabályos hatszöget szerkeszteni. Ebből következik, hogy a szabályos háromszög és egy parallelogramma helyettesítheti a szabályos hatszöget. A szabályos háromszög azonban egymagában nem.

Egy szabályos ötszög is helyettesíthet egy adott parallelogrammát

és két nem párhuzamos szárú derékszöget. Az  $ABCDE$  szabályos ötszögben pl. a  $CD$  oldallal párhuzamos a  $BE$  átló és a  $CD$  oldalra merőleges az  $AA'$  egyenes, ha  $A'$  a  $BC$  és  $ED$  egyenes metszéspontját jelenti.



29. ábra.

Szabályos ötszög segítségével olyan szerkesztést is lehet vonalzóval elvégezni, amelyet sem négyzet, sem szabályos hatszög segítségével nem lehet. Szabályos ötszög megadása után vonalzóval szerkeszthető egy  $OP$  szakaszból olyan  $\overline{OR} = \overline{OP}$  szakasz, amely  $OP$ -vel a teljes szög ötödrészét alkotja.

A szerkesztésben  $PQ \parallel DE$  és  $QR \parallel AB$ . A szerkesztés helyessége az  $OEP$ ,  $ODQ$  és  $ODR$  háromszög egybevágóságából és abból következik, hogy a  $DOE$  szög nagysága a teljes szög ötödrésze.

Párhuzamosak húzásának lehetőségéből következik, hogy vonalzóval nemcsak az  $OP$  szakasznak, hanem bármely  $FG$  szakasznak a teljes szög ötödrészével való elforgatását meg lehet szerkeszteni.

## 18. §. A Poncelet-Steiner-féle szerkesztések.

Poncelet 1822-ben és tőle függetlenül Steiner 1833-ban a következő tételt találta <sup>9)</sup>:

*Ha a síkon meg van rajzolva egy kör és annak középpontja is meg van adva, akkor mindazok a geometriai szerkesztések, amelyek körzővel és vonalzóval elvégezhetők, egyedül vonalzóval is elvégezhetők.*

Minthogy két egyenes metszéspontja közvetlenül meghatározható, azért csak azt kell kimutatnunk, hogy az  $O$  középpontjával együtt megadott  $K$  kör segítségével akkor is meg lehet vonalzóval szerkeszteni

1. egyenes és kör metszéspontjait és

2. két kör metszéspontjait,

ha a köröknek csak középpontja és egy-egy pontja van megadva.

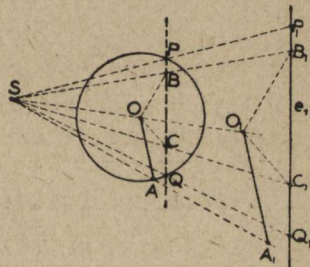
Minthogy a  $K$  kör bármely két átmérőjének végpontjai téglalapnak szögpontjai, azért 17. §. értelmében csupán vonalzó használatával lehet egy ponton át bármely egyenessel párhuzamost húzni és bármely egyenesre merőlegest állítani, továbbá lehet a  $K$  kör  $r$  sugarával egyenlő oldalú négyzetet szerkeszteni.

A Poncelet-Steiner-féle tétel kimutatására szükséges két alapszerkesztést vonalzóval következőkép lehet elvégezni:

<sup>9)</sup> Poncelet I. V., Traité des propriétés projectives des figures, Paris, I. kiadás 1822, 187. l., II kiadás 1865, 181. l.; Steiner J., könyvünk irodalmi összeállításában és a <sup>9)</sup> szöveg alatti jegyzetben felsorolt munkája.

1. Az  $e_1$  egyenes és az  $O_1$  középpontjával és  $A_1$  pontjával megadott  $K_1$  kör metszéspontjainak szerkesztése végett megszerkesztjük a  $K$  és  $K_1$  kör egyik hasonlósági pontját, pl. az  $S$  külső hasonlóságpontját. Ha  $A$  az  $O$  pontból kiinduló és az  $O_1A_1$  félegyenessel egyező irányú félegyenesnek a  $K$  körrel való metszéspontja, akkor az  $OO_1$  és  $AA_1$  egyenes metszéspontja az  $S$  pont.

Ezután az  $e_1$  egyenesen felvesszünk egy  $B_1$  és  $C_1$  pontot és párhuzamosak húzásával meghatározzuk az  $S$  külső hasonlósági pontra vonatkozólag az  $O_1B_1C_1$  háromszöghöz hasonló és hasonló helyzetű  $OBC$  háromszöget. Ez a hasonlósági átalakítás az  $e_1$  egyenesnek a  $BC$  egyenest felelteti meg. Az  $e_1$  egyenes metszi, érinti, vagy nem metszi a  $K_1$  kört a szerint, amint a  $BC$  egyenes metszi, érinti, illetőleg nem metszi a  $K$  kört. Ha  $P$  és  $Q$  a  $BC$  egyenes és a  $K$  kör metszéspontja, és ha az  $SP$  és  $SQ$  egyenes az  $e_1$  egyenest  $P_1$  és  $Q_1$  pontban metszi, akkor ez a két pont  $e_1$  és  $K_1$  metszéspontja.



30. ábra

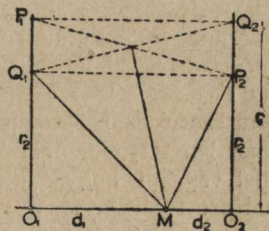
2. Az  $O_1$  középpontjával és  $A_1$  pontjával megadott  $K_1$  kör és az  $O_2$  középpontjával és  $B_2$  pontjával megadott  $K_2$  kör metszéspontjainak meghatározását visszavezethetjük az előbbi szerkesztésre.  $K_1$  és  $K_2$  metszéspontjait ugyanis a két kör  $m$  hatványvonala metszi ki a  $K_1$  vagy a  $K_2$  körből. Mivel  $m$  merőleges a két kör  $O_1O_2$  centrálisára, azért elég annyit kimutatnunk, hogy az  $m$  és  $O_1O_2$  egyenes  $M$  metszéspontja vonalzóval szerkeszthető.

Megszerkesztjük az  $O_1O_2$  egyenesre, ennek ugyanazon oldalán az  $O_1$ , illetőleg  $O_2$  pontban állított merőleges félegyenesnek a  $K_1$  körrel való  $P_1$ , illetőleg a  $K_2$  körrel való  $P_2$  metszéspontját (az 1. szerkesztéssel), s azután a  $P_1O_1O_2Q_2$  és a  $P_2O_2O_1Q_1$  téglalapot. Az  $O_1O_2$  centrálisból a  $Q_1Q_2$  szakasz középvonala vágja ki az  $M$  pontot.

Ennek igazolására azt kell kimutatnunk, hogy az így szerkesztett  $M$  pontnak a  $K_1$  és  $K_2$  körre vonatkozó hatványa ugyanaz. (Egy pontnak egy  $r$  sugarú körre vonatkozó hatványa – miként ismeretes –  $H = d^2 - r^2$ , ahol  $d$  jelöli a pontnak a kör középpontjától való távolságát.)

Ha  $r_1$  jelöli a  $K_1$  és  $r_2$  a  $K_2$  kör sugarát és  $O_1M = d_1$ ,  $O_2M = d_2$ ; akkor az  $M$  pontnak a  $K_1$  körre vonatkozólag  $H_1 = d_1^2 - r_1^2$ , a  $K_2$  körre pedig  $H_2 = d_2^2 - r_2^2$  a hatványa.

Mivel  $M$  a  $Q_1Q_2$  szakasz középvonalán van és mivel az  $MO_1Q_1$  és  $MO_2Q_2$  háromszög derékszögű, azért



31. ábra.

$$d_1^2 + r_2^2 = \overline{MQ_1^2} = \overline{MQ_2^2} = d_2^2 + r_1^2.$$

Ebből következik, hogy  $H_1 = H_2$ . Ezzel a Poncelet-Steiner-féle tételt teljesen bebizonyítottuk<sup>10)</sup>.

### 19. §. Az alapkör középpontjának nélkülözhetetlensége a Poncelet-Steiner-féle szerkesztésekben.

Az alapkör középpontjának szükségességét a következő tétel fejezi ki:  
Ha a  $K$  kör meg van rajzolva, de középpontja nincs megadva, akkor  $K$  középpontját vonalzóval nem lehet megszerkeszteni.<sup>11)</sup>

Legyen egy derékszögű koordinátarendszerben

$$K(x, y) \equiv (x - a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0, \quad |a| > 1$$

a  $K$  kör egyenlete. Ennek a körnek síkjában az

$$x = \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'}$$

helyettesítés kollineációt határoz meg, mert a

$$c_1 x + c_2 y + c_3 = 0 \quad \text{és a} \quad c_3 x' + c_2 y' + c_1 = 0$$

egyenest egymásnak felelteti meg. Ez a kollineáció a  $K$  kör  $(a, 0)$  középpontját az  $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$  pontba, a  $K$  kört pedig önmagába viszi át, mivel a

$$K(x, y) \equiv \left(\frac{1}{x'} - a\right)^2 + \frac{y'^2}{x'^2} + 1 - a^2 \equiv \frac{1}{x'^2} [(x' - a)^2 + y'^2 + 1 - a^2] \equiv \frac{K(x', y')}{x'^2}$$

azonosság miatt a  $K(x, y) = 0$  egyenletből a  $K(x', y') = 0$  egyenlet következik és megfordítva.

Tegyük föl most, hogy van olyan csak vonalzóval elvégezhető szerkesztés, amely bizonyos számú, részben a  $K$  körön fekvő pontból, részben

<sup>10)</sup> Poncelet és Steiner tétele szerint a körzővel és vonalzóval végezhető szerkesztésekben a sík  $\infty^3$  körét nélkülözni lehet, ha egy kört középpontjával együtt ismerünk. Ehhez csatlakozólag Weiss E. A. (Konstruktionen mit hängenden Linealen, Deutsche Mathematik 6. kötet, 1941, 3. lap) kimutatta, hogy a Poncelet-Steiner-féle szerkesztésekben a sík  $\infty^2$  számú sugársora helyett elég négy sugársorra szorítkozni. Másképp kifejezve: ha megvan adva egy kör középpontjával együtt, akkor bármely körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztést vonalzóval úgy is lehet végezni, hogy csak olyan egyeneseket húzunk, amelyek a síknak négy meghatározott pontja közül valamelyikén átmennek. (Weiss föltételezi, hogy a négy pont közül három egy egyenesre esik, a negyedik azonban azon az egyenesen kívül van, és hogy a négy pont közül egyik az alapkörön kívül esik, s belőle a körhöz húzható érintők érintéspontjai adva vannak.)

<sup>11)</sup> Ezt a tételt Hilbert D. előadásaiban mutatta ki először, a bizonyítást Cauér D. közölte és kiterjesztette két kör esetére is, Math. Annalen 73. k. (1913), 90. lap, 74. k. (1913), 472. lap.

más tetszőleges pontból kiindulva a  $K$  kör középpontjához vezet. Ennek a szerkesztésnek az előbbi kollineáció a  $K$  kör ugyanannyi pontjából és ugyanannyi más pontból kiinduló és ugyanolyan tulajdonságú szerkesztést feleltet meg, mint az első szerkesztés. Ez a tisztán vonalas második szerkesztés azonban az  $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$  ponthoz juttat, noha az  $(a, 0)$  középponthoz kellene vezetnie.

Ebből az ellentmondásból következik a kimondott tétel igazsága.

Ugyanígy lehet kimutatni a következő tételt:

*Ha két alapkör van megrajzolva, de egyiknek sem ismeretes a középpontja, és ha a két kör sem nem metszi egymást, sem nem koncentrikus, akkor egyik középpontot sem lehet vonalzóval megszerkeszteni.*

Ha két ilyen kör centrálisát a derékszögű koordináta-rendszer  $x$ -tengelyének, hatványvonalát  $y$ -tengelynek és a kezdőpontból a két körhöz húzott érintő hosszát egységnek választjuk, akkor a két kör egyenlete

$$(x-a)^2 + y^2 + 1 - a^2 = 0, (x-a_1)^2 + y^2 + 1 - a_1^2 = 0, |a| > 1, |a_1| > 1, a \neq a_1,$$

alakban írható. Az

$$x = \frac{1}{x'}, y = \frac{y'}{x'}$$

kollineáció mindkét kört önmagába viszi át, az  $(a, 0)$  és  $(a_1, 0)$  középpontot ellenben más pontba, mégpedig az  $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$  és  $\left(\frac{1}{a_1}, 0\right)$  pontba viszi át.

Ha föltennők, hogy van olyan vonalas szerkesztés, amellyel az egyik kör középpontjához eljutunk, akkor a kollineációnak erre a vonalas szerkesztésre való alkalmazása épügy ellentmondáshoz vezet, mint egy kör esetén.<sup>12)</sup>

Ezt a két tételt tiszta geometriai úton is könnyű bebizonyítani. A bizonyítás annak a térmértani tételnek felhasználásával történik, amely szerint egy köralapú ferde kúp alapkörén átmenő gömbök a kútból még egy-egy kört vágnak ki. Ezeknek a köröknek síkjai párhuzamosak a kúp csúcsán és alapkörén átmenő gömbnek a kúp csúcsához tartozó érintősíkjával.

Legyen a ferde kúp csúcsa  $C$ , alapköre  $K$  és ennek síkja  $\sigma$  és legyen  $K'$  az a kör, amelyet a  $K$  körön és a  $C$  ponton átmenő gömb  $C$  pontjának érintősíkjával párhuzamos  $\sigma'$  sík vág ki a kúpfelületből. A  $C$  pontból a  $\sigma'$  síkra való vetítés a  $K$  kört a  $K'$  körbe viszi át, a  $K$  kör középpontjának vetülete azonban nyilvánkép nem esik össze  $K'$  középpontjával.

Ha volna olyan vonalzóval végezhető szerkesztés, amely megadja a  $K$  körből ennek ismeretlen középpontját, akkor a  $C$  pontból ennek a szerkesztésnek a  $\sigma'$  síkra való vetítésével  $K'$  középpontjához kellene jutnunk. Mivel ez nem következik be, azért a föltevés helytelen.

<sup>12)</sup> Ezt a tételt elemi geometriai úton bizonyította be Rademacher H. és Toeplitz O. „Von Zahlen und Figuren“ c. könyvében, II. kiadás, 1933, 21. §, 50. l.; továbbá Yanagihara K., Tôhoku Math. Journal 44. k., 1938, 322. lap.

A második tétel igazolására elég azt kimutatni, hogy, ha a  $\sigma$  síkon a nem koncentrikus  $K$  és  $K_1$  körnek nincs közös pontja, akkor van olyan  $G$  és  $G_1$  gömb, amely a  $K$ , ill.  $K_1$  körön átmegegy, egymást egy  $C$  pontban érinti és az ehhez a ponthoz tartozó közös  $\sigma'_0$  érintősík metszi a  $\sigma$  síkot.

Egy ilyen  $C$  pontból a  $K$  és  $K'$  kör vetülete a  $\sigma'_0$  síkkal párhuzamos  $\sigma'$  síkra olyan  $K'$  és  $K'_1$  kör, amelynek középpontja nem esik egybe  $K$ , ill.  $K_1$  középpontjával vetületével. Ha volna olyan vonalas szerkesztés, amely a  $K$  és  $K_1$  körből  $K$  középpontjához juttatna el, akkor ennek a szerkesztésnek  $C$ -ből a  $\sigma'$  síkra való vetítésével  $K'$  középpontjához kellene vezetnie. Ez azonban nem következik be, mivel a vetítéssel  $K$  középpontjának vetületét kapjuk.

A  $G$  és  $G_1$  gömböt következőképp állíthatjuk elő:

$K$  és  $K_1$   $e$  centrálisán átmenő és a  $\sigma$  síkra merőleges  $\bar{\sigma}$  sík olyan  $AB$  és  $A_1B_1$  átmérőt vág ki a  $K$  és  $K_1$  körből, amelyek vagy egymáson kívül vannak, vagy az egyik magában foglalja a másikat, de felezőpontjuk nem esik egybe. Ha  $Q$  a  $\sigma$  sík egy  $P$  pontján és az  $AB$ , ill.  $A_1B_1$  pontpáron átmenő  $k$  és  $k_1$  kör második metszéspontja és ha  $D$  a  $PQ$  és  $e$  egyenes metszéspontja, akkor  $\overline{DA} \cdot \overline{DB} = \overline{D_1A} \cdot \overline{DB_1}$ , mivel  $D$  a  $k$  és  $k_1$  kör hatványvonalán van. Az  $AB$  és  $A_1B_1$  szakasz egymáshoz való helyzetéből következik, hogy  $\overline{DA} \cdot \overline{DB}$  hatvány véges és pozitív és így lehet  $D$ -ből  $k$ -hoz érintőt húzni. Ha  $C$  az egyik ilyen érintéspont, akkor az  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C$  ponton átmenő  $k_1$  kör  $C$ -ben érinti a  $k$  kört, mivel  $\overline{DA_1} \cdot \overline{DB_1} = \overline{DC}^2$ .

Ebből következik, hogy a  $K$ ,  $k$  és a  $K_1$ ,  $k_1$  körpáron átmenő  $G$  és  $G_1$  gömb érinti egymást és hogy  $e$  pont közös érintősíkja metszi a  $\sigma$  síkot.

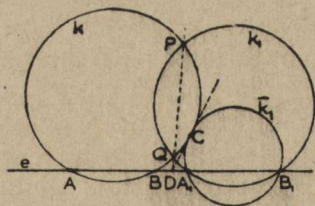
Ezzel tiszta geometriai úton is bebizonyítottuk a második tételt.

A most kimutatott tétellel ellentétben kimondható a következő:

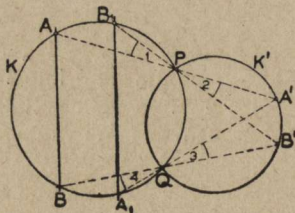
*Vonalzóval meg lehet szerkeszteni a középpontja nélkül megadott  $K$  és  $K'$  kör hiányzó középpontját, ha*

1. a két kör metszi, vagy érinti egymást,
2. a két kör középpontja egybeesik.

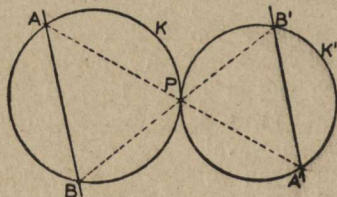
Ha  $K$  és  $K'$  a  $P$  és  $Q$  pontban metszi egymást és ha a  $K$  kör tetszőleges  $A$  és  $B$  pontját a 33. ábra szerint  $P$ -ből és  $Q$ -ból kétszeres vetítéssel az ábra szerint a  $K$  kör  $A_1$  és  $B_1$  pontjába visszük át, akkor az 1, 2, 3 és 4 számmal megjelölt szögek egyenlősége miatt a  $K$  kör  $AB$ , és  $BA_1$  íve egyenlő és így az  $AB$  és  $A_1B_1$  húr párhuzamos. Emiatt e két húr felező-



32. ábra.



33. ábra.



34. ábra.

pontja és a két felezőpontot összekötő átmérő vonalzóval szerkeszthető. Egy hasonlóképp szerkeszthető másik átmérő az első a  $K$  kör középpontjában metszi.

Ha a  $K$  és  $K'$  kör a  $P$  pontban érinti egymást és ha a  $K$  kör  $A$  és  $B$  pontját  $P$ -ből a  $K'$  kör  $A'$  és  $B'$  pontjába vetítjük, akkor  $AB \parallel A'B'$ , mert  $K$  és  $K'$  a  $P$  hasonlóságpontra vonatkozólag hasonló helyzetű.

Ha  $K$  és  $K'$  egyközepű (koncentrikus), akkor egy tetszőleges pontnak a két körre vonatkozó polárisa egymással párhuzamos. Egy pontnak körre vonatkozó polárisa vonalzóval mindig szerkeszthető.

Igy szerkeszthetünk paralelogrammákat és ezek segítségével az adott körök középpontjait vonalzóval szerkeszthetjük.

Megjegyezzük, hogy nem ugyanahhoz a körsorhoz tartozó három kör segítségével vonalzó által akkor is meg lehet szerkeszteni a három kör hiányzó középpontját, ha a három kör között nincs olyan kettő, amelynek egymással közös pontja volna. A szerkesztés és megokolása nem egyszerű.<sup>13)</sup>

## 20. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések egy akármilyen kicsiny körív és a hozzátartozó kör középpontjának felhasználásával.

Kimutatjuk a következő tételt:<sup>14)</sup>

*Ha egy  $K$  körnek meg van adva egy akármilyen kicsiny  $k$  köríve és  $O$  középpontja, akkor egyedül vonalzóval el lehet végezni mindazokat a szerkesztéseket, amelyeket körzővel és vonalzóval el lehet végezni.*

Ha  $A$  és  $B$  a  $k$  körív két végpontja, akkor a P a s c a l-féle hatszög tételének felhasználásával vonalzó által meg lehet szerkeszteni a  $K$  kör  $A$  és  $B$  pontjának  $a$  és  $b$  érintőjét és ezek  $S$  metszéspontját. Az  $S$  pontnak az  $A$  és  $B$  ponton átmenő  $s$  egyenes a polárisa a  $K$  körre vonatkozólag.

Az  $S$  pont és az  $s$  egyenes a projektív síkon egy  $H$  harmonikus perspektivitást határoz meg. Ez a sík egy  $P$  pontjának az  $SP$  egyenesen azt a  $P'$  pontot felelteti meg, amelyre vonatkozólag  $(SS'PP') = -1$ , ha  $S'$  jelöli az  $SP$  és az  $s$  egyenes metszéspontját. Ez a  $H$  perspektivitás a  $P$  ponton és az  $s$  egyenes egy  $A$  pontján átmenő egyenesnek a  $PA$  egyenest felelteti meg.

Az  $s$  egyenes  $S$ -nek  $K$ -ra vonatkozó polárisa. A pólus és a poláris harmonikus tulajdonságai miatt a  $H$  perspektivitás a  $k$  körívet és a  $K$  kör kiegészítő  $k'$  ívét egymásba viszi át.

A  $k'$  körív és egy  $e$  egyenes metszéspontjainak meghatározása végett vonalzóval megszerkesztjük az  $e$  egyenesnek a harmonikus perspektivitásban megfelelő  $e'$  egyenest. A  $k$  körív és az  $e'$  egyenes egy közös pontjának  $S$ -ből az  $e$  egyenesre való vetülete a  $k'$  körív és az  $e$  egyenes közös pontja.

<sup>13)</sup> Lásd C a u e r cikkét, Math. Ann. 74. k., 472. l.

<sup>14)</sup> Ezt a tételt egymástól függetlenül többen bebizonyították: Severi F. (Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo 18. kötet, 1904, 256. l.); Yanagihara K. (The Tôhoku Math. Journal 24. k., 1925, 125. l.); Platone G. (Periodico di Matematiche IV. 10. k., 1930, 307. l.); Hüttemann F. (Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereinigung 43. k., 1933, 184. l.); Sz. Nagy Gy. (The Tôhoku Math. Journ. 40. k., 1934, 76. l.), Mordoukhay-Boltovskoy D. (Period. Mat. IV. 14. k., 1934, 101. l.). Lásd még Obláth R. (Monatshefte für Math. u. Phys. 26. k., 1915, 295. l.).

Ezzel az eljárással a  $k$  körív ismerete alapján vonalzóval lehet szerkeszteni a  $K$  körnek bármely egyenessel való valós metszéspontjait. A  $k$  körív tehát helyettesítheti a teljes  $K$  kört. Ha tehát a  $k$  köríven kívül a  $K$  kör középpontja is meg van adva, akkor vonalzóval mindazok a szerkesztések elvégezhetők, amelyek a Poncelet-Steiner-féle tétel alapján elvégezhetők.

Ha a  $K$  körnek csak egy  $k$  köríve és a  $K'$  körnek csak öt pontja van megadva, de tudjuk, hogy e közül az öt pont közül  $P$  és  $Q$  a  $K$  körnek is pontja, akkor  $K$  középpontját vonalzóval épügy szerkeszthetjük meg, mintha  $K$  és  $K'$  teljesen meg volna rajzolva (19. §), mivel a  $P$  és  $Q$  ponton átmenő egyeneseknek a  $K$  és  $K'$  körrel való második metszéspontját a Pascal-féle hatszög tételének felhasználásával vonalzóval szerkeszthetjük.

21. §. Vonalzóval végezhető szerkesztések egy ismeretlen középpontú kör, vagy egy kúpszelet felhasználásával. Projektív másodfokú szerkesztések.

Ha adva van egy  $K$  kör, de középpontja ismeretlen, akkor vonalzóval affin szerkesztéseket nem lehet végezni. Ez abból következik, hogy vonalzóval nem lehet az ismeretlen középpontot megszerkeszteni. Bizonyos metrikus szerkesztést lehet vonalzóval végezni, nevezetesen lehet egyenlő kerületi szögeket szerkeszteni.

Ezen a szerkesztésen kívül a  $K$  kör segítségével vonalzó által csak olyan szerkesztéseket lehet végezni, amelyek akkor is elvégezhetők, ha a  $K$  kör helyett tetszőleges kúpszelet van megadva. Ha ugyanis a  $K$  kör síkjáról egy vonalas szerkesztést valamilyen vetítéssel egy nem párhuzamos síkra viszünk át, akkor olyan vonalas szerkesztést kapunk, amelyben a  $K$  kört egy kúpszelet helyettesíti.

Egy megrajzolt  $K$  kúpszelet segítségével történő vonalas szerkesztésekben a kúpszeletnek azt a tulajdonságát használjuk fel, hogy a kúpszelet tetszőleges  $A$ ,  $B$ , és  $D$  pontját a kúpszelet bármely  $P$  pontjából vetítő négy sugár kettősviszonya csak az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  ponttól függ, a  $P$  ponttól független. Ez a kettősviszony értelmezi a kúpszelet  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontjának  $(ABCD)$  kettősviszonyát. Ennek megfelelően a  $K$  kúpszelet  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ponthármasa a kúpszelet pontjai között projektív vonatkozást létesít, amelyben a kúpszelet egy  $D$  pontjának az a  $D'$  pont felel meg, amelyre vonatkozólag

$$(A B C D) = (A' B' C' D').$$

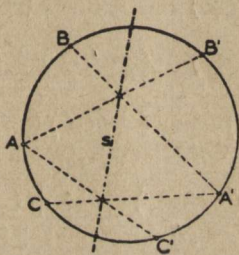
Az ilyen módon értelmezett projektivitás kettőspontjait (vagyis a projektivitásban önmaguknak megfelelő pontokat) az  $A'B$ ,  $AB'$  és az  $A'C$ ,



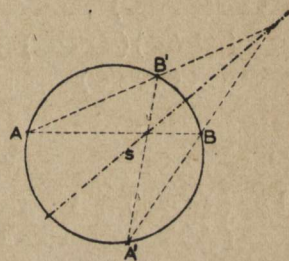
$AC'$  egyenespár metszéspontján átmenő egyenes vágja ki a kúpszeletből.

A kúpszeleten fekvő  $(ABCX)$  pontsört  $A'$ -ből,  $s$  a projektív  $(A'B'C'X')$  pontsört  $A$ -ból vetítő két projektív sugársor ugyanis perspektív, mivel az  $AA'$  sugár önmagának felel meg. A két sugársor megfelelő sugarai tehát egy  $s$  egyenesen metszik egymást.

A kúpszeleten fekvő két pontsör közötti projektív vonatkozás akkor involúció, ha a kúpszelet egy  $P$  pontjának ugyanaz a  $P'$  pont felel meg, ha  $P$ -t akár  $X$ -nek, akár  $X'$ -nek tekintjük. Az involúciót két pontpárja,  $A, A'$  és  $B, B'$  meghatározza. Mivel  $(ABB'X) = (A'B'BX')$ , azért az első pontsört  $A'$ -ből, a másodikat  $A$ -ból vetítő sugársor projektív és (mivel  $AA'$  önmagának megfelelő sugár, azért) egyúttal perspektív. Emiatt az  $A'B, AB'$ , és az  $A'B', AB$  egyenespár metszéspontján átmenő  $s$  egyenes metszi ki a kúpszeletből az involúció két kettőspontját. Ez a két pont (főltéve, hogy az  $s$  egyenes metszi a kúpszeletet) mind az  $AB$ , mind az  $A'B'$  pontpárt harmonikusan választja el a kúpszeleten.



35. ábra.



36. ábra.

Ezt a két szerkesztést felhasználhatjuk az  $e_1$  egyenesen az  $A_1 B_1 C_1$  és az  $A'_1 B'_1 C'_1$  ponthármassal megadott két projektív pontsör és az  $A_1 A'_1$  és a  $B_1 B'_1$  pontpárral megadott involúció kettőspontjainak meghatározására. Evégből az  $e_1$  egyenesen fekvő két projektív pontsört a kúpszelet egy  $S$  pontjából a kúpszeletre vetítjük. A kúpszeleten így kapott két projektív pontsör kettőspontjainak  $S$ -ből az  $e_1$  egyenesre való vetülete az  $e_1$  egyenesen fekvő két projektív pontsornak kettőspontja.

Egy egyenesen két pontpárjával megadott involúció kettőspontjainak szerkesztésére lehet visszavinni és emiatt a  $K$  kúpszelet segítségével vonalasan lehet szerkeszteni az öt pontjával megadott  $K'$  kúpszeletnek egy  $e$  egyenessel való metszéspontjait és egy  $P$  ponton átmenő érintőit.

Az öt pontból a P a s c a l-féle hatszög és a teljes négyszög tételének felhasználásával szerkeszthető egy pontnak a  $K'$  kúpszeletre vonatkozó polárisa. Ha az  $e$  egyenes  $A$  és  $B$  pontjának polárisa  $e$ -t  $A'$  és  $B'$  pontban metszi, akkor  $AA'$  és  $BB'$  kapcsolt pontpár  $K'$ -re vonatkozólag. Az általuk meghatározott involúció kettőspontjai  $e$ -nek  $K'$ -vel való metszéspontjai. Egy pontból a  $K'$  kúpszelethez húzható érintők érintéspontjait a pont polárisa vágja ki  $K'$ -ből.

Ha meg van adva egy  $K$  kúpszelet és ha  $A, B, P$  és  $E$  egy  $e$  egyenes olyan négy pontja, hogy  $k = (ABPE) > 0$ , akkor vonalzóval szerkeszt-

hető az  $e$  egyenesen olyan  $Q$  pont, amelyre vonatkozólag  $(ABQE) = \sqrt{k} = \sqrt{(ABPE)}$ . A négyzetgyök két előjelének megfelelően két ilyen pont van, ezek az  $AB$  és  $PE$  pontpárral meghatározott involúció kettős-pontjai.

Mivel  $(ABPE) = (ABPQ)(ABQE)$ , azért csak azt kell kimutatnunk, hogy arra a  $QQ'$  pontpárra, amelyre vonatkozólag  $(ABQQ') = -1$  és  $(PEQQ') = -1$ ,  $(ABPQ) = (ABQE)$  és így  $(ABPE) = (ABQE)^2$  és hasonlóképp  $(ABPE) = (ABQ'E)^2$ .

A  $QQ'$  pontpár értelmezése és a kettősviszonyok között fennálló összefüggések miatt

$$\begin{aligned} \frac{1 + (ABPQ)}{1 - (ABPQ)} &= \frac{1 + (ABPQ')(ABQ'Q)}{(APBQ)} = \frac{1 - (ABPQ')}{(APBQ)} = \frac{(APBQ')}{(APBQ)} = \\ &= \frac{(APBQ)(APQQ')}{(ABPQ)} = (APQQ') = (QQ'AP) = (QQ'AE)(QQ'EP) = \\ &= - (QQ'AE) = - (AEQQ') = - (AEQB)(AEBQ') = - \frac{(AEBQ')}{(AEBQ)} = \\ &= \frac{1 - (AEBQ')}{- (AEBQ)} = \frac{1 - (AEBQ)(ABQQ')}{-1 + (AEBQ)} = \frac{1 + (AEBQ)}{-1 + (AEBQ)} = \frac{1 + \frac{1}{(ABQE)}}{-1 + \frac{1}{(ABQE)}}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{1 + (ABPQ)}{1 - (ABPQ)} = \frac{1 + (ABQE)}{1 - (ABQE)}.$$

Ezzel be van bizonyítva, hogy  $(ABPQ) = (ABQE)$ . A  $Q$  és  $Q'$  pont felcserélésével kapjuk, hogy  $(ABPQ') = (ABQ'E)$ .

A projektív vonalas szerkesztésekre kimutatott főtétel alapján most már nem okoz nehézséget a következő tétel belátása:

*Ha a síkban meg van adva egy kör középpontja nélkül, vagy általában egy kúpszelet, akkor megadott pontokból és kettősviszonyokból vonalzóval mindazok a pontok szerkeszthetők, amelyeknek projektív koordinátái az adatokhoz kapcsolt háromszöges koordinátarendszerben ahhoz a legszűkebb számtesthez tartoznak, amely magában foglalja az adott kettősviszonyokat, az adott pontok projektív koordinátáit és a számtest bármely pozitív számának négyzetgyökét.*

Ez abból következik, hogy öt ponton átmenő kúpszelet egyenlete projektív koordinátákban is olyan

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

egyenlet, amelynek együtthatói az öt pont projektív koordinátáinak racionális kifejezései. Ha tehát az öt pont koordinátái az előbb jellemzett  $S$  számtest számai és egy egyenes együtthatói szintén ilyen számok, akkor

a kúpszelet és az egyenes valós metszéspontjainak projektív koordinátái szintén  $S$ -hez tartoznak.

*Megadott kúpszelet alapján vonalzóval végezhető szerkesztéseket akkor is el lehet végezni, ha a teljes kúpszelet helyett tetszőleges kis  $k$  íve van megadva.*

Ennek igazolása épúgy történik, mint akkor, amikor egy kör helyett egy íve volt megadva (20. §). Ha ugyanis  $A$  és  $B$  a  $K$  kúpszelet  $k$  ívének két végpontja és ha  $c$  jelöli az  $AB$  egyenest, akkor a  $c$  egyenesnek a  $K$  kúpszeletre vonatkozó  $C$  pólusa vonalzóval szerkeszthető. A  $C$  középponttal és  $c$  tengellyel bíró harmonikus perspektivitás a  $k$  ívet és a kúpszelet kiegészítő  $k'$  ívét egymásba viszi át. Egy  $e$  egyenesnek a  $k'$  ívvel való metszéspontjai az  $e$  egyenesnek a perspektivitásban megfelelő  $e'$  egyenes és a  $k$  körív metszéspontjaiból vonalzóval szerkeszthetők.

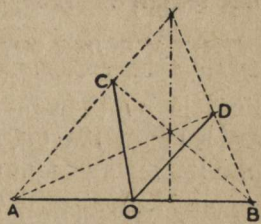
#### IV. Geometriai szerkesztések a vonalzó használatának kiterjesztésével. Geometriai kísérletek.

##### 22. §. Geometriai szerkesztések egységátrakó vonalzóval.

Az egységátrakó vonalzó olyan vonalzó, amelyen két pont meg van jelölve. A megjelölt két pont közötti szakaszt egységnek tekintjük. Az egységátrakó vonalzóval tehát lehet egyenest húzni és annak egy tetszőleges pontjától az egységet mindkét irányban felmérni.

Egységátrakó vonalzóval bármely egyenesre lehet merőlegest állítani.

Az  $e$  egyenes egy  $O$  pontjából az  $A$  és  $B$  pontig rámérjük az egységet és  $O$ -ból az  $e$  egyenes ugyanazon oldalán kiinduló két félegyenesre rávisszük az  $OC = OD$  egységet. Mivel Thales tétele szerint az  $ACB$  és az  $ADB$  szög derékszög, azért a háromszög magasságainak tétele miatt az  $AC$ ,  $BD$  és az  $AD$ ,  $BC$  egyenespár metszéspontját összekötő egyenes merőleges az  $e$  egyenesre.



37. ábra.

Az  $e$  egyenessel párhuzamos szerkesztése annak alapján történik, hogy az  $e$  egyenes  $AB$  szakaszának  $O$  felezőpontját ismerjük.

Minthogy bármely szög szárára a szög csúcsából kiindulva rá lehet mérni az egységet, azért egységátrakó vonalzóval lehet megadott szöggel bíró rombuszt rajzolni. Mivel a rombusz átlói felezik a rombusz szögeit, azért egységátrakó vonalzóval bármely szöget lehet felezni.

Az egységátrakó vonalzót helyettesítheti egy beosztás nélküli vonalzó és egy egységelfordító készülék, amellyel az egységet csak egy pontból, az  $O$  pontból kiinduló félegyenesekre lehet rámérni a kezdőponttól kezdve.

Egy  $e'$  egyenesre egy  $O'$  pontjából kiindulva úgy mérjük rá az egységet, hogy  $O$ -n át az  $e'$  egyenessel párhuzamos  $e$  egyenest húzunk és arra az egységelfordítóval rávisszük az  $OA$  egységet. Az  $A$  ponton átmenő és az  $OO'$  egyenessel párhuzamos az  $e'$  egyenest olyan  $A'$  pontban metszi, hogy  $O'A'$  az egységgel egyenlő. Párhuzamosak szerkesztése parallelogramma segítségével történik. Egymást  $O$ -ban metsző két egyenesen az  $O$  ponttól egységnyi távolságra eső pontok téglalapnak csúcsai.

Az egységátrakó vonalzóval való szerkesztések tehát olyan viszonyban állanak az egységelfordítóval és vonalzóval való szerkesztésekhez, mint a körzővel és vonalzóval való szerkesztések a Poncelet-Steiner-féle szerkesztésekhez.

A Poncelet-Steiner-féle szerkesztésekben az  $O$  középpontú alapkörnek tetszőleges egyenesekkel való metszéspontjai szerepelnek, az egységelfordítóval való szerkesztések ellenben az alapkörnek csak az  $O$  középponton áthaladó egyenesekkel való metszéspontjait használják fel. Ebből következik, hogy vonalzóval és egységelfordítóval, vagy egységátrakó vonalzóval csak olyan feladatok oldhatók meg, amelyeknek minden megoldása a feladatban szereplő mennyiségektől függetlenül mindig valós. Az ilyen feladatok tehát olyan algebrai egyenletekhez vezetnek, amelyeknek bármely gyöke a feladatban előforduló pontok koordinátáitól, mint paraméterektől függetlenül mindig valós.

Az egységátrakó vonalzóval szerkeszthető pontok koordinátáit magában foglaló  $S$  számtest tartalmazza az adott pontoknak és az adatokkal meghatározott pontoknak derékszögű koordinátáit és megvan az a tulajdonsága, hogy bármely  $m$  számával együtt a  $\sqrt{1+m^2}$  számot is magában foglalja.

Az  $y = mx$  egyenes ugyanis az  $x = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$  és  $y = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$  koordinátájú pontban metszi az  $x^2 + y^2 = 1$  egységkört.

Könnyű belátni, hogy megfordítva: bármely olyan pont, amelynek koordinátái az előbbi tulajdonságokkal bíró legkisebb  $S$  számtesthez tartoznak, egységátrakó vonalzóval szerkeszthető.

Nem lehet egységátrakó vonalzóval szerkeszteni derékszögű háromszöget az átfogójából és egyik befogójából. Ha ugyanis az átfogó  $c$  és az egyik befogó  $a$ , akkor a másik befogónak hossza  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ . Ez a négyzetgyök azonban  $c$  és  $a$  tetszőleges értékeire nézve nem mindig valós.<sup>15)</sup>

<sup>15)</sup> Az egységátrakó vonalzó használata a geometria Hilbert-féle axiómarendszéréhez kapcsolódik. Hilbert *Grundlagen der Geometrie* c. munkájában (az 1. kiadás a Gauss-Weberszobor leleplezési ünnepélyére kiadott emlékműben 1899-ben, a 2.—7. kiadás önállóan jelent meg, 1902—1930.) a geometria axiómáit öt csoportba: az illeszkedés, rendezés, egybevágóság, párhuzamosság és folytonosság axiómacsoport-

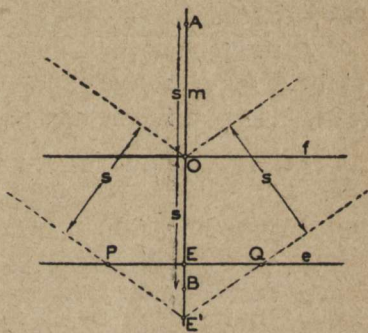
### 23. §. Párhuzamos élű vonalzóval végezhető szerkesztések.

*Körzövel és vonalzóval végezhető bármely geometriai szerkesztést párhuzamos élű vonalzóval is el lehet végezni.<sup>16)</sup>*

Ha a párhuzamos élű vonalzó egyik élét egy szög egyik szárához illesztjük és a másik éle mentén egyenest húzunk és ezt az eljárást a szög másik szárával ismételjük, akkor rombuszt kapunk. Ennek a rombusznak átlói felezik a rombusz szögeit és egymásra merőlegesek. A párhuzamos élű vonalzóval tehát lehet párhuzamosakat és merőlegeseket húzni.

A kimondott tétel kimutatására a Poncelet-Steiner-féle tétel alapján elég azt igazolni, hogy a párhuzamos élű vonalzóval az  $O$  középpontú és a vonalzó  $s$  szélességével egyenlő sugarú  $K$  körnek bármely egyenessel való metszéspontjait meg lehet szerkeszteni.

A  $K$  kör és egy  $e$  egyenes  $P$  és  $Q$  metszéspontjának meghatározására  $O$ -n át  $e$ -vel párhuzamos  $f$  egyenest húzunk. Azután  $O$ -ból  $e$ -re merőleges  $m$  egyenest állítunk és ennek talppontját  $E$ -vel jelöljük. A párhuzamos élű vonalzóval meghatározzuk az  $m$  egyenes  $f$ -től  $s$  távolságra eső  $A$  és  $B$  pontját, vagyis  $K$ -nak  $m$ -mel való két metszéspontját. Az  $e$  egyenesnek a  $K$  körre vonatkozó  $E'$  pólusa  $E$ -nek az  $AB$  pontpárra vonatkozó harmonikus társa, s így vonalzóval szerkeszthető. Ha a párhuzamos élű vonalzót úgy helyezzük el, hogy egyik éle  $O$ -n, a másik pedig  $E'$ -n menjen át, akkor az  $E'$ -n átmenő él  $K$ -t az  $e$  egyenessel való metszéspontjában érinti. (Az  $E'$ -n átmenő így kapott két egyenes ugyanis érintője a  $K$  körnek, mivel mindkettő  $O$ -tól  $s$  távolságra van; belőlük  $E'$ -nek  $e$  polárisa metszi ki az érintéspontot.)



38. ábra.

### 24. §. Szögvonalzóval végezhető geometriai szerkesztések és kísérletek.

A szögvonalzó olyan rajzeszköz, amelynek két egyenesvonalú éle van és ezek határozott  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ) szöget alkotnak egymással. Egyszerűség kedvéért föltételezzük, hogy  $\alpha$  hegyesszög.

Jába foglalta össze és vizsgálat tárgyává tette azokat a szerkesztéseket, amelyek a folytonosság axiómáinak felhasználása nélkül végezhetők. Az ilyen szerkesztésekben lehet egyeneseket húzni, szakaszokat átrakni, kört azonban nem lehet leírni. Kürschák József kimutatta (Math. Annalen 55. kötet, 1902, 597. l.), hogy a szakaszátrakás egységátrakással helyettesíthető.

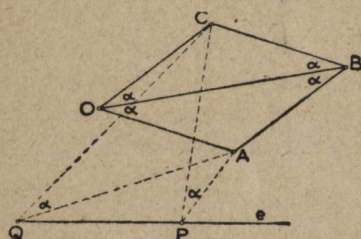
<sup>16)</sup> Adler A., Sitzungsber. d. Akad. Wien 99. k. (1890), 846. l.

A szögvonalzót kétféleképp alkalmazzuk: vagy úgy, hogy egyik éle két adott ponton menjen át, vagy úgy, hogy egyik éle egyik, a másik éle egy másik adott ponton menjen át.

Párhuzamos egyenesek  $\alpha$ -szögű vonalzóval való szerkesztése  $\alpha$ -szögű belső váltószögek rajzolásával történik. Az  $e$  egyenesre merőleges szerkesztése végett az egyenes egy  $AB$  szakaszához, mint alaphoz megrajzoljuk azt a két egyenlőszárú háromszöget, amelyeknek az alapon fekvő szögei  $\alpha$ -val egyenlők. A két háromszög csúcsát összekötő egyenes merőleges  $e$ -re.

Ebből következik, hogy szögvonalzóval mindazokat a szerkesztéseket el lehet végezni, amelyeket egy paralelogramma és két nem párhuzamos szárú derékszög megadása után közöséges vonalzóval el lehet végezni.

A szögvonalzónak második alkalmazásával annak a  $K$  körnek, amely adott  $A$  és  $B$  ponton átmegy és amelynek pontjaiból az  $AB$  szakasz  $\alpha$  (vagy  $\pi - \alpha$ ) szögben látszik, akárhány további pontját lehet szerkeszteni.



39. ábra.

Egy  $e$  egyenes és az  $O$  középpontjával és egy  $A$  pontjával megadott  $K$  kör metszéspontjainak meghatározása végett szögvonalzóval  $OA$  oldalú és az  $O$  pontban  $2\alpha$ -szögű  $OABC$  rombuszt szerkesztünk. Ha a szögvonalzót úgy helyezzük el a síkban, hogy egyik szára az  $A$ , a másik a  $C$  ponton menjen át, csúcsa pedig az  $e$  egyenes olyan  $P$  pontjába essék, amely az  $AC$  egyenesnek arra az oldalára esik, mint  $O$ , akkor  $P$  a  $K$  kör és az  $e$  egyenes metszéspontja.

Ezzel az eljárással meghatározhatjuk a  $K$  kör és az  $e$  egyenes metszéspontjait. A szögvonalzónak ilyen használata tulajdonképpen nem szigorú értelemben vett geometriai szerkesztés, hanem *geometriai kísérlet*.

A Poncelet-Steiner-féle tétel alapján tehát kimondhatjuk a következő tételt:<sup>17)</sup>

*Ha szerkesztésnek nevezzük a szögvonalzónak olyan elhelyezését is, hogy csúcsa egy adott egyenesre essék, szárai pedig két adott ponton menjenek át, akkor minden körzövel és vonalzóval elvégezhető szerkesztést egyedül szögvonalzóval is el lehet végezni.*

## 25. §. Geometriai szerkesztések és kísérletek derékszögvonalzóval.

Harmadfokú egyenletek megoldása két derékszögvonalzóval.:

Derékszögvonalzóval lehet bármily irányú oldalakkal bíró téglalapot és egy átmérőjével megadott körön akárhány pontot szerkeszteni. A derék-

<sup>17)</sup> L. a <sup>16)</sup> szöveg alatti jegyzetet.

szögvonallal végezhető szerkesztések nyilvánképen ugyanazok, mint amelyeket közösleges vonallal lehet végezni, ha a síkban egy paralelogramma és nem párhuzamos szárakkal bíró két derékszög meg van rajzolva.<sup>18)</sup>

Derékszögvonallal meg lehet határozni egy  $e$  egyenesnek az  $O$  középpontjával és egy  $A$  pontjával megadott  $K$  körrel való metszéspontjait.

Először a  $K$  kör  $OA$  sugarához tartozó  $AA'$  átmérőt szerkesztjük meg. (Ez az  $OA$  egyenessel párhuzamos felhasználásával történhetik.) Ezután a derékszögvonallal csúcsát az  $e$  egyenesen mozgatjuk, miközben az egyik szár az  $A$  ponton megy át. A derékszög csúcsának az  $e$  egyenesen való az a helyzete, amelyben a másik szár az  $A'$  ponton megy át, a  $K$  kör és az  $e$  egyenes metszéspontja. Ennek a pontnak derékszögvonallal való meghatározása azonban nem szerkesztés, hanem geometriai kísérlet.

A derékszögvonallal használatát egybe lehet kapcsolni az algebrai egyenletek gyökeinek meghatározására szolgáló Lill-féle eljárással. Egy derékszögvonallal meg lehet szerkeszteni a valós együtthatókkal bíró másodfokú egyenletek valós gyökeit, két derékszögvonallal pedig a valós együtthatókkal bíró harmadfokú egyenletek valós gyökeit.

A Lill-féle eljárás<sup>19)</sup> az

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

polinomhoz egy törtvonalat rendel, az együtthatók  $OA_0 A_1 \dots A_n$  törtvonalát. Ez a törtvonal  $n+1$  szakaszból áll. Az  $OA_0$  szakasz hossza az egység, az  $A_{k-1} A_k$  szakaszé pedig  $|a_k|$ . Az  $n+1$  szakasz közül akár melyik az előzővel derékszöget alkot, mégpedig pozitív, illetőleg negatív értelemben aszerint, amint egyező, ill. ellenkező előjelű együttható tartozik a két szakaszhoz. Határesetként könnyen tárgyalható az az eset is, amikor az  $a_1, a_2, \dots, a_n$  együttható közül egy vagy több zérus.

Ha az  $OA_0$  félegyenessel  $\varphi$  szöget alkotó félegyenes  $B_1$  pontban metszi az  $A_0 A_1$  egyenest, akkor  $\overline{A_0 B_1} = tg \varphi = x$ . Az  $OB_1$  egyenesre a  $B_1$  pontban állított merőleges és az  $A_1 A_2$  egyenes metszéspontját  $B_2$ -vel, a  $B_{k-1} B_k$  egyenesre a  $B_k$  pontban állított merőleges és az  $A_k A_{k+1}$  egye-

<sup>18)</sup> Bizonyos számú adott pontból derékszögvonallal szerkeszthető pontok derékszögű koordinátáira a szükséges és egyúttal elégséges föltételt Tietze H. német matematikus adta meg. (Math. Zeitschr. 46. k., 1940, 190. lap). Egy és két derékszögvonallal való szerkesztésekre és kísérletekre vonatkozólag lásd Adlernek<sup>16)</sup> szöveg alatti jegyzetben idézett értekezését.

<sup>19)</sup> A Lill-féle eljárást a következő tankönyvek is tárgyalják: Bieberbach L., Vorlesungen über Algebra, 1928, 134. l., továbbá Adler, Hjelmslev és Vahlen szerzőknek könyvünk végén felsorolt munkái.



forgatjuk, miközben csúcsát az  $A_0 A_1$  egyenesen mozgatjuk. Ezzel egyidejűleg a másik derékszögvonalzót az első derékszögvonalzó második szárán való csúsztatással úgy mozgatjuk, hogy a derékszög csúcsa az  $A_1 A_2$  egyenesen maradjon. A két derékszögvonalzót egyidejűleg addig mozgatjuk, amíg a második derékszögvonalzó második szára az  $A_3$  ponton megy át.

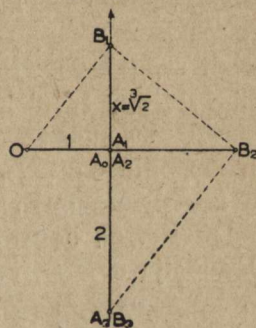
A két derékszögvonalzóval végezhető ilyen geometriai kísérlettel tehát bármely valós együtthatójú harmadfokú egyenlet valós megoldásait meg lehet határozni. Meg lehet tehát oldani a déloszi problémát, a triszekciót, lehet szabályos hétszöget és kilencszöget szerkeszteni.

A déloszi probléma megoldását a 47. ábra adja.

Az  $a_3 = -2$  szakasznak az egységszakaszhoz való helyzetét úgy állapítjuk meg, hogy az  $a_1$  és  $a_2$  együtthatót zérustól különbözőnek választva megalkotjuk az együtthatók törtvonalát és azután az  $a_1$  és  $a_2$  együtthatót zérushoz közelítjük.

Az ábra három hasonló derékszögű háromszögből könnyen be lehet látni közvetlenül is, hogy az  $A_0 B_1$  szakasz hossza  $x = \sqrt[3]{2}$ .

Plato (Kr. e. 429—347) görög filozófus és matematikus a déloszi probléma megoldására eszöközt készített. Készüléke ugyanezen ábra szerint határozta meg az egységszakaszból a  $\sqrt[3]{2}$  hosszú szakaszt.



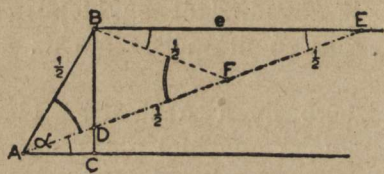
47. ábra.

## 26. §. Egységátrakó vonalzóval végezhető geometriai kísérletek. Szögharmadolás. Köbgyökvonás. Harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása.

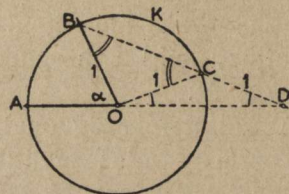
Az egységátrakó vonalzót már a régi görög matematikusok felhasználták geometriai kísérletre, a *betolás*-nak, becsúsztatásnak (Einschiebung) nevezett szerkesztés elvégzésére. Ez a feladat az egységátrakó vonalzónak olyan helyzetbe hozása, amelyben a vonalzó adott ponton megy át és a rajta levő egységszakasz végpontjai adott vonalakra esnek. A régi görög matematikusoktól származik a szögharmadolásnak betolással való következő két megoldása:

Az  $\alpha$  hegyesszög három egyenlő részre való osztása végett olyan  $ABC$  derékszögű háromszöget szerkesztünk, amelynek  $A$ -nál fekvő szöge  $\alpha$  és amelynek átfogója az egységszakasz fele, azután az  $AC$  egyenessel  $B$ -n át párhuzamos  $e$  egyenest húzunk. Ha az egységátrakó vonalzót olyan helyzetbe hozzuk, hogy  $A$ -n menjen át és a rajta levő egységszakasz két

végpontja közül az egyik a  $BC$  szakasz  $D$ , a másik az  $e$  egyenes  $E$  pontjába essék, akkor  $CAD \sphericalangle = \frac{\alpha}{3}$ .



48. ábra.



49. ábra.

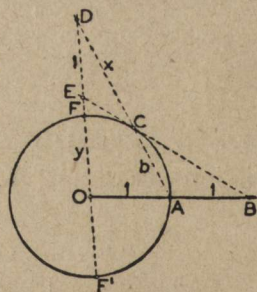
Ha ugyanis  $F$  jelöli a  $DE$  szakasz felezőpontját, akkor  $ABF$  és  $BEF$  egyenlőszárú háromszög és így az ábrán egy ívvel, továbbá a két ívvel jelölt szögek egyenlők és az utóbbiak közül akármelyik kétszer akkora, mint az egy ívvel jelölt akármelyik szög.

A második szerkesztéshez az egységátrakó vonalzón kívül az  $O$  középpontú egységsugarú  $K$  körre is szükségünk van. Legyen  $A$  és  $B$  a  $K$  kör olyan pontja, hogy  $AOB \sphericalangle = \alpha$ . Ha az egységátrakó vonalzót úgy helyezzük el, hogy  $B$ -n menjen át és a rajta megjelölt egységszakasz  $C$  végpontja a  $K$  körre,  $D$  végpontja pedig az  $AO$  félegyenesnek a  $K$  körön kívül eső darabjára essék, akkor  $ADB \sphericalangle = \frac{\alpha}{3}$ , mivel az  $OBC$  és  $OCD$  háromszög egyenlőszárú.<sup>20)</sup>

Tompaszög harmadolása végett a kiegészítő szöget harmadoljuk és az így kapott szöget a  $\frac{\pi}{3}$  szögből levonjuk.

Körzövel és betolással meg lehet határozni az  $a = 4b$  szakaszból a  $\sqrt[3]{a}$  hosszúságú szakaszt. Föltetelezhetjük, hogy  $a < 8$ . Az ellenkező esetben ugyanis van olyan  $n$  egész szám, hogy  $a = 2^{3n} a_1$  és  $a_1 < 8$ . Ekkor  $\sqrt[3]{a} = 2^n \sqrt[3]{a_1}$ .

Az  $O$  pont körül egységsugárral leírt  $K$  kör  $OA$  sugarát az egységgel  $B$ -ig meghosszabbítjuk és a



50. ábra.

<sup>20)</sup> A betolást már a régi görög matematikusok sem tartották igazi szerkesztésnek. Ezért annak elkerülésére értelmezte Nikomedes (kb. 280 évvel Kr. e.) a kagylóvonalat, konkhoist és annak lerajzolására eszközt szerkesztett. Ez a negyedrendű görbe következőképp származtatható:

Fölveszünk a síkon egy  $e$  egyenest, alapvonalat, egy rajta kívül eső  $P$  pólust és egy  $d$  hosszúságú szakaszt. Ha  $F, F_1, F_2$  a póluson átmenő tetszőleges  $f$  egyenes olyan pontja, hogy  $F$  az  $e$  egyenesre esik és  $\overline{F_1F} = \overline{FF_2} = d$ , akkor a kagylóvonal az  $F_1$  és  $F_2$  pont geometriai helye.

Ha a szögharmadolás első ábráján a pólus  $A$ , az alapvonal a  $BC$  egyenes és  $d=1$ , a második ábrán pedig a pólus  $B$ , az alapvonal az  $AO$  egyenes és  $d=1$ , akkor a megoldást szolgáltató  $E$ , ill.  $C$  pont a kagylóvonalnak az  $e$  egyenessel, ill. a  $K$  körrel való metszéspontja.

$K$  körön olyan  $C$  pontot veszünk fel, hogy  $AC = b = \frac{a}{4}$ . Ezután az egységátrakó vonalzónak  $O$  körüli forratása közben a  $\overline{DE}$  egységszakaszt az  $\overline{AC}$  és  $\overline{BC}$  egyenes közé toljuk. (A 23. és 25. § szerint  $C$ -t körző nélkül meg lehet szerkeszteni párhuzamos élű vonalzóval, vagy derékszögvonalzóval).

Ha  $F$  és  $F'$  jelöli az  $OD$  egyenessel a  $K$  körből kimetszett két pontot és ha  $\overline{CD} = x$  és  $\overline{OE} = y$ , akkor  $\overline{DF} = y$  és  $\overline{DF'} = y + 2$ . Ha az  $OAD$  háromszögre és a  $BC$  szelőre Menelaus tételét, a  $D$  pontra és a  $K$  körre pedig a hatványra vonatkozó tételt alkalmazzuk, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{BA}} \cdot \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{EO}} = 2 \cdot \frac{b}{x} \cdot \frac{1}{y} = 1$$

és

$$\overline{DC} \cdot \overline{DA} = \overline{DF} \cdot \overline{DF'}, \text{ vagyis } x(x + b) = y(y + 2).$$

Az így kapott két egyenletből

$$\frac{x}{2} = \frac{b}{y} = \frac{x+b}{2+y} \quad \text{és} \quad \frac{x+b}{2+y} = \frac{y}{x}, \quad \text{tehát} \quad \frac{x}{2} = \frac{b}{y} = \frac{y}{x}.$$

Ebből következik, hogy

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{b}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{b}{x} \quad \text{és} \quad \text{így } x^3 = 4b = a.$$

A harmadfokú egyenlet Cardano-féle megoldása az együtthatókból racionális műveleteken kívül köbgyök- és négyzetgyökvonásokkal előállítható. Ugyanez állítható a negyedfokú egyenletekre is. Komplex szám négyzetgyöke körzővel és vonalzóval szerkeszthető. Komplex szám köbgyöke az abszolút érték köbgyökére és szögének harmadolására vihető vissza. Mindkét művelet elvégezhető körzővel és egységátrakó vonalzóval.

Ebből következnek az alábbi tételek:

*Bármely harmadfokú, vagy negyedfokú egyenlet megoldását az együtthatókból körzővel és egységátrakó vonalzóval meg lehet szerkeszteni, feltéve, hogy az egységátrakó vonalzót betolásra is alkalmazzuk.*

*A körzőt helyettesítheti egy megrajzolt kör, vagy annak akármilyen kis íve anélkül, hogy a kör középpontja meg volna adva.*

*A körzőt és az egységátrakó vonalzót helyettesítheti egy olyan párhuzamos élű vonalzó, amelynek egyik élén két pont meg van jelölve és így az az él egységátrakásra alkalmas.*

*A körzőt és vonalzót helyettesítheti egy olyan derékszögvonalzó is, amelynek egyik szárán egy pont meg van jelölve, s így a derékszög csúcsától számított szakasz egységnek tekinthető.*

Az egységátrakó vonalzóval ugyanis lehet párhuzamos egyeneseket húzni és így lehet a teljesen vagy csak egy ívével megadott kör párhuzamos húrjait felezni és az ilyen húrok felezőpontjainak összekötésével a kör akárhány átmérőjét szerkeszteni.

A körzőt az előzők szerint pótolhatja egy párhuzamos élű vonalzó, de pótolhatja egy derékszögvonalzó is, minthogy a harmadfokú és negyedfokú egyenletek megoldásakor geometriai kísérletet úgy is megengedtünk.<sup>21)</sup>

## 27. §. Papírhajtogatással végezhető szerkesztések.

Papírlap hajtogatásával vonalzó, körző, sőt ceruza nélkül lehet geometriai szerkesztéseket végezni. Papírlap összehajtogatásával egyenest lehet előállítani. A papírlapot lehet úgy összehajtani, hogy a kapott egyenes két adott (hajtogatással megjelölt) ponton menjen át.

Ha egy hajtogatással kapott  $e$  egyenes két pontját egymásra hajtjuk és azután a papírlapot kisimítjuk, akkor az  $e$  egyenesre merőleges  $m$  egyeneshez jutunk. A papírlap oly módon való összehajtásával, amely az  $e$  egyenesnek más két pontját helyezi egymásra, az  $m$  egyenessel párhuzamos  $m'$  egyeneshez juthatunk. Egy egyenes  $A$  és  $B$  pontjának és egy szög  $a$  és  $b$  szárának egymásra való hajtogatásával az  $AB$  szakasz felezőpontját és középvonalát, illetőleg az  $(a, b)$   $\sphericalangle$  szögfelezőjét kapjuk meg.

<sup>21)</sup> Harmadfokú feladatok geometriai kísérlettel való megoldásában a két derékszögvonalzó közül az egyiket egy megrajzolt körrel lehet helyettesíteni, a másik derékszögvonalzót megtarthatjuk, vagy egy más szögvonalzóval pótolhatjuk (Barth L., Arch. d. Math. u. Phys. II. 1. kötet, 1884, 1. l.; Bieberbach L., Journal f. d. r. u. angew. Math. 167. k., 1932, 142. l., Iglisch R., Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht 64. k., 1933, 207. l.; szögvonalzóra vonatkozólag Fuhr H., Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 65. k., 1934, 279. l.).

Bármely harmadfokú geometriai feladat geometriai kísérlettel szerkeszthető, ha van egy párhuzamos élű vonalzónk és egy derékszögvonalzónk. A harmadfokú szerkesztések akkor is elvégezhetők, ha a két vonalzó egyesítve van egy olyan kettős derékszögvonalzón, amelyen a két derékszög egyik szára közös, a másik két szár pedig párhuzamos élű vonalzót alkot (Breidenbach W., Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 56. k., 1925, 4. l.)

Mivel a negyedfokú egyenletek megoldása harmadfokúakra és másodfokúakra vezethető vissza, azért a most idézett tételek negyedfokú feladatokra is vonatkoznak.

Ezek az irodalmi adatok Obláth Rikárd „Der rechte Winkel und die kubischen Konstruktionen“ c. dolgozatából valók (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 68. k., 1937, 301. l.). Obláth ott kimutatja, hogy bármely harmad- vagy negyedfokú feladat megoldása egyetlen derékszögvonalzóval elvégezhető, ha annak egyik szárán olyan  $A$  és  $B$  pont van megjelölve, hogy a derékszög  $O$  csúcsára vonatkozólag  $AO = 2 \cdot OB$ . Megjegyezzük, hogy a  $B$  felezőpont megjelölését el lehet hagyni, mivel a derékszögvonalzó az  $OA$  egység betolására alkalmas egységátrakó vonalzó. (Obláth szerkesztésében nem betolás, hanem azzal egyenlőértékű művelet szerepel.)

Hajtogatással lehet szakaszt átrakni, de nem lehet átfogóból és egyik befogóból derékszögű háromszöget előállítani.

A mondottakból következik, hogy papírlap hajtogatásával mindazokat a szerkesztéseket el lehet végezni, amelyeket egységátrakó vonalzóval lehet.<sup>22)</sup>

Ha egy másik papírlapból hajtogatással párhuzamos szalagot állítunk elő, akkor ezt az első lapon párhuzamos élű vonalzóként használhatjuk. A szerkesztésben szükséges egyeneseket nem kell meghúznunk, hanem azok mentén az első lapot összehajtjuk.

Ebből következik, hogy két papírlap segítségével bármely körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztést papírhajtogatással is el lehet végezni.

Minthogy az egyik papírlapot egységátrakó párhuzamos élű vonalzó, vagy egységátrakó derékszög vonalzóként használhatjuk, azért papírhajtogatással a harmad- és negyedfokú feladatokat is megoldhatjuk.

Ha három papírlapot veszünk föl, akkor azok közül kettőből derékszög vonalzót állíthatunk elő és azokat a harmadik papírlapon a 25. §-ban ismertetett geometriai szerkesztések és kísérletek elvégzésére használhatjuk.<sup>23)</sup>

<sup>22)</sup> A papírhajtogatás irodalmára vonatkozólag hivatkozunk Vahlen Th. könyvére, 59. l., és Ahrens W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele c. könyvére, (1901), 395. l.

<sup>23)</sup> Papírhajtogatással könnyen előállíthatunk szabályos háromszöget, négyszöget, ötszöget, hatszöget, nyolcszöget és tizszöget. Az  $AB$  oldalú szabályos háromszög előállítása végett a papírlapot úgy hajtjuk össze, hogy az összehajtás egyenese  $A$ -n menjen át és az összehajtáskor  $B$  az  $AB$  szakasz középvonalára essék. Ha  $C$  a középvonalnak az a pontja, amellyel  $B$  a hajtogatáskor összeesik, akkor  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög. Hajtogatással ennek a háromszögnek  $AC$  és  $BC$  oldalát könnyen megkaphatjuk.

Hajtogatással megkaphatjuk az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög  $S$  súlypontját. Ha elvégezzük a papírlapnak azt a három hajtogatását, amely az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontot  $S$ -be juttatja, akkor ezáltal olyan szabályos hatszöget kapunk, amelynek oldala az  $AB$  oldal harmadrésze.

Négyzet szerkesztése hajtogatással közismert. Az  $ABCD$  négyzetből hajtogatással megszerkesztjük azt az  $A_1B_1C_1D_1$  négyzetet, amelynek szögpontjai az előbbi négyzetnek oldalfelezőpontjai. Ha  $AA_1D_1$  az első négyzetnek a másodikon kívül eső egyik (egyenlőszárú derékszögű) háromszöge, akkor az  $AA_1D_1$  háromszög  $A_1$  és  $D_1$  mellett fekvő szögének felező egyenese és a többi három derékszögű háromszög megfelelő két-két szögfelezője egy olyan szabályos nyolcszöget alkot, amelynek  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  és  $D_1$  négy nem egymásra következő szögpontja.

Azt a szerkesztést, amellyel az egységsugarú körbe írt szabályos ötszögnek és tizszögnek egy oldalát kaptuk, nyilvánkép hajtogatással is el lehet végezni.

Szabályos ötszöget hajtogatással legegyszerűbben úgy lehet előállítani, hogy egy párhuzamos élű papírszalagból hurkot kötünk és azt lassankint szorosra húzzuk össze.

V. Körzővel és vonalzóval végezhető szerkesztések, ha meg van rajzolva egy körtől különböző kúpszelet, vagy egy harmadrendű görbe.

28. §. Geometriai szerkesztések körtől különböző megrajzolt kúpszelet felhasználásával.

Kortum és Smith<sup>24)</sup> egyidejűleg és egymástól függetlenül kimutatta a Poncelet-Steiner-féle tételnek megfelelő következő tételt:

*Ha meg van rajzolva egy körtől különböző kúpszelet, akkor valós együthetőkkel bíró bármely harmadfokú, vagy negyedfokú egyenlet valós gyökeit az egyenlet együtthatóit meghatározó szakaszokból körzővel és vonalzóval lehet szerkeszteni.*

Ez a tétel akkor, amikor a megrajzolt kúpszelet parabola, könnyen belátható. A parabola egyenlete a derékszögű koordinátarendszer alkalmas megválasztásával mindig

$$P(x, y) \equiv x^2 - y = 0$$

alakban írható. Bármely negyedfokú egyenletet mindig

$$f(x) \equiv x^4 + p x^2 + q x + r = 0$$

alakra lehet hozni. Ennek az egyenletnek négy gyöke nyilvánkép a

$$K(x, y) \equiv x^2 + y^2 + q x + (p-1)y + r \equiv \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 - \left[\frac{q^2}{4} + \frac{(p-1)^2}{4} - r\right] = 0$$

kör és a  $P$  parabola négy metszéspontjának abszcisszája. A  $p$ ,  $q$  és  $r$  hosszúságú szakaszból egyszerűen szerkeszthető  $K$  középpontja és, ha  $K$  valós kör, sugara is. Ha  $K$  képzetes kör, akkor az  $f(x)=0$  egyenletnek nincs valós gyöke. Ha  $K$  pontkör, akkor középpontjának abszcisszája gyöke lehet az egyenletnek, de az egyenletnek ettől különböző valós gyöke nem lehet.

$P$  és  $K$  valós metszéspontjai és az  $f(x)=0$  egyenlet valós gyökei között egyértelmű megfelelés van. Valós metszéspont abszcisszája az egyenlet valós gyöke és megfordítva: az egyenlet valós gyöke  $P$  és  $K$  egy valós metszéspontjának abszcisszája. Ha ugyanis  $x_1$  az  $f(x)=0$  egyenletnek valós gyöke, akkor  $y_1 = x_1^2$  is valós és így  $P(x_1, y_1) = 0$  és  $K(x_1, y_1) = 0$ .

<sup>24)</sup> Kortum H., Über geometr. Aufgaben 3. und 4. Grades, Bonn, 1869, Smith H. J. S., Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques, Annali di Mat. (2) 3. kötet, 1869. A berlini Akadémia mindkét dolgozatot Steiner-díjjal tüntette ki.

Az általános tétel kimutatására feltételezhetjük, hogy az  $f(x)=0$  egyenletnek van valós gyöke és az nem többszörös. Ha ugyanis egy valós gyök többszörös volna, akkor annak kiszámítását legfeljebb másodfokú egyenletre lehet vissza vinni és így azt a gyököt körzővel és vonalzóval lehetne szerkeszteni. Ebből a föltevésből következik, hogy az  $f(x)=0$  egyenletnek legalább két egymástól különböző valós gyöke van.

Ha  $r=0$  (de  $q \neq 0$ ), akkor a  $P$  és  $K$  kúpszelet kezdőponttól különböző három metszéspontjának abszcisszája az

$$x^3 + px + q = 0$$

harmadfokú egyenletnek gyöke.

A  $P$  és  $K$  kúpszelet négy közös pontján egyúttal keresztlmegy a  $K(x, y) - \lambda P(x, y) \equiv (1 - \lambda)x^2 + y^2 + px + (p - 1 + \lambda)y + r = 0$  kúpszeletsor bármely tagja. Az  $f(x)=0$  egyenlet négy gyöke tehát a  $K$  kör és a  $K - \lambda P = 0$  kúpszelet négy metszéspontjának is abszcisszája.

Ha a megrajzolt kúpszelet  $a$  és  $b$  féltengellyel bíró  $E^*$  ellipszis, akkor a kúpszeletsornak az a tagja amelyre vonatkozólag  $1 - \lambda = \frac{b^2}{a^2}$ ;  $E^*$ -hoz hasonló  $E$  ellipszis, mivel — az  $f(x)=0$  valós gyökeire tett föltevés miatt — van két különböző pontja és emiatt  $E$  nem lehet képzetes vagy pontellipszis.

Van tehát a síkban olyan  $T$  hasonlósági átalakítás, amely az  $E$  ellipszist az  $E^*$  ellipszisbe viszi át és nyilvánképen körzővel és vonalzóval szerkeszthető egy  $Q$  pontból az a két pont, amelybe a  $Q$  pontot a  $T$  hasonlósági átalakítás és annak  $T^{-1}$  megfordítottja átviszi.  $T$  az  $E$  ellipszist  $E^*$ -ba, a  $K$  kört egy  $K^*$  körbe és így  $E$  és  $K$  valós metszéspontjait  $E^*$  és  $K^*$  valós metszéspontjaiba viszi át. Ezek a metszéspontok szerkeszthetők, mivel  $E^*$  meg van rajzolva.  $E^*$  és  $K^*$  valós metszéspontjait a  $T^{-1}$  hasonlósági átalakítás  $E$  és  $K$  valós metszéspontjaiba viszi át. Ezek a metszéspontok és így az  $f(x)=0$  egyenlet valós gyökei körzővel és vonalzóval szerkeszthetők.

Hasonlóképp mutatható ki a tétel arra az esetre is, amikor a megrajzolt kúpszelet  $a$  és  $b$  féltengellyel bíró  $H^*$  hiperbola. A  $K - \lambda P = 0$  kúpszeletsorban két olyan  $H_1$  és  $H_2$  hiperbola van, amelyeknek aszimptotái a  $H^*$  hiperbola aszimptotaival párhuzamosak. Ennek a két hiperbolának paramétere a

$$\lambda - 1 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{illetőleg a} \quad \lambda - 1 = \frac{a^2}{b^2}$$

egyenletnek tesz eleget. Ha  $H^*$  egyenlőoldalú, akkor  $H_1$  és  $H_2$  egybeesik. Föltelezhetjük, hogy  $H_1$  és  $H_2$  valódi kúpszelet, mert ha az egyik két egyenesre esnék szét, akkor azt a két egyenest és ezeknek a  $K$  körrel való metszéspontjait a  $H^*$  hiperbola nélkül körzővel és vonalzóval lehetne szerkeszteni.

$H_1$  és  $H_2$  vagy  $H^*$ -hoz, vagy a  $H^*$ -hoz kapcsolt  $H'$  hiperbolához hasonló. Ha  $H_1$  hasonló  $H^*$ -hoz, akkor  $H_1$  és  $K$  metszéspontjait épúgy határozzuk meg, mint előbb  $E$  és  $K$  metszéspontjait. Lehetséges azonban, hogy mind  $H_1$ , mind  $H_2$  a  $H'$  hiperbolához hasonló. A tétel teljes kimutatásához tehát csak azt kell bizonyítanunk, hogy egy tetszőleges  $K'$  körnek a  $H'$  hiperbolával való metszéspontjait — a  $H^*$  hiperbola felhasználásával — körzővel és vonalzóval lehet szerkeszteni.

Ez valóban lehetséges. Ha ugyanis

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{és} \quad x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

a  $H'$  hiperbolának és a  $K'$  körnek egyenlete és ha  $P_k^* = (x_k^*, y_k^*)$  az

$$x^2 + y^2 + \frac{b}{a} Bx + \frac{a}{b} Ay + C + a^2 - b^2 = 0$$

egyenlettel bíró  $K^*$  körnek metszéspontja a  $H^*$  hiperbolával, akkor a  $P_k' = (x_k', y_k') = \left(\frac{a}{b} y_k^*, \frac{b}{a} x_k^*\right)$  pont metszéspontja a  $H'$  és  $K'$  görbének.

Mivel a  $H'$  hiperbolának paraméteres egyenletrendszere

$$x = a \sec t, \quad y = b \operatorname{tg} t,$$

azért a  $K'$  körrel való metszéspontjaihoz tartozó paraméterértékek az

$$(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 t + A a \sec t + B b \operatorname{tg} t + C + a^2 = 0$$

egyenletnek tesznek eleget.

Ugyanennek az egyenletnek tesznek eleget a  $H^*$  hiperbola és a  $K^*$  kör metszéspontjaihoz tartozó  $t$  paraméterértékek, mivel  $H^*$  egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0, \quad \text{vagy} \quad x = a \operatorname{tg} t, \quad y = b \sec t$$

alakban írható. Ebből következik, hogy

$$x_k' = a \sec t_k = \frac{a}{b} (b \sec t_k) = \frac{a}{b} y_k^* \quad \text{és} \quad y_k' = b \operatorname{tg} t_k = \frac{b}{a} (a \operatorname{tg} t_k) = \frac{b}{a} x_k^*.$$

Ezzel Kortum és Smith tételét teljesen bebizonyítottuk.<sup>25)</sup>

Kortum és Smith tételét bármely (valós vagy képzetes együtthatóval bíró) harmad- és negyedfokú egyenlet bármely (valós vagy képzetes) gyökének szerkesztésére kiterjeszthetjük. Egy ilyen egyenlet gyö-

<sup>25)</sup> Kortum és Smith eredményeit Vahlen Th. bizonyította be elemi úton (Arch. d. Mathematik und Physik III. 3. k., 1901, 112. l., Konstr. u. Approx. III. fejezet). Az általunk adott bizonyítás Vahlen bizonyításánál is egyszerűbb és elemibb.

Vahlen kimutatta (az idézett helyen) Descartes és Smith tételét, hogy a harmad- és negyedfokú feladatoknak körzővel és vonalzóval való szerkesztéséhez elégséges az is, ha a körtől különböző kúpszeletnek csak egy íve van megrajzolva.

keinek meghatározása racionális műveleteken kívül négyzetgyökvonásokból és köbgyökvonásokból áll. A négyzetgyökvonás pozitív szám négyzetgyökvonásából és szögnek felezéséből áll, tehát körzővel és vonalzóval elvégezhető. Egy komplex szám köbgyöke abszolút értékének köbgyökét és szögének harmadolását kívánja. Mindkét feladat valós együttthatójú harmadfokú egyenlet megoldását kívánja, s így Kortum és Smith tétele szerint elvégezhető.

## 29. §. Geometriai szerkesztések harmadrendű görbék segítségével.

Ha az  $y = x^3$  harmadfokú parabola meg van rajzolva és ha a derékszögű koordinátarendszer egységnégyzetének szögpontjai, vagyis a  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$  és az  $(1,0)$  koordinátákkal bíró pontok meg vannak adva, akkor bármely valós együttthatójú harmadfokú egyenlet valós gyökeit vonalzóval lehet szerkeszteni.

Az  $x^3 + px + q = 0$  harmadfokú egyenlet gyökei ugyanis az  $y = x^3$  és az  $y + px + q = 0$  vonal metszéspontjainak abszcisszái.

A régi görög matematikusok a harmadrendű görbék közül szerkesztésre a Diokles-féle cisszoist használták fel. Ezt a görbét következőkép származtathatjuk:

Egy  $K$  kör két párhuzamos érintőjét  $a$ -val és  $b$ -vel és ezek érintéspontját  $A$ -val és  $B$ -vel jelöljük. Az  $A$  ponton átmenő tetszőleges  $e$  egyenesnek a  $K$  körrel, illetőleg a  $b$  egyenessel való metszéspontját  $P_k$ -val, illetőleg  $P_b$ -vel jelöljük. Az  $AP_b$  szakasznak az a  $P$  pontja, amelyre vonatkozólag  $AP = P_k P_b = AP_b - AP_k$ , a cisszoisnak pontja. Az  $e$  egyenesnek  $A$  körül való forgatásával megkapjuk a cisszois valamennyi pontját. A cisszoisnak az  $A$  pontban csúcspontja van.

Ha az  $a$  egyenest  $y$ -tengelynek, az  $A$  pontot kezdőpontnak és az  $AB$  szakaszt egységnek választjuk, akkor a cisszois egyenletét a következőkép írhatjuk

$$x(x^2 + y^2) = y^2, \text{ vagy } \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y}{1-x}, \text{ vagy } \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x}{1-x}.$$

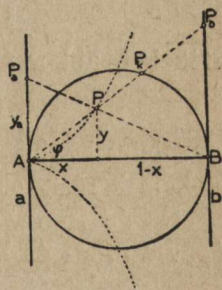
Ha ugyanis az  $AP$  félegyenes az  $x$  tengely pozitív felével  $\varphi$  szöget alkot, akkor

$$r = AP = AP_b - AP_k = \frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

és így

$$r \cos \varphi \cdot r^2 = r^2 \sin^2 \varphi, \text{ vagyis } x(x^2 + y^2) = y^2.$$

Ezzel a görbével az  $y_a$  számból könnyen lehet köbgyököt vonni. Ha ugyanis  $P_a = (0, y_a)$ , ha továbbá  $P$  jelöli a  $BP_a$  egyenesnek a cisszois-



51. ábra.

sal és  $P_b$  az  $AP$  egyenesnek a  $b$  egyenessel való metszéspontját, és ha végül  $P = (x, y)$  és  $P_b = (1, y_b)$ , akkor  $y_b = \sqrt[3]{y_a}$ , mivel

$$\frac{y_a}{1} = \frac{y}{1-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = y_b^3, \text{ mert } \frac{y}{x} = \frac{y_b}{1}.$$

A cisszois görbe megrajzolására Newton eszközt, cisszois körzőt szerkesztett.

*Ha meg van rajzolva az  $x(x^2 + y^2) = y^2$  cisszois és meg van adva a koordinátarendszer  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$  és  $(1,0)$  pontja, akkor bármely harmadfokú (valós együtthatójú) egyenlet valós gyökei vonalzóval lehet szerkeszteni.*

Az  $f(x) = x^3 + px + q = 0$  egyenlet megoldása végett meghatározzuk a  $qy + (p-1)x + 1 = 0$  egyenesnek a cisszoissal való metszéspontjait és ezeket az  $A$  pontból a  $b$  egyenesre vetítjük. A kapott pontok ordinátáinak reciprok értékei az  $f(x) = 0$  egyenlet gyökei. A reciprok értékek az egységnégyzet ismerete alapján vonalzóval szerkeszthetők.

Ha ugyanis  $P = (x, y)$  egy metszéspont, akkor  $P$ -nek  $A$ -ból a  $b$  egyenesre való vetülete olyan  $P_b$  pont, amelynek ordinátája  $t = \frac{y}{x}$ . Ha az egyenes egyenletét elosztjuk  $(1-x)$ -szel és felhasználjuk a cisszois egyenletéből kapott

$$\frac{y}{1-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 = t^3 \text{ és } \frac{x}{1-x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = t^2$$

értékeket, akkor  $t$  részére a

$$qt^3 + pt^2 + 1 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ennek az egyenletnek gyökei az  $f(x) = 0$  egyenlet gyökeinek reciprok értékei.<sup>26)</sup>

Ha az  $y = x^3$  görbe meg van rajzolva, akkor körző és vonalzó segítségével ötöd- és hatodfokú egyenletek gyökeit is szerkeszthetjük. Az

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$$

kör és a harmadrendű görbe metszéspontjainak abszcisszái ugyanis az

$$x^6 + qx^3 + x^2 + px + r = 0$$

egyenlet gyökei.

<sup>26)</sup> Egyéb harmadrendű görbék felhasználását is tárgyalja London F. a Zeitschrift für Math. und Phys. 41. kötetében (1896), 129. l. Lásd Vahlen könyvét 96–101. lap. Az erre a célra felhasznált harmadrendű görbék mind unikurzálisak, vagy más néven racionálisak. Az ilyen görbéket jellemzi az a tulajdonságuk, hogy koordinátáik egy paraméter racionális függvényeiképp állíthatók elő. Kubota T. (Tôhoku Math. Journal 5. k., 1914. 29. l.) kimutatta azt, hogy bármely harmad- vagy negyedfokú szerkesztési feladat körzővel és vonalzóval elvégezhető akkor, ha meg van rajzolva egy negyedrendű unikurzális (racionális) síkgörbe.

## VI. Geometrográfia.

### 30. §. Geometrográfikus képlet.

A geometrográfia a végrehajtott geometriai szerkesztések összehasonlításával foglalkozik. A geometriai szerkesztések körzővel és vonalzóval való elvégzése a következő öt elemi művelettel történik:

$E_0$  : a vonalzónak adott ponthoz való helyezésével,

$E$  : egyenes húzásával,

$K_0$  : a körző valamelyik hegyének adott pontba, vagy adott vonal egy tetszőleges pontjába való helyezésével,

$K$  : kör lerajzolásával,

$V$  : a vonalzó és körző használatának szerkesztés közben történő felcserélésével, felváltásával.

Ennek megfelelően körzővel és vonalzóval véghezvitt bármely geometriai szerkesztéshez hozzárendelhető egy

$$e_0 E_0 + e E + k_0 K_0 + k K + v V$$

alakú szimbolikus összeg, a szerkesztés geometrográfikus képlete, amelyben az  $e_0$ ,  $e$ ,  $k_0$ ,  $k$  és  $v$  egész szám azt jelenti, hogy a szerkesztés elvégzése közben az illető elemi műveletet hányszor alkalmaztuk.<sup>27)</sup>

Egy elvégzett geometriai szerkesztésnek határozott geometrográfikus képlete van, de ez a képlet csak a lehető legegyszerűbb esetekben határozza meg a szerkesztést, mivel nem ad felvilágosítást arról, hogy az egyes elemi műveleteket mikép és milyen sorrendben alkalmaztuk. Ugyanannak a geometriai feladatnak különböző szerkesztéseihez általában különböző geometrográfikus képletek tartoznak.

A geometrográfikus képletben két vonal (két egyenes, egyenes és kör, két kör, a feladatban előre megrajzolt vonal és egyenes vagy kör) metszéspontjainak meghatározását nem kell figyelembe venni, mivel egy ilyen metszéspont a további szerkesztésben csak  $E_0$ , vagy  $K_0$  elemi műveletként szerepelhet. A képletre nézve az is közömbös, hogy a szerkesztés keresztülvitelére előre megrajzolt ábrával (pl. körrel, négyzettel, stb.) rendelkezünk-e, vagy sem.

A geometrográfikus képlet értelmezése szerint két adott ponton átmenő egyenes húzásának  $2 E_0 + E$ , adott pont körül adott ponton átmenő kör, vagy körív lerajzolásának pedig  $2 K_0 + K$  a képlete. Az I. alapszer-

<sup>27)</sup> A geometrográfia és a geometrográfikus elnevezés *L e m o i n e* E. francia matematikustól származik (*Géométriegraphie*, Paris, 1902). Ő volt az első, aki a körzővel és a vonalzóval elvégzett szerkesztéseket a bennük előfordult elemi műveletek szerint osztályozta. *L e m o i n e* különbséget tett olyan két elemi művelet között, amelyben a körző hegyét egy adott pontba, vagy egy adott vonal tetszőleges pontjába kell helyezni, nem vette azonban figyelembe a  $V$  elemi műveletet.

kesztéshez, vagyis egy-egy pontpárjával megadott két egyenes metszéspontjának vonalzóval való szerkesztéséhez tehát a  $4E_0 + 2E$  képlet tartozik. A körzővel és vonalzóval véghezvitt III. és II. alapszerkesztéshez, vagyis adott középpontú és adott ponton átmenő körnek hasonló módon megadott más körrel, illetőleg egy pontpárjával megadott egyenessel való metszéspontjainak meghatározásához a  $4K_0 + 2K$ , illetőleg a  $2E_0 + E + 2K_0 + K + V$  geometrográfikus képlet tartozik.

A Mohr-Mascheroni-féle és a Poncelet-Steiner-féle szerkesztések geometrográfikus képletében  $v=0$  és ezen kívül  $e=0$ , illetőleg  $k=0$ . E között a két szélső eset között vannak azok a szerkesztések, amelyekben körzőt és vonalzót korlátozás nélkül használhatunk.

Ha más rajzeszközt is alkalmazunk, akkor az arra vonatkozó új elemi műveleteket is meg kell állapítanunk és azokkal a geometrográfikus képletet ki kell egészíteni. Nem kell új elemi műveletet bevezetni párhuzamos élű vonalzó használatakor, mivel ennek a vonalzónak egy olyan elhelyezése, amelyben egy éle adott egyenesre esik, vagy pedig egy-egy éle egy-egy adott ponton megy át,  $2E_0$  műveletnek tekinthető.

### 31. §. A geometriai szerkesztések egyszerűsége.

Ugyanannak a szerkesztési feladatnak kétféle végrehajtását a hozzájuk tartozó geometrográfikus képletek segítségével lehet összehasonlítani. Ha az első szerkesztésben az  $e_0$ ,  $e$ ,  $k_0$ ,  $k$ , és  $v$  szám közül az egyik kisebb, s a többi nem nagyobb, mint a másodikban a megfelelő szám, akkor az első szerkesztést egyszerűbbnek tekinthetjük, mint a másikat.

Más esetben ilyen összehasonlítás megtétele végett az öt elemi művelethez egyszerűségük mérlegelése után úgy rendelünk egy-egy pozitív számot, az illető művelet egyszerűségét, hogy egyszerűbb művelethez kisebb szám tartozzék. Ha  $E_0$ ,  $E$ ,  $K_0$ ,  $K$  és  $V$  jelöli az öt művelet egyszerűségét is, akkor egy szerkesztés geometrográfikus képlete mint összeg egy számot értelmez, az illető szerkesztés egyszerűségét. Ugyanannak a szerkesztési feladatnak két megoldása közül a geometrográfia azt nevezi egyszerűbbnek, amelynek egyszerűségét kisebb szám értelmezi.

Mivel tapasztalattal nem lehet meghatározni az egyes elemi műveletek egyszerűségét, azért valamennyinek egyszerűségét 1-gyel veszik egyenlőnek, s így egy geometriai szerkesztés egyszerűsége geometrográfikus képlete együtthatóinak összegével egyenlő.

Egy szerkesztési feladatnak körzővel és vonalzóval lehetséges összes megoldásai közül az olyant, amelynek egyszerűsége a legkisebb, geometrográfikus szerkesztésnek nevezik. Noha az egyszerűség fogalmának bizonyos önkényessége miatt a geometrográfikus szerkesztés különbözhetik egy olyan geometriai szerkesztéstől, amely elvileg egyszerűbb geometriai

tételeken épül föl, mégis lebecsülhetetlen haszna van a geometrográfikus szerkesztésekre, csúcsteljesítményekre való törekvésnek.<sup>28)</sup>

<sup>28)</sup> Egy geometriai szerkesztés geometrográfikus pontosságán a hozzátartozó képlet  $e_0$  és  $k_0$  együtthatójának összegét értik. Ez az értelmezés föltételezi, hogy csak a vonalzónak és a körzőnek a szükséges helyzetbe hozásakor követhetünk el hibát, az egyenes és a kör leírásakor azonban nem. A vonalzó és körző tökéletlenségei és a ceruzahegy szélessége miatt a velük leírt vonalak csak megközelítései a geometriai egyeneseknek és köröknek. A rajzeszközökkel kapott vonalak szélessége miatt metszéspontjaik is csak megközelítőleg határozhatók meg. A geometrográfikus pontosság tehát egészen elméleti fogalom, sokkal inkább önkényes fogalom, mint a geometrográfikus egyszerűség fogalma.

A gyakorlati pontosság elmélete a valószínűségi számítás és a hibaelmélet körébe tartozik. Egy szerkesztés gyakorlati pontosságának vizsgálata összefügg az adatok között föllépő olyan összefüggések megállapításával, amelyek teljesülésekor a megoldandó feladatnak végtelen sok megoldása van. Erre nézve jellemző a geodéziában gyakran alkalmazott következő feladat: adva vannak egy háromszög szögpontjai és azok a szögek, amelyekben a háromszög oldalai a sík egy  $P$  pontjából látszanak; meg kell határozni  $P$  távolságát a háromszög szögpontjaitól. Ennek a feladatnak megoldása határozatlan, ha  $P$  a háromszög köré írható körre esik, és gyakorlatilag bizonytalan akkor, ha  $P$  ahhoz a körhöz, a geodézia veszélyes köréhez elég közel esik.

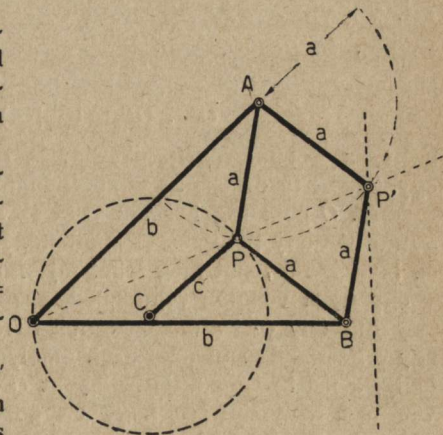
Gyakorlati szempontból a vonalzó és a körző használatával járó szerkesztési hibák körülbelül ugyanazok közé a határok közé esnek.

A körző és a vonalzó közül elméleti szempontból csak a körző pontos rajzeszköz, mert szerkezeténél fogva a vele leírt síkgörbének bármely pontja a sík egy pontjától egyenlő távolságra van, a görbe tehát kör. A vonalzó akkor volna elméleti szempontból a körzővel egyenlő értékű rajzeszköz, ha egyenes húzására ennek valamelyik jellemző tulajdonságát használná fel (pl. azt, hogy az egyenes szakasz két pont legrövidebb összekötő vonala, vagy azt, hogy az egyenes a síkban azoknak a pontoknak geometriai helye, amelyek két rögzített ponttól egyenlő távolságra vannak). Amikor azonban vonalzóval egyenest húzunk, akkor az egyenest nem valamelyik jellemző tulajdonsága szolgáltatja, hanem a vonalzó egyenesnek föltételezett éle. Ebből a szempontból a vonalzó használata hasonlít egy kőralakú éremnek kör leírására való használatához.

Olyan műszer, amely az egyenes valamelyik jellemző tulajdonságát használja fel egyenes szakasz leírására, csak 1864 óta ismeretes. Ez a műszer Peaucellier francia katonatiszt inverzor nevű készüléke.

Az inverzor négy, egyenkint  $a$  hosszúságú karját csuklószerkezet egy  $APBP'$  rombuszba foglalja össze. A rombusz szemközt fekvő  $A$  és  $B$  csúcspontjában szintén csuklóval csatlakozik a rombusz síkjába eső  $\overline{OA} = \overline{OB} = b$  ( $> a$ ) kar és az  $O$  pontban ugyanígy egyesül.

Az eszköz bármely állásában az  $O$ ,  $P$  és  $P'$  pont egy egyenesen, az  $AOB$  szögfelezőjén van. Mivel az  $O$  pontnak az  $A$  középpontú és a sugarú körre vonatkozó hatványa



52. ábra.

## VII. Körnégyszögesítés.

### 32. §. A körnégyszögesítés és körkiegyenesítés feladata.

A matematika történetének évezredekén át egyik legnépszerűbb feladata volt a kör négyszögesítése, vagyis, olyan négyzet szerkesztése, amelynek területe egy adott  $r$  sugarú kör  $\pi r^2$  területével egyenlő. A kör kiegyenesítése olyan egyenes szakasz szerkesztése, amelynek hossza az  $r$  sugarú kör  $2\pi r$  kerületével egyenlő. Mindkét feladat tehát visszavezethető az egységszakaszból a  $\pi$  hosszúságú szakasz szerkesztésére.

A feladat történeti fejlődésében három korszakot lehet megkülönböztetni.

Az első, vagy elemi geometriai korszakban a vizsgálatok célja a kör négyszögesítésének és kiegyenesítésének geometriai szerkesztése, illetőleg az erre vonatkozó törekvés volt. Ez a korszak a differenciál- és integrálszámítás feltalálásaig, a XVII. század második feléig tartott.

A második, vagy analitikus korszakban a vizsgálatok célja a  $\pi$  számnak analitikus kifejezésekkel való előállítása volt, végtelen sor, végtelen szorzat, vagy végtelen lánc tört alakjában. Ez a korszak a XVIII. század második feléig tartott.

A harmadik, vagy kritikus korszak 1766-ban Lambert német matematikus vizsgálataival kezdődött és napjainkig tart. Ez a korszak a  $\pi$  szám természetét vizsgálta. Lambert 1766-ban kimutatta, hogy a  $\pi$  szám, és hasonlóképpen a természetes logaritmusrendszer  $e$  alapszáma, irracionális. Legendre francia matematikus a XIX. század elején azt is kimutatta, hogy  $\pi^2$  is irracionális.

Olyan számot, amely gyöke egy egész együtthatós algebrai egyenletnek, *algebrai számnak* nevezünk. Az olyan szám, amely nem algebrai, vagyis amely egyetlen egész együtthatós algebrai egyenletnek sem gyöke, *transzcendens*.

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = (b + a)(b - a) = b^2 - a^2 = R^2,$$

azért az  $O$  pont rögzítésekor  $A$ ,  $B$ ,  $P$  és  $P'$  bármely lehetséges helyzetében  $P$  és  $P'$  egymásnak tükörképe az  $O$  középpontú és  $R$  sugarú  $K$  körre vonatkozólag.

Az  $O$  pont rögzítésekor  $P$  és  $P'$  az  $O$  középpontú  $b + a$  és  $b - a$  sugarú körgyűrű bármely pontjába eljuttatható. Ebben a körgyűrűben fekvő bármely vonalnak az inverzonnal tehát meg lehet rajzolni a  $K$  körre vonatkozó tükörképét. Ha ugyanis  $P$  egy ilyen vonalon végighalad, akkor  $P'$  ezalatt a vonal tükörképét írja le.

Bármely  $O$ -n átmenő körnek  $K$ -ra vonatkozó tükörképe egyenes. Ha tehát  $P$ -t egy  $c$  hosszúságú olyan karral, amelynek egyik végpontja  $P$ -hez csuklóban kapcsolódik, a másik végpontja pedig az  $O$  ponttól  $c$  távolságra eső  $C$  pontban rögzítve van, arra kényszerítjük, hogy a  $C$  középpontú ( $O$ -n átmenő) körön mozogjon, akkor  $P$  egyenes szakaszt ír le. Ha pedig  $P$  egyenesen mozog, akkor  $P'$   $O$ -n átmenő körön mozog.

Már a XVIII. század végén fölmerült az a sejtés, hogy  $\pi$  transzcendens.

Lindemann német matematikusnak sikerült 1882-ben a *Mathematische Annalen* 20. kötetében „Über die Zahl  $\pi$ “ értekezésében először bebizonyítani, hogy a  $\pi$  szám transzcendens. Lindemann vizsgálatai összefüggésben vannak Hermite francia matematikusnak 1873-ban megjelent és az  $e$  szám transzcendens voltát kimutató dolgozatával.

Lindemann tétele a körnégyyszögesítés több ezer éves feladatát véglegesen elintézte, mivel tételéből következik, hogy a körnégyyszögesítés nemcsak körzővel és vonalzóval nem végezhető el, hanem akkor sem végezhető el, ha magasabbrendű algebrai görbéket veszünk segítségül.

Lindemann a  $\pi$  szám transzcendens voltát egy általános tétel különös eseteként igazolta.

### 33. §. Lindemann általános tételének bizonyítása.

1. Lindemann tételének Schottky-tól származó bizonyítását fogjuk ismertetni. (H. A. Schwarz Festschrift, Berlin 1914).

Az, hogy  $\pi$  nem algebrai szám, azt jelenti, hogy a  $\sin x$  függvény zérushelyei között az  $x=0$  hely kivételével nincs algebrai szám. A  $\sin x$  és hasonlóképp az  $e^x$  és a  $\cos x$  függvény az

$$L(x) = \sum_{v=1}^r c_v \cdot e^{\gamma_v \cdot x}$$

függvényosztályba tartozik, ahol  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$  egymástól különböző,  $c_1, c_2, \dots, c_r$  pedig zérustól különböző algebrai szám.

Lindemann általános tétele következőképp fogalmazható: *Bármely  $L(x)$  függvényre és zérustól különböző bármely  $\rho$  algebrai számra vonatkozólag*

$$L(\rho) = \sum_{v=1}^r c_v e^{\gamma_v \rho} \neq 0.$$

Ez a tétel következőképp is kifejezhető: *Egy  $L(x)$  függvénynek sincs az  $x=0$  esetleges zérushely kivételével algebrai zérushelye.*

Minthogy bármely  $\rho (\neq 0)$  algebrai számra vonatkozólag az  $L(\rho x) = \overline{L}(x)$  egyenlőséggel értelmezett  $\overline{L}(x)$  függvény az  $L(x)$  függvények osztályába tartozik, azért Lindemann általános tételének igazolására elég azt kimutatnunk, hogy bármely  $L(x)$  függvényre vonatkozólag

$$L(1) = \sum_{v=1}^r c_v e^{\gamma_v} \neq 0.$$

$L(x)$   $x$ -nek transzcendens függvénye. Sorbafejtése

$$L(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{m!} x^m, \text{ ahol } a_m = \sum_{v=1}^r c_v \gamma_v^m.$$

$L(x)$  csak akkor állandó, ha  $r=1$  és  $\gamma_1=0$ . Ha ugyanis  $r>1$  és  $a_1=a_2=\dots=a_r=0$  volna, akkor  $c_1=c_2=\dots=c_r=0$  és emiatt  $L(x)\equiv 0$  volna, mert  $a_1=0, a_2=0, \dots, a_r=0$  a  $c_v$  számokra zérustól különböző determinánsú homogén lineáris egyenletrendszer.

2. Az  $a_m$  együtthatók általában irracionális algebrai számok. Az olyan  $L(x)$  függvényeket, amelyeknek sorfejtésében az  $a_m$  együtthatók mind (racionális) egész számok, Schottky *normafüggvényeknek* nevezi. Ilyen pl.  $\sin x, \cos x, e^x$ .

Normafüggvényeket kapunk a következő módon: Legyen  $S(u_1, u_2, \dots, u_n)$  az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  változónak egész együtthatókkal bíró szimmetrikus polinomja. Végezzük el az  $u_v = e^{\gamma_v x}$  ( $v=1, 2, \dots, n$ ) helyettesítést és tekintsük az  $x, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  számot független változónak. A helyettesítés után az  $S$  polinom bármely tagja  $a e^{\sigma x}$  alakú, ahol  $a$  egész szám és  $\sigma$  a  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  változónak egész együtthatós elsőfokú függvénye, úgy hogy

$$S = \sum_{\sigma} a e^{\sigma x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{m!} x^m, \text{ ahol } A_m = \sum_{\sigma} a \sigma^m.$$

Mint hogy  $S$  szimmetrikus függvény, azért minden egyes  $A_m$  együttható a  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  változónak egész együtthatós szimmetrikus polinomja. Ha tehát  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  az egész együtthatós

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = \prod_{v=1}^n (z - \gamma_v)$$

polinomnak zérushelye, akkor  $A_m$  egész szám és  $S(x)$  normafüggvény, feltéve, hogy nem tűnik el azonosan.

3. Egy transzcendens egész függvényt akkor nevezünk egy másikkal oszthatónak, ha hányadosuk szintén transzcendens egész függvény.

*Bármely  $L(x)$  függvény egy normafüggvénynek osztója.*

Ez a tétel az  $r=1$  esetre nyilvánvaló. A tételnek az  $r>1$  esetre való kimutatása végett  $f(z)$ -vel jelölünk egy egész együtthatós és csupa egyszeres zérushellyel bíró olyan polinomot, amelynek  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$  zérushelye. A többi zérushelye legyen  $\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_n$ . Ha

$$f(z) = m z^n + m_1 z^{n-1} + \dots + m_n,$$

akkor

$$m^{n-1} f(z) = g(mz) \text{ és } g(z) = z^n + m_1 z^{n-1} + m m_2 z^{n-2} + \dots + m^{n-1} m_n$$

szintén egész együtthatós polinom. Ha  $g(z) = (z - \gamma_1)(z - \gamma_2) \dots (z - \gamma_n)$ , akkor  $\gamma_v = m \gamma_v$  ( $v=1, 2, \dots, n$ ).

$$\text{Ha } u_v = e^{\gamma_v x}, \text{ akkor } e^{\gamma_v x} = u_v^m \text{ és } L(x) = \sum_{v=1}^r c_v u_v^{\frac{1}{m}}.$$

Legyen  $\varphi_v(z)$  az az egész együtthatós irreducibilis polinom, amelynek  $c_v$  zérushelye és legyen  $\Phi(z) = \varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) \dots \varphi_r(z)$ . A  $\Phi(z)$  polinomnak lehetnek többszörös zérushelyei is, de tekintsük zérushelyeit különbözőknek, azok közül minden lehetséges módon ragadjunk ki  $r$  számút és helyettesítsük ezekkel minden lehetséges sorrendben az  $L(x)$  függvény  $c_1, c_2, \dots, c_r$  együtthatóit. Az így kapott  $L(x)$  függvényekben helyettesítsük minden lehetséges módon  $u_v^{\frac{1}{m}} \cdot \varepsilon^h u_v^{\frac{1}{m}}$ -val ( $v=1, 2, \dots, r$ ;

$h=1, 2, \dots, m$ ), ahol  $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ .

Az így kapott  $L(x)$  függvények  $\Pi L$  szorzata szimmetrikus függvénye a  $\Phi(z)$  polinom zérushelyeinek és az  $u_v^{\frac{1}{m}}, \varepsilon u_v^{\frac{1}{m}}, \dots, \varepsilon^{m-1} u_v^{\frac{1}{m}}$  ( $v=1, 2, \dots, r$ ) változóknak. Ebből következik, hogy  $\Pi L$  racionális együtthatójú szimmetrikus polinomja az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  változónak. Van tehát olyan  $C$  egész szám, hogy  $C \Pi L = S(u_1, u_2, \dots, u_n)$  az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  változónak egész együtthatós szimmetrikus polinomja.

Mint hogy  $\Pi(z - z_v) = g(z)$  egész együtthatós polinom és  $u_v = e^{\gamma_v x}$ , azért  $S(u_1, u_2, \dots, u_n) = N(x)$  normafüggvény.  $N(x)$  ugyanis nem tűnik el azonosan, mivel  $\Pi L$  egyik tényezője sem tűnik el azonosan.

Az eredeti  $L(x)$  tényezőnek kihagyása után az  $N(x)$ -ből megmaradó  $L_1(x)$  függvény szintén transzcendens egész függvény, ennél fogva az  $L(x)$ .  $L_1(x) = N(x)$  egyenlőség miatt  $L(x)$  osztója  $N(x)$ -nek.

4. A most igazolt tétel segítségével Lindemann általános tételének bizonyítását annak az egyszerűbb tételnek kimutatására vihetjük vissza, amely szerint *egy normafüggvény sem tűnik el az  $x=1$  helyen*. Az  $L(1) \cdot L_1(1) = N(1)$  egyenlőségből következik ugyanis az is, hogy  $L(1) \neq 0$ , ha  $N(1) \neq 0$ .

Föltételezzük tehát, hogy  $L(x) = \sum_{v=1}^r c_v e^{\gamma_v x} = N(x)$  normafüggvény

és röviden  $N$ -nel jelöljük az  $N(1) = \sum_{v=1}^r c_v e^{\gamma_v}$  összeget.

Az  $U = f(z)$  polinomon egész együtthatókkal és csupa egyszeres zérushelyekkel bíró olyan polinomot értünk, amelynek  $z=0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$  zérushelye. Ha  $U$   $n$ -edfokú,  $k$  pozitív egész szám és  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  paraméter, akkor a

$$V = U^k (q_0 + q_1 z + \dots + q_{n-1} z^{n-1}) = U^k Q$$

egyenlőséggel értelmezett  $p = (nk + n - 1)$ -edfokú  $V$  polinom együtthatói a  $q$  paramétereknek egész együtthatós homogén lineáris kifejezései. Ugyanilyen tulajdonságú polinom a  $V$  polinomnak és összes deriváltjainak  $W$  összege. Erre a  $W$  polinomra fennállanak a

$W = V + V' + V'' + \dots + V^{(p)}$ ,  $W = V + W'$  és  $(e^{-z}W)' = -e^{-z} \cdot V$  összefüggések. A  $q$  paraméterekben hasonlóképp homogén lineáris kifejezések a

$$P(z) = \frac{1}{k!} W^{(k)}$$

polinom együtthatói is, mivel  $P$  a  $W(z+t)$  polinom  $t$  hatványai szerinti kifejtésében  $t^k$  szorzója.

A  $q$  paramétereknek a

$$D = \sum_{v=1}^r c_v P(\gamma_v)$$

összeg is egész együtthatós homogén elsőfokú függvénye. Ez abból következik, hogy  $N(x)$  norma-függvény és emiatt  $x$  szerinti sorfejtésében az

$a_m = \sum_{v=1}^r c_v \gamma_v^m$  együtthatók ( $m = 0, 1, \dots$ ) mind egész számok. Azt, hogy  $D$  nem azonosan zérus, úgy mutatjuk ki, hogy megadunk olyan  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  értéket, amelyekre  $D \neq 0$ .

Minthogy  $W - W' = V$  osztható  $U^k$ -val, azért a  $W - W'$  függvény  $W' - W''$ ,  $W'' - W'''$ ,  $\dots$ ,  $W^{(k-1)} - W^{(k)}$  deriváltjai is mind oszthatók  $U$ -val. De nem osztható  $U$ -val  $W^{(k)} = k! P$ . Ha ugyanis osztható volna, akkor  $W^{(k-1)}$ ,  $W^{(k-2)}$ ,  $\dots$ ,  $W'$ , illetőleg  $W$  rendre osztható volna  $U$ -nak második, harmadik,  $\dots$ ,  $k$ -adik, illetőleg  $(k+1)$ -dik hatványával. Ez azonban lehetetlen, mert  $W$  ugyanolyan fokú, mint  $V$  és így alacsonyabb fokú, mint  $U^{k+1}$ .

Ebből következik, hogy  $P(z)$  a  $q$  paramétereknek (csupa zérustól különböző) egy értékrendszerére sem osztható  $U$ -val, tehát akkor sem, ha a paramétereket úgy határozzuk meg, hogy  $P$  eltűnjék az  $U = f(z)$  polinom  $\gamma_1$ -től különböző  $n-1$  zérushelyén. Ez a feltevés  $n-1$  elsőfokú egyenletet ad az  $n$ -számú homogén  $q$  paraméter számára. Az így meghatározott  $P(z)$  polinomra vonatkozólag  $P(\gamma_1) \neq 0$ , mert ha  $P(\gamma_1) = 0$  volna, akkor  $P(z)$   $U$ -val osztható volna. Minthogy ezekre a  $q$  értékekre vonatkozólag  $P(\gamma_2) = P(\gamma_3) = \dots = P(\gamma_r) = 0$ , azért  $D = \sum_{v=1}^r c_v P(\gamma_v) = c_1 P(\gamma_1) \neq 0$ .

Ezzel tehát bebizonyítottuk, hogy  $D$  a  $q$  paramétereknek egész együtthatós lineáris függvénye és hogy együtthatói nem mind zérusok. A

$$\Delta = D - N P(0) = \sum_{v=1}^r c_v P(\gamma_v) - P(0) \sum_{v=1}^r c_v e^{\gamma_v} = \sum_{v=1}^r c_v e^{\gamma_v} [P(\gamma_v) e^{-\gamma_v} - P(0)]$$

különbség a  $q$  paramétereknek szintén homogén lineáris kifejezése. Mivel  $W$  értelmezése alapján nyilvánkép

$$W = V + V' + \dots + V^{(k-1)} + W^{(k)} = V + V' + \dots + V^{(k-1)} + k! P$$

és mivel  $U$  zérushelyein  $V, V', \dots, V^{(k-1)}$  eltűnik, azért

$$W(0) = k! P(0) \text{ és } W(\gamma_v) = k! P(\gamma_v) \quad (v = 1, 2, \dots, r).$$

Ezekből és az  $(e^{-z} W)' = -e^{-z} V = -e^{-z} U^k Q$  egyenletből következik, hogy

$$k! [P(\gamma_v) e^{-\gamma_v} - P(0)] = W(\gamma_v) e^{-\gamma_v} - W(0) e^{-0} = - \int_0^{\gamma_v} U^k Q e^{-z} dz.$$

Ebből

$$\Delta = - \sum_{v=1}^r \int_0^{\gamma_v} \frac{U^k}{k!} (q_0 + q_1 z + \dots + q_{n-1} z^{n-1}) c_v e^{\gamma_v - z} dz.$$

Ez az integrál és így  $\Delta$  a  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  paraméter homogén lineáris függvénye. Az egyes  $q$  paramétereknek együtthatói olyan határozott integrálok, amelyek  $k$ -nak növekedésével nyilvánképen mind zérus felé tartanak, mivel ekkor  $\frac{U^k}{k!}$  és vele az integrálandó függvények egyenletesen zérushoz tartanak. Lehet tehát  $k$ -t olyan nagynak választani, hogy  $\Delta$ -ban az összes együtthatók számértéke egynél kisebb legyen. Ekkor azonban  $D - \Delta \neq 0$ , mert  $D$  együtthatói mind egész számok és nem mindegyik együttható zérus. Az  $N \cdot P(0) = D - \Delta \neq 0$  összefüggésből tehát következtethetjük, hogy  $N = N(1) \neq 0$ .

Ezzel Lindemann általános tételét bebizonyítottuk.

### 34. §. Lindemann általános tételének néhány következménye.

Kör-, ellipszis-, hiperbola- és parabolaszélet négyszögesítése.

Egy derékszögű koordináta-rendszerben egy pontot akkor mondunk algebrainak, ha mindkét koordinátája algebrai szám. Ha ezen felül mindkét koordináta racionális szám, akkor a pont racionális pont.

A síkban a racionális pontok, s még inkább az algebrai pontok mindenütt sűrűn vannak. Ennek ellenére az

$$y = \sin x, y = \cos x, y = e^x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$$

görbe közül egy sem megy át egynél több algebrai ponton. Az az algebrai pont, amelyen valamelyik görbe átmegy, egyben racionális pont is és az  $y$ -tengelyre esik.

Ha ugyanis  $c$  tetszőleges algebrai szám, akkor az  $y = c$  egyenes és az előbb felsorolt öt görbe metszéspontjainak abszcisszái rendre a

$$\sin x - c = \frac{1}{2i} e^{ix} - \frac{1}{2i} e^{-ix} - c e^{0 \cdot x}, \cos x - c, e^x - c,$$

$$(\operatorname{tg} x - c) \cos x = \sin x - c \cos x, (\operatorname{ctg} x - c) \sin x = \cos x - c \sin x$$

függvénynek zérushelyei. Ezek a függvények azonban mind  $L(x)$  függvények és emiatt nincs  $x = 0$ -tól különböző algebrai zérushelyük.

Ebből következik, hogy az előbbi öt görbének csak az  $y$ -tengelyen lehet algebrai pontja, s ez az algebrai pont szükségképpen racionális pont.

Mivel a  $(\pi, \sin \pi = 0)$  pont az  $y = \sin x$  görbén, az  $(1, e)$  pont pedig az  $y = e^x$  görbén van, azért  $\pi$  és  $e$  körzövel és vonalzóval akkor sem szerkeszthető, ha tetszőleges algebrai görbéket is felhasználunk a szerkesztésre. Ez a két szám transzcendens.

Ebből következik, hogy a kör nem négyszögesíthető. Lindemann tételével azt is lehet igazolni, hogy *nem lehet körzövel és vonalzóval olyan körszeletet szerkeszteni, amely négyszögesíthető.*

A körszeletet meghatározza a kör  $r$  sugara és a körszelethez tartozó  $2\omega$  középponti szög. A körszelet területe

$$r^2 \omega - r^2 \sin \omega = r^2 (\omega - \sin \omega).$$

Minthogy  $\omega (\neq 0)$  és  $\sin \omega$  nem lehet egyszerre algebrai szám, azért az  $\omega - \sin \omega$  különbség általában transzcendens szám és így körzövel és vonalzóval még akkor sem szerkeszthető, ha tetszőleges algebrai görbéket is felhasználunk a szerkesztésre. Van olyan körszelet, amely négyszögesíthető, de ilyen körszeletet nem tudunk szerkeszteni. Az egységszakaszból ugyanis körzövel és vonalzóval (sőt algebrai görbékkel is) csak olyan szögeket lehet szerkeszteni, amelyeknek szinusza algebrai szám. Az ilyen szögekre vonatkozólag azonban  $\omega - \sin \omega$  transzcendens szám.

*Az  $a$  és  $b$  ( $< a$ ) féltengellyel bíró ellipszisnek nem lehet olyan szeletét megszerkeszteni, amelynek területe is szerkeszthető.*

Ellipszisszeletet úgy kapunk, hogy az  $a$  sugarú kör egy szeletét merőlegesen vetítjük egy olyan síkra, amely a kör síkjával a  $\cos \alpha = \frac{b}{a}$  egyenletnek eleget tevő  $\alpha$  szöget alkotja. A körszelet  $t_k$  és az ellipszisszelet  $t_e$  területe között tehát a

$$t_e = t_k \cos \alpha = t_k \cdot \frac{b}{a} = a \cdot b (\omega - \sin \omega)$$

vonatkozás van. Mivel az ellipszisszeletből az ellipszis főköréhez tartozó megfelelő körszelet körzövel és vonalzóval szerkeszthető, azért a körszeletre kimutatott tételnek következménye az ellipszisszeletre kimondott tétel.

Hasonló tétel mondható ki a hiperbolaszeletek négyszögesítésére is.

Az  $a$  féltengellyel bíró egyenlőoldalú hiperbola egyenlete az aszimptotákra vonatkozó koordinátarendszerben  $2xy = a^2$  lévén, a görbe  $P_1 = (x_1, y_1)$  és  $P_2 = (x_2, y_2)$  pontján ( $0 < x_1 < x_2$ ) átmenő egyenes a hiperbolából olyan szeletet vág ki, amelynek területe

$$\frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1) - \frac{a^2}{2} (\log x_2 - \log x_1) = \frac{a^2}{4} \left( \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} - 2 \log \frac{x_2}{x_1} \right).$$

Ennek a területnek mérőszáma transzcendens bármely olyan  $x_1$  és  $x_2$  abszcisszára vonatkozólag, amelyeknek hányadosa algebrai szám. Ha ugyanis  $h = \frac{x_2}{x_1} (\neq 1)$  és  $\log h = m$  algebrai szám volna, akkor az  $x = m = \log h$ ,  $y = e^m = h$  pont az  $y = e^x$  görbének az  $y$ -tengelyen kívül eső algebrai pontja volna.

Az egyenlőoldalú hiperbolának az egyik, vagy a másik tengelyével párhuzamos síkra való merőleges vetülete olyan hiperbola, amelynek egyik féltengelye  $a$ , a másik pedig  $b = a \cos \alpha$ , ha  $\alpha$  jelöli a két sík szögét. Ha tehát  $t_0$  jelöli az egyenlőoldalú hiperbola szeletének és  $t_1$  a vetületben kapott hiperbola megfelelő szeletének területét, akkor  $t_1 = \frac{b}{a} t_0$ . Ebből következik, hogy egy megrajzolt hiperbolának nem lehet körzővel és vonalzóval olyan húrját szerkeszteni, amely a hiperbolával négyszögesíthető hiperbolaszeletet határol.

A többi kúpszelettel ellentétben bármely parabolaszélet négyszögesíthető.

Alkalmas derékszögű koordinátarendszerben ugyanis bármely parabola egyenlete  $y = x^2$  alakban írható. Annak a parabolaszéletnek területe tehát, amelyet a parabola  $P_1 = (x_1, y_1)$  és  $P_2 = (x_2, y_2)$  pontját ( $x_1 < x_2$ ) összekötő húr a parabolával határol,

$$\frac{y_1 + y_2}{2} (x_2 - x_1) - \left( \frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^3}{3} \right) = \frac{(x_2 - x_1)^3}{6}.$$

Ennek a területnek mérőszáma  $P_1$ -ből és  $P_2$ -ből szerkeszthető és csak a  $P_1$  és  $P_2$  ponton átmenő s a parabola tengelyével párhuzamos egyenespár távolságától és a parabola paraméterétől függ.

### 35. §. Négyszögesíthető körkétszögek. Hippokrates holdacskái.

A körszeletekkel ellentétben már a régi görögök ismertek körívekkel határolt négyszögesíthető idomokat. A khioszi Hippokrates-nek (Kr. e. az 5. században) tulajdonítják a következő ismert tételt:

Ha egy derékszögű háromszög oldalaira, mint átmérőkre úgy rajzolunk egy-egy félkört, hogy az átfogóra rajzolt félkör a háromszöggel ugyanazon oldalra, a befogókra rajzolt két félkör pedig a háromszögön kívül essék, akkor a három félkörrel határolt két holdalakú körkétszög, lunula területének összege a háromszög területével egyenlő.

Ha ugyanis  $a$  és  $b$  a háromszög befogója,  $c$  az átfogója és ha  $H_a$  és  $H_b$  jelöli a két holdacska,  $T$  pedig a háromszög területét, akkor nyilvánkép

$$H_a + H_b + \frac{1}{2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 \pi = T + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \pi + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 \pi \quad \text{és így}$$

$$H_a + H_b = T + \frac{\pi}{8} (a^2 + b^2 - c^2) \pi = T.$$

Ha a derékszögű háromszög egyenlőszárú, akkor  $H_a = H_b = \frac{T}{2} = \left( \frac{a}{2} \right)^2$ .

Ebből következik, hogy az a holdalakú körkétszög, amelyet egy négyszet oldalára mint átmérőre rajzolt körlapnak a négyzet köré írható körön kívül eső része alkot, a négyzet területének negyedrésszével egyenlő területű.

Holdalakú általános körkétszöget határol a közös  $A$  és  $B$  végponttal bíró és az  $AB$  egyenesnek ugyanazon oldalán fekvő  $i_1$  és  $i_2$  körív. Ha a két kör középpontja, sugara és a fölvett körívhez tartozó középponti szög  $O_1$ ,  $r_1$  és  $2\omega_1$ , illetőleg  $O_2$ ,  $r_2$  és  $2\omega_2$ , ha továbbá  $\overline{AB} = h$  és  $r_1 < r_2$ , és ha végül  $T$  jelöli az  $AO_1O_2$  háromszög területét, akkor a holdacska területe nyilvánkép

$$H = r_1^2 \omega_1 - r_2^2 \omega_2 + 2T$$

és

$$r_1 \sin \omega_1 = r_2 \sin \omega_2 = \frac{h}{2}.$$

A holdacska akkor négyszögesíthető, ha  $h$ -ból  $H$ ,  $r_1$  és  $r_2$  körzővel és vonalzóval szerkeszthető. Ekkor azonban  $\sin \omega_1$ ,  $\sin \omega_2$  és  $2T$  is szerkeszthető. Mivel a felírt két egyenletből

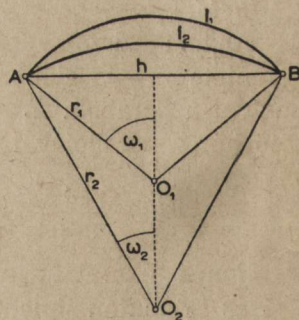
$$\frac{\omega_1}{\sin^2 \omega_1} - \frac{\omega_2}{\sin^2 \omega_2} = \frac{4}{h^2} (H - 2T) = C,$$

azért a holdacska négyszögesíthetőségének az a feltétele, hogy az egységből  $C$ ,  $\sin \omega_1$  és  $\sin \omega_2$  szerkeszthető legyen. A kapott egyenletet  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = p$  jelöléssel

$$\frac{1}{\sin^2 \omega_1} - \frac{p}{\sin^2 \omega_2} = \frac{C}{\omega_1}$$

alakban írhatjuk. Ebből az egyenletből Lindemann tétele alapján következik, hogy a holdacska négyszögesíthetősége esetén  $p$  transzcendens, vagy algebrai szám aszerint, amint  $C \neq 0$ , illetőleg  $C = 0$ .

Ha ugyanis  $p$  algebrai szám és  $C \neq 0$  volna, akkor az előbbi egyenlet baloldala algebrai szám volna és így  $\omega_1$  is algebrai szám lenne. Ez azonban lehetetlen, mert akkor  $\omega_1 (\neq 0)$  és  $\sin \omega_1$  egyszerre volna algebrai szám.



53. ábra.

Még nincs eldöntve, hogy van-e olyan négyszögesíthető holdacska, amelyre vonatkozólag  $p$  transzcendens szám.

Ha föltételezzük, hogy  $p$  algebrai szám, akkor fennáll a

$$\sin p \omega_1 = \sqrt[p]{p} \sin \omega_1$$

egyenlet és ebben  $p$  és  $\sin \omega_1$  az egységből négyzetgyökvonással állítható elő. Eddig csak olyan négyszögesíthető holdacsokák létezését mutatták ki, amelyekre vonatkozólag  $p$ -nek

$$2, \quad 3, \quad \frac{3}{2}, \quad 5 \quad \text{vagy} \quad \frac{5}{3}$$

az értéke. Erre az öt esetre a  $\sin p \omega_1 = \sqrt[p]{p} \sin \omega_1$  egyenletet

$$\sin 2 \varphi = \sqrt{2} \sin \varphi, \quad \sin 3 \varphi = \sqrt{3} \sin \varphi, \quad \sin 3 \varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin 2 \varphi,$$

$$\sin 5 \varphi = \sqrt{5} \sin \varphi, \quad \text{illetőleg} \quad \sin 5 \varphi = \sqrt{\frac{5}{3}} \sin 3 \varphi$$

alakban írhatjuk. Ezekből az egyenletekből könnyű számításokkal

$$2 \cos \varphi = \sqrt{2}, \quad 2 \cos \varphi = \sqrt{1 + \sqrt{3}}, \quad 8 \cos \varphi = \sqrt{6} + \sqrt{22},$$

$$4 \cos 2 \varphi = -1 + \sqrt{5 + 4\sqrt{5}}, \quad \text{illetőleg} \quad 4 \cos 2 \varphi = -1 + \sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{\frac{20}{3}} + \sqrt{\frac{20}{3}}.$$

Az első három esetet Hippokrates, az utolsó kettőt (körülbelül 2300 évvel később) Clausen találta.<sup>29)</sup>

<sup>29)</sup> Journal für d. reine u. angew. Math. 21. k., 1840, 375. lap.

A négyszögesíthető holdacsokákat Landau E. vette részletes vizsgálat alá, Sitzungsber. d. Berliner Math. Gesellschaft 2. k. (1903), 1. lap (Archiv d. Math. u. Physik III. 4. kötet, 1903, melléklet). Új négyszögesíthető holdacsokákat nem talált ugyan, de kimutatta, hogy akkor, amikor  $p$  törzsszám, de nem Gauss-féle törzsszám, a  $p$  számhoz tartozó holdacska nem négyszögesíthető. — Tchakaloff L. bolgár matematikus (Math. Zeitschrift 30. k., 1929, 552. l.) kimutatta azt is, hogy a  $p = 17$  számhoz és bizonyos más racionális számokhoz sem tartozik négyszögesíthető holdacska. Ebben a negatív irányban további eredményeket ért el Tschebotarow N. szintén bolgár matematikus, (Math. Zeitschr. 39. k., 1935, 161. l.).

## IRODALOM.

- Mohr G., Euclides Danicus, Amsterdam 1672. Újra kiadta Hjelmslev J., német fordítással ellátta Pál Gyula, Kopenhagen 1928.
- Mascheroni L., Geometria del compasso, Pavia 1797.
- Steiner J., Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833; gesammelte Werke I, Berlin 1881; Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 60, 1895.
- Klein F., Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, Leipzig 1895.
- Enriques F., Questioni riguardanti la geometria elementare, Bologna 1900. Német nyelvre fordította és kiadta Fleischer H., Fragen der Elementargeometrie. II. rész: Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. Leipzig 1907, újabb kiadás 1923. Ennek a munkának II—IX. fejezete tárgyal könyvünkhöz hasonló kérdéseket. Az egyes fejezeteket általában különböző olasz matematikusok írták, még pedig: Daniele E., Giacomini A., Castelnuovo G., Enriques F., Conti A. és Calò B. Enriques gyűjteményes munkájának újab' kiadása Questioni riguardanti le matematiche elementari címen jelent meg. A II. kötet 1926-os évszámot visel. (Ehhez a kiadáshoz — sajnos — nem tudtunk hozzájutni.)
- Adler A., Theorie der geometrischen Konstruktionen, Leipzig 1906. Sammlung Schubert LII.
- Vahlen Th., Konstruktionen und Approximationen in systematischer Darstellung, Leipzig und Berlin 1911. Teubners Lehrbücher der math. Wiss. XXXIII.
- Hjelmslev J., Geometrische Experimente, Leipzig u. Berlin 1915. Dan nyelvről Rohrberg A. fordította németre. Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 5.
- Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften: Sommer J., Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus, III AB 8, 6—14. § (1914).
- Zacharias M., Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung, III AB 9, 10., 23-25. §.
- Enciclopedia delle matematiche elementari (Berzolari L., Vivanti G. és Gigli D.) II. kötet I. rész, 1937.
- Brusotti L., Polygoni e poliedri, 10. §.
- Agostini A., I problemi geometrici elementari e i problemi classici, 1—35. §.

## NÉV- ÉS TÁRGYMUTATÓ.

### A

Adler VIII, 55, 57, 82  
adjungálás 5, 15  
affin síkgeometria 38  
— szerkesztések 37–41  
Agostini 82

Ahrens 63

alapszerkesztések 1, 28, 44–45, 69–70  
algebrai görbe 73, 78  
algebrai pont 77–79  
algebrai szám 72–74, 77–80  
aranymetszés 10  
Archytas 7  
aszimptota 65, 78  
axiómacsoportok 54

### B

Bartl 62  
becsúsztatás 59  
betolás 59–61  
Bieberbach 57, 62  
Bolyai VII  
Breidenbach 62  
Brianchon 31  
Brusotti 82

### C

Calò 82  
Cardano 61  
Castelnuovo 82  
Cauer 46, 49  
centrális (két körre vonatkozólag) 45, 48  
cisszois 7, 67–68  
Clausen 81  
Conti 82  
cosinus görbe 77–78  
cotangens görbe 77–78  
csúcspont 67  
csúcsteljesítmény 71  
csuklós szerkezet 71–72

### D

Daniele 82  
déloszi probléma 7, 8, 16, 59–61, 67–68  
derékszög VIII, 41–43, 53, 58–59, 62

derékszögpár 42, 58–59, 62  
derékszögvonalzó 56–59, 62–63  
Desargues 35–36  
Descartes 40, 41, 66  
Descartes-féle koordináták 40–41  
Diokles 7, 67

### E

egyenes egyenlete 3, 34, 41  
— jellemző tulajdonságai 71  
— leírása inverzorral 71–72  
egyenlet, egész együtthatós 7  
— , másodfokú 10, 12, 13, 19, 24–26, 58  
— , harmadfokú 4–10, 16, 59, 61–68  
— , negyedfokú 61–67  
— , ötödfokú 68  
— , hatodfokú 68  
— , határozatlan 17  
— , körosztási 17, 19, 21–23  
egységátrakó vonalzó 53–54, 59–63  
— párhuzamos élű vonalzó 61–62  
— derékszögvonalzó 61–62  
egységgyökök, ötödik 10  
— , hetedik 9  
— , 17-dik 11  
— , p-edik 23, 26  
egységelforgató 53 54  
egyszerűség 70  
Eisenstein 19–21  
elemi szerkesztési műveletek 69  
ellipszis 65, 78  
ellipszisszelet 78  
Enriques VIII, 82  
e szám transzcendens volta 73, 78  
Euklides 1, 10, 28  
exponenciális görbe 77, 78  
érem mint rajzeszköz 31, 71  
érintéspont 1, 51, 55  
érintő 1, 48, 49, 51, 55  
érintősík (gömb) 47–48

### F

ferde körkúp körmetszetei 47–48  
Fermat 23  
Fuhr 62

felezőpont felhasználása párhuzamos húzására 38

forgatás derékszöggel 43

- az egyenes szög harmadrészével 43
- a teljes szög ötödrészével 44

## G

Gauss 11, 12, 16, 17, 19–20, 22, 23, 26, 54

Gauss-féle lemma 19, 20

- periodusok 12, 24–26
- törzsszámok 23, 81

geodézia 71

geometriai kísérlet VII, VIII, 1, 53, 56–63

geometrográfikus egyszerűség 70

- képlet 69, 70
- pontosság 71,
- szerkesztés 70, 71

Giacomini 82

gömbfelület 27, 47–48

gömbfelület osztása 27

gömböv 27

gömbstüveg 27

görbe, algebrai 73, 78

- , harmadrendű 67–68
- , negyedrendű 68
- , transzcendens 77–78
- , térgörbe 7

gyökvonás, négyzetgyökök 2, 18–19, 52

- , köbgyökök 7–8, 19, 59 61, 67–68

gyök, primitív számelméleti 23

## H

harmadfokú feladat 4–10

- egyenlet 4 10, 16, 59, 61–68
- parabola 67, 68
- polinom 4–10

harmadrendű görbe 67–68

harmonikus perspektivitás 49, 53

- pontnégyes 30, 31, 49, 55
- sugárnégyes 31

hasonlósági átalakítás 45, 65

hasonlóságpont 45, 48

határozatlan egyenlet 17

hatodfokú egyenlet 68

hatoldal (Brianchon) 31

hatszög (Pascal) 31, 49, 51

hatvány körre vonatkozólag 45, 46, 48, 61, 71–72

hatványvonal 4, 45, 48

hatványpont 4

Hermes 26

Hermite 73

hétyszög (szabályos) 9–10, 59

hibaelmélet, hibák 71

Hilbert 46, 54

Hilbert-féle axiómarendszer 54–55

hiperbola 65–66, 78–79

hiperbolaszület 78–79

Hippokrates 79–81

Hjelmslev 31, 57, 82

holdacska 80–81

Hüttemann 49

## I

Iglisch 62

inverz kép 28

inverz átalakítás 28, 72

inverzor 71–72

involúció 51

irracionális 72, 74

irreducibilis 4, 7, 13–16, 19–21, 24–25

## K

kagylóvonal 60

kerületi szög 50

kettőspont, involúcióban 51

- , projektivitásban 51

kettőviszony 30 33, 50, 52

kettőviszonyok összege 32–34

- különbsége 32–34

- szorzata 32–34

- hányadosa 32–34

- négyzetgyöke 52

kiegyenesítés 72

kilencszög, szabályos 9, 59

kísérlet VII, VIII, 1, 53, 56–63

- betolással 59–62
- szögvonallal 56
- derékszögvonallal 57–59
- egységátrakó vonallal 59–63
- egységátrakó párhuzamos élő vonallal 61–63
- egységátrakó derékszögvonallal 61–63
- két derékszögvonallal 58–59
- papírhajtogatással 63

Klein F. 82

kockakétszerzés 7, 8, 16, 59–61, 67–68

kollineáció 46–47

komplex sík 18

komplex számok 18

- gyöke 18, 61, 67

konkhis 7, 60

koordinátarendszer, távolsági 39

— , derékszögű 1, 3  
 — , Descartes-féle 40–41  
 — , projektív 31–34  
 Korthum 64, 66–67  
 köbgyökvonás 8, 19, 59–61, 67–68  
 köralapú ferdekúp körmetszetei 47  
 kör egyenlete 3, 46–47  
 — önmagába való kollineációja 46–47  
 kör mint vonalas szerkesztések alapvo-  
 nala 44–53  
 körív mint vonalas szerkesztések alap-  
 vonala 47, 53  
 körkerület 72  
 körkétszög 79–81  
 körkiegyenesítés 72  
 körnégyszögesítés 72  
 körterület 72  
 körszelet 78  
 körlap osztása 26 27  
 körosztás 16 27  
 körosztási egyenlet 17, 19, 21–23  
 — irreducibilitása 20–22  
 körző mint pontos rajzeszköz 71  
 körző használatának korlátozása 31  
 Kubota 68  
 kúpszelet 7, 50–53  
 — egyenlete 52  
 — és egyenes metszéspontjai 51  
 — érintői 51  
 kúpszeletsor 65  
 Kürschák 55

## L

Lambert 72  
 Landau 81  
 Legendre 72  
 Lemoine 69  
 Lill 57  
 Lindemann 73, 77 78, 80  
 Lindemann általános tétele 73  
 logaritmus függvény 79  
 London 68  
 lunula 79–80

## M

magasságpont 42, 53  
 másodfokú egyenlet 10, 12, 13, 19, 24–26, 58  
 Mascheroni 27, 28, 31  
 Mascheroni-féle szerkesztések 27–31, 70  
 Menelaus 61  
 merőleges szerkesztése 42, 53, 56

metrikus geometria 41  
 — szerkesztések 41–44  
 Mohr 27, 28, 31  
 Mohr-Mascheroni-féle szerkesztések  
 27–31, 70  
 Moivre képlete 8  
 Moldoukhay-Boltovskoy 49

## N

Sz. Nagy Gy. 49  
 negyedfokú egyenletek 61–67  
 négyszögesítés 72  
 négyszögesíthető holdacska 79–81  
 — körkétszög 79–81  
 — parabolaszélet 79  
 négyzetgyökvonás szakaszból 2  
 — komplex számból 18–19  
 — kettősvízből 52

Newton 68  
 Nikomedes 7, 60  
 normafüggvény 74–75

## O

Obláth 49, 62  
 osztóviszony 38–39  
 ötödfokú egyenlet 68  
 ötszög, szabályos 10–11, 43–44, 63

## P

Papirhajtogatás 62–63  
 Pappus 32 33  
 parabola 64–65, 79  
 parabolaszélet 79  
 paralelogramma 40–45, 49,  
 paraméter 3, 65, 68, 75–77  
 Pascal (hatszög) 31, 49, 51  
 párhuzamos egyenesek 37–40  
 — vetítés 38  
 — élő vonalzó 55, 61, 63, 70  
 párhuzamosak vonalas szerkesztése, ha  
 adva van egy felezett szakasz 38  
 — egy paralelogramma 40  
 — egy kör középpontjával 44  
 — két metsző vagy érintő kör 48  
 — két koncentrikus kör 49  
 párhuzamosak szerkesztése  
 egységátrakó vonalzóval 54  
 — szögvonalzóval 56  
 Peaucellier 71  
 perspektivitás 31, 35–37, 49, 53  
 — , harmonikus 49, 53  
 perspektív háromszögek 35–37

perspektív pontsorok és sugársorok 31  
 Plato 7, 59  
 Platone 39  
 poláris 31, 49, 55  
 polinom 7, 14–17, 57, 74–76  
 pólus 31, 49, 55  
 Poncelet 44, 46, 50, 54–56, 70  
 Poncelet-Steiner-féle szerkesztések  
 44–46, 50, 54 56, 70  
 pontosság 71  
 primitív számelméleti gyök 23  
 projektív koordináta 31  
 — síkgeometria 37  
 — sorok 32, 51  
 — pontsorok kúpszeleteken 50 51  
 — szerkesztések 31–37, 50 53  
 $\pi$  szám transzcendens volta 72, 78

## R

racionális görbe 68  
 — gyök 7–10  
 — osztóviszony 38  
 — pont 77  
 — számtest 2–3  
 Rademacher 47  
 reducibilis 5, 7, 14–16  
 Richelot 26  
 rombusz 41, 53, 55, 56, 71

## S

Schoenemann 19–21  
 Schottky 73, 74  
 Schottky-féle normafüggvény 74–77  
 Severi 49  
 sinus görbe 77  
 Smith 64, 66  
 Steiner 38, 44, 46, 50, 54 56, 70  
 Steiner-féle szerkesztések 37–41, 44–46,  
 50, 54–56, 70  
 szabályos sokszög 9  
 — háromszög 43, 63  
 — négyszög 43, 63  
 — ötszög 10–11, 43–44, 63  
 — hatszög 28, 43, 63  
 — hétszög 9–10, 59  
 — nyolcszög 63  
 — kilencszög 9, 59  
 — tizszög 10–11, 63  
 — tizenegyszög 9–10  
 — tizenhétszög 11–13, 17

— 34-szög 11–13  
 — 257-szög 17, 26  
 — 65537-szög 17, 26  
 szakaszok összege 2, 39  
 — különbsége 2, 39  
 — szorzása 2, 39, 40  
 — hányadosa 2, 39, 40  
 szakasz szorzása egész számmal 28  
 szakasz négyzetgyöke 2  
 számtest 2–7, 14–16, 33–35, 41  
 — kibővítése 5, 6, 15, 16  
 szerkesztés körzővel 27–31  
 — éremmel 31  
 — vonalzóval 31–35  
 — véges vonalzóval 35, 37  
 — vonalzóval, határolt síkon 36–37  
 — egységátrakó vonalzóval 53–54  
 — vonalzóval és egységelforga-  
 tóval 53–54  
 — párhuzamos élű vonalzóval  
 55, 61, 63, 70  
 — szögvonalzóval 55–56  
 — derékszögvonalzóval 57  
 — papírhajtogatással 62–63  
 szerkesztés vonalzóval, ha adva van egy  
 pár párhuzamos 38–40  
 — felezett szakasz 38–40  
 — racionális osztóviszonyú pont-  
 hármás 38–39  
 — paralelogramma 40  
 — paralelogramma és két derék-  
 szög 42  
 — négyzet 42–43  
 — szabályos hatszög 43  
 — paralelogramma és szabályos  
 háromszög 43  
 — szabályos ötszög 44  
 — kör középpontjával 44–45  
 — körív a kör középpontjával 49  
 — metsző körpár 48  
 — érintő körpár 48  
 — egyközepű körpár 48  
 — három kör 49  
 — kör középpontja nélkül 50–53  
 — körív a kör középpontja nélkül 53  
 — kúpszelet 50–53  
 — kúpszeletív 53  
 — egység-négyzet és harmadfokú  
 parabola 67  
 — egység-négyzet és cissois 67–68

szekesztés körzövel, vonalzóval és  
adott kúpszelettel 50—53

— adott kúpszeletivel 53

szekesztés adott körrel és négy  
sugársor egyeneseivel 46

szekesztési hibák 71

szekeszthetőség körzövel és  
vonallzóval 2—3

szögfelezés 18, 53, 55

szögharmadolás 7—9, 13, 59—60

— egyenlete 8—9

szög többszöröse 42

Szőkefalvi Nagy Gy. 49

# T

tangens görbe 77

teljes négyoldal 31

természetes logaritmus 73

téglalap 44, 54, 56

Thales 53

Tietze 57

Toeplitz 47

transzcendens függvény 74

— szám 73, 78, 79

triszekció 7—9, 59—60

— egyenlete 8—9

Tschakaloff 81

Tschebotarow 81

tükörkép 28—31, 42, 72

tükrözés körre 28—31, 71—72

— egyenesre 28, 42

unikurzális görbe 68

# V

Vahlen VIII, 57, 63, 66, 68, 82

véges vonalzó 35, 37

vonalas szekesztések, vagy vonalzóval

való szekesztések l. szekesztések vo-

nalzóval címszó alatt

vonalzó mint rajzeszköz 71

vetítés, párhuzamos síkokra 41

— , párhuzamos sugarakkal 38

— , derékszögű 78—79

— , középpontos 37—38

# W

Weiss 46

# Y

Yanagihara 31, 47, 49

# Z

Zacharias 82

zérushely 73—77



