

y 7111

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

*Dr. Szőkefalvi-Nagy Gyula*

# DIFFERENCIÁLGEOMETRIA

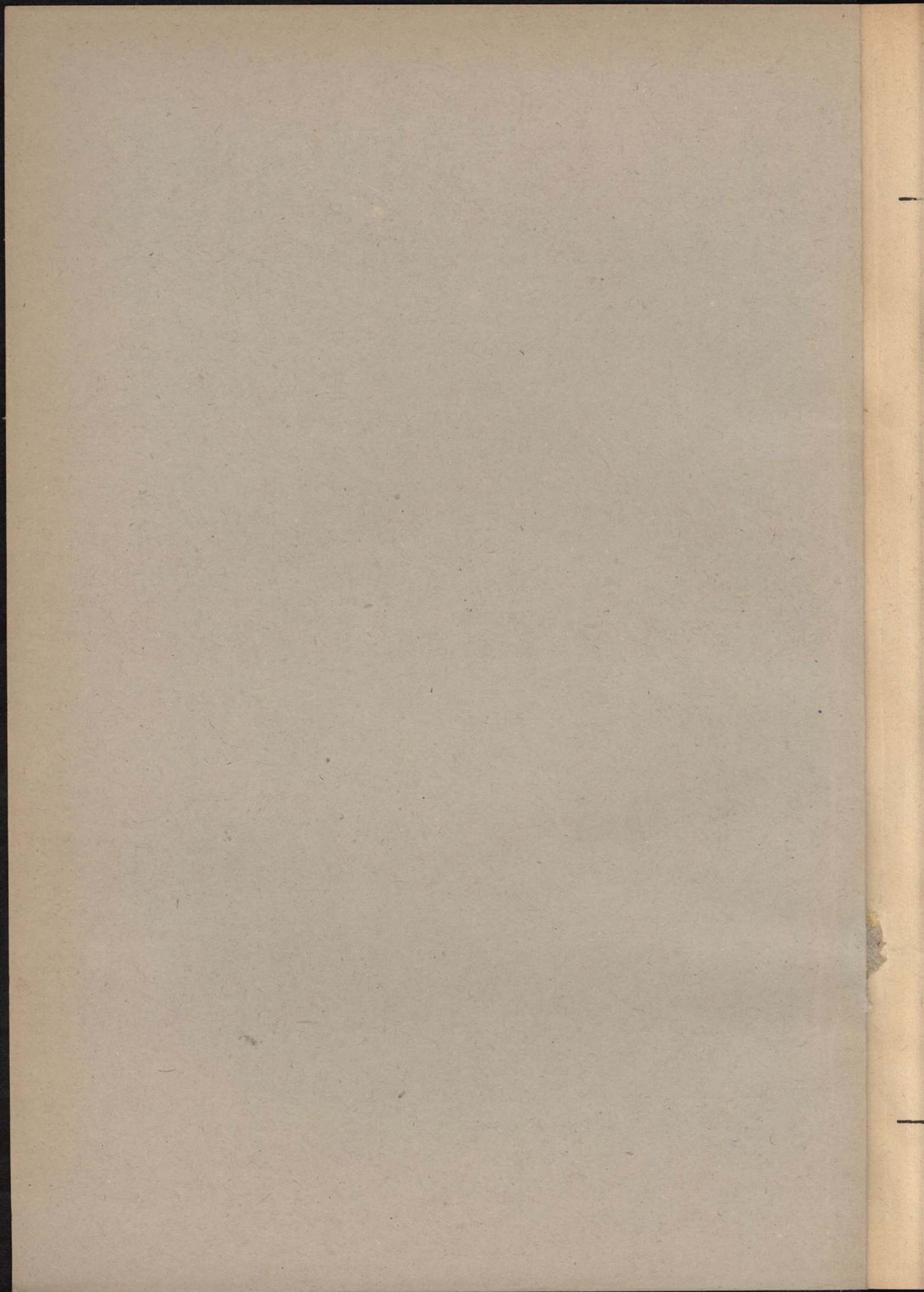
KÉZIRAT



---

BUDAPEST, 1961







SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

DR. SZÓKEFALVI-NAGY GYULA

D I F F E R E N C I Á L G E O M E T R I A

KÉZIRAT

változatlan utánnymás

1 9 6 1

---

FELSŐOKTATÁSI JEGYZETELLÁTÓ VÁLLALAT, BUDAPEST



J 7.111  
NEMZETES SZÉCHÉNYI KÖNYVTÁR  
Növedéknapló

1961 év. A 2500 sz.



A kiadási felelős: dr. Bido Ágoston

Megrendelve: 1961. I. 8. Póldányszám: 28

Készült Rotaprint eljárással az MSZ 5601-54 Á és MSZ 5602-55 Á szabványok  
szerint 21 (A/5) ív terjedelemben 10 ábrával

64-4222 - FELSŐOKTATÁSI JEGYZETELLÁTÓ VÁLLALAT, BUDAPEST



## 1. Vektorfüggvény

A differenciálgeometriának a görbék és felületek alapvető fogalmai.

A térben mozgó pont egy görbét fut be. Hogyan tudjuk ezt a pályát matematikailag leírni? Vegyünk alapul egy Descartes féle koordináta rendszert. Ebben a koordináta rendszerben a mozgó pont helyzetét bármely időpillanatban meghatározhatjuk egy az origóból kiinduló helyzetvektorral. Jelöljük a koordináta rendszer tengelyeinek irányába mutató egységvektorokat  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ -al, így

$$\vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 \quad \text{vagy} \quad \vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i, \text{ ahol } x, y, z \text{ ill. } x_1, x_2, x_3 \text{ a mozgó pont koordinátái.}$$

Igy azonban az  $\vec{r}$  vektor a  $t$  idő függvénye:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_1 + y(t) \vec{e}_2 + z(t) \vec{e}_3 = x_1(t) \vec{e}_1 + x_2(t) \vec{e}_2 + x_3(t) \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i(t) \vec{e}_i.$$

Az  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ -t vektorfüggvénynek nevezzük, míg az analízisből már eddig is jól ismert függvényeket skalár függvényeknek.

A továbbiakban az egy tagban kétszer előforduló azonos latin indexre a szummáció jel kiírása nélkül is szummációt fogunk érteni 1-től 3-ig. Az egyszer előforduló latin index pedig az 1, 2, vagy 3 számok bármelyikét jelenti. Így tehát

$$\vec{r} = x_i \vec{e}_i$$

Most vigyük át az analízisben szereplő elemi fogalmakat a vektorfüggvényekre.

a/ Az  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \dots$  vektorsorozatot, melynek komponensei  $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots, x_1^{(n)}, \dots$  a számsorozat hasonlatára konvergenseknek fogjuk nevezni, ha van olyan  $\vec{\phi}$  vektor, hogy tetszőleges kicsiny pozitív  $\epsilon$ -hoz található olyan  $N(\epsilon)$ ; hogy

$$I. \quad |\vec{r}_n - \vec{\phi}| < \epsilon \quad \text{ha csak} \quad n > N(\epsilon).$$

Állítjuk ehhez szükséges és elegendő, hogy a komponensek konvergensek legyenek és határértékük a  $\vec{\phi}$  vektor  $x_i$  komponensei legyenek.



Legyenek a fenti vektor sorozat komponensei konvergens az  $\mathcal{R}$  komponenseihez, azaz tetszőleges  $\bar{\varepsilon} > 0$ -hoz legyen található a komponensek bármely sorozatánál olyan  $N_1(\bar{\varepsilon})$ , hogy ha  $n > N_1(\bar{\varepsilon})$ , úgy  $|\left(\frac{x}{n}\right)_1 - X_1| < \bar{\varepsilon}$ . Állítjuk ekkor a vektorsorozat konvergál  $\mathcal{R}$ -hez, azaz I. teljesül. Ugyanis

$$\text{II. } |\mathcal{H}_n - \mathcal{R}| = \left| \sqrt{\sum \left(\left(\frac{x}{n}\right)_1 - X_1\right)^2} \right| < \left| \sqrt{3\bar{\varepsilon}^2} \right| = +\sqrt{3} \bar{\varepsilon}, (n > \max N_1(\bar{\varepsilon})).$$

Ha tehát  $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{+\sqrt{3}}$ -nak,  $N(\varepsilon)$ -t pedig  $\max N_1(\bar{\varepsilon}) = N_1\left(\frac{\varepsilon}{+\sqrt{3}}\right)$ -nak választjuk, úgy I. teljesül. Tehát az  $\left(\frac{x}{n}\right)_1 \rightarrow X_1$  feltétel elegendő az  $\mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{R}$ -hez.

Ez azonban nyilván szükséges is. Ha ugyanis I. teljesül, úgy

$$\varepsilon > |\mathcal{H}_n - \mathcal{R}| = \left| \sqrt{\left(\left(\frac{x}{n}\right)_1 - X_1\right)^2} \right| = \left| \left(\frac{x}{n}\right)_1 - X_1 \right|, (n > N(\varepsilon)).$$

b) Az  $\mathcal{H}(t)$  vektorfüggvény határértékén a  $t_0$  pontban az  $\mathcal{H}(t_n)$  vektor sorozat határértékét fogjuk érteni, ha ez létezik, bárhogy is tart a  $t_n$  a  $t_0$ -hoz.

Jelöljük az  $\mathcal{H}(t_n)$ -et  $\mathcal{H}_n$ -el. Így az a) szerint a

$$\lim_{t_n \rightarrow t_0} \mathcal{H}(t_n) = \mathcal{R} \text{ létezéséhez szükséges és elegendő a } \lim_{t_n \rightarrow t_0} x_1(t_n) =$$

$= X_1$  létezése.

c) Legyen  $\lambda$  tetszőleges valós szám. Mivel  $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda x_1(t) =$

$$= \lambda \lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t), \text{ így } \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda \mathcal{H}(t) = \lambda \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{H}(t).$$

d) Legyen  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0$  és  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0$ , azaz

$\mathcal{H}(t) = t$   $\mathcal{H}$ -el jelölve  $|\mathcal{H} - \mathcal{H}_0| < \varepsilon$  ha  $|t - t_0| < \delta_{\mathcal{H}}(\bar{\varepsilon})$ , és

$\mathcal{H}(t) = t$   $\mathcal{H}$ -al jelölve  $|\mathcal{H} - \mathcal{H}_0| < \bar{\varepsilon}$  ha  $|t - t_0| < \delta_{\mathcal{H}}(\bar{\varepsilon})$ .

$$\text{Állítjuk } \lim_{t \rightarrow t_0} [\mathcal{H}(t) \mathcal{H}(t)] = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{H}(t) \right) \left( \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{H}(t) \right),$$

azaz



$$\text{III. } |\mu(t) \eta(t) - \mu_0 \eta_0| < \varepsilon \text{ ha } |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$$

Mert

$$|\mu \eta - \mu_0 \eta_0| = |\mu \eta - \mu_0 \eta + \mu_0 \eta - \mu_0 \eta_0| \leq |\mu - \mu_0| |\eta| + |\eta - \eta_0| |\mu_0| < \bar{\varepsilon} (|\eta| + |\mu_0|)$$

$$\text{ha } |t - t_0| < \min(\delta_\mu(\bar{\varepsilon}), \delta_\eta(\bar{\varepsilon}))$$

Legyen most  $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\min |\eta| + |\mu_0|}$ , legyen  $|\eta(t)|$  korlátos,

$\delta(\varepsilon) = \min(\delta_\mu(\bar{\varepsilon}), \delta_\eta(\bar{\varepsilon}))$ ,  $(|\eta|$  és  $|\mu_0|$  seholyse legyen egyszerre zéró), így

III. teljesül.

e) Állítjuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mu \times \eta(t)) = \mu \times \lim_{t \rightarrow t_0} \eta(t)$$

A komponensek segítségével felírva, ugyanis

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \{ [x_2 y_3(t) - x_3 y_2(t)] \mu_1 + \dots \} &= [x_2 \lim_{t \rightarrow t_0} y_3(t) - \\ &- x_3 \lim_{t \rightarrow t_0} y_2(t)] \mu_1 + \dots = \mu \times \lim_{t \rightarrow t_0} \eta(t) \end{aligned}$$

f) Állítjuk, hogy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mu(t) \times \eta(t)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mu(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \eta(t)$$

Ez az előzőhöz teljesen hasonlóan látható be.

g) Egy vektor függvényt folytonosnak nevezünk egy  $t_0$  helyen, ha ott a vektorfüggvény határértéke létezik és az egyenlő a definícióbeli értékével. Ehhez a) és b) szerint szükséges és elegendő, hogy a komponensek folytonosak legyenek.

h) Egy vektor függvényt egy  $t_0$  helyen differenciálhatónak nevezünk, ha az  $\frac{\mu(t) - \mu(t_0)}{\Delta t}$  ( $t \rightarrow t_0$ ) vektor sorozatnak van határértéke. Ehhez a) szerint újra szükséges és elegendő, hogy a komponensek differenciálhatók legyenek. A vektorfüggvény differenciálhányadosának komponensei a vektorfüggvény komponenseinek differenciálhányadosai, ami ugyancsak a)-ból következik. A differenciálhányadost a  $t_0$  helyen  $\mu'(t_0)$ -al, vagy  $\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_{t=t_0}$ -al fogjuk jelölni.

i) Az a) és h) szerint ha  $\mu(t)$  és  $\eta(t)$  differenciálhatók, akkor



$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{y}(t)] = \dot{\mathbf{r}}(t) \pm \dot{\mathbf{y}}(t)$$

j) Állítjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{y}(t)] = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{y}}.$$

Ugyanis

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{y}) = \frac{d}{dt} (x_1 y_1) = \dot{x}_1 y_1 + x_1 \dot{y}_1 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{y}}.$$

Speciál esetben, ha  $\mathbf{r} = \mathbf{y}$ , úgy  $\frac{d}{dt} r^2 = 2 \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ . Ha most  $r$  hossza állandó, úgy  $r^2 = \text{konst.}$ ,  $2 \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ ,  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ , azaz  $\mathbf{r} \perp \dot{\mathbf{r}}$ . Ezt szemléletesen is könnyen beláthatjuk. Ugyanis ebben az esetben az  $\mathbf{r}(t)$  végpontjai mindig egy gömbfelületen helyezkednek el, azaz  $\mathbf{r}(t)$  gömbfelületi görbe. De ekkor ennek az érintője:  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  a gömb érintője is egyuttal, mely merőleges a gömb sugarára, az  $\mathbf{r}(t)$  vektorra.

k) A j) -hez hasonlóan, ha  $u(t)$  tetszőleges differenciálható skalár függvény, akkor

$$\frac{d}{dt} (u(t) \mathbf{r}(t)) = \dot{u} \mathbf{r} + u \dot{\mathbf{r}}.$$

l) Ugyesintén

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{y}) = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{y}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{y}}),$$

amit komponensenkénti differenciálással láthatunk be.

Eddig azt láttuk, hogy a vektor sorozat konvergenciájának, a vektorfüggvény határértékének, folytonosságának és differenciálhányadosának definíciója pontos analogonja ezen fogalmakra a skalár függvények analízisében adott definíciónak. Annak, hogy egy vektor sorozat konvergens legyen, hogy egy vektor függvény határértéke létezzen, hogy folytonos, vagy differenciálható legyen, szükséges és elegendő feltétele, hogy ezek a tulajdonságok a komponensekre teljesüljenek. A felírt differenciálási szabályok is megegyeznek a skalár analízisben megismertekkel.

Nézzük meg még most egy vektor függvény Taylor sorát. Tegyük fel, hogy  $\mathbf{r}(t)$  a  $\langle t_0, t \rangle$  intervallumban  $n$ -szer folytonosan differenciálható. Így



$$x_1(t) = x_1(t_0) + \Delta t x_1'(t_0) + \dots + \frac{\Delta t^{n-1}}{(n-1)!} x_1^{(n-1)}(t_0) + \\ + \frac{\Delta t^n}{n!} x_1^{(n)}(t_0 + \vartheta_1 \Delta t),$$

ahol

$$\vartheta(t) = \vartheta(t_0) + \Delta t \vartheta'(t_0) + \dots + \frac{\Delta t^{n-1}}{(n-1)!} \vartheta^{(n-1)}(t_0) + \varrho_n,$$

ahol

$$\varrho_n = \frac{\Delta t^n}{n!} x_1^{(n)}(t_0 + \vartheta_1 \Delta t) \vartheta_1$$

és  $\vartheta_1$  0 és 1 között levő és általában egymástól különböző értékek.

Ezen utóbbi megjegyzés geometriailag az alábbi következményt vonja maga után. Ha egy skalár függvény Taylor sorát a második taggal befejezzük, úgy azt a Lagrange féle középérték tételnek is szokták nevezni, ami az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 + \vartheta(x - x_0))$$

alakban a Rolle-tétel általánosítása és azt jelenti, hogy van az  $\langle x_0, x \rangle$  intervallumban oly pont, ahol az érintő párhuzamos az  $f(x)$  és az  $f(x_0)$  pontot összekötő szelővel. Ez a tétel térgörbét előállító vektorfüggvényre általában nem vihető át, mert az  $\varrho_1$  általában nem a görbe érintőjét adja egy pontban, hiszen komponensei a vektorfüggvény komponenseinek általában különböző helyen vett differenciálhányadosai.

## 2. Térgörbék előállítása

Tekintsük a  $t$  paraméternek egy  $a \leq t \leq b$  szakaszon folytonos

$$I. \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (a \leq t \leq b)$$

függvényét. Ezek az egyenletek meghatározzák az  $(a, b)$  szakaszon folytonos

$$(1) \quad \vec{OP} = \vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_1 + y(t) \vec{e}_2 + z(t) \vec{e}_3$$

vektort. Ennek a vektornak végpontja írja le a görbét, ha  $t$  az  $(a, b)$  szakaszt befutja. Az így megadott görbe az  $(a, b)$  szakasznak egy folytonos leképezése. A szakasz egy  $t$  pontjának az a  $P$  pont a képe, amelynek koordinátáit I. határozza meg.



Amíg  $t$  az  $(a, b)$  szakaszt leírja,  $P$  a görbét írja le és az  $x(a)$ ,  $y(a)$ ,  $z(a)$  koordinátaival bíró  $A$  pontból az  $x(b)$ ,  $y(b)$ ,  $z(b)$  koordinátaival bíró  $B$  pontba jut. Az így kapott görbe nyitott vagy zárt aszerint, amint  $A$  és  $B$  különböző ill. összeeső pont.

Annak feltétele, hogy a nyitott görbe bármely  $P$  pontjának az  $(a, b)$  szakaszon csak egy  $t$  pont feleljen meg, hogy ne legyen az  $(a, b)$  szakaszon olyan  $t_1$  és  $t_2$  ( $t_1 \neq t_2$ ) amelyekre  $x(t_1) = x(t_2)$ ,  $y(t_1) = y(t_2)$ ,  $z(t_1) = z(t_2)$  egyszerre fennáll, vagyis amelyekre

$$\Delta(t_1, t_2) = [x(t_2) - x(t_1)]^2 + [y(t_2) - y(t_1)]^2 + [z(t_2) - z(t_1)]^2$$

eltűnik. Ha  $\Delta(t_1, t_2)$  az  $(a, b)$  szakasz bármely  $t_1, t_2$  pontpárjára pozitív, akkor a görbének az  $(a, b)$  szakaszra való leképezése is egyértelmű, az  $(a, b)$  szakasz görbére való leképezésének megfordítása is egyértelmű. Az ilyen kölcsönösen egyértelmű leképezést topologikus leképezésnek nevezik. Ha tehát az  $(a, b)$  szakasz bármely pontpárjára  $\Delta(t_1, t_2) > 0$ , akkor ennek a szakasznak az (1) görbére való leképezése topologikus, s a görbének erre a szakaszra való leképezése is ilyen.

Ha a leképezés topologikus, akkor azalatt, amíg a  $t$  pont egyirányban az  $(a, b)$  szakaszt befutja,  $P$  a görbén  $A$ -tól  $B$ -ig halad, de közben egy ponton sem halad kétszer át.

Annak, hogy az  $(a, b)$  szakasznak a görbére való leképezése topologikus legyen, egy elégséges, de nem szükséges feltétele, hogy az  $(a, b)$  szakaszon az  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  függvény közül az egyik határozottan monoton legyen, mert ekkor  $\Delta(t_1, t_2)$ -nek egyik tagja mindig pozitív.

Ha  $\Delta(t_1, t_2) = 0$ , akkor a görbén a  $t_1$  és  $t_2$  paraméterű  $P_1$  és  $P_2$  pont összeesik. Ha  $t_1, t_2$  közül egyik sem esik  $a$ -val vagy  $b$ -vel össze, akkor ebben a pontban a görbe önmagát metszi, vagy érinti.

Az (1) egyenletekkel előállított görbét a paraméter változtatásával más egyenletekkel is elő lehet állítani.

Ha  $t = \varphi(\tau)$  a változónak egy olyan  $(\alpha, \beta)$  szakaszon folytonos és határozottan monoton függvénye, hogy  $\varphi(\alpha) = a$  és  $\varphi(\beta) = b$ , vagy  $\varphi(\alpha) = b$  és  $\varphi(\beta) = a$ , akkor azalatt, amíg  $\tau$  az  $(\alpha, \beta)$  szakaszt egy irányban leírja,  $t$  az  $(a, b)$  sza-



kaszt egy irányban befutja. Ekkor az  $a$  pont, amelynek koordinátái

$$x = x_1(\tau), \quad y = y_1(\tau), \quad z = z_1(\tau)$$

ahol

$$x_1(\tau) = x[\varphi(\tau)] \quad y_1(\tau) = y[\varphi(\tau)], \quad z_1(\tau) = z[\varphi(\tau)],$$

ugyancsak az (1) görbét állítja elő.

Az  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  függvényről azt is feltesszük, hogy az  $(a, b)$  szakaszon  $\nu$ -ször ( $\nu \geq 1$ ) folytonos andifferenciálható, valamint  $\mu'(t)$  seholsem nullvektor, s a  $t$  paraméter helyett csak olyan  $\tau$  paramétert vezetünk be, amelyre a megfelelő  $(\alpha, \beta)$  szakaszon a függvénynek is megvan a differenciálhatóságra vonatkozó fenti tulajdonsága.

### 3. Ivhosszuság

Ha  $\nu \geq 1$ , vagyis ha  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$   $t$ -nek legalább egyszer folytonosan differenciálható függvénye az  $(a, b)$  szakaszon, akkor az (1) görbe  $a$  és  $t$  paraméterű pontja közé eső ívének hossza

$$(2) \quad s = \int_a^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt = \int_a^t \sqrt{\mu'^2(t)} dt = \int_a^t |\mu'(t)| dt.$$

Feltételezhetjük, hogy  $a \leq t \leq b$ , mert az ellenkező esetben a  $t$  paraméter helyett  $-t$  bevezetésével ezt elérhetjük. Az  $(a, b)$  szakaszon tetszőlegesen felvesszünk olyan  $n-1$   $t_k$  pontot, hogy

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

és  $P_k$ -val jelöljük a görbe  $t_k$  paraméterű pontját, vagyis azt a pontot, amelynek koordinátái  $x(t_k)$ ,  $y(t_k)$ ,  $z(t_k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ). A görbére írt  $P_0 P_1 P \dots P_n$  törtvonal hossza

$$s_n = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1} P_k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2}$$

A differenciálszámítás középértéktételének alkalmazásával ezt az összeget

$$s_n = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x'^2(t_k x) + y'^2(t_k y) + z'^2(t_k z)}$$



alakban írhatjuk. Itt  $t_k x, t_k y, t_k z$  a  $(t_{k-1}, t_k)$  szakasz egy-egy pontját jelenti.

Ha  $n$ -et elég nagyra választjuk és a  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  osztópontokat az  $(a, b)$  szakaszon elég sűrűn vesszük fel, akkor az  $x'(t), y'(t), z'(t)$  függvényeknek az  $(a, b)$  szakaszon való egyenletes folytonossága miatt elérhetjük, hogy akármelyik  $(t_{k-1}, t_k)$  szakasz bármely  $\bar{t}_k$  és  $\tau_k$  pontjában

$$\begin{aligned} & |x'(\bar{t}_k) - x'(\tau_k)| < \varepsilon, \\ \text{I.} \quad & |y'(\bar{t}_k) - y'(\tau_k)| < \varepsilon, \\ & |z'(\bar{t}_k) - z'(\tau_k)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Itt  $\varepsilon$  tetszőlegesen előírt pozitív szám. Ha  $\tau_k$  a  $(t_{k-1}, t_k)$  szakasznak egy tetszőleges pontja és ha

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x'^2(\tau_k) + y'^2(\tau_k) + z'^2(\tau_k)},$$

akkor kimutatjuk, hogy

$$|s_n - \sigma_n| < 6\varepsilon(b-a).$$

Ennek igazolására felhasználjuk a

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

azonosságot és ebbe az

$$A = x'(t_k x)^2 + y'(t_k y)^2 + z'(t_k z)^2, \quad B = x'(\tau_k)^2 + y'(\tau_k)^2 + z'(\tau_k)^2$$

értékeket helyettesítsük. Ekkor

$$\begin{aligned} A - B &= x'(t_k x)^2 - x'(\tau_k)^2 + y'(t_k y)^2 - y'(\tau_k)^2 + z'(t_k z)^2 - z'(\tau_k)^2 = \\ &= [x'(t_k x) - x'(\tau_k)] [x'(t_k x) + x'(\tau_k)] + \dots \end{aligned}$$

Mivel nyilvánképpen

$$|x'(t_k x)| \leq \sqrt{A} \quad |x'(\tau_k)| \leq \sqrt{B}$$

és

$$|x'(t_k x) + x'(\tau_k)| \leq \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

ezért



$$\frac{|x'(t_k x) + x'(\tau_k)|}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \leq 1$$

Ugyanez az egyenlőtlenség érvényes akkor is, ha  $x$  helyébe  $y$ -t vagy  $z$ -t megfelelően helyettesítünk.

Az I. egyenlőtlenségek miatt

$$|x'(t_k) - x'(\tau_k)| < \varepsilon \quad |y'(t_k) - y'(\tau_k)| < \varepsilon \quad \text{és} \quad |z'(t_k) - z'(\tau_k)| < \varepsilon$$

Igy

$$\begin{aligned} |\sqrt{A} - \sqrt{B}| &= \left| \frac{A-B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \right| = \left| \frac{x'(t_k x) + x'(\tau_k)}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} [x'(t_k x) - x'(\tau_k)] + \right. \\ &+ \frac{y'(t_k y) + y'(\tau_k)}{A + B} [y'(t_k y) - y'(\tau_k)] + \frac{z'(t_k z) + z'(\tau_k)}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} [z'(t_k z) - \\ &\left. - z'(\tau_k)] \right| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

$$\text{ha } \max |t_k - t_{k-1}| < \delta(\varepsilon)$$

mert mindegyik tagban az első tényező  $\leq 1$ , a második tényező pedig I. miatt kisebb, mint  $\varepsilon$ .

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} |\sigma_n - s_n| &= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) (\sqrt{A} - \sqrt{B}) < 3\varepsilon \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) + \\ &= 3\varepsilon (b-a). \end{aligned}$$

Vegyünk most a fix  $b$  felső határ helyett egy változó  $t$  értéket. Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\lim s_n = \lim \sigma_n = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = s(t).$$

Az ívhosszuságnak nyilvánkép ugyanezt a képletét kapjuk akkor is, ha az integrál alsó határát az  $(a, b)$  szakasz egy  $a$  pontjával helyettesítjük és a görbén az ívhosszuságot az  $a$  paraméterű  $A_0$  ponttól számítjuk. A görbe ívhosszúsága az  $A$  ponttól a  $t$  paraméterű pontig pozitív vagy negatív, aszerint, amint  $t > a$  ill.  $t < a$ .



Az így nyert  $s = s(t)$  függvény határozottan monoton, mert az integrandus  $> 0$ ,  $s = s(t)$  differenciálható, differenciálhányadosa seholsem 0, és mint egy folytonos vektorfüggvény abszolút értéke folytonos. Így létezik a  $t = t(s)$  inverz függvény, mely szintén határozottan monoton, és meg van az eredeti függvény differenciálhatóságára és annak folytonosságára vonatkozó tulajdonsága, tehát megengedhető paraméter transzformáció.

Hajtsuk végre a  $t = t(s)$  paraméter transzformációt:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t(s)) = \overline{\mathcal{H}}(s)$$

Igy a görbe a saját ivhosszára van vonatkoztatva mint paraméterre. Ezt a paramétert egy a következőkben bebizonyítandó jellemző tulajdonság miatt természetes paraméternek nevezzük.

Az ivhosszuság (2) képletéből

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = [\mathcal{H}'(t)]^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2$$

Ha tehát az ivhosszuságot választjuk paraméternek, akkor az  $\mathcal{H}'(s)$  egységvektor, mert  $|\mathcal{H}'(s)| = \frac{ds}{ds} = 1$ . Ekkor tehát  $\mathcal{H}'(s)^2 = x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = 1$ .

Állítom ez a tulajdonság az ivhossznak karakterisztikus tulajdonsága, azaz, ha egy paraméternél az érintő vektor hossza 1, úgy ez a paraméter az ivhossz.

Legyen ugyanis

$$|\mathcal{H}'(t)| \equiv 1$$

így

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\mathcal{H}'(t)| dt = t - t_0$$

legyen  $t_0 = 0$ , azaz a  $P(t_0) = P(0)$ -től kezdjük számítani az ivhosszat. Így

$$s = t$$

#### 4. Érintő és érintővektor

Ha  $P_0$  és  $P_1$  az

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$



görbének  $t_0$  és  $t_1$  paraméterhez tartozó pontja, akkor a  $\overrightarrow{P_0 P_1} = \mathcal{H}(t_1) - \mathcal{H}(t_0)$  a görbének hurvektora. Ez a vektor párhuzamos a

$$\frac{\mathcal{H}(t_1) - \mathcal{H}(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} \pi_1 + \frac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0} \pi_2 + \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0} \pi_3 \quad \text{vektorral.}$$

Ha  $t_1 \rightarrow t_0$ , akkor a komponensek és így a vektor is határértékhez tartanak. Ez a határvektor

$$\mathcal{H}'(t_0) = x'(t_0) \pi_1 + y'(t_0) \pi_2 + z'(t_0) \pi_3.$$

iránya megadja a görbe érintőjének irányát a  $P_0$  pontban. Az érintő egyenletei egy  $u$  paraméterrel

$$x = x(t_0) + u x'(t_0), \quad y = y(t_0) + u y'(t_0), \quad z = z(t_0) + u z'(t_0).$$

Ezt a három egyenletet egybefoglalja az érintőnek a görbe  $P$  pontjához tartozó

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(t_0) + u \mathcal{H}'(t_0)$$

vektoregyenlete.

A

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t) = \frac{\mathcal{H}'(t)}{|\mathcal{H}'(t)|} = \bar{\mathcal{H}}'(s) = \mathcal{L}(s)$$

vektort

a (2) görbe érintő egységvektorának vagy röviden érintő vektorának nevezzük. Hossza az egység, iránya az érintő iránya a görbének abban a  $P$  pontjában, amelyhez  $t$  paraméterérték és görbének egy szilárd pontjától számított  $s$  ívhosszuság tartozik.

Az  $\mathcal{H}'(t)$  vektornak  $t$  és  $s$  szerinti differenciálhányadosa között fennáll a

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{d\bar{\mathcal{H}}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad \text{vagyis az } \mathcal{H}'(t) = \mathcal{H}'(s) |\mathcal{H}'(t)|$$

vektoregyenlet.

### 5. Normálisok

Az

$$\mathcal{H}(t) = x(t) \pi_1 + y(t) \pi_2 + z(t) \pi_3$$



görbe egy  $P_0$  pontjában a  $P_0$  ponton átmenő sík a normálsík, amely a görbe  $P_0$  pontjához tartozó érintőt merőlegesen metszi.

Ha ennek a síknak  $Q$  egy tetszőleges pontja és ha  $\vec{\ell} = \vec{OQ}$ , akkor a  $\vec{P_0Q} = \vec{\ell} - \vec{r}(t_0)$  vektor a normálsíkban fekszik és emiatt merőleges az  $\vec{r}'(t_0)$  vektor irányára. A normálsík egyenlete tehát

$$(3) \quad (\vec{\ell} - \vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

vagy részletesen kiírva

$$(x-x_0)x'(t_0) + (y-y_0)y'(t_0) + (z-z_0)z'(t_0) = 0$$

Itt

$$x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0).$$

Ha a normálsík egyenletét  $\vec{r}'(t_0)$  -al végigosztjuk, vagy ha az ívhosszság a paraméter, akkor a normálsík egyenletének alakja Hesse-féle.

#### 6. Simulósík

Ha  $P_0, P_1, P_2$  az  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  görbe három pontja ( $\vec{OP}_k = \vec{r}(t_k)$ ),  $(k = 0, 1, 2)$  akkor a görbe simulósíkja a  $P_0$  pontban a  $P_0, P_1$  és  $P_2$  ponton átmenő sík határhelyzete, ha  $P_1$  és  $P_2$  a görbén egymástól függetlenül  $P_0$  felé tart. Ha az  $\vec{r}(t)$  vektor legalább kétszer folytonosan differenciálható  $t$  szerint ( $\nu \geq 2$ ) a simulósík mindig létezik és egyenlete

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = (\vec{\ell} - \vec{r}(t_0)) [\vec{r}'(t_0) \times \vec{r}''(t_0)] =$$

$$= (\vec{\ell} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0), \vec{r}''(t_0)) = 0$$

Annak a síknak egyenlete, amely a  $P_0, P_1$  és  $P_2$  ponton átmegy,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = (\vec{\ell} - \vec{r}_0, \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0) = 0$$

A simulósík egyenletének lehozása végett a determináns második sorában lévő különbségeket a középértéktétellel fejezzük ki és



azután ezt a sort a zérustól különböző  $t_1 - t_0$ -al végigosztjuk. Ekkor a  $P_0, P_1, P_2$  sík egyenlete

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0 + \vartheta_1(t_1 - t_0)) & y'(t_0 + \vartheta_2(t_1 - t_0)) & z'(t_0 + \vartheta_3(t_1 - t_0)) \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

alkalaz lesz, ahol  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ , 0 és 1 között levő szám. Ha  $P_1$  a görbén  $P_0$ -hoz tart, vagyis  $t_1 - t_0 \rightarrow 0$ , akkor a sík egyenletének határalakja:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ez a görbe  $P_0$  pontjának érintőjén és a  $P_2$  ponton átmenő sík egyenlete, mert az érintő pontjaiban  $x - x_0 = u x'(t_0)$ ,  $y - y_0 = u y'(t_0)$ ,  $z - z_0 = u z'(t_0)$ , s így a determináns első és második sorának arányos volta miatt eltűnik.

A simulósík egyenletének igazolására a második lépés a harmadik sor elemeinek

$$x_2 - x_0 = x(t_2) - x(t_0) = x'(t_0)(t_2 - t_0) + \frac{1}{2} x''(t_0 + \vartheta_1(t_2 - t_0))(t_2 - t_0)^2$$

alkalaz Taylor-sorba való fejtsége. Ha a determináns harmadik sorába az elemeknek ilyen alakját helyettesítjük be és a harmadik sort  $(t_2 - t_0)$ -al végigosztjuk, s azután az így kapott harmadik sor elemeiből a második sor elemeit kivonjuk, akkor a harmadik sor elemeit oszthatjuk

$\frac{t_2 - t_0}{2}$ -vel. Az így kapott determináns egyenlet

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0 + \vartheta_1(t_2 - t_0)) & y''(t_0 + \vartheta_2(t_2 - t_0)) & z''(t_0 + \vartheta_3(t_2 - t_0)) \end{vmatrix} = 0$$

Ha  $P_2$  a görbén  $P_0$  felé tart, vagyis  $t_2 \rightarrow t_0$ , akkor ennek az egyenletnek határeseteként a simulósík (4) egyenlete.

A simulósík a  $P_0$  pontban akkor határozatlan, ha egyenletében a determináns első sorának mindhárom eleméhez tartozó aldet-



mináns eltűnik, vagyis amikor  $\mathcal{H}'(t_0) \times \mathcal{H}''(t_0) = 0$ . Ekkor az  $\mathcal{H}'(t_0)$  és  $\mathcal{H}''(t)$  vektor párhuzamos s komponenseik arányosak. Ha ez a görbe minden pontjában vekövetkezik, akkor szükségképpen  $\mathcal{H}''(t) = f(t) \mathcal{H}'(t)$ .

Az első komponensre tehát fennáll az

$$\frac{x''(t)}{x'(t)} = f(t)$$

differentiálegyenlet. Ugyanez érvényes a második és a harmadik komponensre is.

Integrálással kapjuk, hogy

$$\log x'(t) = \int f(t) dt + \log a$$

$$\text{így} \quad x'(t) = a e^{\int f(t) dt} = a F(t).$$

$$x(t) = a \int F(t) dt + a_0$$

Itt  $\log a$  és  $a_0$  az integrálás állandója. Ha tehát

$$F(t) dt = \int e^{\int f(t) dt} dt = \phi(t) = u$$

akkor  $x = a u + a_0$ . Hasonlóképp kapjuk, hogy  $y = b u + b_0$  és  $z = c u + c_0$  alakú. Ez a három egyenlet egy egyenesnek egyenlete. Ezt  $\mathcal{R} = a \mathcal{r}_1 + b \mathcal{r}_2 + c \mathcal{r}_3$  és  $\mathcal{R}_0 = a_0 \mathcal{r}_1 + b_0 \mathcal{r}_2 + c_0 \mathcal{r}_3$  jelöléssel  $\mathcal{H} = \mathcal{R}_0 + u \mathcal{R}$  alakban is írhatjuk.

Az olyan görbe tehát, amelynek egy pontjában sincs határozott simulósíkja, egyenes vonal.

### 7. Főnormális és binormális. Kisérő háromél

A görbe egy  $P$  pontján átmenő és a  $P$  pont normálisikjában fekvő egyenesek a görbe normálisai a  $P$  pontban. Ezek az egyenesek merőlegesen, ortogonálisan metszik a  $P$  pontban a görbe érintőjét és azzal együtt a görbét is. A görbe egy pontjában a normálisok közül kettőnek külön neve is van. Az a normális, amely a simulósíkba esik, főnormális. Az pedig, amely a simulósíkra merőleges, binormális.

A görbe egy  $P$  pontjában az érintő, normális és binormális közül akármelyik a másik kettőre merőleges. e három vektorral alkotott derékszögű háromél a görbe kísérő hároméle a  $P$  pontban.



A simulációs egyenletéből következik, hogy a  $P_0$  pontban a binormális párhuzamos az  $r'(t_0) \times r''(t_0)$  vektorral. Irányítását úgy választjuk, hogy ennek a vektornak irányításával megegyez-  
zék. A binormális egységvektora, röviden: a binormális vektor:

$$b = \frac{r'(t_0) \times r''(t_0)}{|r'(t_0) \times r''(t_0)|}$$

Ha az ívhosszuság a paraméter és ha  $P$  ponthoz az  $s_0$  ív-  
hosszuság tartozik, akkor a binormális egységvektor

$$b = \frac{r'(s_0) \times r''(s_0)}{|r''(s_0)|} = \frac{t(s_0) \times t'(s_0)}{|t'(s_0)|}$$

mert  $r'(s)^2 = 1$ , így ezt differenciálva  $r'(s)$ ,  $r''(s) = 0$ , azaz  
 $r' \perp r''$ , és  $r'$  egységvektor, így a külső szorzatuk abszolút  
értéke, azaz az általuk alkotott parallelogramma területe

$$|r' \times r''| = |r' \times r''|$$

Az

$$(5) \quad u = \frac{r''(s_0)}{|r''(s_0)|} = \frac{t'(s_0)}{|t'(s_0)|}$$

egységvektor a főnormálisvektor. Ez a vektor ugyanis merőleges a  
 $P$  pont érintőjére és binormálisára, mert  $u \cdot t = 0$  és  $u \cdot b = 0$ .

Ugyanis

$$u \cdot t = \frac{r''}{|r''|} \cdot r' = \frac{1}{|r''|} r'' \cdot r' = 0$$

$$\text{és} \quad u \cdot b = \frac{r''}{|r''|} \cdot \frac{r' \times r''}{|r''|} = \frac{1}{r''^2} (r'', r', r'') = 0$$

Ezekután a binormális

$$(6) \quad b = \frac{r' \times r''}{|r''|} = r' \times \frac{r''}{|r''|} = t \times u$$

Az érintő, főnormális és binormális egyenlet rendre

$$\mathcal{C} = r(s_0) + u \cdot t(s_0),$$

$$\mathcal{C} = r(s_0) + u \cdot u(s_0),$$

$$\mathcal{C} = r(s_0) + u \cdot b(s_0).$$



Az érintő és a főnormális síkja a simulósík, a főnormális és a binormális síkja a normálsík, az érintő és a binormális síkja a rektifikáló sík. Egyenletünk rendre

$$(\varphi - \pi(s_0))\tau(s_0) = 0$$

$$(\varphi - \pi(s_0))\nu(s_0) = 0$$

$$(\varphi - \pi(s_0))\mu(s_0) = 0$$

8. Görbület, görbületi sugár. Görbületi középpont, görbületi kör vagy simulókör. Egységgömbre való leképezés az érintőkkel

A következőkben, ha csak az ellenkezőt nem állítjuk, a görbe előállítására paraméternek az  $s$  ívhosszuságot választjuk. A differenciálások is erre a paraméterre vonatkoznak.

Az  $\pi = \pi(s)$  görbe  $s$  paraméterű  $P$  pontjában a  $C$  görbületet és az  $r$  görbületi sugárt a

$$(7) \quad C = \frac{1}{r} = |\tau'| = |\pi''|.$$

egyenletet értelmezi.

Igy

$$\kappa = \frac{\pi''}{|\pi''|} = \frac{\pi''}{C} \text{ azaz } \pi'' = C \kappa$$

vagy más formában írva

$$(8) \quad \pi''' = \tau' = C(s) \kappa(s)$$

ami az ugynevezett Frenet-féle képletek első egyenletét fogja adni.

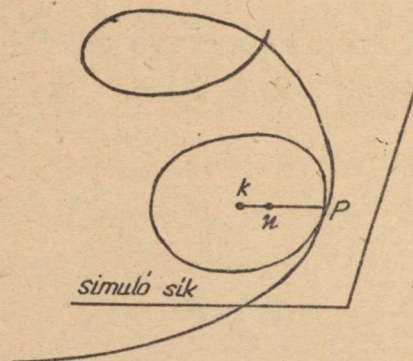
A görbe  $P$  pontjának si-

mulósíkjaiban az a  $K$  pont, amelyre

$$(9) \quad \vec{OK} = \pi + r\kappa = \pi + \frac{\pi}{C}$$

a görbe görbületi középpontja a  $P$  pontban. A simulósíkban  $K$  körül az  $r$  sugárral leírt kör a görbe görbületi köre, vagy simulóköre a  $P$  pontban.

Ha az  $O$  kezdőpontból felmérjük a  $\tau(s)$  egységvektort, akkor annak végpontja az egység sugaru gömbön, az egységgömbön leírja a  $\tau(s) = \pi_1$  görbét. Ez az  $\pi_1 = \tau(s)$  görbe az  $\pi = \pi(s)$  görbének





érintőivel való leképezése az egységgömbre. Egyenes ilyen gömbi leképezése nyilvánkép egyetlen pont.

Az  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s)$  görbén a  $P$  és  $P_0$  pont közé eső ív érintőivel való leképezésének ívhossza

$$\sigma = \int_{s_0}^s |\mathcal{H}'(s)| ds = \int_{s_0}^s C(s) ds,$$

mert a leképezéskor kapott görbe vektoregyenlete  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(s)$ . Eből következik, hogy

$$\frac{d\sigma}{ds} = C.$$

Ha  $\Delta s$  az  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s)$  görbe egy olyan ívének hossza, mely a  $P_0$  pontot magában foglalja és  $\Delta\sigma$  ennek az ívnek érintői képen az ívhosszuság az egységgömbön, akkor

$$(10) \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = C.$$

A görbület ennek a hányadosnak határértékével is értelmezhető.

Egy görbe érintőinek az egységgömbre való leképezését az érintők Gauss-féle leképezésének is nevezik. Ha a  $\Delta s$  hosszúságú ívnek  $Q_1$  és  $Q_2$ , érintői Gauss-féle képeinek  $Q_1'$  és  $Q_2'$  a végpontjai, akkor az  $OQ_1'$  ill.  $OQ_2'$  sugar párhuzamos a görbe  $Q_1$  ill.  $Q_2$  pontjának érintőjével. A  $Q_1'OQ_2' = \Delta\varphi$  szög a két érintő szögével és egyuttal az egységgömbön a  $Q_1'Q_2'$  főkörívvel egyenlő nagy. Ha  $\Delta s$  elég kicsiny, akkor  $\Delta\sigma$   $\Delta\varphi$ -től alig különbözik. Emiatt (13)-ban  $\Delta\sigma$ -t  $\Delta\varphi$ -vel helyettesíthetjük.

### 9. Csavarodás vagy torzió

Az  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s)$  görbe  $s$  paraméterű pontjában a görbe  $T(s)$  csavarodását, torzióját a

$$(11) \quad \mathcal{H}'(s) = -T\mathcal{H} \quad \text{vagy a} \quad T = -\mathcal{H}'\mathcal{H}$$

vektoregyenlet állítja elő. Ki kell mutatnunk, hogy van ilyen  $T$  skaláris, vagyis azt, hogy a  $\mathcal{H}'$  és  $\mathcal{H}$  vektor párhuzamos.

Az  $\mathcal{H}$  főnormális vektor és vele párhuzamos bármely vektor merőleges a  $\mathcal{H}$  és  $\mathcal{H}'$  vektorra. Azt kell tehát igazolnunk, hogy  $\mathcal{H}'\mathcal{H} = 0$ .



0 és  $t' = 0$ . Az első egyenletet a  $t^2 = 1$  egyenlet differenciálásával kapjuk. Ha pedig a  $t$  és  $t$  merőlegességét kifejező  $t \cdot t = 0$  egyenletet differenciáljuk, akkor megkapjuk, hogy  $t' \cdot t + t \cdot t' = 0$ , vagyis

$$t \cdot t' = t' \cdot t = -G n \cdot t = -G (n \cdot t) = 0.$$

Az  $\mathcal{H} = t(s)$  görbe az  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s)$  görbe binormálisainak képe a Gauss-féle gömbön. Ennek a görbének az  $s_0$  és  $s$  paraméterű két pontja közé eső ív hossza

$$\sigma = \int_{s_0}^s |t'(s)| ds = \int_{s_0}^s |T| ds$$

Ebből következik, hogy előjeltől eltekintve

$$(12) \quad T = \frac{d\sigma}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta s}$$

ahol  $\Delta s$  az  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s)$  görbének egy meghatározott  $P$  pontját magában foglaló kis ív hossza,  $\Delta \sigma$  pedig a felvett ív binormálisai Gauss-féle képének hossza.

$\Delta \sigma$  helyett lehet venni a  $\Delta s$  hosszúságú ív végpontjaihoz tartozó binormálisoknak, vagy simulósíkoknak  $\Delta \psi$  szögét is.

A görbe egy pontjában a csavarodást a

$$(13) \quad T = \frac{(\mathcal{H}', \mathcal{H}'', \mathcal{H}''')}{\mathcal{H}''^2} = r^2(\mathcal{H}', \mathcal{H}'', \mathcal{H}''')$$

képlettel számíthatjuk, ahol  $r$  a görbületi sugarat jelenti az illető pontban, (5) és (6) szerint.

$$t = t \times \mathcal{H} = \mathcal{H}' \times \frac{\mathcal{H}''}{|\mathcal{H}''|} = \frac{1}{|\mathcal{H}''|} (\mathcal{H}' \times \mathcal{H}'') = r(\mathcal{H}' \times \mathcal{H}'')$$

$$t' = r'(\mathcal{H}' \times \mathcal{H}'') + r(\mathcal{H}'' \times \mathcal{H}''') + r(\mathcal{H}' \times \mathcal{H}''')$$

$$\text{így} \quad T = t' \cdot n = -[r'(\mathcal{H}' \times \mathcal{H}'') + r(\mathcal{H}'' \times \mathcal{H}''')] \cdot \mathcal{H}'' =$$

$$= -rr'(\mathcal{H}', \mathcal{H}'', \mathcal{H}''') - r^2(\mathcal{H}', \mathcal{H}''', \mathcal{H}'') = r^2(\mathcal{H}', \mathcal{H}'', \mathcal{H}''') = \frac{(\mathcal{H}', \mathcal{H}'', \mathcal{H}''')}{\mathcal{H}''^2}$$

A görbület és a csavarodás értelmezéséből következik, hogy az  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(s)$  görbének egy pontjában akkor van görbülete ill. csavarodása, ha abban a pontban az  $\mathcal{H}(s)$  vektor legalább kétszer, ill. legalább háromszor folytonosan differenciálható.



Az olyan görbe, amelynek minden pontjában a görbület zérus, egyenes vagy egyenes darab.

Ha ugyanis az

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(s) = x(s) \mathcal{H}_1 + y(s) \mathcal{H}_2 + z(s) \mathcal{H}_3$$

görbe minden pontjában a görbületi zérus, akkor a  $\mathcal{H}'(s) = \mathcal{H}''(s)$  vektor nullavektor és így  $x'' = 0$ ,  $y'' = 0$  és  $z'' = 0$ , de ekkor

$$x = a_0 s + a_1, \quad y = b_0 s + b_1, \quad z = c_0 s + c_1,$$

ahol  $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$  állandó. Ez a három egyenlet egyenes paraméteres egyenlete.

A csavarodás (13) képlete szerint egy egyenes minden pontjában a csavarodás zérus. Általánosan: az olyan görbe, amelynek pontjaiban a csavarodás zérus, síkgörbe.

Ha ugyanis  $T = 0$ , akkor  $\mathcal{H}' = 0$ , a binormális vektor és  $\lambda, \mu, \nu$  komponense tehát állandó. Ekkor a  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'' = 0$  egyenlet miatt

$$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0$$

és integrálás után

$$\lambda x + \mu y + \nu z = A = \text{állandó}.$$

Ez az egyenlet sík egyenlete. A görbe pontjai tehát ebben a síkban vannak.

#### 10. Teljes görbület, Frenet képletei

A

$$\mathcal{U} = T \mathcal{T} + C \mathcal{C}$$

vektort a teljes görbület vektorának, vagy Darboux-féle vektornak hosszát, vagyis a

$$|\mathcal{U}| = \sqrt{C^2 + T^2}$$

skalárist teljes görbületnek (Lancrét-féle görbületnek) nevezik.

A teljes görbület vektora párhuzamos a rektifikáló síkkal, mert  $\mathcal{U} \mathcal{W} = 0$ . Ezzel a síkkal párhuzamos és a teljes görbület vektorára merőleges az  $\mathcal{H}'(s)$  vektor is.

Az  $\mathcal{U} = \mathcal{T} x + \mathcal{C} \mathcal{T}$  vektoregyenlet differenciálásával ugyanis kapjuk, hogy



$$u' = b' \times t + b \times t' = -T(t \times t) + C(t \times u) = -Ct + Tt.$$

$y$  és  $u'$  egymásra merőleges és egyenlő hosszú, mert a kísértő háromél koordinátarendszerében  $T, 0, C$  ill.  $-C, 0, T$  a három komponense és ezért  $y \cdot u' = -TC + TC = 0$  és  $y^2 = u'^2 = C^2 + T^2$ .

$$(14) \quad \begin{aligned} t' &= C(s) u(s) \\ u' &= -C(s) t(s) + T(s) b(s) \\ b' &= -T(s) u(s) \end{aligned}$$

vektoregyenleteket Frenet-féle képleteknek nevezik. Ezek a nagyfontosságú képletek az  $\overrightarrow{OP} = r(s)$  görbe egy  $P$  pontjában a kísértő háromél egységvektorainak az ívhosszuság szerint vett differenciálhányadosát fejezik ki a három egységvektorral és a görbének  $P$  pontjához tartozó görbülettel és csavarodással.

A Frenet-féle képleteket a  $y$  teljes görbületvektorral, a Darboux-féle vektorral a következőképpen fejezhetjük ki:

$$t = y \times t', \quad u' = y \times u, \quad b' = y \times b,$$

mert

$$y \times t = (Tt + Ct) \times t = 0 \quad (t \times t) = Cu = t',$$

$$y \times u = (Tt + Ct) \times u = T(t \times u) + C(b \times u) = -Ct + Tb = u'$$

és

$$y \times b = (Tt + Ct) \times b = T(t \times b) = -Tu = b'.$$

Az  $\overrightarrow{OP} = r(s)$  görbét érintői, binormálisai, ill. főnormálisai az  $O$  középpontú egységsugarú gömb (Gauss-féle gömb)  $\overrightarrow{OP}_t = t(s)$ ,  $\overrightarrow{OP}_b = b(s)$  ill.  $\overrightarrow{OP}_u = u(s)$  görbéjére képezik le. Ha  $\Delta s$  jelöli az  $\overrightarrow{OP} = r(s)$  görbe  $s_0$  paraméterű  $P_0$  pontját tartalmazó és az  $s_1$  és  $s_2$  paraméterű pont közé eső ívének hosszát, vagyis ha  $s_1 \leq s_0 \leq s_2$ , és ha  $\Delta s_t$ ,  $\Delta s_b$  ill.  $\Delta s_u$  az érintő, binormális ill. főnormális képének az  $s_1$  és  $s_2$  paraméterű pont közé eső ívének a hossza, akkor

$$C(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_t}{\Delta s},$$

$$T(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_b}{\Delta s},$$

$$\sqrt{C^2(s_0) + T^2(s_0)} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_u}{\Delta s}.$$

Ezek a Frenet-féle képletekből és abból következnek, hogy

$$\frac{ds_t}{ds} = |t'(s)|, \quad \frac{ds_b}{ds} = |b'(s)| \quad \text{és} \quad \frac{ds_u}{ds} = |u'(s)|.$$



Ha  $\Delta s$  az  $\overrightarrow{OP} = \gamma(s)$  görbe  $s_1$  és  $s_2$  paraméterű pontja között eső ívnek hossza, akkor

$$\sqrt{C^2(s_0) + T^2(s_0)} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta s}$$

Síkgörbe binormálisainak képe ponttá zsugorodik.

## II. A térgörbe alakja egy pontjának környezetében

Ha  $P_0$  az  $\overrightarrow{OP} = \pi(s)$  görbe  $s_0$  ívhosszusú pontja, akkor az  $\pi(s) = \pi(s_0) + (s-s_0)\pi'(s_0) + \frac{1}{2}(s-s_0)^2\pi''(s_0) + \frac{1}{6}(s-s_0)^3\pi'''(s_0) + \dots$  Taylor-sorban az  $\pi^{(n)}(s_0)$  vektoroknak a  $P_0$  kísérő háromélére vonatkozó komponensei a görbe  $P_0$  pontjához tartozó görbületnek, csavarodásnak és differenciálhányadosaiknak racionális egész kifejezései, Frenet képleteivel ugyanis

$$\pi' = \tau$$

$$\pi'' = C \pi$$

$$\pi''' = C' \pi + C \pi' = C' \pi + CT \tau - C^2 \tau$$

.

.

.

Ha tehát  $\pi(s) = X\tau(s_0) + Y\pi(s_0) + Z\tau(s_0)$ , akkor harmadfoku tagokig

$$X = (s - s_0) - \frac{1}{6} C^2(s_0)(s - s_0)^3 + \dots$$

$$(15) \quad Y = \frac{1}{2} C(s_0)(s - s_0)^2 + \frac{1}{6} C'(s_0)(s - s_0)^3 + \dots$$

$$Z = \frac{1}{6} C(s_0) T(s_0)(s - s_0)^3 + \dots$$

$X, Y, Z$  a görbe egy pontjának koordinátái a  $P_0$  pont kísérő három élének koordinátarendszerében.

Ha a  $P_0$  pontban sem a görbület, sem a csavarodás nem tűnik el, akkor a görbe alakjáról  $P_0$  környezetében kellő felvilágosítást nyújtanak  $X, Y$ , és  $Z$  sorfejtésének legalacsonyabb foku tagjai. A görbe merőleges vetületének egyenlete  $P_0$  környezetében első megközelítésben:

### 1. a simulósikon

$$X = (s - s_0) \text{ és } Y = \frac{1}{2} C(s_0)(s - s_0)^2, \text{ vagyis } Y = \frac{1}{2} C(s_0) X^2$$

Ez olyan parabola, amelynek tengelye a főnormális.



## 2. a rektifikáló síkon

$$X = (s - s_0) \text{ és } Z = \frac{1}{6} C(s_0) T(s_0) (s - s_0)^3, \text{ vagyis } Z = \frac{1}{6} C(s_0) T(s_0) X^3$$

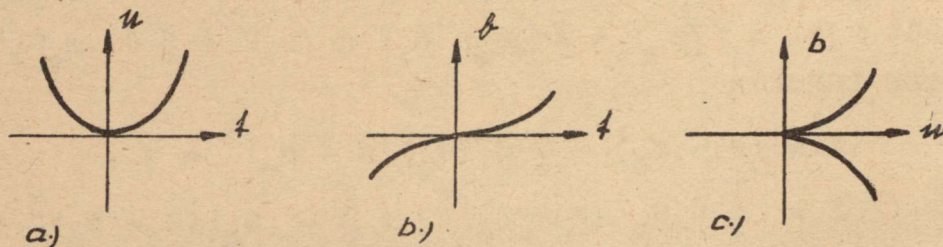
Ennek a harmadrendű parabolának a  $P_0$  pont áthajlás (inflexió) pontja. Az érintővektor a térgörbe vetületét nemcsak érinti, hanem metszi is. Ezért a térgörbe  $P_0$  pontjában a simulósík érinti és metszi a térgörbét, ha  $C(s_0) T(s_0) \neq 0$ .

## 3. a normálsíkon

$$Y = \frac{1}{2} C(s_0) (s - s_0)^2, \quad Z = \frac{1}{6} C(s_0) T(s_0) (s - s_0)^3, \text{ vagyis } Z^2 = \frac{2T^2(s_0)}{9C(s_0)} Y^3$$

Ezeknek a görbéknek alakját  $P_0$  környezetében az alábbi három ábra szemlélteti.

Ha  $C(s_0) \neq 0$ , de  $T(s_0) = 0$ , akkor a térgörbének a simulósíkra való vetülete  $P_0$  közelében olyan alakú, mint amikor a térgörbe csavarodása sem zérus. Az első ábra tehát zérustól különböző véges görbületű síkgörbék alakját is szemlélteti a  $P_0$  pont közelében.



A térgörbe alakjának egy olyan  $P$  pontban való vizsgálatára, amelyben a görbület eltűnik,  $X, Y, Z$  sorfejtésében harmadfoknál magasabb foku tagokra is szükség van.

Ha két görbe olyan, hogy azokban a pontjaikban, amelyeknek a két görbe egy-egy szilárd pontjától számított  $s$  ívhosszúsága egyenlő, a két görbe görbülete és csavarodása megegyezik, akkor a két görbe egymástól nem különbözik, mert van olyan mozgás (eltolás és forgatás), amely az egyik görbét a másikba viszi át. A két görbének csak helye más.



Ennek a fontos tételnek kimutatására fölteszük, hogy az  $\overrightarrow{OP} = \kappa(s)$  és az  $\overrightarrow{OP} = \kappa_0(s)$  olyan két görbe egyenlete, amelyeknek minden olyan pontjában, amelyekhez a két görbén ugyanaz az ívhossz-szuságparaméter tartozik, a  $C$  görbület és a  $T$  csavarodás is megegyezik. A második görbét úgy toljuk el, hogy  $s_0$  paraméterű pontja az első görbe  $s_0$  paraméterű  $P_0$  pontjával összeessen. Ezután a második görbének a közös  $P_0$  ponthoz tartozó kísérő háromlét az első görbének ebbe a pontba tartozó kísérő háromlétébe forgatjuk.

Az első görbe egyenlete az eredeti koordinátarendszerben ugyanaz marad. Ha a második görbe egyenlete az eltolás és forgatás után az eredeti koordinátarendszerben  $\overrightarrow{OP} = \kappa_1(s)$  akkor közös  $P_0$  pontjában a kísérő háromlét megegyezése miatt

$$\overrightarrow{OP}_0 = \kappa(s_0) = \kappa_1(s_0)$$

$$\tau(s_0) = \tau_1(s_0), \quad n(s_0) = n_1(s_0), \quad b(s_0) = b_1(s_0).$$

A két görbe  $s$  paraméterű pontjában a Frenet-féle képletek miatt

$$\begin{array}{lll} \tau' = C n & n' = -C \tau + T b & b' = -T n \\ \tau'_1 = C n_1 & n'_1 = -C \tau_1 + T b_1 & b'_1 = -T n_1 \end{array}$$

és így  $s$ -nek ugyanazon értékére

$$\begin{array}{l} \tau' - \tau'_1 = C(n - n_1) \\ n' - n'_1 = -C(\tau - \tau_1) + T(b - b_1) \\ \tau' - \tau'_1 = -T(n - n_1). \end{array}$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned} & (\tau' - \tau'_1)(\tau - \tau_1) + (n' - n'_1)(n - n_1) + (b' - b'_1)(b - b_1) = \\ & = \frac{1}{2} \left[ (\tau - \tau_1)^2 + (n - n_1)^2 + (b - b_1)^2 \right]' = 0 \end{aligned}$$

azonosságot. Ezért

$$(\tau - \tau_1)^2 + (n - n_1)^2 + (b - b_1)^2 = A \text{ állandó} = 0,$$

mert ha  $s$ -nek értéke  $s_0$ , akkor  $\tau(s_0) = \tau_1(s_0)$ ,  $n(s_0) = n_1(s_0)$ ,  $b(s_0) = b_1(s_0)$ .



A  $\vec{A} = \vec{A}_1$ ,  $\vec{u} = \vec{u}_1$  és  $\vec{b} = \vec{b}_1$  vektor hosszának négyzetösszege csak akkor zérus, ha mindhárom vektor nullavektor és így bármely  $s$  értékre  $\vec{A} = \vec{A}_1$ ,  $\vec{u} = \vec{u}_1$ ,  $\vec{b} = \vec{b}_1$ .

Emiatt

$$\vec{A}(s) - \vec{A}_1(s) = \vec{u}'(s) - \vec{u}'_1(s) = [\vec{u}(s) - \vec{u}_1(s)]' = 0$$

és így

$$\vec{u}(s) - \vec{u}_1(s) = \vec{A} \text{ állandó} = \vec{u}(s_0) - \vec{u}_1(s_0) = \vec{0}$$

Ezzel kimutattuk, hogy a második görbe a leírt mozgás után összeesik az elsővel, mivel ugyanaz az egyenlete. Olyan görbe tehát, amelynek görbülete és csavarodása az ivhosszuságnak  $C(s)$  ill.  $T(s)$  függvénye, ha van csak egy van, ha azokat a görbéket, amelyek mozgással fűződésbe lehet hozni, azonosaknak tekintjük. A

$$(16) \quad C = C(s) \quad \text{és} \quad T = T(s)$$

függvényeket a görbe természetes egyenleteinek nevezik. A görbe ilyen megadásánál nem használunk fel semmilyen koordináta rendszert, tehát a fenti függvények koordináta-rendszer-től függetlenül határozzák meg a görbét; azonban csak mozgástól eltekintve.

A görbe természetes koordinátái között egy  $F(C, T) = 0$  egyenlet nem egy görbére, hanem bizonyos tekintetben hasonló tulajdonságú görbékre jellemző.

### 13. Közösleges csigavonal

Az a sugaru és  $z$  tengelyű forgáshengeren fekvő közösleges csigavonal  $P$  pontjainak vektoregyenlete

$$\vec{OP} = \vec{r}(t) = a \cos t \vec{n}_1 + a \sin t \vec{n}_2 + c t \vec{n}_3.$$

Ha  $t$  időt jelent, akkor ezt a görbét olyan  $P$  pont írja le, amely az  $x$  tengely  $a$  abszcisszájú pontjából kiindulva a  $z$  tengely körül egyenletesen forog és egyúttal a  $z$  tengely irányában  $c$  sebességgel egyenletesen halad.

Egy csavarmenet magassága  $|\vec{r}(t+2\pi) - \vec{r}(t)| = 2c\pi$

A görbe  $0$  és  $t$  paraméterű két pontja közé eső iv hossza

$$s = \int_0^t |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + c^2} dt = \sqrt{a^2 + c^2} t$$



A közösleges csavarvonal vektoregyenlete az ívhosszúsággal

$$I. \quad \vec{OP} = \vec{r}(ps) = \vec{r}(s) = a \cos ps \vec{n}_1 + a \sin ps \vec{n}_2 + c ps \vec{n}_3$$

$$\text{ahol } p = \frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$A \quad \vec{t}(s) = \frac{d\vec{r}(ps)}{ds} = p(-a \sin ps \vec{n}_1 + a \cos ps \vec{n}_2 + c \vec{n}_3)$$

érintővektor harmadik komponense állandó. Ha tehát az érintővektor a z tengellyel  $\gamma$  szöget alkot, akkor

$$\cos \gamma = cp, \quad \sin \gamma = ap, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{c} (c^2 p^2 + a^2 p^2 = 1).$$

Mivel

$$\vec{t}'(s) = -ap^2(\cos ps \vec{n}_1 + \sin ps \vec{n}_2) \text{ és } C = \frac{1}{r} = |\vec{t}'| = ap^2 = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

azért

$$\vec{n}(s) = r \vec{t}'(s) = -\cos ps \vec{n}_1 - \sin ps \vec{n}_2$$

A főnormális P pontjainak vektoregyenlete tehát

$$\vec{OP} = \vec{r}(ps) + u \vec{n}(s) = (a-u) \cos ps \vec{n}_1 + (a-u) \sin ps \vec{n}_2 + c ps \vec{n}_3.$$

A főnormálison az  $u = a$  paraméterű pont a z tengely pontja ( $x = 0, y = 0, z = cp, s = ct$ ). Ezért és az  $u \vec{n}_3 = 0$  egyenlőség miatt a közösleges csavarvonal főnormálisai a tengelyt merőlegesen metszik.

A binormális vektor

$$\vec{b} = p(c \sin ps \vec{n}_1 - c \cos ps \vec{n}_2 + a \vec{n}_3)$$

kifejezése miatt a binormálisok is állandó szöget alkotnak a tengellyel. Ha  $\varphi$  ez a szög, akkor  $\cos \varphi = ap = \sin \gamma$ .

Mintegy

$$\vec{b}'(s) = cp^2(\cos ps \vec{n}_1 + \sin ps \vec{n}_2) = -T\vec{n} = -cp^2 \vec{n}(s)$$

ezért

$$T = cp^2 = \frac{c}{a^2 + c^2} \text{ és } \vec{\nu} = T\vec{t} + C\vec{b} = p^2(c\vec{t} + a\vec{b}) = p\vec{n}_3.$$

$$C(s) = ap^2 = \text{állandó}, \quad T(s) = cp^2 = \text{állandó}.$$



A közösleges csavarvonal Darboux vektora állandó, iránya a tengely irányával megegyezik.

Annak a csavarvonalnak, amelyet az I. egyenlet akkor állít elő, ha  $\mathcal{H}(ps)$  első két komponensét meghagyjuk, s a harmadik komponensét a  $cp(s-s_0) \frac{1}{\mathcal{H}_3}$  ill.  $cp(s_1-s) \frac{1}{\mathcal{H}_3}$  vektorral helyettesítjük, görbülete szintén  $ap^2$  és csavarodása  $cp^2$  ill.  $-cp^2$ . Az egyik csavarvonal jobbra, a másik balra csavarodik. Érintővektorai az  $\frac{1}{\mathcal{H}_3}$  vektorral pozitív ill. negatív szöget alkotnak aszerint, amint  $T$  pozitív ill. negatív.

Egy-egy jobbra, ill. balra csavarodó csavarvonalnak egy menetét következőkép szemléltethetjük:

Az a sugaru és  $2\pi c$  magasságu forgáshenger palástját egy alkotója mentén felvágjuk és egy síkba térítjük. A kapott  $2\pi$  a alapu és  $2\pi c$  magasságu téglalap átlóit meghuzzuk. Ha téglalapot a hengerre visszahajlítjuk, akkor a két átló olyan két csavarvonal egy-egy menetébe görbül, amelyeknek  $ap^2$  a görbületük és az egyiknek  $cp^2$ , a másiknak  $-cp^2$  a csavarodása.

Egy felületnek azokat a vonalait, amelyeknek bármely (elég kicsiny) íve rövidebb, mint az ív végpontjait a felületen összekötő akármilyen más vonal, a felület geodetikus vonalainak nevezzük. A forgáshengerfelület geodetikus vonalai közösleges csavarvonalak, alkotók és az alkotókra merőleges körök. Az ilyen vonalaknak egy kis darabját a hengerfelület síkra való hajlítása egyenes szakaszra egyenesíti ki. Hajlítás a felületen levő vonalak hosszát nem változtatja meg. Az olyan vonal, amely a hengerfelületen a felvett kis ívdarab végpontjait összeköti és nem csavarvonal, alkotó, vagy alkotóra merőleges kör íve hosszabb, mint a végpontjait a hengerfelület síkba hajlításakor összekötő egyenes szakasz.

#### 14. Lejtővonalak vagy hengeres csavarvonalak

A lejtővonalak a közösleges csavarvonalak általánosításai. Ezek olyan görbék, amelyeknek érintői adott  $\mathcal{M}$  egységvektorral állandó  $\mathcal{J}$  szöget alkotnak. Ha egy ilyen görbe pontjain át az  $\mathcal{M}$  vektorral párhuzamosokat húzunk, ezek egy olyan hengerfelület alkotói, amelynek alkotóit a lejtővonal érintő  $\mathcal{J}$  szögben metszenek. Ezért nevezik a lejtővonalakat hengeres csavarvonalaknak is. (Az



olyan görbék, amelyek egy kupfelületen vannak és a kupfelület alkotóit állandó szögben metszik, kupos csavarvonalak.)

Lejtővonalak a síkgörbék (és velük az egyenesek is), mert érintőik a sík normálisával derékszöget alkotnak. Ezek a lejtővonalak elfajult lejtővonalak.

Ha tehát  $\overline{OP} = r(s)$  valódi lejtővonal egyenlete és  $s$  ivhosszuságot jelent, akkor  $\cos \gamma \neq 0$ ,  $C(s) \neq 0$ ,  $T(s) \neq 0$ .

Az olyan vonal ugyanis, amelynek minden pontjában  $T(s) = 0$ , ill.  $C(s) = 0$ , síkgörbe ill. egyenes.

Csak olyan lejtővonalakat vizsgálunk, amelyeknek pontjaiban a  $C(s)$  görbület és a  $T(s)$  csavarodás folytonos függvény, az ilyen görbéken a kísérő hároml egysegevektorai is folytonosan változnak.

A lejtővonal értelmezése szerint

$$u \tau = u r' = \cos \gamma \neq 0, \quad C \neq 0, \quad T \neq 0.$$

Ebből az ivhosszuság szerinti differenciálással Frenet képlete alapján

$$u \tau' = u(Cu) = C(uu) = 0 \quad \text{és így} \quad u \cdot u = 0$$

Olyan  $s$  helyen ugyanis, ahol  $C(s) \neq 0$ , szabad az egyenletet  $0 = C(s)$ -el elosztani, ha pedig  $C(s_0) = 0$ , akkor  $C(s)$  folytonossága miatt és amiatt, hogy a görbület a görbének nem minden pontjában zérus, vagy olyan  $s_1, s_2, \dots$  végtelen sorozat, hogy  $C(s_k) \neq 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) és  $\lim s = s_0$ . Ekkor  $u u(s_k) = 0$  és  $u u(s_0) = \lim u u(s_k) = 0$ .

Az  $u u = 0$  egyenlet miatt a hengeres csavarvonal főnormálisai a henger alkotóira merőlegesek.

A harmadik Frenet-féle képlet szerint  $\tau' = -T u$ . Ebből következik, hogy  $u \tau' = -T(uu) = 0$  és  $u \tau = \cos \varphi = \text{állandó}$ .

A hengeres csavarvonal binormálisai is állandó szöget alkotnak az alkotókkal.

Mivel  $u u = 0$ , azért  $u$  párhuzamos a lejtővonal rektifikáló síkjaival, ezért

$$u = A \tau + B \nu, \quad \text{ahol } A = u \tau = \cos \gamma, \quad B = u \nu = \cos \varphi \quad \text{és} \\ u^2 = 1 = A^2 + B^2 = \cos^2 \gamma + \cos^2 \varphi, \quad \text{tehát } \cos^2 \varphi = \sin^2 \gamma.$$

Az  $u$  egységvektor alakja tehát

$$u = \tau' \cos \gamma + \nu' \sin \gamma \quad \text{vagy} \quad u = \tau \cos \gamma - \nu \sin \gamma.$$



Ezekből differenciálással és a Frenet képletekkel kapjuk,  
 hogy  $u' = t' \cos \gamma + t' \sin \gamma = 0$   $u \cos \gamma - T u \sin \gamma = (C \cos \gamma -$   
 $- T \sin \gamma) u = 0$  vagy  
 $t' \cos \gamma - t' \sin \gamma = u(C \cos \gamma + T \sin \gamma) = 0.$

Ennélfogva

$$\frac{C}{T} = \operatorname{tg} \gamma \quad \text{vagy} \quad \frac{C}{T} = \operatorname{tg} (-\gamma).$$

Ha tehát  $T$  pozitív, akkor  $\gamma$  pozitív hegyesszög, ha pedig  $T$  negatív, akkor  $\gamma$  negatív hegyes szög. A valódi lejtővonal pontjaiban a görbület és a csavarodás viszonya állandó. Ez a viszony-szám annak a szögnek tangense, amelyet az érintők a lejtővonal alkotóival alkotnak.

Az  $u$  egységvektornak az  $t$  és  $t'$  vektorral és a  $\gamma$  szöggel való

$$u = t \cos \gamma + t' \sin \gamma$$

kifejezésében  $\gamma$  pozitív ill. negatív hegyes szög aszerint, amint  $T$  pozitív ill. negatív, tehát mindkét esetben  $T \sin \gamma$  pozitív. Ebből következik, hogy a lejtővonal pontjainak Darboux-féle vektorai a görbéhez tartozó hengerfelület alkotóival párhuzamosak. A  $C = T \operatorname{tg} \gamma$  egyenlőség miatt ugyanis

$$u \cos \gamma = (T t + C t') \cos \gamma = T(t \cos \gamma + t' \sin \gamma) = T u$$

A lejtővonalra kimutatott tételek jellemzők. Más szóval egy folytonos és nem zéró görbülettel és csavarodással bíró térgörbe mindig lejtővonal, ha az alábbi négy föltétel közül az egyik teljesül:

1. ha főnormálisai egy  $u$  vektorra merőlegesek;
2. ha binormálisai egy állandó  $u$  vektorral egyenlő szöget alkotnak;
3. ha Darboux-féle vektorai egy  $u$  vektorral párhuzamosak;
4. ha a görbe természetes koordinátáinak  $C:T$  viszonya állandó.

1. Az  $u u = u r t' = 0$  egyenletből következik, hogy  $u t' = 0$  és  $u t = \cos \gamma = \text{állandó}$ , mert a görbület folytonossága miatt  $r \neq 0$ . A görbe tehát lejtővonal.

2. Ha  $u t = \cos \gamma = \text{állandó}$ , akkor  $u$  egységvektor állandó volta miatt  $u t' = -u T u = 0$ . Ebből  $T$  folytonossága és  $T \neq 0$  miatt  $u u = 0$ .



3. Ha  $\gamma = T \dot{t} + C \dot{b} = (T^2 + C^2) u$  és  $u$  állandó vektor, akkor  $\gamma u = (T \dot{t} + C \dot{b}) u = 0$  és így  $u \cdot u = 0$ .

A 2. és 3. esetben tehát az 1. esetre vittük vissza a bizonyítást.

4. Ha  $C = T \operatorname{tg} \gamma$  és  $\operatorname{tg} \gamma$  állandó, akkor  $C \cos \gamma - T \sin \gamma = 0$ . Ezért Frenet képletei miatt

$$u (C \cos \gamma - T \sin \gamma) = \dot{t}' \cos \gamma + \dot{b}' \sin \gamma = 0. \text{ Ezért}$$

$$\dot{t} \cos \gamma + \dot{b} \sin \gamma = u = \text{állandó}, u^2 = 1, u \dot{t} = \cos \gamma, u \dot{b} = \sin \gamma$$

Ezzel állításunkat mind a négy esetre bebizonyítottuk.

### 15. Bertrand-féle görbék

A Bertrand-féle görbék természetes koordinátái között a

$$(17) \quad \lambda C + \mu T = 1$$

egyenlet áll fenn, amelyben  $\lambda$  és  $\mu$  állandó. A közösleges csavarvonalak is Bertrand-féle görbék, mert ha  $C$  és  $T$  állandó, akkor bármely valós értékéhez van olyan  $\mu$  szám, hogy a (17) egyenlet fennálljon.

Bertrand e róla elnevezett görbékhez olyan két görbe értelmezésével jutott, amelyeknek pontjai között olyan kölcsönösen egyértelmű vonatkozás áll fenn, hogy a megfelelő pontok összekötő egyenese a két görbének abban a két pontjában főnormálisa.

Ha az első görbe vektoregyenlete  $\overrightarrow{OP} = \mathcal{H}(s)$  és  $s$  ivhosszusúságot jelent, akkor az  $s$  paraméterű  $P$  pont főnormálisának  $Q$  pontjaiban

$$\overrightarrow{OQ} = \mathcal{H}'(s) + u \mathcal{H}(s).$$

Ha  $P_1$  jelöli a  $P$  pontnak a második görbén megfelelő pontot, akkor van olyan  $u = \lambda(s)$  érték, hogy

$$\overrightarrow{OP_1} = \mathcal{H}'(s) + \lambda(s) \mathcal{H}(s) = \mathcal{H}'_1(s).$$

Ezen a görbén az  $s$  paraméter nem jelent ivhosszusúságot, az  $s$  paraméterhez tartozó ivhosszusúságot  $s_1$ -gyel jelöljük.

A második görbe vektoregyenletéből

$$\frac{d\mathcal{H}'_1(s)}{ds} = \frac{d\mathcal{H}'_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = \mathcal{H}''_1(s_1) \frac{ds_1}{ds} = \mathcal{H}''(s) + \lambda(s) \mathcal{H}'(s) + \lambda'(s) \mathcal{H}(s).$$



A második Frenet-féle képlet felhasználásával tehát

$$\tau_1(s_1) \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda C) \tau + \lambda T \nu + \mu \lambda.$$

Ha ezt a vektoregyenletet skalárisan szorozzuk az  $n(s)$  vektorral kapjuk, hogy  $\lambda$  állandó, mert  $\mu$  a második görbének is főnormális vektora és ezért  $\tau_1 \mu = 0$ , így  $\lambda'(s) = 0$ .

Mivel  $\lambda$  állandó, azért az első görbével és egy  $P$  pontjának a másik görbén megfelelő  $P_1$  ponttal a második görbének többi pontja is meg van határozva.

Ha a  $\tau_1$  érintővektor az első görbe megfelelő  $\tau$  érintővektorával  $\varphi$  szöveget alkot, akkor

$$\tau_1 = \tau \cos \varphi + \nu \sin \varphi.$$

Ebből differenciálással és az első és harmadik Frenet-féle képlet felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_1}{ds} &= \frac{d\tau_1}{ds_1} \frac{ds_1}{ds} = C_1(s_1) \mu_1(s_1) \frac{ds_1}{ds} = \\ &= \mu(C \cos \varphi - T \sin \varphi) + (-\tau \sin \varphi + \nu \cos \varphi) \frac{d\varphi}{ds} \end{aligned}$$

Mint hogy  $\mu_1(s_1) = \mu(s)$  azért ennek a vektoregyenletnek a  $\tau$  ill.  $\nu$  vektorral való skaláris szorzatából kapjuk, hogy

$$\sin \varphi \frac{d\varphi}{ds} = 0, \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} = 0, \text{ tehát } \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

mert

$$\sin^2 \varphi \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \cos^2 \varphi \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0.$$

Azért, hogy  $\lambda$  és  $\varphi$  állandó, következik az a tétel, amely szerint a két görbének megfelelő pontjaiban a két kísérő hároml merev kapcsolatban van egymással.

$$\tau_1(s_1) \frac{ds_1}{ds} = (1 - \lambda C) \tau + \lambda T \nu \text{ és } \tau_1(s_1) = (\cos \varphi) \tau + (\sin \varphi) \nu$$

egyenlet egyszerre csak akkor állhat fenn, ha

$$\frac{1 - \lambda C}{\cos \varphi} = \frac{\lambda T}{\sin \varphi} \left( = \frac{ds_1}{ds} \right), \text{ vagyis akkor, ha}$$

$$\lambda C + \mu T = 1, \mu = \lambda \operatorname{ctg} \varphi.$$



Ha a második görbét vesszük elsőnek, akkor  $\lambda$ -t  $\lambda$ -val,  $\varphi$ -t  $-\varphi$ -vel kell helyettesíteni, ekkor tehát a legutóbbi egyenletben  $\lambda$ -helyébe  $-\lambda$ -t kell írni, de  $\mu$  változatlan marad. A második görbe természetes koordinátái között tehát a  $-\lambda C + \mu T = 1$  egyenlet áll fenn.

Ha tehát két görbe pontjai között olyan vonatkozás áll fenn, hogy a megfelelő pontok összekötő egyenese mindkét görbének főnormálisa, akkor mindkét görbe Bertrand-féle görbe.

### 16. Négy körspont tétele

Konvex görbe olyan zárt síkgörbét jelent, amelynek egy egyenessel sincs kettőnél több metszéspontja. Ha a konvex görbének görbülete folytonosan differenciálható, akkor azokat a pontokat, amelyekben a görbület differenciálhányadosa eltűnik, a görbe körös pontjainak nevezzük.

A négykörspont tétele azt mondja, hogy egy olyan konvex görbének, amelynek a görbülete folytonosan differenciálható, mindig van legalább négy körös pontja.

Az  $\vec{OP} = \mathcal{N}(s)$  síkgörbe síkját a koordinátarendszer  $x, y$ -síkjaiban vesszük fel  $s$  a paramétert az ivhosszuságnak választjuk. A görbe érintői és főnormálisai a görbe síkjában vannak. Ha  $\varphi$  ill.  $\psi$  jelöli azt a szöveget, amelyet az  $s$  paraméterhez tartozó pont érintő+ ill. főnormális vektora alkot az  $x$ -tengely pozitív felével, akkor  $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ ,

$$\tau = \cos \varphi \tau_1 + \sin \varphi \tau_2$$

$$\mu = \cos \psi \tau_1 + \sin \psi \tau_2 = -\sin \varphi \tau_1 + \cos \varphi \tau_2.$$

E két egységvektor és a  $\tau' = C \mu$  Frenet-féle képlet komponenseinek összehasonlításából következik, hogy

$$\begin{aligned} \tau' &= x''(s) \tau_1 + y''(s) \tau_2 = C \mu = -C \sin \varphi \tau_1 + C \cos \varphi \tau_2 = \\ &= -C y'(s) \tau_1 + C x'(s) \tau_2 \end{aligned}$$

és így

$$x''(s) = -C y'(s), \quad y''(s) = C x'(s).$$



Ha  $S$  jelöli a konvex görbe hosszát, akkor az ívhosszuság zérus és  $S$  értékéhez a konvex görbének ugyanaz a pontja tartozik. Ekkor  $a_0$ ,  $a_1$  és  $a_2$  állandó tetszőleges értékére:

$$I. \quad \int_0^S \left[ a_0 + a_1 x(s) + a_2 y(s) \right] \frac{dC(s)}{ds} ds = 0.$$

Részleges integrálással ugyanis

$$\begin{aligned} \int x(s) C'(s) ds &= x(s) C(s) - \int C(s) x'(s) ds = \\ &= x(s) C(s) - \int y''(s) ds = x(s) C(s) - y'(s), \end{aligned}$$

hasonlóképp

$$\int y(s) C'(s) ds = y(s) C(s) + x'(s).$$

Ha ezekben az integrálokban és az  $\int C'(s)$  integrálban az alsó határ  $0$ , a felső  $S$ , akkor ez a három integrál eltűnik, mert  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $x'(s)$ ,  $y'(s)$  és  $C(s)$  ugyanazt az értéket veszi fel.

Feltevésünk szerint a konvex görbe  $C(s)$  görbülete folytonos. Van tehát legalább egy legnagyobb és legalább egy legkisebb mértéke, s ezért van legalább két körőspontja. Ha csak két körőspontja volna, akkor lehetne rajtuk egy  $a_0 + a_1 x + a_2 y = 0$  egyenest húzni és akkor az I. integrál nem tűnhetnék el, mert az integrálandó függvény nem változtat előjelet.

Miközben ugyanis egy  $P$  pont a konvex görbét leírja  $C(s)$  csak a két körőspontban, az  $a_0 + a_1 x + a_2 y$  függvény pedig csak abban a két pontban változtat előjelet, amelyekben a görbét metszi. A két körőspontban a két függvény szorzata nem cserél előjelet. Ha tehát csak két körőspontja volna a konvex görbének, akkor azon a két ponton kívül az I. integrálban az integrálandó függvény előjele mindenütt ugyanaz volna, s ezért az integrál nem tűnhetnék el.

Ebből az ellentmondásból következik, hogy  $C'(s)$  legalább négyszer változtat előjelet s emiatt a konvex görbén legalább négy körőspont van. Ellipszisen a tengelyek végpontjai körőspontok, s más körőspont nincs. Konvex görbén tehát négy a körőspontok legkisebb száma.

Konvex görbe körőspontjainak görbületi középpontja, az evolúta csúcspontja. Konvex görbe evolútájának mindig van legalább négy csúcspontja.



A négy köröspont tétele a differenciálgeometria eddigi tételeitől eltérőleg nem egy kicsiny görbeivre, hanem egy egész görbére vonatkozik.

### 17. Síkgörbe és a görbületi kör kölcsönös helyzete

Állítjuk, ha  $C'$  az  $s = s_0$  környezetében létezik és az  $s_0$  pontban folytonos, azaz a görbe háromszor folytonosan differenciálható, akkor a görbületi kör az  $s_0$  pontban a görbét nemcsak érinti, hanem metszi is, ha  $C'(s_0) \neq 0$ .

Először is állítsuk elő a görbületi kör egyenletét.

$$\gamma(s) = r_0 + \rho_0 \left[ -\cos \varphi(s) u_0 + \sin \varphi(s) v_0 \right]$$

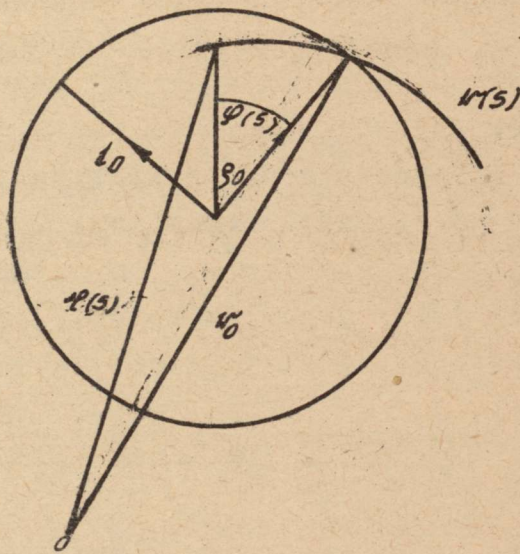
$(s)$ -t úgy akarom meghatározni, hogy  $s$  a kör ívhossza legyen. Ehhez szükséges és elegendő, hogy  $\gamma'^2(s) = 1$  legyen. Tehát  $\varphi(s)$ -et úgy fogom választani, hogy ez teljesüljön.

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \rho_0 [\sin \varphi(s) \\ &+ \cos \varphi(s) v_0] \varphi'(s) \\ \gamma'^2(s) &= \rho_0^2 \varphi'(s)^2 \end{aligned}$$

Így kell, hogy

$$\begin{aligned} \rho_0^2 \varphi'(s)^2 &= 1 \\ \varphi'(s) &= \frac{1}{\rho_0} \end{aligned}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{\rho_0} s + A \text{ legyen.}$$



Ahol  $A$  egyenlőre határozatlan integrációs konstans. Így még azt is megkiváncsihatjuk a  $\varphi(s)$ -ről, hogy egy határozott pontban milyen értéket vegyen fel. Legyen  $\varphi(s_0) = 0$ , ami azt jelenti, hogy  $\gamma(s_0) = \pi(s_0)$ , így

$$\varphi(s_0) = \frac{1}{\rho_0} s_0 + A = 0 \text{ és ebből } A = -\frac{s_0}{\rho_0}$$

$$\varphi(s) = \frac{s - s_0}{\rho_0}$$



és a kör egyenlete

$$\varphi(s) = \pi_0 + \rho_0 \pi_0 + \rho_0 \left[ -\cos \frac{s-s_0}{\rho_0} \pi_0 + \sin \frac{s-s_0}{\rho_0} \tau_0 \right],$$

ahol  $s$  mostmár a kör ivhossza.

Eredeti állításunkat úgy igazoljuk, hogy  $\varphi(s)$  és  $\pi(s)$ -t az  $s_0$  környezetében sorbafejtjük és kimutatjuk, hogy bár  $\varphi(s) - \pi(s)$  a nullvektorhoz tart, ha  $s \rightarrow s_0$ , mégis

$$3! \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\varphi(s) - \pi(s)}{(s-s_0)^3} = -C'_0 \pi_0.$$

De tudjuk, hogy  $C'_0 \neq 0$ . Így legyen  $\varepsilon$  olyan, hogy  $\varepsilon < |C'_0|$ . Ehhez tartozik olyan  $\delta(\varepsilon)$ , hogyha  $|s - s_0| < \delta(\varepsilon)$ , úgy  $\pi_0$ -al való szorzás után

$$-C'_0 - \varepsilon < 3! \varphi \frac{(s) - \pi(s)}{(s-s_0)^3} \pi_0 < -C'_0 + \varepsilon$$

és itt  $-C'_0 - \varepsilon$  és  $-C'_0 + \varepsilon$  egyenlő előjelű, de  $(s-s_0)^3$  pozitív illetve negatív aszerint, amint  $s > s_0$ , ill.  $s < s_0$ , így a közepső kifejezés csak úgy tarthatja meg előjelét, ha  $\varphi(s) - \pi(s)$  irányt vált. Ezzel igazoltuk, hogy a görbületi kör a görbének egyszer az  $\pi_0$ , egyszer a  $-\pi_0$  irányába eső oldalára esik, azaz a görbületi kör a görbét metszi. Most igazoljuk még a fenti limesz relációt. E célból fejtsünk Taylor sorba

$$\varphi'(s) = \sin \frac{s-s_0}{\rho_0} \pi_0 + \cos \frac{s-s_0}{\rho_0} \tau_0 \text{ és}$$

$$\varphi'(s_0) = \pi'(s_0)$$

$$\varphi''(s) = \left[ \cos \frac{s-s_0}{\rho_0} \pi_0 - \sin \frac{s-s_0}{\rho_0} \tau_0 \right] \frac{1}{\rho_0} \text{ és}$$

$$\varphi''(s_0) = \frac{1}{\rho_0} \pi_0 = \pi''(s_0)$$

$$\varphi'''(s) = \left[ -\sin \frac{s-s_0}{\rho_0} \pi_0 - \cos \frac{s-s_0}{\rho_0} \tau_0 \right] \frac{1}{\rho_0^2}$$



167

$$\rho(s) - r(s) = \frac{(s-s_0)^3}{3!} \left[ x_1'''(s_0 + \nu_1(s-s_0)) - \right. \\ \left. - \bar{x}_1'''(s_0 + \nu_1(s-s_0)) \right] z_1,$$

de a Frenet képletek szerint

$$x_1'''(s) = (t_1'(s))' = (c(s)n_2(s))' = c'(s)n_1(s) - \\ - c^2(s)t_1(s),$$

így

$$\rho(s) - r(s) = \frac{(s-s_0)^3}{3!} \left[ -c^2(s_0) \sin \frac{s_0 + \nu_1(s-s_0) - s_0}{\rho_0} n_1(s_0) \right. \\ \left. - t_1(s_0)c^2(s_0) \cos \frac{\nu_1(s-s_0)}{\varphi_0} - c'(\xi_1)n_1(\xi_1) + c^2(\xi_1)t_1(\xi_1) \right] z_1, \\ (\xi = s_0 + \nu_1(s-s_0)).$$

Összva  $\frac{(s-s_0)^3}{3!}$ -al és áttérve az  $s \rightarrow s_0$  határértékre, mikor is

$$\lim_{s \rightarrow s_0} 3! \frac{\rho(s) - r(s)}{(s-s_0)^3} = -c'(s_0)n(s_0).$$

### 18. Magasabb rendű érintkezés

As  $\overset{*}{(1)}(t)$  és  $\overset{*}{(2)}(u)$  görbékről azt mondjuk, hogy a  $t_0$  pontban  $k$ -ad rendben érintik egymást, ha bevezethető olyan  $u = u(t)$  új paraméter, hogy az  $\overset{*}{(2)}(u(t)) = \overset{*}{(2)}(t)$ -re fennálljon

$$\overset{*}{(1)}^{(\alpha)}(t_0) = \overset{*}{(2)}^{(\alpha)}(t_0) \quad (\alpha = 0, 1, \dots, k)$$

azaz

$$(18) \quad \underset{(1)}{F}^{(\alpha)}(t_0) = \underset{(2)}{\bar{F}}^{(\alpha)}(t_0) \quad (\alpha = 0, \dots, k)$$

Egy  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  felület, ahol  $F$  a tekintendő pontban  $k$ -szor folytonosan differenciálható és  $\frac{\partial F}{\partial x_1}$  nem mind 0, és egy



$\pi(t)$  görbe a  $t_0$  pontban  $k$ -ad rendben érintik egymást, ha van a felületen legalább egy olyan  $\bar{\pi}(t)$  görbe, mely az  $\pi(t)$ -t a  $t_0$ -ban  $k$ -ad rendben érinti, azaz

$$(19) \quad r_i^{(\alpha)}(t_0) = \bar{r}_i^{(\alpha)}(t_0) \quad (\alpha = 0, \dots, k)$$

Állítjuk, hogy az equivalens azzal, hogy az

$$F(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = G(t) \text{ függvényre a}$$

$$(20) \quad G^{(\alpha)}(t_0) = 0 \quad (\alpha = 0, \dots, k)$$

fennálljon.

Ha van olyan felületi görbe, melyre (19) teljesül, úgy

$$G(t_0) = F(r_1(t_0), r_2(t_0), r_3(t_0)) = F(\bar{r}_1(t_0), \bar{r}_2(t_0), \bar{r}_3(t_0)) = 0$$

és

$$\begin{aligned} G'(t_0) &= \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_1=r_1(t_0)} \dot{r}_1(t_0) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_1=\bar{r}_1(t_0)} \dot{\bar{r}}_1(t_0) = 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

egészen a  $k$ -adik differenciálhányadosig, mivel az egyenlőség bal oldala és jobb oldala (19) miatt egyenlő, a jobb oldal pedig 0, mivel  $\bar{\pi}(t)$  felületi görbe.

Ez fordítva is áll. Azaz, ha (20) teljesül, úgy állítható van olyan  $\pi(t)$  felületi görbe, mely (19)-nak eleget tesz.

Mivel  $\frac{\partial F}{\partial x_1}$  a tekintett pontban folytonos és nem mind 0, így  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  az illető pont környezetében valamely változója szerint feleldható. Legyen

$$x_3 = f(x_1, x_2)$$

Állítjuk, hogy az

$$\bar{r}_1(t) = r_1(t)$$

$$\bar{r}_2(t) = r_2(t)$$

$$\bar{r}_3(t) = f(r_1(t), r_2(t))$$

amely nem más, mint az  $\pi(t)$  görbének a  $z$  tengely irányából való vetülete a felületre, eleget tesz (19)-nak, mert



$$G(t_0) = F(r_1(t_0), r_2(t_0), r_3(t_0)) = 0 \text{ -ből}$$

$$r_3(t_0) = f(r_1(t_0), r_2(t_0))$$

$$\text{és } F(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3(t)) = 0 \text{ -ből}$$

$$\bar{r}_3(t_0) = f(\bar{r}_1(t_0), \bar{r}_2(t_0)) = f(r_1(t_0), r_2(t_0)) = r_3(t_0)$$

$$\text{így } \bar{r}_3(t_0) = r_3(t_0).$$

Továbbá

$$G'(t_0) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_1 = r_1(t_0)} \dot{r}_1(t_0) = 0$$

$$\text{és } F(\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t), \bar{r}_3(t)) = 0 \text{ -ből}$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \right)_{x_1 = \bar{r}_1(t_0)} \dot{\bar{r}}_1(t_0) = 0$$

$$\text{és mivel } r_1(t_0) = \bar{r}_1(t_0), \text{ és } \dot{r}_1(t_0) = \dot{\bar{r}}_1(t_0), \dot{r}_2(t_0) = \dot{\bar{r}}_2(t_0)$$

$$\text{így az előző két egyenletből következik, hogy } \dot{r}_3(t_0) = \dot{\bar{r}}_3(t_0)$$

és hasonlóan a k-adik deriváltig.

Igy az equivalenciát bebizonyítottuk.

Állítjuk, ha egy p paraméteres felület sereg van adva:  $F(x_1, x_2, x_3, a_1, \dots, a_p)$ , úgy ezek közül kiválasztható általában egy, mely egy adott  $r(t)$  görbét a  $t_0$  helyen p-1-ed rendben érinti.

Az  $r(t)$  a  $t_0$ -ban egy felülettel p-1-ed rendben érintkezik, ha fennáll a

$$\left[ \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} F(r_1(t), r_2(t), r_3(t), a_1, \dots, a_p) \right]_{t=t_0} = G^{(\alpha)}(t_0) = 0$$

( $\alpha = 0, \dots, p-1$ )

De ez éppen p számú egyenlet a p számú ismeretlen  $a_k$ -ra, ami általában megoldható, és egyértelműen oldható meg (ha az egyenlet rendszer inhomogén, és a determináns zérótól különböző), tehát általában csak egy ilyen felület van.

Ha  $r(t)$  és  $\bar{r}(t)$  a  $t_0$  pontban k-ad rendben érintik egymást, úgy mindkettőt sorbafejtve a  $t_0$  környezetében, különbségül



$$\varphi(t) = \frac{(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!} \left[ \kappa^{(k+1)}(t_0) - \bar{\kappa}^{(k+1)}(t_0) + \dots \right]$$

azaz a különbség vektor még  $(t-t_0)^k$ -val osztva is tart a nullvektorban, ha  $t \rightarrow t_0$ . Ezt úgy fejezzük ki, hogy az  $\bar{\kappa}(t)$  jobban megközelíti a  $\kappa(t)$ -t a  $t_0$ -ban, mint bármely más max.  $j$ -ed rendben ( $j < k$ ) érintő görbe.

### 19. A simulósik és a görbe érintkezése

Állítjuk, hogy a simulósik a görbét általában másodrendben érinti.

A simulósik egyenlete:

$$(\varphi(s) - \kappa(s_0), \kappa'(s_0), \kappa''(s_0)) = 0$$

Igy

$$G(s) = (\kappa(s) - \kappa(s_0), \kappa'(s_0), \kappa''(s_0)) \quad \text{és} \quad G(s_0) = 0$$

$$G'(s) = (\kappa'(s), \kappa'(s_0), \kappa''(s_0)) \quad G'(s_0) = 0$$

$$G''(s) = (\kappa''(s), \kappa'(s_0), \kappa''(s_0)) \quad G''(s_0) = 0$$

$$\text{és} \quad G'''(s) = (\kappa'''(s), \kappa'(s_0), \kappa''(s_0))$$

$$\kappa''' = C^1 \kappa - C^2 \iota + CT \ell = -C^2 \kappa' + \frac{C^1}{C} \kappa'' + CT \ell.$$

Igy általában  $G'''(s_0) \neq 0$ .

Megmutattuk, hogy a simulósik a görbét másodrendben érinti, most megmutatjuk, hogy a simulósik az egyetlen ilyen sík.

Ha  $\kappa(s_0) = \vec{OP}_0$ , úgy a  $P_0$  ponton átmenő síkek egyenlete  $(\varphi - \kappa_0, u, \ell) = 0$  ahol  $u$  és  $\ell$  tetszőleges lineárisan független vektorok. Így  $G(s) = (\kappa(s) - \kappa_0, u, \ell)$ . Így  $G'(s_0)$  csak akkor 0, ha

$$\text{I.} \quad \kappa'(s_0) = \alpha u + \beta \ell$$

$G(s_0)$  pedig csak úgy, ha

$$\text{II.} \quad \kappa''(s_0) = \gamma u + \delta \ell$$

De II. és III. -ből

$$u = c \kappa'(s_0) + \varphi \kappa''(s_0)$$

$$\ell = \chi \kappa'(s_0) + \lambda \kappa''(s_0)$$

azaz  $u$  és  $\ell$  az  $\kappa'(s_0)$  és az  $\kappa''(s_0)$  által alkotott síkban van,



így az  $(\varphi - \kappa_0, \alpha, b) = 0$  a görbe  $s_0$  pontjához tartozó simulósík. Tehát egy másodrendben érintő sík mindig simulósík.

Tehát a simulósík az a sík, mely a legjobban megközelíti a görbét az illető pontban.

## 20. A simuló kör és a görbe érintkezése

Állítjuk, hogy a simulókör a görbét általában másodrendben érinti. A 17. pont szerint a simuló kör egyenlete

$$\varphi(s) = \kappa_0 + \rho_0 u_0 + f_0 \left[ -\left(\cos \frac{s-s_0}{\rho_0}\right) u_0 + \left(\sin \frac{s-s_0}{\rho_0}\right) \downarrow_0 \right]$$

és 
$$\varphi^{(\alpha)}(s_0) = \kappa^{(\alpha)}(s_0) \quad (\alpha = 0, 1, 2)$$

Igy a simuló kör a görbét legalább másodrendben érinti. Továbbá

$$\varphi'''(s_0) = -\frac{1}{\rho^2} \downarrow_0 = -C_0^2 \downarrow_0$$

és 
$$\kappa'''(s_0) = C_0^2 \downarrow_0 + C_0' u_0 + C_0 T_0 b_0.$$

Igy általában  $\varphi'''(s_0) \neq \kappa'''(s_0)$ , csak akkor, ha  $C_0' = T_0 = 0$ .

Még megmutatjuk, hogy a simulókör az egyetlen másodrendben érintő kör.

Annak a körnek, mely a görbét  $\kappa_0$ -ban másodrendben érinti, kell, hogy az  $\kappa_0$ -on átmenjen, az első differenciálhányadosa  $\kappa'_0$  legyen és a második differenciálhányadosa  $\kappa''_0 = \frac{1}{\rho_0} \kappa_0$ , így síkja az  $\kappa'_0$  és  $\kappa''_0$  síkja, azaz a simuló sík. Azonban egy kör második differenciálhányadosa az illető kerületi pontból a kör középpontja felé mutat és hossza a kör sugarának reciproka. Itt tehát  $\kappa_0$ -ból  $u_0$  irányába mutat és sugarának hossza  $\rho_0$ . Ezzel azonban a kör egyértelműen meg van határozva, tehát csak egy ilyen kör van és az a simuló kör.

Tehát a görbét az illető pontban a legjobban megközelítő kör a simuló kör, tehát indokolt ez az elnevezése.



## 21. A simuló gömb

Állítjuk, ha  $C_0, T_0 \neq 0$ , úgy az összes gömbök 4 paraméteres seregéből kiválasztható egy, mely az  $r(s)$  görbét az  $s_0$  pontban harmad rendben érinti.

A felület sereg

$$(\varphi - u)^2 = r^2$$

vagy

$$F(x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3, r) = (\varphi - u)^2 - r^2 = 0$$

ahol az  $\varphi$  komponensei a változók és  $u$  komponensei és az  $r$  a paraméterek.

Igy

$$G(s) = (\pi(s) - u)^2 - r^2.$$

Igy ha meg akarjuk keresni azt a gömböt, amely az  $s_0$ -ban harmad rendben érint, úgy meg kell oldanunk az ismeretlennek tekintett  $u$  és  $r$ -re a  $G^{(\alpha)}(s_0) = 0$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ) egyenlet rendszert.

$$\text{I} \quad G(s_0) = (\pi_0 - u)^2 - r^2 = 0$$

$$\text{II} \quad G'(s_0) = 2(\pi_0 - u) \pi'_0 = 0 \quad \text{azaz} \quad (\pi_0 - u) \ell_0 = 0$$

$$\text{III} \quad G''(s_0) = \pi_0^2 + (\pi_0 - u) \pi''_0 = 1 + (\pi_0 - u) C_0 \pi_0 = 0$$

$$\text{IV} \quad G'''(s_0) = (\pi_0 - u) C'_0 \pi_0 + (\pi_0 - u)(-C_0 \ell_0 + T_0 t_0) = 0.$$

Az  $u - \pi_0$  komponenseit az  $s_0$  pontbeli kísérő triéder koordinátarendszerében jelöljük  $\alpha, \beta, \gamma$ -val

$$u - \pi_0 = \alpha \ell_0 + \beta \tau_0 + \gamma t_0.$$

A komponensek kiszámítása végett szorozzuk ezt rendre  $\ell_0, \tau_0, t_0$ -val.

$$\alpha = (u - \pi_0) \ell_0 \quad \text{igy (II) miatt} \quad \alpha = 0$$

$$\beta = (u - \pi_0) \tau_0$$

de (III) miatt  $(u - \pi_0) C_0 \pi_0 = 1$ , és amennyiben  $C_0 \neq 0$  úgy

$$\gamma = (u - \pi_0) \tau_0 = \frac{1}{C_0}$$

$$\gamma = (u - \pi_0) t_0$$



de (IV) miatt amennyiben  $C_0, T_0 \neq 0$

$$(\pi_0 - \alpha) f_0 = - \frac{(\pi_0 - \alpha) C_0' u_0 + C_0^2 \pi_0 - \alpha}{C_0 T_0} l_0$$

de a számláló második tagja (II) miatt zéró, és az első tagjánál figyelembe véve (III) -at

$$f = (\alpha - \pi_0) f_0 = - \frac{\frac{1}{C_0} \pi_0'}{C_0 T_0} = - \frac{C_0'}{C_0^2 T_0}$$

Igy

$$(V) \quad \alpha = \pi_0 + \frac{1}{C_0} \pi_0' - \frac{C_0'}{C_0^2 T_0} l_0$$

Tehát a simuló gömb középpontja a görbületi kör középpontján átmenő és annak síkjára, a simulósíkra merőleges egyenesen, az ugynevezett görbületi tengelyen van.

Az  $r^2$  értékére (V) és (I) -ből

$$r^2 = (\pi_0 - \alpha)^2 = \frac{1}{C_0^2} + \left( \frac{C_0'}{C_0^2 T_0} \right)^2$$

adódik.

## 22. Görbesereg burkolója

Egy görbesereg burkolójának nevezünk egy olyan görbét melynek:

I. minden pontja rajta van a görbeseregnek egy, a ponttal együtt változó görbéjén.

II. minden pontjában érinti a görbesereg megfelelő görbéjét.

Határozzuk meg egy  $F(x, y, c) = 0$  síkbeli görbesereg burkolóját.

Állítjuk, annak hogy az

$$(21) \quad \begin{aligned} y &= x(c) \\ y &= y(c) \end{aligned} \quad \left( \frac{dx}{dc} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dc} \right)^2 > 0$$

görbe burkolója legyen az  $F(x, y, c) = 0$  görbeseregnek szükséges feltétele, hogy

$$(22) \quad \begin{aligned} a) \quad & F(x(c), y(c), c) = 0 \\ b) \quad & F_c(x(c), y(c), c) = 0 \end{aligned}$$

legyen.



Tegyük fel tehát, hogy a (21) görbe elget tesz I. és II.-nek. Hogy I-nek eleget tesz az éppen (22) a-val equivalens. Differenciáljuk most (22) a) -t  $c$  szerint

$$F_x \frac{dx}{dc} + F_y \frac{dy}{dc} + F_c = 0.$$

De hogy II. teljesül az éppen azt jelenti, hogy

$$F_x \frac{dx}{dc} + F_y \frac{dy}{dc} = 0$$

így a feltevésünkből (22) b) is következik.

(22) -ből a  $c$  eliminálásával kapott  $g(x,y)=0$  görbét diszkrimináns görbének nevezzük.

A diszkrimináns görbe azonban nem mindig burkológörbe, azaz a (23) feltételek nem mindig elegendők, mint azt a következő példa mutatja.

$$F(x,y,c) = (y-c)^2 - x^3 = 0$$

$$F(x,y,c) = -2(y-c) = 0$$

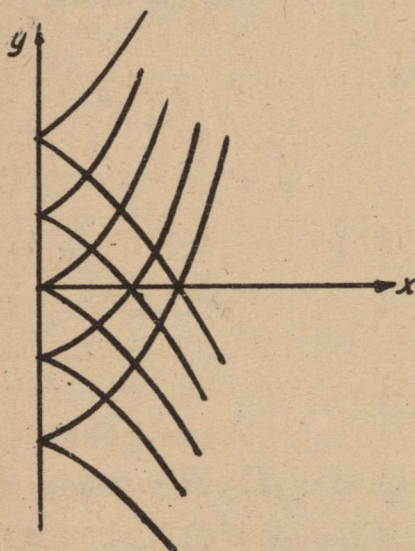
A diszkrimináns görbe az  $x=0$  de ez a görbesereg tagjait nem érinti, így nem burkoló görbe.

Állítjuk, annak, hogy egy görbe burkolója legyen a görbeseregnek, elegendő feltétele, ha (22) mellett még

$$(23) F_x^2(x(c), y(c), c) +$$

$$+ F_y^2(x(c), y(c), c) = 0$$

teljesül.



Igazolnunk kell, hogy ekkor I. és II. teljesül. De I. (22) a) -val equivalens. Differenciáljuk (22) a) -t  $c$  szerint, és (22) figyelembevételével

$$F_x(x(c), y(c), c) \frac{dx}{dc} + F_y(x(c), y(c), c) \frac{dy}{dc} = 0$$

adódik, ami a görbesereg  $c$  paraméterű tagja  $F(c)$  pontbeli érintőjének, mely (23) miatt biztosan létezik, és a (21) görbe érintőjének az összeesését, azaz II. teljesedését jelenti.



### 23. Sik görbe evolútája és evolvensze

Sikgörbe síkbeli evolútája a görbületi középpontok mértani helye. Ha a görbe  $\kappa(s)$ , úgy az evoluta

$$(24) \quad \bar{\kappa}(s) = \kappa(s) + \rho(s) \mathcal{N}(s)$$

ahol  $s$  az  $\bar{\kappa}$  görbének nem ivhossza.

Állítjuk, hogy  $\frac{1}{\rho(s)} \neq 0$  és  $\rho'(s) \neq 0$ , ( $s_0 < s < s_1$ ), úgy  $\bar{\kappa}(s)$  ( $s_0 < s < s_1$ ) burkolója a görbe normálisaiból álló egyenes seregnek.

A normálisokból álló egyenes sereg:

$$\kappa(s) + t \mathcal{N}(s)$$

Igy igazolnunk kell, hogy  $\bar{\kappa}(s)$  eleget tesz az előző pontban a burkológörbére felállított I. és II. követelménynek. De I. teljesül a  $t = \rho(s)$  értékre ( $\rho(s) \neq \infty$ ).

II. is teljesül, mert az  $s$  pontban az  $\bar{\kappa}(s)$  érintője

$$I. \quad \dot{\bar{\kappa}}(s) = \dot{\kappa} + \rho' \mathcal{N} + \rho(-\mathcal{C} \mathcal{T}) = \dot{\kappa} + \rho' \mathcal{N} - \rho \frac{1}{\rho} \mathcal{T} = \rho'(s) \mathcal{N}(s)$$

így ha  $\rho'(s) \neq 0$  úgy II. is teljesül.

Sikgörbe evolvensén értjük a görbe érintőinek minden orthogonális-trajektoriáját.

Állítjuk, hogy az

$$(25) \quad \bar{\kappa}(s) = \kappa(s) - (s-s_0) \kappa'(s)$$

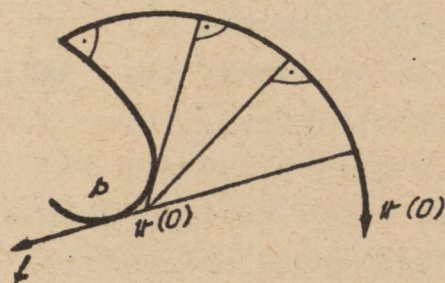
görbesereg minden görbéje az  $\kappa(s)$  egy evolvensze.

Ehhez azt kell kimutatni, hogy  $\bar{\kappa}(s) \perp \kappa'(s)$ . De

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\kappa}}(s) &= \kappa'(s) - \kappa'(s) - (s-s_0) \kappa''(s) = -(s-s_0) \dot{\kappa}'(s) = \\ &= -(s-s_0) \mathcal{C} \mathcal{N} \end{aligned}$$

így valóban  $\dot{\bar{\kappa}}(s) \perp \kappa'(s)$ .

Ez azt jelenti, hogy ha az  $\kappa(s)$  görbe érintőire visszafelé felmérjük egy bizonyos  $s_0$  ponttól számított ivhosszát, úgy egy evolvenst kapunk. Ezt a szerkesztést igen egyszerűen végrehajt-





hatjuk, ha az  $r(s)$  görbére az  $s_0$  pontból kiindulva fonalat görbitünk és azután ezt lefejtjük. Így a fonal végpontja egy evolvenset ír le. Az  $s_0$  választásától függően kapjuk a különböző evolvenszeket.

Ha egy  $r(s)$  görbének az  $\bar{r}(s)$  egy evolvensé, akkor az  $\bar{r}(s)$ -nek az  $r(s)$  az evolútája. Az  $\bar{r}(s)$  mint evolvens mindig merőlegesen metszi az  $r(s)$  érintőit, azaz  $r(s)$  érintői az  $\bar{r}(s)$  normálisai. De így  $r(s)$  az  $\bar{r}(s)$  normálisainak burkológörbéje, tehát  $r(s)$  a  $\bar{r}(s)$  evolútája. Tehát bármely evolvens evolútája az eredeti görbe.

Ha az  $r(s)$  görbének az  $\bar{r}(s)$  evolútája, úgy az  $r(s)$  normálisa az  $\bar{r}(s)$ -nek érintői, az  $\bar{r}(s)$  érintőit az  $r(s)$  merőlegesen metszi, azaz az  $r(s)$  az  $\bar{r}(s)$  egy evolvensé. Tehát egy evolúta evolvenséinek egyike az eredeti görbe.

Állítjuk, ha  $\frac{1}{\rho(s)} \neq 0$ ,  $\rho'(s) \neq 0$  és folytonos az  $(s_0 \leq s \leq s_1)$  intervallumban, úgy az  $r(s)$  evolúta ívhossza előjeltől eltekintve egyenlő a megfelelő görbületi sugarak különbségével. Jelöljük  $r(s)$  ívhosszát  $\sigma$ -val, úgy I. alapján

$$\sigma = \int_{s_0}^{s_1} |\rho'(s)| ds = \int_{s_0}^{s_1} |\rho(s)| ds$$

de  $\rho'(s) \neq 0$  és folytonos, azaz a tekintett intervallumban egyenlő előjeltől, így ha  $s_1 > s_0$ , illetve ha  $s_1 < s_0$  úgy előjeltől eltekintve

$$(26) \quad \sigma = \left| \int_{s_0}^{s_1} \rho'(s) ds \right| = \left| \rho(s_1) - \rho(s_0) \right|.$$

#### 24. Az evolúta csúspontja

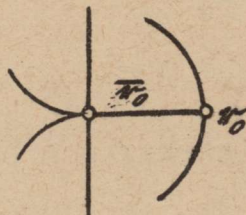
Vizsgáljuk az evolútának az evolvens köröspontja környezetéhez tartozó részét. Köröspontnak nevezünk olyan pontot, ahol  $C''(s_0) = 0$ ,  $C'''(s_0) \neq 0$ .

Tegyük fel tehát, hogy az  $r(s)$  görbe négyszer, azaz  $C$  s kétszer folytonosan differenciálható, és  $C'(s_0) = 0$ ,  $C''(s_0) \neq 0$ .

Az  $\bar{r}(s)$  evolúta az  $s_0$  környezetében két külön ívből áll. Megmutatjuk, hogy az evolúta mindkét ága érinti az evol-



vens körös pontjának normálisát és hogy az evolutának az  $s_0$  környezében lévő pontja az  $\bar{r}(s)_0$ -ban az  $u(s_0)$ -ra állított merőlegesnek ugyanazon oldalára esnek, amit úgy fejezünk ki, hogy az evolutának csúcspontja van.



Vegyük az evolutának egyik, illetve másik ágán lévő

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P_1} &= \bar{r}(s) - \bar{r}(s_0) \quad (s < s_0) \\ \text{ill. } \overrightarrow{P_0 P_2} &= \bar{r}(s) - \bar{r}(s_0) \quad (s > s_0) \end{aligned}$$

szelőket, osszuk a hozzájuk tartozó görbületi sugarak különbségével és tartson  $s \rightarrow s_0$ -hoz.

$$I, \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{r}(s) - \bar{r}(s_0)}{\rho(s) - \rho(s_0)} \quad (s < s_0, \text{ ill. } s > s_0).$$

Bár ez a kifejezés egyetlen határértékhez tart, ez mégsem az egyetlen görbének tekintett  $\bar{r}(s)$   $s_0$  pontbeli érintője, mert  $\rho(s) - \rho(s_0)$  az  $s_0$  környezetében mindig egyenlő előjellű, így az evoluta egyik ágán az evoluta ivhosszal, másik ágán viszont az evoluta ivhossz negatív értékével egyenlő.

Először kimutatjuk, hogy az I. kifejezés az  $s < s_0$ , ill.  $s > s_0$  feltételeitől függetlenül  $u(s_0)$ -al egyenlő, amivel eredeti állításunk első részét igazoljuk.

$$\frac{\bar{r}(s) - \bar{r}(s_0)}{\rho(s) - \rho(s_0)} = \frac{\bar{r}(s) - \bar{r}(s_0) + \rho(s) u(s) - \rho(s_0) u(s_0)}{\rho(s) - \rho(s_0)}$$

Adjunk hozzá és vonjunk ki a számlálóból  $\rho(s_0) u(s)$ -t, így

$$\frac{\bar{r} - \bar{r}_0}{\rho - \rho_0} = \frac{\bar{r} - \bar{r}_0 + \rho_0 (u - u_0) + \rho_0 u_0}{\rho - \rho_0} + u$$

átterve az  $s \rightarrow s_0$  határértékre kimutatjuk, hogy a jobboldal első tagja nullvektor.

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\bar{r} - \bar{r}_0 + \rho_0 (u - u_0)}{\rho - \rho_0} = \frac{0}{0}$$



ami határozatlan. Alkalmazva a L'Hospital szabályt és figyelembe véve, hogy  $\rho'_0 = 0$  és így  $\rho'_0 = 0$

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\pi - \pi_0 + \rho_0(\pi - \pi_0)}{\rho - \rho_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\pi + \rho_0 \pi'}{\rho'} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1 - \rho_0 c^2}{\rho'} = \frac{v}{0}$$

ujra alkalmazva a L'Hospital szabályt

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\pi - \pi_0 + \rho_0(\pi - \pi_0)}{\rho - \rho_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{c\pi - \rho_0 c' - \rho_0 c^2 \pi'}{\rho''} = \frac{v}{\rho''_0} = v$$

azaz

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\pi(s) - \pi(s_0)}{\rho(s) - \rho(s_0)} = \pi(s_0).$$

Most kimutatjuk még, hogy

$$(\pi(s) - \pi(s_0)) \pi'(s_0) = d(s)$$

az  $s_0$  környezetében egyenlő előjellű, ill.  $d(s_0) = 0$ , amivel eredeti állításunk második részét igazoljuk.

Képezzük a

$$d'(s) = \rho'(s) \pi(s) \pi'(s_0)$$

$$d''(s) = \rho''(s) \pi(s) \pi'(s_0) + \rho'(s) \pi'(s) \pi'(s_0) \text{ kifejezéseket.}$$

Igy

$$d'(s_0) = 0, \quad d''(s_0) = \rho''(s_0) \neq 0$$

azaz  $d(s)$ -nek az  $s_0$ -ban szélsőértéke van, de  $d(s_0) = 0$ , így  $d(s)$  az  $s_0$  környezetében vagy mindenhol pozitív, vagy mindenhol negatív, amivel eredeti állításunk második részét is beigazoltuk.

## 25. Evoluta és evolvens térgörbénél

Evolvensen továbbra is - mint ahogy ezt a 23. pontban tettük - a görbe érintőinek bármely orthogonális trajektoriját értjük.

A 23. pontban megmutattuk, hogy a (25) görbesereg minden görbéje az  $\pi(s)$  evolvens, ami itt is ugyanugy azonnal belátható. Most megmutatjuk, hogy az



$$\bar{\pi}(s) = \pi(s) + (s-s_0) \pi'(s)$$

az összes evolvenst adja.

Minden evolvens

$$\bar{\pi}(s) = \pi(s) - u(s) \ell(s)$$

alakban írható, ahol  $u(s)$ -t úgy kell meghatározni, hogy  $\bar{\pi}(s)$  merőleges legyen  $\pi'(s)$ -re, azaz

$$\bar{\pi}(s) = \pi(s) - u'(s) \ell(s) = (1-u'(s)) \ell(s)$$

szorozva  $\ell$ -vel

$$0 = 1 - u'$$

$$u' = 1$$

$$u = s - K$$

$K$ -nak különböző értékeket adva kapjuk a különböző evolvenszeket. Ez természetesen a térgörbék speciál eseteként jelentkező sík-görbékre is igaz.

Evolután viszont a 23. ponttól eltérően - értünk minden olyan görbét, melynek az eredeti egy evolvens. Így az evoluta érintői az eredeti görbe normálisai, tehát minden evoluta az eredeti görbe bizonyos normálisainak burkolója és egy olyan görbe, mely az eredeti normálisainak burkolója biztosan evoluta, mert esen burkológörbének az eredeti evolvens.

További feladatunk lenne megállapítani, hogy mely normálisok burkolnak egy evolutát és meghatározni az  $\pi(s)$  görbe összes  $\bar{\pi}(s)$  evolutáinak egyenletét.

Állítjuk, hogy az összes evolutát az

$$(27) \quad \bar{\pi}(s) = \pi(s) + \rho(s) u(s) + \rho(s) [\cotg(I+K)] \ell(s)$$

$$I = \int T(s) ds$$

$K =$  tetszőleges konst.

görbesereg adja és ekkor az

$$\pi(s) + \rho(s) u(s) + \rho(s) \cotg(I+K) \ell(s)$$

$K$  értékei szerint különböző normális seregek szolgáltatják az egy-egy evolutát burkoló normálisok seregét.

Az előzőek szerint az evoluta bizonyos normálisok burkolója, tehát minden evoluta ilyen alakban írható

$$\bar{\pi}(s) = \pi(s) + \eta(s) u(s) + \zeta(s) \ell(s)$$



ahol  $\eta$  és  $\zeta$  egyenlőre ismeretlen, és úgy akarjuk meghatározni, hogy az  $\vec{r}(s)$  érintője éppen a megfelelő normális irányába essen, azaz

$$\dot{\vec{r}} = \lambda (\eta \vec{u} + \zeta \vec{t})$$

legyen.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}} + \eta' \vec{u} - \eta \zeta \dot{\vec{r}} + \eta \vec{T} \dot{\vec{t}} + \zeta' \dot{\vec{r}} - \zeta \vec{T} \vec{u} \\ &= (1 - \eta \zeta) \dot{\vec{r}} + (\eta' - \zeta \vec{T}) \vec{u} + (\eta \vec{T} + \zeta') \vec{t} \end{aligned}$$

így kell, hogy

$$1 - \eta \zeta = 0 \quad \eta = \frac{1}{\zeta} = \rho$$

és

$$\frac{\eta' - \zeta \vec{T}}{\zeta' + \eta \vec{T}} = \frac{\lambda \eta}{\lambda \zeta}$$

legyen. Ez két egyenlet  $\eta$  és  $\zeta$ -ra. Ezekből

$$\frac{\rho' - \zeta \vec{T}}{\zeta' + \rho \vec{T}} = \frac{\rho}{\zeta}$$

Ebből kiszámíthatjuk  $\zeta$ -t.

$$\begin{aligned} \rho \zeta - \zeta^2 \vec{T} &= \zeta' \rho + \rho^2 \vec{T} \\ \rho' \zeta - \rho \zeta' &= (\rho^2 + \zeta^2) \vec{T} \end{aligned}$$

$$\vec{T} = \frac{\rho' \zeta - \rho \zeta'}{\rho^2 + \zeta^2}$$

de a jobb oldal  $\frac{d}{ds} \arctg \frac{\rho}{\zeta}(s)$ , mert

$$\frac{d}{ds} \arctg \frac{\rho}{\zeta} = \frac{1}{1 + \frac{\rho^2}{\zeta^2}} \cdot \frac{\rho' \zeta - \rho \zeta'}{\zeta^2} = \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \rho^2} \cdot \frac{\rho' \zeta - \rho \zeta'}{\zeta^2}$$

így

$$\vec{T} = \frac{d}{ds} \arctg \frac{\rho}{\zeta}$$

$$\arctg \frac{\rho}{\zeta} = \int \vec{T} ds + K$$

$$\frac{\rho}{\zeta} = \operatorname{tg} \left[ \int \vec{T} ds + K \right]$$

$$\zeta = \rho \operatorname{cotg} \left[ \int \vec{T} ds + K \right]$$

amivel állításunkat beigazoltuk.



Most vizsgáljuk meg a síkgörbe térbeli evolútáit. Itt  $T = 0$ , és ha még a cotg  $K = \bar{K}$  jelölést is alkalmazzuk, úgy itt

$$\bar{r}(s) = \bar{r}(s) + \rho(s) \bar{n}(s) + \rho(s) \bar{K} \bar{t}(s)$$

és  $K = 0$ -nál a 23. pontban megismert síkbeli evolutát kapjuk.

Bár ezek az evoluták is, mint a 23. pontban megismert síkbeli evoluta a normálisok burkolói, azonban az előbbi  $T = 0$ ,  $K = 0$  esettől eltekintve nem a görbületi középpontok mértani helyei, így a most megismert evolutákat megkülönböztetés céljából filár-evolutáknak szokták nevezni.

## II. FELÜLETEK

### 26. A felület előállítás

Mint ahogy görbén értettük az  $r = r(t)$  egy paraméteres vektorfüggvény, valamint az ebből az összes megengedhető paraméter transzformációval nyert vektorfüggvények által meghatározott pontokat, ha a vektorfüggvények bizonyos követelményeknek eleget tesznek, úgy felületen fogjuk érteni az

I. 
$$r = r(u^1, u^2)$$

kétparaméteres vektorfüggvény, valamint az ebből az összes megengedhető paraméter transzformációval nyert vektorfüggvények által meghatározott pontokat, ha a vektorfüggvények bizonyos követelményeknek eleget tesznek.

Az I. vektorfüggvény deriváltjain a

$$\frac{\partial r}{\partial u^1}, \quad \text{és} \quad \frac{\partial r}{\partial u^2}$$

vektorokat, vagy röviden a

$$\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}$$

vektorokat értjük, ahol  $\alpha$ , mint a továbbiakban a görög indexek az 1 és 2 számok valamelyikét jelentik. Hasonlóan, mint a latin indexeknél a görög indexeknél az egy tagban kétszer előforduló indexre szummációt értünk, de itt csak 1 és 2-re.

Ezekután a fentemlitett követelmények:

a) a vektorfüggvény  $\nu$ -ször ( $\nu \geq 1$ ) folytonosan differen-



ciálható legyen, azaz a  $\frac{\partial r_i}{\partial u^\alpha}$  vektorok létezzenek és folytonosak legyenek, azaz ezek komponensei a  $\frac{\partial r_i}{\partial u^\alpha}$  függvények létezzenek és folytonosak legyenek.

b) a

$$(28) \quad \left\| \frac{\partial r_i}{\partial u^\alpha} \right\|$$

matrix rangja a tekintett tartományban mindehol 2 legyen. Ahol ez nem teljesül, azokat a pontokat szinguláris pontoknak, ahol teljesül, azokat közönséges (reguláris) pontoknak nevezzük. A továbbiakban, ha egyéb kikötést nem teszünk, közönséges pontokból álló felületet, illetve felületdarabot vizsgálunk.

Ha ennek a matrixnak rangja 2, úgy van el nem tűnő másodrendű determinánása. Legyen ez

$$\text{II.} \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_j}{\partial u^1} & \frac{\partial r_k}{\partial u^1} \\ \frac{\partial r_j}{\partial u^2} & \frac{\partial r_k}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0$$

ami szükséges és elegendő feltétele annak, hogy az  $u^1, u^2$  és az  $r_j, r_k$  komponensek közt kölcsönös egyértelmű vonatkoztatás álljon fenn, azaz nemcsak minden  $u^1, u^2$ -höz tartozik egyértelműen egy pont, hanem minden ponthoz egyértelműen tartozik egy  $u^1, u^2$  szám-pár, amelyet a három  $r_1, r_2, r_3$  koordináta közül már kettő is meghatároz.

Hogy egy adott felület valamely pontját már két koordinátája meghatározza az a  $z = f(x, y)$  explicit formában megadott felületnél jólismert tény. Most megmutatjuk, hogy a paraméteres előállításból mindig át lehet térni az explicit formára. T.i. a (28) matrix rangjára tett feltétel miatt a 3  $r_i(u^1, u^2)$  függvény közül 1 kifejezhető mint a másik 2 függvénye

$$r_p = g(r_j(u^1, u^2), r_k(u^1, u^2))$$

de II. miatt

$$\bar{u} = u^\alpha(r_j, r_k)$$

így

$$r_p = f(r_j, r_k)$$



Ha  $j = 1, k = 2, p = 3$  úgy  $r_3 = p(r_1, r_2)$ .

Míg a paraméteres előállításból az explicit formára való áttérés konkrét példán való végrehajtása nem mindig a legegyszerűbb, mert a felhasznált tétel az  $u^\alpha(r_j, r_k)$  függvényeknek csak a létezését mondja ki, de nem ad azok megkonstruálására egy egyszerű utasítást, addig az explicit formáról mindig igen könnyen át lehet térni a paraméteres előállításra. Legyen az explicit forma

$$z = f(x, y),$$

az

$$x = r_1(u^1, u^2)$$

$$y = r_2(u^1, u^2)$$

transzformációval

$$z = f(r_1(u^1, u^2), r_2(u^1, u^2)) = r_3(u^1, u^2).$$

Ismeretes még a felületnek az  $F(x, y, z) = 0$  implicit formában való megadása. Mivel azonban az explicit formáról mindig át lehet térni az implicitre és fordítva is, ha az első parciális deriváltak folytonosak és nem mind zéró, az explicit előállításról a paraméteresre való áttérést viszont már megmutattuk, így ezen háromféle előállítás bármelyikéről át lehet térni a másikra.

Az  $\kappa = \kappa(u^1, u^2)$  azonban a felületnek csak egyik paraméteres előállítása. Az

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

paraméter transzformációval a felületnek egy új alakját

$$\kappa = \kappa(u^1, u^2) = \kappa(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) = \bar{\kappa}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

kapjuk, amelytől azonban újra megkivánjuk, hogy eleget tegyen az

a) és b) feltételeknek, azaz csak olyan transzformációkat engedünk meg, melyek  $\nu$ -ször folytonosan differenciálhatók és  $\left\| \frac{\partial r_i}{\partial \bar{u}^\alpha} \right\|$

rangja 2. De ezen matrix bármely másodrendű determinánsa (28) megfelelő determinánsának és a  $\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} = \left| \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \right|$  determináns-

nak a szorzata. Így  $\left\| \frac{\partial r_i}{\partial \bar{u}^\alpha} \right\|$  rangja akkor és csak akkor 2, ha a

$$\frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \neq 0.$$



Az ilyen paraméter transzformációkat megengedett paraméterformációknak nevezzük.

### 27. Felületi görbe, paraméter vonalak

Ha az  $u^1, u^2$  független változókat egy egyetlen harmadik  $t$  paraméter függvényeivé teszem

$$u^\alpha = u^\alpha(t)$$

ugy az

$$\pi = \pi(u^1(t), u^2(t)) = \bar{\pi}(t)$$

1 paraméteres pontsokaságot, egy görbét kapok, amelynek mindegyik pontja rajta van az  $\pi = \pi(u^1, u^2)$  felületen, tehát egy felületi görbét alkotnak.

Az

$$\begin{aligned} u^1 &= \text{konst} & ; & & u^2 &= t \\ u^1 &= t & ; & & u^2 &= \text{konst.} \end{aligned}$$

vagy röviden  $u^1 = \text{konst.}$ , ill.  $u^2 = \text{konst.}$  görbét paramétervonalaknak nevezzük és megvan az a tulajdonságuk, hogy minden közös ponton egy és csak egy  $u^1 = \text{konst.}$ , ill.  $u^2 = \text{konst.}$  paraméter vonal megy át, amit úgy fejezünk ki, hogy a paraméter vonalak a felületet egyrétűen fedik.

Megemlítjük még, hogy ha a felület egy pontjában a (28) matrix rangja kisebb, mint 2, az lehet a paramétervonal rendszer nem megfelelő választásának az oka. Az olyan pontokat, amelyekben ugyan egy paramétervonal rendszernél (28) rangja kisebb mint 2, de bevezethető olyan paramétervonal rendszer, hogy az illető pontban (28) rangja 2 a paraméter hálózat szinguláris pontjának, míg az olyan pontokat, ahol bármely paramétervonal rendszernél (28) rangja kisebb, mint 2 a felület szinguláris pontjainak nevezzük. Az elsőre példa a gömb északi és déli pólusa, ha a hosszúsági és szélességi körök a paraméterek, míg a másakra a kup csúcspontja.

### 28. Érintő, érintősík, normális

Vizsgáljuk az

$$\pi = \pi(u^1(t), u^2(t)) = \bar{\pi}(t)$$

felületi görbe érintőjét:

$$(29) \quad \frac{d\bar{\pi}}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \pi}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \dot{u}^\alpha$$



Igy az előző pontban tárgyalt paramétervonalak érintői

$$\frac{\partial \kappa}{\partial u^1} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \kappa}{\partial u^2} .$$

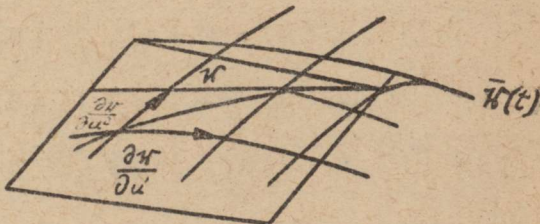
Igy (29) szerint egy ponton átmenő bármely görbe érintője a paraméter vonalak ottani érintőivel lineárisan kifejezhető, azaz az ezek által meghatározott síkban van. Ez a két vektor, akkor és csak akkor lineárisan független, azaz akkor és csak akkor határoz meg síkot, ha a (28) mátrix rangja 2. Ezt a síkot érintősíknak nevezzük. Az érintősík egyenlete

$$(\varphi - \kappa, \frac{\partial \kappa}{\partial u^1}, \frac{\partial \kappa}{\partial u^2}) = 0.$$

Az erre merőleges

$$\frac{\partial \kappa}{\partial u^1} \times \frac{\partial \kappa}{\partial u^2} = \kappa$$

vektort a felület illető pontbeli normálisának nevezzük.



## 29. Vonalfelület, torzfelület

Az olyan felületet, amelynek minden pontján át legalább egy olyan egyenes fektethető, amelynek egy, az illető pontot is tartalmazó szakasza teljesen a felületen van vonalfelületnek, az egyenest pedig a vonalfelület alkotójának nevezzük.

Minden vonalfelület előállítható az

$$(30) \quad \kappa(s, t) = \varphi(s) + t \eta(s)$$

alakban, ahol  $\varphi(s)$  egy minden alkotót egy pontban metsző térgörbe,  $\eta(s)$  pedig az alkotó irányába mutató egységvektor.

Ha a vonalfelület érintősíkja bármely alkotó mentén fix, úgy vonalfelületet torzfelületnek nevezzük.

Nézzük meg mi ennek a feltétele. Az érintősík akkor fix egy alkotó mentén, ha a normálisok egy irányúak. A (30) normálisa.

$$\kappa = \frac{\partial \kappa}{\partial s} \times \frac{\partial \kappa}{\partial t} = (\varphi + t\eta)' \times \eta' = (\varphi' \times \eta) + t(\eta' \times \eta).$$

Igy a normális egy rögzített  $s$  alkotó  $t = 0$  és  $t = t$  pontjában

$$\varphi' \times \eta \quad \text{és} \quad (\varphi' \times \eta) + t(\eta' \times \eta).$$



Ezek akkor egyirányuak, ha

$$(\psi' \times \eta) \times [(\psi' \times \eta) + t(\eta' \times \eta)] = (\psi' \times \eta) \times t(\eta' \times \eta) = \\ = [\psi' t(\eta' \times \eta)] \eta - [\eta t(\eta' \times \eta)] \psi' = t(\psi', \eta', \eta) \eta = 0$$

azaz ha

$$(31) \quad (\psi', \eta', \eta) = 0.$$

Tehát ez szükséges feltétele, hogy egy vonalfelület torzsfelület legyen. De ez elegendő is, mert ez éppen egy alkotó menti két normális az  $\psi' \times \eta$  és az  $(\psi' \times \eta) + t(\eta' \times \eta)$  lineáris függetlenségét jelenti.

Ezekután módunkban áll a torzsfelületek egy osztályozását megadni. (31) miatt a torzsfelület minden pontjában van olyan nem mind nulla  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$ ,  $\gamma(s)$ , hogy

$$I. \quad \alpha(s) \psi'(s) + \beta(s) \eta'(s) + \gamma(s) \eta(s) = 0.$$

Tegyük fel először, hogy  $\alpha = 0$ . Így

$$\eta' = \lambda \eta$$

szorozzuk ezt  $\eta$ -al és vegyük figyelembe az  $\eta^2 = 1$  differenciálásából adódó  $2 \eta \eta' = 0$  egyenletet:

$$0 = \eta' \eta = \lambda \eta^2 = \lambda$$

és II. miatt

$$\eta' = 0$$

$$\eta = \text{konst.}$$

Igy a (30) torzsfelület egy henger.

Vizsgáljuk az  $\alpha \neq 0$  esetet. I. ilyen formában írható:

$$III. \quad \psi' = a \eta' + b \eta$$

Alakítsuk át most (30) -at

$$\eta = \psi - a \eta + (t + a) \eta = \psi^* + (t + a) \eta$$

formába, így

$$\psi^* = \psi' - a' \eta - a \eta'$$

és III. figyelembevételével

$$\psi^* = (-a' + b) \eta.$$

Most 2 eset lehetséges, vagy  $a' = b$  és így  $\psi^* = \text{konst.}$ , azaz



$$r = \varphi^* + (t+a) \eta = \varphi^* + r \eta$$

ami egy kupfelületet, vagy  $a' \neq b$  amikor  $\varphi^* = \sigma \eta$ , azaz egyirányúak, és

$$r = \varphi^* + \mu \varphi^*,$$

Ez a felület az  $\varphi^*$  görbe érintőiből álló felület, ugynevezett érintőfelület. Az  $\varphi^*$  görbét a torzfelület gerincvonalának nevezzük.

Az előző esetek úgy foghatók fel, hogy a gerincvonal egy végtelen távoli, illetve egy végesben fekvő pont.

### 30. Érintőfelület, főnormális és binormális felület

Legyen a  $\varphi(s)$  kétszer folytonosan differenciálható térgörbe. Az  $r(s)$  érintőiből álló

$$r(s, t) = \varphi(s) + t \varphi'(s)$$

felületet érintőfelületnek nevezzük.

Az előző pontban láttuk, hogy a torzfelületek egy csoportja érintőfelület. Most megmutatjuk, hogy minden érintőfelület torzfelület. Képezzük a normálist

$$n = \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} = (\varphi' + t \varphi'') \times \varphi' = t(\varphi'' \times \varphi')$$

ami rögzített  $s$ -nél különböző  $t$ -kre mindig egyirányú, tehát minden érintőfelület torzfelület.

De azt is látjuk, hogy  $t = 0$ -nál, tehát a görbe pontjaiban a felületi normális nullvektor, a (28) matrix rengja kisebb, mint kettő, tehát a gerincvonal pontjai szinguláris pontok.

Vizsgáljuk most a görbe főnormálisaiából álló

$$r(s, t) = \varphi(s) + t n(s)$$

főnormális felületet. Nézzük meg, hogy ez a vonalfelület torzfelület-e? A felületi normális:

$$\begin{aligned} n^* &= \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} = (\varphi' + t n) \times n = (1 - tC) \varphi' + tT \varphi' \times n \\ &= (1 - tC) \varphi' + tT \varphi'. \end{aligned}$$

Képezzük egy rögzített  $s$  mellett az alkotónak  $t_0$  és  $t_1$  pontjában az  $n^*$ -ot és nézzük meg párhuzamosak-e, azaz külső



szorzatuk nullvektor-e?

$$\begin{aligned} [-t_0 T \ell + (1-t_0 C) \ell] \times [-t_1 T \ell + (1-t_1 C) \ell] = & [-t_0 T(1-t_1 C)] + \\ & + t_1 T(1-t_0 C)] (\ell \times \ell) = (t_0 - t_1) T u. \end{aligned}$$

Ez általában nem nullvektor, így a felület általában nem torzfelület, csak ha  $T = 0$ , amikor a görbe síkgörbe, és a főnormális felület a görbe síkjának egy része.

Vizsgáljuk meg még az

$$u(s, t) = \gamma(s) + t \ell(s)$$

binormális felületet. A felületi normális

$$u^* = \frac{\partial u}{\partial s} \times \frac{\partial u}{\partial t} = (\gamma' + t \ell') \times \ell = (\ell - t T u) \times \ell = -u - t T \ell.$$

Egy rögzített  $s$ -nél különböző  $t$  mellett vett felületi normálisok külső szorzata:

$$(-u - t_0 T \ell) \times (-u - t_1 T \ell) = (t_0 - t_1) T \ell$$

ami csak  $T = 0$  esetén nullvektor, tehát a főnormális felület csak síkgörbénél torzfelület, amikor a felület henger.

### 31. Egy paraméteres síksereg burkolója

(30) szerint egy vonalfelület, és így egy torzfelület minden alkotóját és az  $\gamma(s)$  görbe pontjait kölcsönösen egyértelműen rendelhetem egymáshoz, ha a görbe minden pontjához a rajta átmenő alkotót rendelem. Így a felület alkotói éppúgy egy paraméteres sokaságot alkotnak, mint az  $\gamma(s)$  pontjai. De mivel egy alkotó mentén az érintősík fix, így az érintősíkok is egy egyparaméteres síksereget alkotnak, eltérően az általános felületektől, ahol az érintősíkok kétparaméteres síksereget alkotnak. Tehát a torzfelületnek minden alkotója rajta van egy az alkotóval együtt változó érintősíkon, s ezen alkotó mentén érinti az érintősíkot. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a torzfelület az érintősíkjaiból álló egy paraméteres síksereg burkolója.

Allítom fordítva is, egy egyparaméteres síksereghez, ha a síkok normálisai folytonosan változnak, és a normálisok első és második differenciálhányadosa is folytonos mindig található egy torzfelület, mely a síkseregnek burkolója, azaz minden alkotója



rajta van a síkseregnek egy az alkotóval együtt változó síkján és ezen alkotó mentén a síkot érinti.

Adjunk meg egy ilyen síksereget. Legyen  $\vec{r}(s)$  egy térgörbe, és  $\vec{u}(s)$  egy folytonosan differenciálható vektor. Így az

$$\vec{u}(s)(\vec{r} - \vec{r}(s)) = 0$$

vagy

$$\vec{u}(s)\vec{r} = \vec{u}(s)\vec{r}(s) = p(s)$$

minden  $s$  értéknél egy síkot, így egy egyparaméteres síksereget határoz meg, ahol  $\vec{u}$  a síkok normálisa.

Tekintsük két szomszédos sík metszés egyenesét. Ezt az

$$\vec{u}(s)\vec{r} = p(s)$$

$$\text{I.} \quad \vec{u}(s+h)\vec{r} = p(s+h)$$

egyenletrendszer megoldása adja. Ugyanest az egyenest kapjuk, ha a második egyenletből kivonom az elsőt és osztom  $h$ -val

$$\vec{u}(s)\vec{r} = p(s)$$

$$\text{II.} \quad \frac{\vec{u}(s+h) - \vec{u}(s)}{h} \vec{r} = \frac{p(s+h) - p(s)}{h}$$

Tartson most  $h \rightarrow 0$ -hoz, így a metszés egyenesek határhelyzetét minden  $s$ -nél az

$$\vec{u}(s)\vec{r} = p(s)$$

$$\dot{\vec{u}}(s)\vec{r} = \dot{p}(s)$$

egyenletrendszer megoldása adja.

Vegyünk most még egy harmadik

$$\vec{u}(s+h+k)\vec{r} = p(s+h+k)$$

síkot, illetve ehelyett az ugyanazon síkot jelentő

$$\text{III.} \quad \frac{\frac{\vec{u}(s+h+k) - \vec{u}(s+k)}{h} - \dot{\vec{u}}(s)}{k} \vec{r} = \frac{\frac{p(s+h+k) - p(s+k)}{h} - \dot{p}(s)}{k}$$

kifejezést.

Tekintsük az I., II., III. három szomszédos sík által meghatározott pontot. Tartson  $h$  majd  $k \rightarrow 0$ -hoz, úgy kapjuk az

$$\vec{u}(s)\vec{r} = p(s)$$

$$\dot{\vec{u}}(s)\vec{r} = \dot{p}(s)$$

$$\ddot{\vec{u}}(s)\vec{r} = \ddot{p}(s)$$

egyenletrendszert, amely minden  $s$ -nél egy pontot, a három szomszédos



szédos sík metszés pontjainak a határhelyzetét, változó  $s$ -nél pedig egy  $\pi(s)$  görbét határoz meg, amelyre

$$\begin{array}{ll} \text{IV.} & \begin{array}{ll} \text{a)} & u\pi = p \\ \text{b)} & \dot{u}\pi = \dot{p} \\ \text{c)} & \ddot{u}\pi = \ddot{p} \end{array} \end{array}$$

Állítjuk az  $\pi(s)$  érintőfelülete

$$\text{V.} \quad \gamma = \gamma(s, t) = \pi(s) + t \dot{\pi}(s)$$

éppen az a törzfelület, amelyet az  $u\gamma = p$  sikserég burkol. Ehhez kimutatjuk, hogy V. minden alkotója rajta a sikserég megfelelő  $s$  paraméterű síkján, továbbá ezt a síkot az alkotó mentén érinti, azaz érintősíkja azonos a sikserég megfelelő síkjával. Először is megmutatjuk, hogy V-nek egy alkotója mentén vett érintősíkja párhuzamos a sikserég megfelelő  $s$  paraméterű síkjával, azaz V-nek egy alkotója mentén vett normálisa párhuzamos  $u$ -val. A normális:

$$\text{VI.} \quad n = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \times \frac{\partial \gamma}{\partial t} = (\dot{\pi} + t \ddot{\pi}) \times \dot{\pi} = t(\ddot{\pi} \times \dot{\pi}).$$

Differenciáljuk IV. a)-t és vegyük figyelembe IV. b)-t, így

$$\text{VII.} \quad u\dot{\pi} = 0.$$

Differenciáljuk IV. b)-t és vegyük figyelembe IV. c)-t, így

$$u\ddot{\pi} = 0.$$

Differenciáljuk VII-et és vegyük figyelembe, hogy  $u\dot{\pi} = 0$ , így

$$\text{VIII.} \quad \dot{u}\dot{\pi} = 0.$$

Azaz u VII. és VIII. szerint merőleges  $\dot{\pi}$ -ra és  $\ddot{\pi}$ -ra, és így VI. szerint párhuzamos  $n$ -el. Azonban az  $\pi$  pontjai IV. a) szerint rajta vannak a sikserég megfelelő síkjain, így VI. érintősíkja nemcsak párhuzamos, hanem össze is esik a sikserég megfelelő síkjával. Mivel az érintősík egy egész alkotó mentén fix, így V. egy egész alkotó mentén érinti a sikserég megfelelő síkját, ami egyuttal azt is jelenti, hogy V. alkotója rajta van a sikserégnek megfelelő paraméterű síkján, ez a két tény együtt pedig azt jelenti, hogy V. a keresett burkoló.

Még megmutatjuk, hogy V. alkotói a sikserég szomszédos síkjai metszés egyeneseseinek határhelyzetével azonosak, azaz egy alkotó:

$$\pi_0 + t \dot{\pi}_0$$



kielégíti az

$$ay = p$$

$$ay = \dot{p}$$

egyenletrendszer. Ez a behelyettesítés után a IV. a) és a VII. valamint a IV. b) és az  $u^* = 0$  alapján azonnal adódik.

Tehát egy egyparaméteres sikserég burkolója a szomszédos síkok metszés egyeneséből álló torzfelület, melynek gerinevona-  
la ezen metszésegyenések által burkolt görbe.

Megjegyezzük még, hogy az V. érintősíkjai éppen az  $\pi$  simu-  
lósíkjai, mert az érintősík normálisával párhuzamos felületi nor-  
mális VI. szerint párhuzamos a simulósíkra merőleges binormális-  
sal. Ez azonban azt jelenti, hogy  $\pi(s)$  simulósíkjaiból álló egy-  
paraméteres sikserégnek a burkolója az  $\pi(s)$  V. érintőfelülete.

A továbbiakban megvizsgáljuk egy térgörbe normálsíkjaiból,  
majd rektifikáló síkjaiból álló egy paraméteres sikserégek által  
burkolt torzfelületeket.

### 32. Polár felület, polár görbe, rektifikáló felület

Egy  $\pi(s)$  térgörbe

I.  $(\varphi - \pi(s)) \ell(s) = 0$

normálsíkjaiból álló egy paraméteres sikserég burkolóját a görbe  
polárfelületének nevezzük.

Ezen burkoló torzfelület alkotóit az előző pont szerint az  
I. és annak differenciálásából kapott

$$-\pi^* + (\varphi - \pi)\ell' = (\varphi - \pi)C\pi - 1 = 0$$

vagy II.  $(\varphi - \pi)\pi = \frac{1}{C} = \rho$

síkok metszés egyenesei adják. De II. nem más, mint az  $\pi$  irányá-  
ban  $\rho$  távolságra eltolt a rektifikáló síkkal párhuzamos sík, így  
I. és II. metszés egyenesé az  $\pi + \rho\pi$  pontból a  $t$  irányában ki-  
induló egyenes

III.  $\tilde{\pi}(t) = \pi + \rho\pi + t\ell$

amely nem más, mint a görbe  $\pi$  értékhez tartozó görbületi tenge-  
lye. Ezek burkolója a polárfelület gerinevonala, az ugynevezett



polárgörbe. Ezt úgy kaphatjuk, ha I. és II.-höz még a II. differenciálásával keletkező

$$\text{IV.} \quad \kappa' u + (\gamma - \kappa) u' = (\gamma - \kappa)(-Cl + Tb) = \rho'$$

síkot is hozzáveszem. Ezek közös pontját úgy kapom, ha IV.-be behelyettesítem az I. és II. metszés egyenesét jelentő III.-at:

$$(\kappa + \rho u + tb - \kappa)(-Cl + Tb) = \rho'$$

amiből

$$\begin{aligned} tT &= \rho' \\ t &= \frac{\rho'}{T} \end{aligned}$$

Igy a polárgörbe

$$\eta(s) = \kappa + \rho u + \frac{\rho'}{T} b.$$

Vagy a  $\rho = \frac{1}{C}$  helyettesítés után

$$\eta(s) = \kappa + \frac{1}{C} u - \frac{C'}{C^2 - T} b$$

ami a 21. pont szerint a simuló gömbök középpontjainak mértani helye.

Tehát a normálsíkok burkolófelületének gerincvonala a simuló gömbök középpontjainak mértani helye.

Még megjegyezzük, hogy a 25. pont szerint az  $\kappa$  filárevolútáinak pontjai is a görbületi tengelyen helyezkednek el, azaz az  $\kappa$  minden filárevolútája a polárfelületen van, azért ezt a felületet evelutafelületnek is szokták nevezni.

Hátra lenne még megvizsgálni az

$$\text{V.} \quad (\gamma - \kappa) u = 0$$

rektifikáló síkok által burkolt torzfelületet. Az eljárás teljesen az előzőhöz hasonló. Differenciáljuk az V.-öt.

$$\text{VI.} \quad -\kappa' u + (\gamma - \kappa) u' = (\gamma - \kappa)(-Cl + Tb) = 0.$$

V. és VI. metszése egyenese keresztülmegy az  $\kappa$  ponton, mert  $\kappa$  helyébe  $\kappa$ -et írva V. is, VI. is teljesül, iránya pedig a két sík normálisára merőleges irány:

$$u \times (-Cl + Tb) = Ct + T^*$$

ami az ugynevezett Darboux féle vektor.

Tehát a burkoló felület

$$j(s, t) = \kappa + t(Cl + T^*)$$



### 33. Az ívhossz, az első alapforma

Az  $\pi = \pi(u^1, u^2)$  felületen az  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  által meghatározott  $\pi = \pi(u^1(t), u^2(t)) = \bar{\pi}(t)$  felületi görbének a  $t_0$  ponttól számított ívhossza a 3. pont szerint

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{\pi}^2} dt$$

azaz

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial u^\beta} \frac{du^\beta}{dt}} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \pi}{\partial u^\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} dt.$$

A négyzetgyökjel alatti belső szorzatokat, amelyek  $(u^1, u^2)$ -nek, tehát a helynek függvényei a felület első alpmennyiségeinek nevezzük, és jelöljük

$$\left( \frac{\partial \pi}{\partial u^1} \right)^2 = E$$

$$\left( \frac{\partial \pi}{\partial u^1} \frac{\partial \pi}{\partial u^2} \right) = F$$

$$\left( \frac{\partial \pi}{\partial u^2} \right)^2 = G$$

Ezek a jelölések Gauss-tól származnak. Szokásos ezeket a mennyiségeket  $g_{11}$ ,  $g_{12}$ , ill.  $g_{22}$ -vel is jelölni, azaz

$$\frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \pi}{\partial u^\beta} = g_{\alpha\beta}$$

Igy tehát a görbe ívhossza

$$(32) \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{E \dot{u}^1{}^2 + 2F \dot{u}^1 \dot{u}^2 + G \dot{u}^2{}^2} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} dt.$$

A (32) -ből kapott

$$(33) \quad \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = E \dot{u}^1{}^2 + 2F \dot{u}^1 \dot{u}^2 + G \dot{u}^2{}^2 = g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

quadratikus alakot az első alapformának nevezzük.



Azt állítjuk, hogy ez a kifejezés pozitív definit.

Az

$$Q = a h^2 + 2b h k + c k^2$$

másodfoku alakot definitnek (I) nevezem, ha csak a  $h = k = 0$  esetén 0, minden más esetben egyenlő előjellű. Pozitív definitnek, ha a  $h = k = 0$ -on kívül pozitív, és negatív definitnek, ha a  $h = k = 0$  esetén kívül negatív.

Indefinitnek (II) nevezem, ha pozitív és negatív értékeket is felvehet.

Szemidefinitnek (III) nevezem, ha ugyan mindig  $Q \geq 0$ , ill.  $Q \leq 0$ , de nemcsak a  $h = k = 0$  esetben lesz nullává.

Állítjuk, hogy ezekhez az esetekhez szükséges és elégséges, hogy a quadratikus alak diszkriminánsára a következő relációk teljesüljenek:

I.  $ac - b^2 > 0$

II.  $ac - b^2 < 0$

III.  $ac - b^2 = 0$

Tegyük fel, hogy I. teljesedik. Ekkor  $a, c \neq 0$ . Alakítsuk át  $Q$ -t.

$$\begin{aligned} Q &= a \left( h^2 + \frac{2b}{a} h k + \frac{c}{a} k^2 \right) = a \left[ \left( h + \frac{b}{a} k \right)^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{c}{a} k^2 \right] = \\ &= a \left[ \left( h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} k^2 \right] \end{aligned}$$

amiből látható, hogy I. elegendő ahhoz, hogy a szögletes zárójelben lévő kifejezés pozitív legyen, de szükséges is, mert  $h + \frac{b}{a} k$   $h$  és  $k$  megfelelő választásával mindig zéróvá tehető.

Ha most  $a > 0$ , úgy pozitív definit a kifejezés, ha  $a < 0$  úgy negatív definit.

Tegyük fel, hogy II. teljesedik.  $Q$  utolsó kifejezéséből látható, hogy  $Q$  pozitív és negatív értékeket is felvehet.

Tegyük fel, hogy III. teljesedik így  $Q \geq 0$ , ill.  $Q \leq 0$  a szerint, amint  $a > 0$ , ill.  $a < 0$ , de  $\frac{h}{k} = -\frac{b}{a}$ -nál  $Q$  mindig 0.

Hogy a (33) kifejezés diszkriminánsa pozitív, azt a Lagrange féle identitás segítségével fogjuk belátni. Ez azt mondja ki, hogy

(34)  $(ax + by)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + (ab)^2$



Ha a két vektor által bezárt szög  $\alpha$ , úgy

$$(a \times b)^2 = (|a||b|\sin\alpha)^2 = a^2 b^2 \sin^2\alpha = a^2 b^2 (1 - \cos^2\alpha) = \\ = a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2\alpha = a^2 b^2 - (a \cdot b)^2,$$

és ha  $a$  és  $b$  lineárisan függetlenek, úgy ez a kifejezés pozitív.

Ha

$$a = \frac{\partial x}{\partial u^1}, \quad b = \frac{\partial x}{\partial u^2}$$

úgy

$$EG - F^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0$$

valamint  $E = g_{11} > 0$ , így (33) pozitív definit.

#### 34. Szögmérés

Legyen  $u^\alpha = u_1^\alpha(t)$  egy rögzített  $(u^1, u^2)$  ponton átmenő felületi görbe és  $u^\alpha = u_2^\alpha(t)$  egy ugyanezen ponton átmenő másik felületi görbe.

Ezek érintői a rögzített  $(u^1, u^2)$  pontban

$$\frac{\partial x}{\partial u^\alpha} \dot{u}_1^\alpha \quad \text{és} \quad \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} \dot{u}_2^\alpha$$

így az általuk bezárt szög cosinusa

$$(35) \cos \alpha = \frac{\frac{\partial x}{\partial u^\alpha} \dot{u}_1^\alpha \frac{\partial x}{\partial u^\beta} \dot{u}_2^\beta}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u^\gamma} \dot{u}_1^\gamma\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u^\mu} \dot{u}_2^\mu\right)^2}} = \frac{g_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta}{\sqrt{g_{\gamma\delta} \dot{u}_1^\gamma \dot{u}_1^\delta} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{u}_2^\mu \dot{u}_2^\nu}}$$

As általuk bezárt szög sinusa

$$\sin \alpha = \frac{\left| \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} \times \frac{\partial x}{\partial u^\beta} \right| \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u^\gamma} \dot{u}_1^\gamma\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u^\mu} \dot{u}_2^\mu\right)^2}} = \frac{\left| \frac{\partial x}{\partial u^1} \times \frac{\partial x}{\partial u^2} \right| (\dot{u}_1^1 \dot{u}_2^2 - \dot{u}_1^2 \dot{u}_2^1)}{\sqrt{g_{\gamma\delta} \dot{u}_1^\gamma \dot{u}_1^\delta} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{u}_2^\mu \dot{u}_2^\nu}} = \\ = \frac{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} (\dot{u}_1^1 \dot{u}_2^2 - \dot{u}_1^2 \dot{u}_2^1)}{\sqrt{g_{\gamma\delta} \dot{u}_1^\gamma \dot{u}_1^\delta} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{u}_2^\mu \dot{u}_2^\nu}}$$



A paramétervonalak által bezárt szög cosinusa

$$\cos \alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

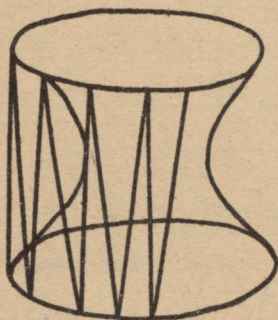
Mert itt  $u_1^1 = t, u_1^2 = 0; u_2^1 = 0, u_2^2 = t$ .

Ez azonban azt jelenti, hogy a paramétervonalak ott és csak ott merőlegesek, ahol  $g_{12} = 0$ .

### 35. Felszínszámítás

Polytonosan differenciálható görbének mindig van ívhossza. Ez beírható törtvonal hosszának határértéke, ha a törtvonal oldalainak számát úgy növeljük minden határon túl, hogy a leghosszabb oldal is zérushoz tartson.

Ha ennek megfelelően egy felületbe soklapot írunk be, az oldallapok számát úgy növeljük minden határon túl, hogy azoknak a területe is zérus felé tartson, akkor az így kapott soklapek felszíneinek határértéke az eredeti felület felszínétől különböző lehet, mint azt az alábbi ábráról azonnal belátjuk.



De még ha az oldallapok átmérője is zéróhoz tart, akkor sem biztos, hogy van egyértelmű, az eddigi ismereteinkkel megegyező értékű felszín.

Ezt az állítást először H.A. Schwarcz igazolta, mégpedig egy forgás henger palástjára. Az  $r$  sugarú és  $m$  magasságú forgáshenger palástjának felszíne  $2\pi r m$ .

A henger alapkörét  $2n$  egyenlő ivre osztjuk. Az osztópontokon keresztülménő alkotók a henger párhuzamos köreit szintén  $2n$  egyenlő részre osztják. Az alaplappal és a fedőlappal párhuzamos  $\nu = 1$  sikkal a henger palástját  $\nu$  darab egyenkint  $\frac{m}{\nu}$  magasságú palástra bontjuk. A teljes palást alapkörén felvett  $n$  páros és  $n$  páratlan osztóponton átmenő alkotó a henger többi körét is  $n$  páros és  $n$  páratlan osztópontban metszik.



A  $\nu$  számú kisebb hengerpalást alsó körén a páratlan, felső körén pedig a páros osztópontok páronkénti összekötésével 2 egybevágó szabályos  $n$ -oldalú sokszöget kapunk. Az egyik sokszög egy AB oldalához hozzávesszük a másik sokszögnek azt a  $C'$  szögpontját, amelyen átmenő alkotó az AB oldalhoz tartozó körívet egy C pontban felezi. (Ha tehát A és P páros osztópont, akkor C páratlan és megfordítva.) Az így meghatározott  $ABC'$  háromszög egyenlőszáru alapja az  $r$  sugarú körbe írható  $n$  oldalú szabályos sokszög  $\overline{AP} = 2r \sin \frac{\pi}{n}$  oldala, magassága pedig  $\overline{CD}$ , ha D jelöli az AP oldal felezőpontját.

Ha az  $\overline{AP}$  oldalú szabályos sokszögnek középpontja O, akkor  $\overline{C'D}$  a  $\overline{C'C}$  és a  $\overline{CD}$  befogóju derékszögű háromszög átfogója és

$$\overline{C'D}^2 = \overline{C'C}^2 + \overline{CD}^2 = \frac{m^2}{\nu^2} + 4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n},$$

mert  $\nu \overline{C'D} = m$ ,  $\overline{CD} = \overline{OC} - \overline{OD} = r - r \cos \frac{\pi}{n} = r(1 - \cos \frac{\pi}{n})$

$$= 2r \sin^2 \frac{\pi}{2n}.$$

Az  $APC'$  egyenlőszáru háromszög területe tehát

$$t = r \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{m^2}{\nu^2} + 4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}}.$$

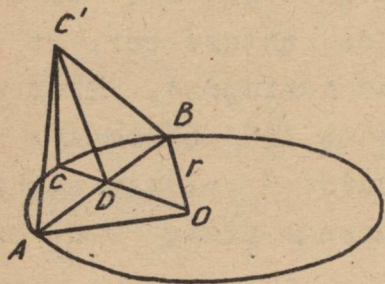
Ha az  $\frac{m}{\nu}$  magasságú hengerpalást alsó és felső körébe írt  $n$ -oldalú szabályos sokszög egy-egy oldalának végpontjait a másik sokszög egy-egy megfelelő szögpontjával összekötjük, akkor ebbe a hengerpalástba olyan soklapot írtunk, amely az  $ABC'$  egyenlőszáru háromszöggel egybevágó  $2n$  oldallapból áll. Ha ezt az eljárást a többi  $\frac{m}{\nu}$  magasságú hengerpalástra ismételjük, akkor az  $m$  magasságú hengerpalástba olyan soklapot írtunk, amelynek felszíne

$$F_n = 2n \nu t = 2\pi r \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \sqrt{m^2 + r^2 \pi^4 \left\{ \frac{\nu}{4n^2} \right\}^2 \left( \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right)^4}$$

Ha az  $n$  és a  $\nu$  egész számot úgy növeljük minden határon túl, hogy  $\frac{\nu}{n^2}$  hányados véges  $H$  határértékhez tartson, akkor a



hengerpalástba irt soklap  $F_n$  felszínének van határértéke és ez  $2\pi r \sqrt{m^2 + H^2}$ . Csak akkor kapjuk a henger  $2\pi r m$  palástját, ha  $H = 0$ .



Ha a  $\frac{\nu}{n^2}$  végtelen sorozat divergens, akkor  $F_n$  is divergens. Ennek az az oka, hogy ha  $\nu$  lényegesen gyorsabban tart végtelenhez, mint  $n^2$ , úgy a beirt soklap lapjai kis szöget zárnak be a felületnormálisával, azaz nagyon meredeken állnak a felületre, és olyan alakzatot

képeznek, mint a reszelő fogai kicsiny de hegyes fogaknál, aminek lényegesen nagyobb a felszíne, mint a reszelő alapját képező téglatestnek.

Tehát a görbe ivhossz kiszámításának ilyen átvitele sem megfelelő. A görbe ivhosszat azonban másképpen is megkaphatjuk, amely eljárást nehézség nélkül lehet általánosítani. Vegyünk egy a görbét érintő sokszöget. Legyen a görbe  $y = g(x)$  és a sokszög oldalai érintsék a görbét az illető oldalnak megfelelő  $\Delta x_i$  intervallumok  $\xi_i$  pontjaiban ( $i = 1, 2, \dots, n$ ; ahol  $n$  az oldalak száma.) Ezen sokszög hossza

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + g'^2(\xi_i)} \Delta x_i \text{ aminek a határértéke } s = \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(x)} dx.$$

A felszínt az érintő soklapok felszínének határértékeként definiáljuk, ha az oldallapok maximális átmérője tart zéróhoz. Így ha a  $z = g(x, y)$  függvény az  $xy$ -sik egy  $T$  tartományában folytonosan differenciálható  $x$  és  $y$  szerint, akkor a  $z = g(x, y)$  felület azon darabjának felszíne, amelynek derékszögű vetülete a  $T$  tartomány,

$$(36) \quad \iint_{(T)} \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy.$$

Ha a felület felvett darabját egy  $n$  lapból álló  $S_n$  soklap oldallapjai érintik és ha  $f_1, f_2, \dots, f_n$  jelöli  $S_n$  lapjainak területét.  $t_1, t_2, \dots, t_n$  pedig a lapok derékszögű vetületei-



nek területét az  $x, y$  síkon, akkor  $t_k = f_k \cos \varphi_k$ , ahol  $\varphi_k$  a  $k$ -adik lapnak az  $xy$ -síkkal alkotott szöge,  $\cos \varphi_k$  a  $k$ -adik lap normálisának harmadik iránycosinusa. Ha a  $k$ -adik lap a  $z = g(x, y)$  felületet a  $P_k = [x_k, y_k, z_k = g(x_k, y_k)]$  pontban érinti, akkor az érintő sík harmadik iránycosinusa

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + g_x(x_k, y_k)^2 + g_y(x_k, y_k)^2}}$$

Az  $S_n$  soklap felszíne tehát

$$\sum_{k=1}^n f_k = \sum_{k=1}^n t_k : \cos \varphi_k = \sum_{k=1}^n t_k \sqrt{1 + g_x(x_k, y_k)^2 + g_y(x_k, y_k)^2}.$$

Ha az  $S_n$  soklap lapjainak száma úgy növekszik minden határon túl, hogy az egyes lapok átmérője zérus felé tart, akkor ennek az összegnek van határértéke és ez

$$\iint_{(T)} \sqrt{1 + g_x(x, y)^2 + g_y(x, y)^2} dx dy.$$

Ha a felület egyenlete  $F(x, y, z) = 0$ , akkor a felületnormálisának harmadik iránycosinusa a  $P(x, y, z)$  pontban

$$\frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

Ha a  $T$  tartományban az  $F_z(x, y, z)$  parciális differenciálhányados nem tűnik el, akkor a felszín képlete

$$\iint_{(T)} \sqrt{\frac{F_x(x, y, z)^2 + F_y(x, y, z)^2 + F_z(x, y, z)^2}{F_z(x, y, z)^2}} dx dy$$

Egyszeres integrállal lehet kiszámítani a  $z = g(x)$  görbének a  $z$ -tengely körüli forgásával leírt forgásfelület felszínét, ha  $g(x)$   $x$ -nek folytonosan differenciálható függvénye.

Ha a görbe  $A$  ill.  $P$  pontjának a ill.  $b$  az  $x$  koordinátája és ha a görbe  $AP$  íve nem metszi a  $z$  tengelyt, akkor állítjuk, hogy az  $AP$  ívnek a  $z$ -tengely körüli forgásával leírt felület felszíne

$$2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + g'(x)^2} dx.$$



Az olyan forgáskúp palástjának felszíne, amelynek alapköre  $r$ -sugaru és alkotójának  $l$  a hossza:  $\pi r l$ , mert ha a palástot egy alkotója mentén felvágjuk és a síkba terítjük,  $l$ -sugaru olyan körcikket kapunk, amelynek köríve  $2\pi r$  hosszú. Egy olyan forgásonkakúp palástjának felszíne, amelyen a két alapkör sugara  $r_1$  és  $r_2$  ( $< r_1$ ),  $s$  az alkotó hossza  $s$ ,

$$T = \pi s (r_1 + r_2) = 2\pi s \rho \quad (2\rho = r_1 + r_2) .$$

Ha ugyanis  $l_1$  ill.  $l_2$  a teljes ill. a kiegészítő kúp alkotójának hossza, akkor

$$T = \pi l_1 r_1 - \pi l_2 r_2,$$

$$s = l_1 - l_2 \text{ és } l_1 : l_2 = r_1 : r_2,$$

vagyis

$$l_1 r_2 = l_2 r_1$$

Tehát

$$s(r_1 + r_2) = (l_1 - l_2)(r_1 + r_2) = l_1 r_1 - l_2 r_2 + l_1 r_2 - l_2 r_1 = l_1 r_1 - l_2 r_2 .$$

Ha tehát egy  $s$  hosszúságú szakaszt egy vele egy síkban fekvő olyan tengely körül forgatunk, amely a szakaszt nem metszi, akkor a szakasz forgása közben leírt felület felszíne  $s$ -nek és a szakasz felezőpontja által leírt kör kerületének szorzatával egyenlő.

Ha az  $AP$  íven  $P_0 \equiv A, P_1, \dots, P_n, P_n \equiv P$  egymástól különböző egymásra következő pont, akkor a  $P_0 P_1 \dots P_n$  törtvonal a  $z$  tengely körüli forgása közben olyan forgásfelületet ír le, amelynek felszíne

$$2\pi \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1} P_k} \rho_k = 2\pi \sum_{k=1}^n s_k \rho_k ,$$

ahol  $\rho_k$  a  $P_{k-1} P_k$  szakasz felezőpontjának a  $z$ -tengelytől való távolsága, azaz az  $(x_{k-1}, x_k)$  szakasz felezőpontja, ahol  $x_k$  a  $P_k$  pont  $x$ -koordinátáját jelenti ( $k=1, 2, \dots, n$ ).

Ha az  $AB$  íven a  $P_k$  pontok számát az  $s_k$  szakaszok minden határon aluli kisebbitésével sűrítjük, akkor az előbbi összegnek határértéke

$$2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \, ds = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx .$$



Az első integrálban a változó a görbe ívhossza. Ebből a második integrál úgy következik, hogy  $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + g'(x)^2}$ .

Térjünk át az

$$x = \varphi(u^1, u^2)$$

$$y = \psi(u^1, u^2)$$

$$z = f(\varphi(u^1, u^2), \psi(u^1, u^2)) = \chi(u^1, u^2)$$

transzformációs képletekkel az  $u^1, u^2$  paraméteres előállításra, ahol legyen

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0$$

a tekintett tartományban.

Igy az inverz függvények differenciálási szabálya szerint

$$u_x^1 = \frac{\psi u^2}{D}$$

$$u_x^2 = -\frac{\psi u^1}{D}$$

$$u_y^1 = -\frac{\varphi u^2}{D}$$

$$u_y^2 = \frac{\varphi u^1}{D}$$

és

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial y}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{(\chi_{u^1}^1 \psi_{u^2}^2 - \chi_{u^2}^2 \psi_{u^1}^1)^2}{(\varphi_{u^1}^1 \psi_{u^2}^2 - \varphi_{u^2}^2 \psi_{u^1}^1)^2} + \frac{(\chi_{u^2}^2 \varphi_{u^1}^1 - \chi_{u^1}^1 \varphi_{u^2}^2)^2}{(\varphi_{u^1}^1 \psi_{u^2}^2 - \varphi_{u^2}^2 \psi_{u^1}^1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{D} \sqrt{(\varphi_{u^1}^1 \psi_{u^2}^2 - \varphi_{u^2}^2 \psi_{u^1}^1)^2 + (\chi_{u^1}^1 \psi_{u^2}^2 - \chi_{u^2}^2 \psi_{u^1}^1)^2 + (\chi_{u^1}^1 \varphi_{u^2}^2 - \chi_{u^2}^2 \varphi_{u^1}^1)^2}$$

Most a felszínnek az (36) kifejezésére az

$$x = \varphi(u^1, u^2)$$

$$y = \psi(u^1, u^2)$$

integrál transzformációt alkalmazva



$$\iint_T \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy =$$

$$= \iint_G \frac{1}{D} \sqrt{(\varphi_{u^1} \psi_{u^2} - \varphi_{u^2} \psi_{u^1})^2 + (\chi_{u^1} \psi_{u^2} - \chi_{u^2} \psi_{u^1})^2 +$$

$$+ (\chi_{u^1} \varphi_{u^2} - \chi_{u^2} \varphi_{u^1})^2} \, du^1 du^2$$

De mivel

$$g_{11} = \varphi_{u^1}^2 + \psi_{u^1}^2 + \chi_{u^1}^2$$

$$g_{12} = \varphi_{u^1} \varphi_{u^2} + \psi_{u^1} \psi_{u^2} + \chi_{u^1} \chi_{u^2}$$

$$g_{22} = \varphi_{u^2}^2 + \psi_{u^2}^2 + \chi_{u^2}^2$$

így

$$(\varphi_{u^1} \psi_{u^2} - \varphi_{u^2} \psi_{u^1})^2 + (\chi_{u^1} \psi_{u^2} - \chi_{u^2} \psi_{u^1})^2 +$$

$$+ (\chi_{u^1} \varphi_{u^2} - \chi_{u^2} \varphi_{u^1})^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = |g_{\alpha\beta}|$$

amit a jobb és bal oldalon álló műveletek elvégzése útján igazolhatunk.

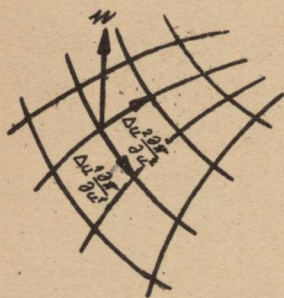
Így

$$(37) \quad F = \iint_G \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} \, du^1 du^2$$

Még egy megjegyzést teszünk.

$$\sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2) \Delta u^1 \Delta u^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}\right)^2 \Delta u^1 \Delta u^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \Delta u^1 \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \Delta u^2\right)^2}.$$



A gyökjel alatti kifejezés azonban a  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^\alpha} \Delta u^\alpha$  ( $\alpha$ -ra nem szummázni!) vektorok által meghatározott infinitésimális parallelogramma területe. Ilyen vonatkozásban a (37) integrál azt jelenti, hogy ezen infinitésimális parallelogrammok területének



Összegei tetszőlegesen megközelítik a felület felszínét, azaz a parallelogrammák területe csak igen kicsit tér el a megfelelő felület darab felszínétől.

### 36. A második alapmennyiségek

Míg az első alapmennyiségek a matrikát határozták meg a felületen, addig a második alapmennyiségek a felületnek az érintősíkjától való távolságára lesznek bizonyos mértékig jellemzőek.

Legyen az

$$I. \quad \pi = \pi(u^1, u^2)$$

felület a tekintett pont környezetében legalább háromszor folytonosan differenciálható.

A felület érintősíkja a  $P(u_0^1, u_0^2)$  pontban

$$(\pi - \pi_0) u_0 = 0$$

Fejtsük az I. felület Taylor sorba a másodfokunál magasabbfokú tagok elhagyásával

$$II. \quad \pi(u^1, u^2) = \pi_0 + \left( \frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \right)_0 (u^\alpha - u_0^\alpha) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \pi}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right) (u^\alpha - u_0^\alpha)(u^\beta - u_0^\beta)$$

Az I. felület a  $P$  pontban másodrendben megközelítő II. felület pontjainak a  $P$  pontbeli érintősíktól való távolságuk

$$d = (\pi - \pi_0) u_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \pi}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right)_0 (u^\alpha - u_0^\alpha)(u^\beta - u_0^\beta) u_0$$

Jelöljük

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \pi(u^1, u^2)}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \pi(u^1, u^2) = b_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$$

Ezt a négy mennyiséget, amelyek közül  $b_{12} = b_{21}$  a felület második alapmennyiségeinek nevezzük. Szokásos ezekre még a Gauss-tól származó  $b_{11} = L$ ,  $b_{12} = b_{21} = M$ , és  $b_{22} = N$  jelölés is.

Tekintsük most a  $P$  pontot a koordinátarendszerünk kezdő pontjának és a  $P$  pontból kiinduló  $\frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha}$  és  $u_0$  vektorokat a koordináta rendszerünk egységvektorainak, és jelöljük  $(u^\alpha - u_0^\alpha)$ -t  $y_\alpha$ -val, a  $d$  távolságot  $y_3$ -al, így a II. felület egyenlete a tekintett koordinátarendszerben



(39)

$$y_3 = \frac{1}{2} b_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta$$

Ez egy az I. felületet a  $P_0$  pontban másodrendben megközelítő paraboloid (oszkulláló paraboloid). Így a  $b_{\alpha\beta}$  mennyiségek ha nem is az I. felület pontjainak, de az azt megközelítő II. felület pontjainak távolságát határozzák meg a  $P$  pontbeli érintősiktől.

### 37. Meusnier tétele

Megmutatjuk, hogy egy adott  $\pi = \pi(u^1, u^2)$  felületen lévő  $\pi = \pi(u^1(t), u^2(t)) = \bar{\pi}(t)$  felületi görbe görbületét egy  $P(u^1, u^2)$  pontban már a görbe érintőjét meghatározó  $\dot{u}^1, \dot{u}^2$  mennyiségekből és a görbe  $f$  főnormálisának az  $\pi$  felületi normálissal bezárt szögéből is meg lehet határozni, amennyiben  $\pi f \neq 0$ , és ez a görbület éppen akkora, mint az  $\pi$  és  $f$  által meghatározott simulósík által kimetszett síkgörbe görbülete. Azokat az eseteket, amikor  $\pi f = 0$ , azaz a görbe simulósíkja összeesik a felület érintősíkjával kizárjuk.

Vezessük be a görbén az ivhosszat paraméternek az  $s = s(t)$ , ill. annak inverzét jelentő  $t = t(s)$  függvények segítségével. Így

$$\frac{ds}{dt} = C f$$

Ezt azonban más úton is kifejezhetjük, annak felhasználásával, hogy  $\pi$  felületi görbe

$$v = \frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \frac{d^2 u^\alpha}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2}$$

így

$$\frac{dv}{ds} = C f v = \frac{\partial^2 \pi}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \pi \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \dot{u}^\beta \left(\frac{dt}{ds}\right)^2$$

De tudjuk, hogy az inverz függvények differenciálási szabálya alapján

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} \text{ viszont a (33) szerint } g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 1. \text{ Így}$$



(40)

$$G \ell n = \frac{b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\gamma\delta} \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta}$$

A (40) kifejezésnek a jobb oldala azonban csak az érintő irányától függ egy meghatározott pontban. A baloldalon  $n$  egy meghatározott pontban állandó, így a görbe görbülete csak  $\ell$ -től függ. (Ha  $n \ell = 0$ , úgy (40)  $G$  értékét adott  $\ddot{u}$  és  $\ell$  mellett sem határozza meg.) Vagy másképpen kifejezve: egy ponton átmenő összes adott érintőjű és főnormálisú, azaz adott simulósíkkal rendelkező felületi görbe görbülete ugyanaz, még pedig annyi, mint az illető simulósík által kimetszett síkgörbe görbülete.

Es azt jelenti, hogy a felület egy adott pontjában megadott irányú és főnormálisú felületi görbék közül elegendő az egyetlen ilyen síkgörbét vizsgálni, mert a többi görbének is ugyanaz a görbülete.

De (40)-ből még további összefüggések olvashatók le.  $n \ell$  nem más - mivel mindkét tényező egységvektor - mint az általuk bezárt szög koszinusza. Tehát újra csak változatlan irány mellett az a sík fogja a minimális görbületű görbét kimetszeni, amelyik az  $\ell$ -n kívül még az  $n$ -en is átmegy. Ezt a síkot normálsíknak, a síkmetszetet normálmetszetnek, míg a többi az illető ponton átmenő síkot ferde síknak, a metszetet ferde metszetnek nevezzük. Az adott irány mellett minimális görbület a normálmetszet görbülete, amelyet  $\bar{K}$ -al jelölünk. Így mivel ez esetben  $n \ell = \pm 1$

$$I. \quad \bar{K} = \frac{1}{\pm 1} \frac{b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\gamma\delta} \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta}$$

A továbbiakban fontos szerepet játszó  $\bar{K}$ -at azonban csak abszolút értékben egyenlő

$$(41) \quad K = \frac{b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\gamma\delta} \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta}$$

mennyiséget a  $P$ -ben az illető irányhoz tartozó normálgörbületnek nevezzük.

Igy

$$II. \quad \begin{aligned} G n \ell &= K \\ G \cos \alpha &= K \end{aligned}$$

ahol  $\alpha$  az  $n$  és  $\ell$  által bezárt szög.



Legyen a normálmetszet görbületi sugara  $\bar{R} = \frac{1}{K}$ , és  $R = \frac{1}{K}$ , így

$$(42) \quad R \cos \alpha = \rho$$

amit Meusnier tételének nevezünk.

Ez a  $P$  ponton átmenő adott irányu felületi görbék görbületeinek vizsgálatában újabb redukció lehetőségét jelenti. Mostmár nem kell a simulósíkok által kimetszett görbék görbületét külön-külön keresni, hanem elegendő a  $K = \frac{1}{R}$  normálgörbületét megállapítani, és ebből  $\alpha$  ismeretében  $\rho$  vagy  $C$  meghatározható.

Állítjuk, hogy a  $P$ -n áthaladó azonos érintőjű felületi görbéknél  $\varphi$  a  $P$ -beli érintősíknak mindig ugyanazon oldalára esik. Ehhez kimutatjuk, hogy  $\operatorname{sgn} \varphi$  egy adott irány mellett állandó.  $C$ , mint egy görbe görbülete mindig pozitív, így II. szerint  $\operatorname{sgn} \varphi = \operatorname{sgn} K$ , ami utóbbi azonban fix pont és irány mellett állandó. A görbületi középpont, mint tudjuk  $P$ -tól az  $\varphi$  irányában  $\rho (> 0)$  távolságra fekvő pont, így minden adott ponthoz és irányhoz tartozó felületi görbe görbületi középpontja az érintősík ugyanazon oldalán van.

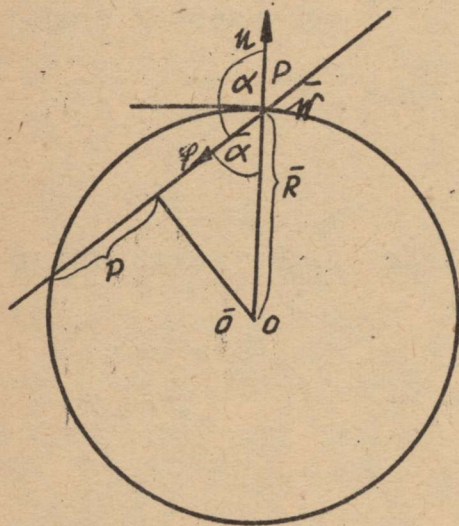
Igy a Meusnier tételének a következő geometriai értelmezést adhatjuk. Mérjük fel  $R$  értéket  $P$ -tól  $n$ -re irány és nagyság szerint. Az így kapott  $O$  körül szerkesszünk  $\bar{R} = |R|$  sugaru gömböt. Állítjuk, hogy ebből a görbe  $P$ -beli simuló síkja éppen a görbe görbületi körét metszi ki.

A normálmetszet  $\varphi_n$  főnormálisa irányában  $P$ -tól  $\bar{R}$  távolságra lévő pont legyen  $\bar{O}$ . Ha  $\varphi_n = n$ , úgy  $\bar{K} = K$ ;  $\bar{R} = R$ ;  $\bar{R}\varphi_n = Rn$ ;  $\bar{O} = O$ . Ha pedig  $\varphi_n = -n$ , úgy  $\bar{R} = -R$ , de  $\bar{R}\varphi_n = Rn$ ;

és ekkor is  $\bar{O} = O$ . Így minden görbületi középpont az érintősík azon oldalán van, mint  $O$ .

A gömbből a simulósík által kimetszett kör sugara  $R \cos \bar{\alpha}$ , ahol  $\bar{\alpha}$  az  $n$  és  $\varphi$  által bezárt kisebb szög. De  $\rho > 0$  és (42) miatt  $\rho = |\rho| = |R| |\cos \alpha| = \bar{R} \cos \bar{\alpha}$ .

Igy a kimetszett kör sugara a görbületi kör sugara és középpontja  $P$ -tól az  $\varphi$  irá-





nyában  $\rho$  távolságra van, tehát a görbületi kör középpontja. Azaz a fenti gömbből a simulósíkok a görbületi köröket metszik ki vagy másképpen megfogalmazva: az  $O$  merőleges vetülete az ugyanezen ponthoz és irányhoz tartozó valamely felületi görbe simuló síkjára a görbe  $P$ -hez tartozó görbületi középpontja.

### 38. Főnormálgörbűletek, a Gauss-féle és a középgörbűlet

Először a felületnek adott  $P$  pontján átmenő, ott adott  $\vec{u}$  érintővel és adott  $\vec{v}$  főnormálissal rendelkező felületi görbét vizsgáltunk, majd a Meusnier-tétel ismeretében egyedül a normálmetszet görbületének segítségével át tudtuk tekinteni a  $P$  ponton átmenő  $\vec{u}$  érintőjű felületi görbék görbületét ha még az  $\alpha$  szöget is mértük. Most megpróbálunk az  $\vec{u}$  megkötöttségtől is megszabadulni, s így a  $P$  ponton átmenő felületi görbék görbületei felett egységes áttekintést nyerni. Mindenesetre, ha különböző irányokat tekintünk, úgy  $K$  értéke változni fog. Vizsgáljuk most  $K$  értékeit a különböző irányokban.

$K$  egy adott  $P(u^1, u^2)$  pontban  $\dot{u}^1, \dot{u}^2$ -nek függvénye

$$K = \phi(\dot{u}^1, \dot{u}^2)$$

amely az  $\dot{u}^1, \dot{u}^2$ -nek egy racionális törtfüggvénye. A nevező a 33. pont szerint pozitív definit, így  $\phi$  az  $\dot{u}^1 = \dot{u}^2 = 0$  kivételével mindenhol folytonos. Tekintsük  $\phi$ -t egy az  $\Theta(\dot{u}^1 = 0, \dot{u}^2 = 0)$  pontot körülvevő zárt körgyűrűn, vagy akár csak egy az  $O$ -t körülvevő körön, ugyanezen zárt tartományban folytonos  $\phi$  ott felveszi a maximumát és minimumát. Ehhez szükséges, hogy

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{u}^\alpha} = \frac{2 b_{\alpha\sigma} \dot{u}^\sigma g_{\gamma\delta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\delta - 2 g_{\alpha\gamma} \dot{u}^\gamma b_{\varepsilon\delta} \dot{u}^\varepsilon \dot{u}^\delta}{(g_{\rho\tau} \dot{u}^\rho \dot{u}^\tau)^2}$$

$$\bullet \frac{2(b_{\alpha\sigma} \dot{u}^\sigma - g_{\alpha\gamma} \dot{u}^\gamma K)}{g_{\rho\tau} \dot{u}^\rho \dot{u}^\tau} = 0$$

azaz

$$(43) \quad (b_{\alpha\beta} - K g_{\alpha\beta}) \dot{u}^\alpha = 0$$

legyen.



Az előző megfontolások alapján azonban tudjuk, hogy  $\Phi$  a tekintett tartományban felveszi a maximumát és a minimumát, azaz van olyan  $\bar{u}_1^1, \bar{u}_1^2$ , és  $\bar{u}_2^1, \bar{u}_2^2$ , melyre (43) teljesül. (43) -at egyenletrendszernek fogva fel  $\bar{u}_1^1, \bar{u}_1^2$  -re, így mivel ennek a homogén egyenletrendszernek van a triviálisból különböző megoldása, a determinánsának zérónak kell lennie.

$$\begin{vmatrix} b_{11} - K g_{11} & b_{12} - K g_{12} \\ b_{21} - K g_{21} & b_{22} - K g_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Ez azonban másodfoku egyenlet  $K$  -ra nézve.

$$(b_{11} - K g_{11})(b_{22} - K g_{22}) - (b_{12} - K g_{12})^2 = (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) K^2 - (g_{11} b_{22} - 2 g_{12} b_{12} + g_{22} b_{22}) K + b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = 0.$$

Jelöljük ennek gyökeit  $K_1$  és  $K_2$  -vel. Mivel (43) -nak csak ezen két  $K$  esetében van a triviálisból különböző megoldása, azaz csak ezen két esetben lehetséges szélsőérték, így a két szélsőérték  $K_1$  és  $K_2$ . És ezek mint a valós értékű  $K$  szélsőértékei valósak kell hogy legyenek.  $K_1$  és  $K_2$  -t az illető ponthoz tartozó főnormálgörbűleteknek nevezzük.

Hogy  $K$  szélső értékeinek meghatározásánál az  $\bar{u}_1^1, \bar{u}_1^2$  értékpárokat csak egy kör, vagy körgyűrű mentén vizsgáltuk, nem jelent megszorítást, mert  $K$  szempontjából csak  $\bar{u}_1^1, \bar{u}_1^2$  aránya a lényeges, amely aránynak minden értéke már a tekintett kör mentén is fellép.

Egyenlőre tegyük fel, hogy  $K_1 \neq K_2$ .

$K_1$  és  $K_2$  irányát mostmár a  $K_1$  és  $K_2$  -nek a (43) -ba való beírásával előálló egyenletrendszerekből kaphatjuk.

$$(44) \quad (b_{\alpha\beta} - K_1 g_{\alpha\beta}) \bar{u}_1^\alpha = 0$$

$$\text{ill.} \quad (b_{\alpha\beta} - K_2 g_{\alpha\beta}) \bar{u}_2^\alpha = 0.$$

Mivel a másodfoku egyenlet gyökeinek szorzata a konstans tag és a másodfoku tag együtthatójának hányadosa, a két gyök összege pedig az elsőfoku és a másodfoku tag hányadosának negatív értéke, így



$$(45) \quad K_1 K_2 = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = K$$

$$(46) \quad K_1 + K_2 = \frac{g_{11} b_{11} - 2b_{12} g_{12} + g_{22} b_{22}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = \mathcal{H}$$

melyek a felület Gauss-féle illetve középgörbülete.

Ha  $K_1 = K_2$  úgy a maximum egyenlő a minimummal,  $K$  minden irányban ugyanannyi. Az ilyen pontokat gömbi pontoknak nevezzük, mert a gömb minden pontja ilyen.

Ekkor

$$K = \frac{b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\gamma\delta} \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta} = c$$

vagy

$$b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = c g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

$$(b_{\alpha\beta} - c g_{\alpha\beta}) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0$$

bármely  $\dot{u}^1, \dot{u}^2$ -re ( $\dot{u}^1, \dot{u}^2$  nem mindkettő zéró). Ez csak úgy lehet, ha

$$(47) \quad b_{\alpha\beta} = c g_{\alpha\beta}$$

Asaz gömbi pontoknál az első és a második alapmennyiségek arányosak.

Ez nyilván fordítva is igaz. Mert ha (47) fennáll, úgy

$$K = \frac{c g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\gamma\delta} \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta} = c$$

Az olyan gömbi pontokat, ahol  $c = 0$ , asaz  $K = K_1 = K_2 = 0$  síkpontoknak nevezzük, mert a sík minden pontja ilyen. Ezekre jellemző, hogy  $b_{\alpha\beta} = 0$ .

Még megmutatjuk, hogy amennyiben  $K_1 \neq K_2$ , úgy ezek iránya egymásra merőleges. Ha  $K_1 = K_2$  úgy ezek iránya bármely irány, így a merőleges is lehet.

(44)-et szorozva  $\dot{u}_2$ -val, ill.  $\dot{u}_1$ -val, ami nemcsak szorzást, hanem összeadást (szummázást) is jelent,

$$(b_{\alpha\beta} - K_1 g_{\alpha\beta}) \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta = 0$$

I.

$$(b_{\alpha\beta} - K_2 g_{\alpha\beta}) \dot{u}_2^\alpha \dot{u}_1^\beta = 0$$



a második sorban az  $\alpha$  és  $\beta$  indexeket felcserélve, ami csak jelölésbeli különbség, és a két sort kivonva egymásból

$$(K_2 - K_1)g_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta = 0,$$

Mivel azonban  $K_2 - K_1 \neq 0$ , így kell, hogy  $g_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta = 0$  legyen, ami a 34. pont szerint azt jelenti, hogy a  $K_1$  irányát meghatározó  $\dot{u}_1^1, \dot{u}_1^2$ , és a  $K_2$  irányát meghatározó  $\dot{u}_2^1, \dot{u}_2^2$  egymásra merőleges.

### 39. Euler tétele

A 38. pont elején kitűzött célunk a felület egy pontján átmenő felületi görbék görbületei felett áttekintést nyerni. Ehhez a befejező lépést az Euler-tétel fogja szolgáltatni, amely egy igen egyszerű összefüggést állapít meg valamely irányhoz tartozó normálgörbület, valamint a főnormálgörbületek és a tekintett iránynak valamelyik főnormálgörbületi iránnyal bezárt szöge között. Ennek kimutatásához azonban először olyan paramétervonal rendszerre térünk át, melynek érintői az adott  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(u^1, u^2)$  felület tekintett  $P(u^1, u^2)$  pontjában a  $K_1, K_2$  főnormálgörbületek által meghatározott  $\dot{u}_1^1, \dot{u}_1^2$ , ill.  $\dot{u}_2^1, \dot{u}_2^2$  irányokba mutatnak (így merőlegesek egymásra) és egységvektorek.

A  $K_1$  és  $K_2$  irányába mutató vektorok

I. 
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\alpha} \dot{u}_\sigma^\alpha$$

az

II. 
$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

paraméter transzformációt úgy akarom meghatározni, hogy azután a paramétervonalak érintői az I. vektorok legyenek, azaz

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{u}^\sigma} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\sigma} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\alpha} \dot{u}_\sigma^\alpha$$

legyen. Ez akkor teljesül, ha a II. transzformáció olyan, hogy

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\sigma} = \dot{u}_\sigma^\alpha$$



Az ilyenek közt legegyszerűbb a lineáris

III.  $u^\alpha = \bar{u}^\alpha_{\sigma} \bar{u}^\sigma$

Ezen transzformáció után a paramétervonalak érintői  $K_1$  ill.  $K_2$  irányában mutatnak, azaz egymásra merőlegesek, azaz  $\bar{g}_{12} = 0$ .

De még

$$\bar{g}_{11} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{u}^1} \right)^2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^1} = g_{\alpha\beta} \bar{u}_1^\alpha \bar{u}_1^\beta$$

mely általában nem egyenlő eggyel. Hasonlóan  $\bar{g}_{22}$ .

Azonban ha még az

IV.  $\bar{u}^1 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \hat{u}^1 \quad \bar{u}^2 = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{22}}} \hat{u}^2$

transzformációt is elvégezzük, úgy

$$\begin{aligned} \hat{g}_{11} &= \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{u}^1} \right)^2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^1} \frac{d\bar{u}^1}{d\hat{u}^1} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^1} \frac{d\bar{u}^1}{d\hat{u}^1} = \\ &= g_{\alpha\beta} \bar{u}_1^\alpha \bar{u}_1^\beta \left( \frac{1}{\sqrt{\bar{g}_{11}}} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\hat{g}_{22} = 1$$

és mivel

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{u}^1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{u}^1} \frac{d\bar{u}^1}{d\hat{u}^1} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \hat{u}^2} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{u}^2} \frac{d\bar{u}^2}{d\hat{u}^2}$$

így a paramétervonalak érintői csak egy faktorral szorzódnak, azaz irányuk változatlan, így

$$\hat{g}_{12} = 0$$

Ezzel a kívánt transzformációt végrehajtottuk.



Mivel ezeket a transzformációkat mi a K /46/ alatti kifejezésére akarjuk alkalmazni, meg kell mutatni, hogy K ilyen és általában megengedett és iránytartó paraméter transzformációkkal szemben invariáns. Iránytartónak nevezünk egy transzformációt, ha a felületi normális irányítását változatlanul hagyja.

Ki fogjuk mutatni, hogy az első alapforma minden megengedett paraméter transzformációval a második alapforma pedig minden megengedett és iránytartó paraméter transzformációval szemben invariáns. Először az alapmenyiségek transzformációs törvényeit vizsgáljuk meg.

Legyen tehát adva  $\bar{u} = u / u^1, u^2 /$  és hajtsunk végre egy

$$u^\alpha = u^\alpha / \bar{u}^1, \bar{u}^2 /$$

V.

paraméter transzformációt. Így

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^\beta} = \frac{\partial u^r}{\partial u^r} \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^s}{\partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^\beta} = \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^\beta} g_{rs}$$

és ha V. iránytartó, azaz  $\mathcal{M} = \bar{\mathcal{M}}$ , úgy

$$\begin{aligned} \bar{b}_{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{u}^\alpha \partial \bar{u}^\beta} \bar{u} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha} \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{u}^\beta} \right) \bar{\mathcal{M}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha} \left( \frac{\partial u^r}{\partial u^s} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^\beta} \right) \mathcal{M} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 u^r}{\partial u^r \partial u^s} \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^\beta} + \frac{\partial u^r}{\partial u^s} \frac{\partial^2 u^s}{\partial \bar{u}^\alpha \partial \bar{u}^\beta} \right) \mathcal{M} = \\ &= \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^\beta} b_{rs} \end{aligned}$$

és

$$\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{\bar{u}}^\alpha \dot{\bar{u}}^\beta = \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{d\bar{u}^\alpha}{dt} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{d\bar{u}^\beta}{dt} g_{rs} = g_{rs} \dot{u}^r \dot{u}^s$$

és hasonlóan

$$\bar{b}_{\alpha\beta} \dot{\bar{u}}^\alpha \dot{\bar{u}}^\beta = \frac{\partial u^r}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{d\bar{u}^\alpha}{dt} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{d\bar{u}^\beta}{dt} b_{rs} = b_{rs} \dot{u}^r \dot{u}^s$$



Igy ha vigyázunk arra, hogy az I. paraméter transzformáció iránytartó legyen, úgy az első és a második alapforma, így az azok hányadosából álló  $K$  is paraméter invariáns.

$$K = \frac{b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\gamma\delta} \dot{u}^\gamma \dot{u}^\delta} = \frac{\hat{b}_{\alpha\beta} \dot{\hat{u}}^\alpha \dot{\hat{u}}^\beta}{\hat{g}_{\gamma\delta} \dot{\hat{u}}^\gamma \dot{\hat{u}}^\delta}$$

Figyelembe véve, hogy  $\hat{g}_{12} = 0$ ,  $\hat{g}_{11} = \hat{g}_{22} = 1$ ,  $K$ -t a következő, számunkra hasznos alakra hozhatjuk

$$K = \frac{\hat{b}_{11} \dot{\hat{u}}^1{}^2 + 2 \hat{b}_{12} \dot{\hat{u}}^1 \dot{\hat{u}}^2 + \hat{b}_{22} \dot{\hat{u}}^2{}^2}{\dot{\hat{u}}^1{}^2 + \dot{\hat{u}}^2{}^2}$$

Még megmutatjuk, hogy ezen paraméter vonal rendszerben a tekintett  $P$  pontban  $\hat{b}_{12} = 0$ . A III. és IV. transzformáció végrehajtásával a  $K_1$  és  $K_2$  irány-t meghatározó  $\dot{u}_1^1$ ,  $\dot{u}_1^2$  és  $\dot{u}_2^1$ ,  $\dot{u}_2^2$  mennyiségek a  $\lambda_1$ ,  $0$  ill.  $0$ ,  $\lambda_2$  mennyiségekbe mennek át, amik ugyanazt az irányt határozzák meg, mint az  $1, 0$  ill.  $0, 1$  mennyiségek. Az előző pont utolsó bekezdése szerint azonban  $g_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta = 0$  és 38. , I. miatt  $b_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta = 0$ .  $b_{\alpha\beta}$  transzformációs törvénye alapján pedig

$$\hat{b}_{12} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}_{11}}} \frac{1}{\sqrt{\hat{g}_{22}}} \bar{b}_{12} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}_{11}}} \frac{1}{\sqrt{\hat{g}_{22}}} b_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta = 0$$

így

$$\text{VI.} \quad K = \frac{\hat{b}_{11} \dot{\hat{u}}^1{}^2 + \hat{b}_{22} \dot{\hat{u}}^2{}^2}{\dot{\hat{u}}^1{}^2 + \dot{\hat{u}}^2{}^2}$$

Ha most  $\dot{\hat{u}}^1 = 1$ ,  $\dot{\hat{u}}^2 = 0$  úgy  $K = K_1$  és VI szerint ekkor  $\hat{b}_{11} = K_1$ , ha pedig  $\dot{\hat{u}}^1 = 0$ ,  $\dot{\hat{u}}^2 = 1$  úgy  $K = K_2$  és VI szerint  $\hat{b}_{22} = K_2$ .

Igy

$$K = \frac{K_1 \dot{\hat{u}}^1{}^2 + K_2 \dot{\hat{u}}^2{}^2}{\dot{\hat{u}}^1{}^2 + \dot{\hat{u}}^2{}^2}$$

Jelöljük  $\hat{v}^a$ -val a  $K_1$  irányát meghatározó  $\dot{\hat{u}}_1^1 = 1$ ,  $\dot{\hat{u}}_1^2 = 0$  és



egy tetszőleges  $\hat{u}^1, \hat{u}^2$  irány által bezárt szöget, így

$$\cos \vartheta = \frac{\hat{g}_{\alpha\beta} \hat{u}^\alpha \hat{u}_1^\beta}{\sqrt{\hat{g}_{\gamma\delta} \hat{u}^\gamma \hat{u}^\delta} \sqrt{\hat{g}_{\mu\nu} \hat{u}_1^\mu \hat{u}_1^\nu}} = \frac{\hat{u}^1}{\sqrt{\hat{u}^1{}^2 + \hat{u}^2{}^2}}$$

azaz

$$\frac{\hat{u}^1{}^2}{\hat{u}^1{}^2 + \hat{u}^2{}^2} = \cos^2 \vartheta$$

és

$$\frac{\hat{u}^2{}^2}{\hat{u}^1{}^2 + \hat{u}^2{}^2} = \frac{\hat{u}^1{}^2 + \hat{u}^2{}^2}{\hat{u}^1{}^2 + \hat{u}^2{}^2} - \frac{\hat{u}^1{}^2}{\hat{u}^1{}^2 + \hat{u}^2{}^2} = 1 - \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta$$

Ezek után

$$/48/ \quad K = K_1 \cos^2 \vartheta + K_2 \sin^2 \vartheta$$

amit Euler tételének nevezünk.

Igy ha egy felület egy P pontjában ismerjük csak a felületi ponttól függő  $K_1$  és  $K_2$  főnormálgörbületeket, így bármely  $\rho$ -n átmenő felületi görbe P-beli görbületét könnyen meghatározhatjuk az /48/-ban szereplő  $\vartheta$  és a /42/-ben szereplő  $\alpha$  segítségével.

#### 40. Dupin-féle indikatrix.

Tekintsük az  $\pi = \pi / u^1, u^2$  felületet egy  $P/u^1, u^2$  pontjában másodrendben megközelítő /39/ oszkulláló paraboloidot és vegyük ennek az érintősíkkal párhuzamos, attól  $\pm \frac{1}{2}$  távolságban lévő síkokkal alkotott valós metszeteit.

$$I. \quad b_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta = \pm 1$$

Ezt a görbét Dupin-féle indikátrixnak nevezzük. Állítjuk, hogy ez kupszelet.

Végezzük el a 39./ III. és IV. transzformációkat, /ve-



gyük figyelembe, hogy a második alapforma paraméterinvariáns/,  
 így

$$\hat{b}_{\alpha\beta} \hat{y}_\alpha \hat{y}_\beta = \pm 1$$

Vegyük még figyelembe, hogy  $\hat{b}_{11} = K_1$ ,  $\hat{b}_{22} = K_2$ ,  $\hat{b}_{12} = 0$ , így

$$\text{II.} \quad K_1 \hat{y}_1^2 + K_2 \hat{y}_2^2 = \pm 1$$

ami hiperbola, egy párhuzamos egyenespár, ill. ellipszis,  
 aszerint, amint

$$\text{III.} \quad K = K_1 K_2 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$$

Ha  $K < 0$ , úgy  $+1$ -re és  $-1$ -re is valós görbét kapunk, még-  
 pedig két olyan hiperbolát, amelynek aszimptotái összeesnek, á-  
 gaik pedig egyszer az aszimptoták alkotta egyik szögtérben,  
 egyszer pedig a másik szögtérben helyezkednek el. Azaz ez eset-  
 ben az érintősiktól  $+\frac{1}{2}$  és  $-\frac{1}{2}$  távolságra is valós metszetet  
 kapunk. Ha  $K \geq 0$  úgy csak az egyik előjel esetében kapunk va-  
 lós metszetet.

Aszerint, amint  $K \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$  az II, egyenlet baloldalán álló  
 kifejezés indefinit, semidefinit, illetve definit. Így a máso-  
 dik alapforma paraméter invarianciája miatt az I. egyenlet bal-  
 oldala is indefinit, semidefinit, ill. definit, azaz

$$\text{IV.} \quad b_{11} b_{22} - b_{12}^2 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0.$$

aszerint, amint  $K \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$ .

A felület azon pontjait, ahol  $K \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$ , azaz  $b_{11} b_{22} - b_{12}^2 \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$ , azaz a Dupin-féle indikátrix hiperbola, egyenespár, ill.  
 ellipszis, hipertolikus, parabolikus, ill. elliptikus pontok-  
 nak nevezzük.

Állítjuk, hogy ha P-ből az érintősikban minden irányban  
 felmérjük az illető irányhoz tartozó  $\sqrt{R} = \sqrt{\frac{1}{K}}$  távolságokat,  
 a Dupin-féle indikátrixot kapjuk. Mutassanak a koordináta ten-  
 gelyek  $K_1$  és  $K_2$  irányba és jelentse  $\vartheta$  az illető irány és a  
 $K_1$  iránya által bezárt szöget, így az  $\frac{1}{\sqrt{K}}$  távolságban lévő pon-  
 tok egyenlete



$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \vartheta \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \vartheta$$

Bebizonyítjuk, hogy ez kielégíti a Dupin-féle indikátrix egyenletét. Írjuk be ezeket a Dupin-féle indikátrix II. egyenletébe, így

$$K_1 \frac{1}{K} \cos^2 \vartheta + K_2 \frac{1}{K} \sin^2 \vartheta = \frac{1}{K} / K_1 \cos^2 \vartheta + K_2 \sin^2 \vartheta / =$$

$$= \pm 1$$

De az Euler tétel szerint  $K_1 \cos^2 + K_2 \sin^2 = K$ , és

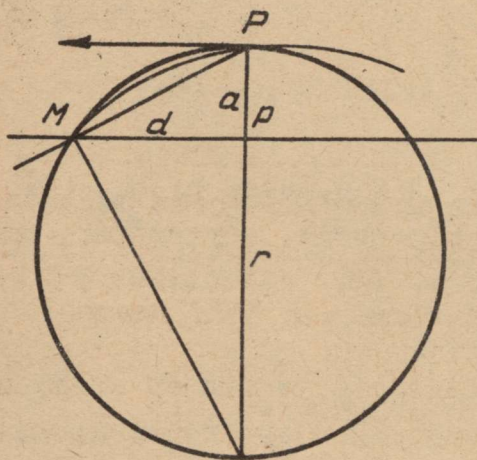
$$\frac{K}{K} = \pm 1$$

amivel állításunkat beigazoltuk.

Bár az  $K = K / u^1, u^2$  felületnek az érintősiktól  $\pm \frac{1}{2}$  távolságban való síkmetszete nem a Dupin-féle indikátrixot adja, mégis a metszet annál inkább hasonló a Dupin-féle indikátrixhoz, az érintősikhoz mennél közelebb metsszük a felületet vele párhuzamos sikkal.

Ki fogjuk mutatni, hogy ha az érintősiktól  $d$  távolságban lévő metszetet  $\frac{1}{\sqrt{2d}}$  arányban megnagyítunk, és  $d$  zéróhoz tart,

ugy a felnagyított metszetek a Dupin-féle indikátrixhoz tartanak.



Vegyünk a  $P$  ponton át, valamely irányt és ezen irányban a normál-metszetet. A metsző sík és a normál-metszet közös pontját nevezzük  $M$ -nek. Az adott irány, mint érintő,  $P$  mint érintési pont,  $M$  mint kerületi pont egy  $r$  sugaru kört határoz meg. Legyen  $P$  merőleges vetülete a metsző síkra  $P'$  és  $P'$  és  $M$  távolsága

$t$ . Így  $t$  egy derékszögű háromszög egy magassága és



$$t^2 = / 2r - d / d = 2rd - d^2$$

$$t = \sqrt{2rd - d^2}$$

a távolság  $\frac{t}{\sqrt{2d}} = \sqrt{r - \frac{d}{2}}$ .

Ha most  $d \rightarrow 0$ ,  $M \rightarrow P$ , úgy a megrajzolt kör az illető irány főnormálmetszetének görbületi köréhez tart, azaz  $r \rightarrow R$ .

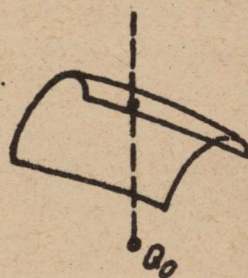
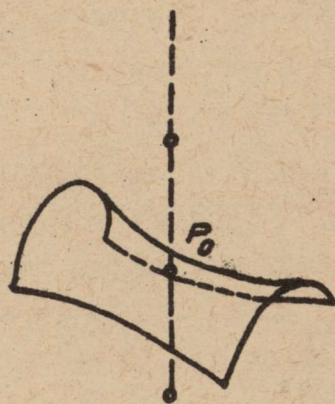
$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{2d}} = \lim_{d \rightarrow 0} \sqrt{r - \frac{d}{2}} = \sqrt{R} = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

amivel állításunkat beigazoltuk.

Hiperbolikus pontnál az érintősíknak mindkét oldalán vannak felületi pontok, mert ha nem lennének, úgy valamelyik oldalon lévő valós metszetek üresek lennének és ezek felnagyítása határhelyzetben nem adhatná a Dupin-féle indikátrixot. Így hiperbolikus pontban az érintősík a felületet érinti és metszi / hiperbolikus paraboloid pontjai /.

Hasonló okokból elliptikus és parabolikus pontokban az illető pont megfelelő kis környezetében a felület pontjai a tekintett pontbeli érintősíknak egy oldalán helyezkednek el. T. 1. különben az érintősíkhöz közeledő síknak lenne a felülettel valós metszete és ennek a felnagyítottja az előző tétel miatt a Dupin indikátrixhoz tartana, ez viszont  $K = K_1 K_2 \geq 0$  esetben a  $\pm 1$ -nek csak egyik előjele mellett ad valós görbét.

Vizsgáljuk még meg, hogy hol helyezkednek el a görbületi





középpontok:  $K > 0$  esetben  $K_1$  és  $K_2$ , így  $R_1$  és  $R_2$  is egyenlő előjelűek, így ezek a felületi normálisnak ugyanarra a félegyenésre esnek. A normálmetszetek görbületeinek folytonossága miatt elliptikus pontban a normálmetszetek görbületi középpontjai egy szakasz pontjai, amelynek végpontja a két főnormálmetszet görbületi középpontja.

Hiperbolikus  $P_0$  pontban a két főgörbület ellenkező előjelű. Ebből következik, hogy  $P_0$  két főnormálmetszetének  $P_0$ -hoz tartozó görbületi középpontját a felület normálisán  $P_0$  elválasztja. E két görbületi középpontot összekötő szakaszon kívül, de a felület normálisán van a  $P_0$  pont bármely más normálmetszetének görbületi középpontja.

A felület parabolikus pontjaiban a két főgörbület közül az egyik eltűnik, a másik általában zérustól különbözik. A felület egy  $P_0$  parabolikus pontjának két főnormálmetszete közül az egyiknek görbületi középpontja a felületi  $P_0$  pontja normálisának végtelen távoli pontja, a másik görbületi középpontja  $Q_0$  a normálisnak általában végesben fekvő pontja. Azalatt, amíg egy normálsík  $P_0$  zérustól különböző görbületű főnormálmetszetének síkjából kiindulva a másik főnormálmetszet síkjába fordul, a normálmetszet görbületi középpontja a felület normálisán  $Q_0$ -ból kiindulva a  $\overrightarrow{P_0 Q_0}$  vektor irányában végtelenbe távozik. Ha pedig a normálsík további forgással visszajut abba a főnormálsíkba, amelyből kiindult, akkor a normálmetszet görbületi középpontja visszajut  $Q_0$ -ba.



41. Konjugált irányok.

Tudjuk, hogy derékszögű koordináta rendszerben az

$$I. \quad a_{jk}x_jx_k = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3; \quad x_3 \equiv 1; \quad a_{jk} = a_{kj})$$

egy kúpszeletet jelent. Ezen kúpszeletre vonatkozólag a  $P_1(y_1, y_2)$  és a  $P_2(z_1, z_2)$  pontok konjugáltak, ha a  $\overline{P_1P_2}$  egyenesnek a kúpszelettel alkotott valós vagy képzetes  $M, N$  metszéspontjai a  $P_1, P_2$ -t harmónikusan osztják, aminek szükséges és elegendő feltétele hogy

$$a_{jk}y_jz_k = 0 \quad (y_3 = z_3 = 1).$$

Az ellipsziszénél az  $r$  irányhoz azt az  $s$  irányt neveztük konjugáltként, amely az  $r$ -el párhuzamos érintők érintési pontjainak összekötő egyenesével párhuzamos. Azonban nem lehet minden kúpszelethez adott  $r$  iránnyal párhuzamos érintőt húzni. Ez esetben az  $r$ -hez azt az  $s$  irányt nevezzük konjugáltként, amellyel párhuzamos érintők érintési pontjainak összekötő egyenese  $r$ -el párhuzamos.

Az irányok konjugáltságát vissza tudjuk vezetni a pontok konjugáltságára. Állítjuk, hogy ha az  $r$  és az  $s$  konjugált irányok, és az  $r$  végtelen távoli pontja  $R$ , és az  $s$  végtelen távoli pontja az  $S$ , úgy az  $R$  és az  $S$  konjugáltak. Mivel vagy az  $r$ -el, vagy az  $s$ -el párhuzamos egyenesek közt van olyan, amely érinti a kúpszeletet, így az  $R$  és az  $S$ -nek legalább az egyike a kúpszeleten kívül van. Legyen ilyen az  $S$ . Tudjuk hogy egy ponthoz konjugált pontok mértani helye a pont polárisa. Tehát egy ponton áthaladó egyenesen a ponthoz konjugált pont a pont polárisának az egyenessel való metszéspontja. Egy a kúpszeleten kívül fekvő pontnak pedig a pontból a kúpszelethez húzott érintők érintési pontjainak összekötő egyenese a polárisa. Legyen most a pont  $S$ , az egyenes a sík végtelen távoli egyenese. Így az  $S$ -ből a kúpszelethez húzott  $s$ -el párhuzamos érintők érintési pontjainak összekötő egyenese az  $S$  polárisa. De ez éppen az  $r$ -el párhuzamos egyenes, és ennek a sík végtelen távoli egyenesével való metszéspontja  $R$  mely így az  $S$  konjugáltja.

A bizonyításból közvetlenül látható az állítás fordítottja is, mert hogy  $R$  és  $S$  konjugáltak az éppen azt jelenti, hogy az  $S$ -ből húzott  $s$ -el párhuzamos érintők érintési pontjainak összekötő egyenese  $R$ -en megy át, azaz  $r$ -el párhuzamos.



Tehát annak, hogy két irány konjugált legyen szükséges és elegendő feltétele, hogy a végtelen távoli pontjaik konjugáltak legyenek.

Legyen most a  $p$  és a  $q$  iránya a  $\overline{PO}$  és a  $\overline{QO}$  szakaszokkal meghatározva;  $P(p_1, p_2)$ ,  $Q(q_1, q_2)$ ,  $O(0, 0)$ . Így ezen irányok végtelen távoli pontjai  $P_1(p_1, p_2, 0)$ ,  $Q_1(q_1, q_2, 0)$ , és a  $p$  és  $q$  irányok konjugáltak, ha

$$a_{jk} p_j q_k = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

vagy mivel  $p_3 = q_3 = 0$

$$a_{jk} p_j q_k = 0 \quad (j, k = 1, 2)$$

Vizsgáljuk meg mindezeket ferde szögű koordináta rendszerben.

Térjünk át egy tetszőleges ferdeszögű koordináta rendszerre. Legyen ennek középpontja  $\bar{O}$ . Először is térjünk át egy  $\bar{O}$  középpontú derékszögű koordináta rendszerre, amivel I. formája nem változik. Tehát nem jelent megszorítást ha csak olyan ferdeszögű koordináta rendszerekre való transzformációkra szorítunk, melyeknek középpontja a kiindulási derékszögű koordináta rendszer középpontjával összeesik. Térjünk át tehát az

$$x_j = \alpha_{jr} \bar{x}_r \quad \text{illetve} \quad \bar{x}_r = \bar{\alpha}_{rj} x_j \quad (j, r = 1, 2, 3)$$

transzformációkkal egy az eredetivel azonos középpontú egyébként tetszőleges ferdeszögű koordináta rendszerre. Ebben a koordináta rendszerben az I. kupszelet

$$\text{II.} \quad a_{jk} \alpha_{jr} \bar{x}_r \alpha_{ks} \bar{x}_s = \bar{a}_{rs} \bar{x}_r \bar{x}_s = 0 \quad (j, k, r, s = 1, 2, 3)$$

alakú. Mivel azonban az  $\bar{x}_r$ -ek homogén koordináták, így az egyiket szabadon választhatom. Legyen pl.  $\bar{x}_3 \equiv 1$ . - Még megmutatjuk, hogy az  $\bar{a}_{rs}$ -eknek is megvan az  $\bar{a}_{rs} = \bar{a}_{sr}$  szimmetria tulajdonságuk. II. szerint

$$\bar{a}_{rs} = a_{jk} \alpha_{jr} \alpha_{ks}$$

Felhasználva az  $a_{jk}$  szimmetria tulajdonságát

$$\bar{a}_{rs} = a_{kj} \alpha_{jr} \alpha_{ks} = \bar{a}_{sr}.$$

Így egy tetszőleges kupszelet egyenlete ferdeszögű koordináta rendszerben

$$\text{III.} \quad \bar{a}_{rs} \bar{x}_r \bar{x}_s = 0 \quad (r, s = 1, 2, 3 \quad \bar{x}_3 \equiv 1; \bar{a}_{rs} = \bar{a}_{sr})$$

azaz I.-el azonos formájú. Hogy egy ferdeszögű koordináta rendszerben adott

III.alaku kifejezés mindig kupszelet, azt az előzőhöz egész hasonló módon lát-



hatjuk be.

Vizsgáljuk most, hogy a III. kupszeletre vonatkozólag a  $P_1(y_1, y_2, 1)$  és a  $P_2(z_1, z_2, 1)$  pontok mikor konjugáltak. Legyen a  $P_1$  és  $P_2$  pontok összekötő egyenesén egy  $P(x_1, x_2, 1)$  pont osztóviszony koordinátája

$$\lambda = \frac{P_1P}{P_2P}$$

Ekkor

$$x_j = \frac{y_j - \lambda z_j}{1 - \lambda}.$$

Ezen egyenes és a III. kupszelet metszéspontjait oly  $\lambda$  értékeknél kapom, melyek kielégítik az

$$a_{jk} \frac{y_j - \lambda z_j}{1 - \lambda} \frac{y_k - \lambda z_k}{1 - \lambda} = 0$$

azaz az

$$a_{jk} y_j z_k - 2\lambda a_{jk} y_j z_k + \lambda^2 a_{jk} y_j z_k = 0$$

egyenletet. Legyenek ennek gyökei  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$ .

A  $P_1, P_2$  és M, N metszéspontok akkor alkotnak harmónikus négyest, azaz  $P_1$  és  $P_2$  akkor konjugáltak ha

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$$

azaz a két gyök csak előjelben különbözik, ami akkor és csak akkor következik be ha az elsőfokú tag együtthatója zéró, tehát

$$a_{jk} y_j z_k = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3 : y_3 = z_3 = 1)$$

Tehát a konjugáltság feltétele is ugyanaz mint derékszögű koordináta rendszerben.

Igy egy ferdeszögű koordináta rendszerben a  $p_1, p_2, q_1, q_2$  irányok akkor konjugáltak, ha ezen irányokhoz tartozó  $(p_1, p_2, 0)$ ;  $(q_1, q_2, 0)$  végtelen távoli pontok konjugáltak, azaz

$$a_{jk} p_j q_k = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3, \quad p_3 = q_3 = 0)$$

Ezeket alkalmazva, egy felület egy pontjában a  $p^1, p^2; q^1, q^2$  irányokat akkor fogjuk konjugáltaknak nevezni, ha ezek az illető ponthoz tartozó Dupin-féle indikatrixra nézve konjugáltak. A Dupin-féle indikatrix egyenlete a  $\frac{\partial r}{\partial u}$ ,



$\frac{\partial N}{\partial u^2}$  ferdeszögű koordináta rendszerben  $b_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = \pm 1$ . (Azaz most  $a_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$ ,  $a_{13} = a_{23} = 0$ ,  $a_{33} = \mp 1$ ). Így a két irány konjugált ha

$$(54) \quad b_{\alpha\beta} p^\alpha q^\beta = 0.$$

#### 42. Görbületi vonalak.

A felület minden pontjában van két főgörbületi irány, illetve a gömbi és síkpontokban minden irány ilyennek tekinthető. Ez utóbbiakat zárjuk ki, é. így a két főgörbületi irány minden pontban egyértelműen van meghatározva.

Az olyan felületi görbék, melyeknek érintőik minden pontban az egyik főgörbületi irányba mutatnak görbületi vonalnak nevezzük.

Ha a  $K_1$  és  $K_2$  főnormálgörbületek ismeretesek, úgy a főgörbületi irányokat a

I.  $[b_{\alpha\beta}(u^1, u^2) - K_\epsilon(u^1, u^2)g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)] \dot{u}^\alpha = 0$   
egyenletrendszer határozza meg. Ez egy rögzített  $(u_0^1, u_0^2)$  pontban egy közös egyenletrendszer  $\dot{u}_0^1$  és  $\dot{u}_0^2$ -re. Ha azonban I-et nem csak egy pontban, hanem az  $u^\alpha$ -nak egy  $T$  tartományában tekintem, és olyan  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  függvényeket keresek, melyek I-et azonossággá teszik, úgy ez egy differenciálegyenlet rendszer. A differenciálegyenletek elmélete szerint ha az ebben szereplő koeficiens függvények bizonyos feltételeknek eleget tesznek, pl. ha differenciálhatók, úgy az I. -nek van folytonosan differenciálható megoldása, mely a tekintett  $T$  tartományt egyrétűen fedi. (A differenciálegyenletek kívánt tulajdonságu megoldásainak létezéséhez általában többet tételezünk fel, mint amennyi szükséges.)

$K_1$  és  $K_2$  két görbesereget kapunk, melyek mindegyike  $T$ -t egyrétűen fedi, és melyek egymást merőlegesen metszik.

Levezetünk még a görbületi vonalakra egy másik differenciálegyenletet, mely a  $K_\epsilon$  felhasználása nélkül közvetlenül a  $g_{\alpha\beta}$  és a  $b_{\alpha\beta}$  segítségével van meghatározva.

Legyen a  $K_1$ -hez tartozó irány  $\dot{u}^\alpha$  és a  $K_2$ -höz tartozó irány  $\xi^\alpha$ . Mivel ezek konjugáltak, így (54) szerint

$$b_{11}\dot{u}^1 \xi^1 + b_{12}(\dot{u}^1 \xi^2 + \dot{u}^2 \xi^1) + b_{22}\dot{u}^2 \xi^2 = 0.$$

és mivel merőlegesek is



$$g_{11} \dot{u}^1 \xi^1 + g_{12} (\dot{u}^1 \xi^2 + \dot{u}^2 \xi^1) + g_{22} \dot{u}^2 \xi^2 = 0.$$

Tekintsük még az

$$(\dot{u}^2)^2 \dot{u}^1 \xi^1 - \dot{u}^1 \dot{u}^2 (\dot{u}^1 \xi^2 + \dot{u}^2 \xi^1) + (\dot{u}^1)^2 \dot{u}^2 \xi^2 = 0$$

azonosságot. Ez a három egyenlet egy egyenlet rendszer az  $\dot{u}^1 \xi^1$ ,  $\dot{u}^1 \xi^2 + \dot{u}^2 \xi^1$  és  $\dot{u}^2 \xi^2$ -re. Ha ennek <sup>csak</sup> triviális lenne a megoldása, úgy ez maga után <sup>vonná</sup> vagy az  $\dot{u}^1 = \dot{u}^2 = 0$ , vagy a  $\xi^1 = \xi^2 = 0$ -t, ami ellentmondás azzal, hogy ezek az értékpárok egy-egy irányt határoznak meg. Ha t.i.  $\dot{u}^1 \xi^1 = 0$  ez csak úgy lehet, ha legalább az egyik tényező zéró. Legyen  $\dot{u}^1 = 0$ . Így az  $\dot{u}^1 \xi^2 + \dot{u}^2 \xi^1 = 0$ -ból az  $\dot{u}^2 \xi^1 = 0$  következik. Ha itt  $\dot{u}^2 = 0$ , úgy  $\dot{u}^1 = \dot{u}^2 = 0$ . Ha pedig  $\xi^1 = 0$ ,  $\dot{u}^2 \neq 0$ , úgy az  $\dot{u}^2 \xi^2 = 0$ -ból  $\xi^2 = 0$ , azaz  $\xi^1 = \xi^2 = 0$  következik. Hasonló eredményre jutunk a  $\xi^1 = 0$  feltevésből. Tehát kell az egyenletrendszernek a triviálistól különböző megoldásának is lennie. De így

$$(55) \quad \begin{vmatrix} (\dot{u}^2)^2 & -\dot{u}^1 \dot{u}^2 & (\dot{u}^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

ami egy differenciálegyenlet az  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  függvényekre, amelynek azonban meg van az az előnye, hogy nem szerepel benne a  $K_1$  és a  $K_2$ .

Mivel (55) - ben  $\xi^\alpha$  nem szerepel, így ugyanerre a differenciálegyenletre jutunk ha  $\dot{u}^\alpha$   $K_2$  irányát és  $\xi^\alpha$   $K_1$  irányát jelenti. Tehát a differenciálhányadosokban másodfoku (55) differenciálegyenlet megoldásai adják mindkét görbületi vonal sereg görbéit. Mégis kíváncsi lenne a két görbe sereg könnyebb szétválasztása céljából a két görbeseregre külön kapni differenciálegyenleteket.

Ha az (55) -ben szereplő  $g_{\alpha\beta}$  és  $b_{\alpha\beta}$  függvények differenciálhatók, úgy van a differenciálegyenletnek folytonosan differenciálható megoldása. Vegyük ezt az esetet. Valamint tudjuk, hogy  $\dot{u}^1$  és  $\dot{u}^2$  egy irányt határoz meg, így nem lehet egyszerre mindkettő zéró. Legyen  $\dot{u}^2(t_0) \neq 0$ ,  $\dot{u}^2(t_0) > 0$ , így  $\dot{u}^2(t)$   $t_0$ -nak bizonyos környezetében is még pozitív. Ezen intervallumra szorítkozva osszuk (55) első sorát  $(\dot{u}^2)^2$ -el. Megmutatjuk, hogy  $\dot{u}^1$  előállítható mint  $\dot{u}^2$  függvénye, és  $\frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} = \frac{du^1}{du^2}$ . T.i.  $u^2 = u^2(t)$  folytonos és szigorúan monoton, így létezik a  $t = f(u^2)$  inverz függvény. Ezt felhasználva



$$u^1 = u^1(t) = u^1(f(u^2)) = \varphi(u^2).$$

Felhasználva, hogy  $\dot{u}^2 = \frac{du^2}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{du^2}}$   $\frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} = \frac{du^1}{dt} \frac{dt}{du^2}$  ami nem már

mint az  $u^1 = \varphi(u^2)$  közvetett függvény differenciál hányadosa,  $\frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} = \frac{du^1}{du^2}$ .

Azon pontok környezetében ahol  $\dot{u}^2 = 0$  ugyanezt a megfontolást az  $\dot{u}^1(t) \neq 0$  segítségével végezzük el.

Igy  $\frac{du^1}{du^2}$ -t  $k$ -val jelölve

$$\text{II.} \quad \begin{vmatrix} 1 & -k & k^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

ami  $k$ -ra másodfoku egyenlet. Legyenek ennek gyökei

$$(56) \quad \begin{aligned} k_1 &= f(u^1, u^2) = \frac{du^1}{du^2} \\ k_2 &= g(u^1, u^2) = \frac{du^1}{du^2} \end{aligned}$$

Ez két differenciál egyenlet, mindkettő megoldásai egyrétűen fedik  $T$ -t, eleget tesznek II-nek, és így (55)-nek, tehát a két görbületivonal sereget alkotják. Vezessük be a görbületi vonalakat paraméter vonaloknak. Mivel ezek merőlegesek egymásra, így  $g_{12} = 0$ . De az

$$\text{III.} \quad \dot{u}_1^1 = 1, \quad \dot{u}_1^2 = 0 \quad \text{és az} \quad \dot{u}_2^1 = 0, \quad \dot{u}_2^2 = 1$$

irányok konjugáltak is, így (54) szerint

$$\text{IV.} \quad b_{11} 1.0 + b_{12} 1.1 + b_{21} 0.0 + b_{22} 0.1 = 0,$$

azaz  $b_{12} = 0$ . Tehát abban a tartományban ahol a görbületi vonalak a paraméter vonalak

$$(57) \quad g_{12} = b_{12} = 0.$$

Ez fordítva is igaz, mert ahol (57) fennáll, ott a paramétervonalak merőlegesek, és a paramétervonalak III. érintői IV. szerint konjugáltak is. De a konjugált irányok közül csak a főtengelyek, illetve a párhuzamos egyenespárnál az egyenespár és a rá merőleges irányok merőlegesek, így tehát ezek az irányok főgörbületi irányok, és a görbék, tehát a paramétervonalak, görbületi vonalak.



Tehát (57) szükséges és elégséges ahhoz, hogy a paraméter vonalak görbületi vonalak legyenek.

#### 43. Asszimptota vonalak.

Azokat az irányokat amely irányokban

$$I. \quad K = C f u = \frac{b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} = 0$$

asszimptotikus irányoknak fogjuk nevezni. Ezen irányokban a Dupin-féle indikátrixnak végtelen távoli pontjai vannak, mert a 40. pont szerint a Dupin-féle indikátrix pontjainak távolsága a tekintett felületi ponttól az illető irányban

$$\frac{1}{\sqrt{|K|}} = \sqrt{|R|}.$$

Elliptikus pontokban ilyen irány nincs, parabolikus pontokban egy, hiperbolikus pontokban pedig két ilyen irány van. Sik pontban minden irány asszimptotikus. Ezeket a pontokat kizárjuk a további vizsgálatokból.

Egy olyan görbét, amelynek érintője minden pontban asszimptotikus irányba esik asszimptota vonalnak nevezünk.

Hiperbolikus pontokon két ilyen görbe, parabolikus pontokon egy ilyen görbe mehet át, míg elliptikus pontokon egy sem.

Mivel az I. kifejezés nevezője pozitív definit, azaz bármely irány mellett is nagyobb mint zéró, így a  $K = 0$ -nak szükséges és elégséges feltétele a

$$(58) \quad b_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0.$$

Tehát az olyan és csak az olyan  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  görbék asszimptota vonalak, amelyek eleget tesznek (58)-nak. Így (58) az asszimptota vonalak differenciálegyenlete.

Ennek a differenciálhányadosokban másodfokú differenciálegyenletnek differenciálható  $b_{\alpha\beta}$ -k és nem elliptikus pontok esetén van valós megoldása.

További célunk lenne - a görbületi vonalakhoz hasonlóan - a két asszimptotavonal seregére külön differenciálegyenletet kapni. Eljárásunk teljesen hasonló. Az olyan pontok környezetében ahol  $\dot{u}^2(t_0) \neq 0$  oszthatunk  $(\dot{u}^2)^2$ -el, és  $\frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} = \frac{du^1}{du^2}$ . Az olyan pontok környezetében ahol  $\dot{u}^2(t_0) = 0$  ott  $\dot{u}^1(t_0) \neq 0$ ,



$(\dot{u}^1)^2$ -el oszthatunk és  $\frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^1} = \frac{du^2}{du^1}$ . Tekintsük az első esetet. Így  $(\dot{u}^2)^2$ -el osztva

$$b_{11} \left( \frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} \right)^2 + 2 b_{12} \frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} + b_{22} = 0.$$

$$\frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} = \frac{du^1}{du^2} \quad -t \quad k - \text{val jelölve}$$

$$\text{II.} \quad b_{11} k^2 + 2 b_{12} k + b_{22} = 0.$$

Ez másodfoku egyenlet  $k$ -ra. Gyökei

$$k_1 = \frac{-2 b_{12} + \sqrt{4 b_{12}^2 - 4 b_{11} b_{22}}}{2 b_{11}} = f(u^1, u^2) = \frac{du^1}{du^2}$$

(59)

$$k_2 = \frac{-2 b_{12} - \sqrt{4 b_{12}^2 - 4 b_{11} b_{22}}}{2 b_{11}} = g(u^1, u^2) = \frac{du^1}{du^2}$$

Ez két a differenciálhányadosokban lineáris differenciálegyenlet. Ezek megoldása elegendő tesz II -nek, és (58)-nak, tehát ezek asszimptóta vonalak. (59) mindkét egyenletének megoldásai egyrétlen fedik a tekintett tartományt, tehát minden ponton két megoldási görbe megy keresztül, tehát ezek az összes megoldásokat tartalmazzák. A két egyenlet megoldásai a két asszimptóta vonal sereg. Amint látjuk, ezek csak akkor esnek össze, ha  $b_{12}^2 - b_{11} b_{22} = 0$ , azaz parabolikus pontokban.

Az olyan pontok környezetében ahol  $\dot{u}^2(t_0) = 0$  a megoldásokat  $u^2 = \gamma(u^1)$  formában kapjuk.

Tekintsük a felületnek egy csupa hiperbolikus pontokból álló tartományát. Itt minden ponton két különböző asszimptótavonal megy keresztül, így ezek bevezethetők paraméter vonalaknak. Ha a paraméter vonalak asszimptóta vonalak, úgy ezek

$$\text{III.} \quad \dot{u}_1^1 = 1, \quad \dot{u}_1^2 = 0 \quad \text{illetve} \quad \dot{u}_2^1 = 0, \quad \dot{u}_2^2 = 1$$

érintőire

$$\text{IV.} \quad b_{11} 1.1 + 2 b_{12} 1.0 + b_{22} 0.0 = 0 \quad \text{illetve} \quad b_{11} 0.0 + 2 b_{12} 0.1 + b_{22} 1.1 = 0$$



azaz

$$(50) \quad b_{11} = b_{22} = 0 \quad .$$

Állítjuk ez meg is fordítható. Azaz ha (60) fennáll, úgy a paraméter vonalak asszimptota vonalak, t.i. ekkor a paraméter vonalak III. érintőire IV. szerint fennáll (58).

Az asszimptóta vonalaknak még egy a felületi érintősikokkal kapcsolatos jellemzését fogjuk adni. Egy asszimptóta vonal olyan szakaszán ahol  $C \neq 0$  ott I. szerint  $f'' = 0$ ,  $f'$  merőleges  $u$ -re, azaz a görbe simulósikja összeesik a felület érintősikjával. Ha  $C$  egyes  $P_0$  pontokban zéró, úgy ott a simulósikot a környező simulósikok határhelyzete képen definiálhatjuk. Pontosabban legyen  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  egy pontsorozat, melynek pontjaiban  $C \neq 0$ , és mely  $P_0$ -hoz tart. Tekintsük az ezen pontokhoz tartozó felületi érintősikok sorozatát. Folytonosan differenciálható felület esetén ez a sorozat konvergens. Defináljuk a  $P_0$ -beli simulósikot mint a  $P_1, P_2, \dots$  pontsorozathoz tartozó simulósikok sorozatának határértékét. Mivel azonban ennek a siksorozatnak minden tagja összeesik az érintősikok sorozatának tagjaival, így ezen siksorozat konvergencia viszonya, és határértéke is ugyanaz mint az érintősikok sorozatáé. Tehát a simulósik a  $P_0$ -ban is összeesik az érintősikkel. Ha  $C$  egy egész szakaszon zéró, úgy az asszimptóta vonal egyenes. Simulósikja határozatlan, így bármelyik az egyenesen átmenő sikt, pl. a felületi érintősikot is tekinthetjük simulósiknak.

Tehát az asszimptóta vonalnak zérótól különböző görbületi pontjaiban a simulósik összeesik a felületi érintősikkel, vagy ha a simulósik értelmezését az előző bekezdés szerint kiegészítjük, úgy az asszimptóta vonal simulósikjai összeesnek a felület érintősikjaival.

Ez a tulajdonság fordítva is fennáll. A simulósik és a felületi érintősik összeeséséből következik, hogy a görbe főnormálisa a felület érintősikjában fekszik, tehát a főnormális merőleges a felületi normálisra, és így I. szerint a görbe mentén  $K = 0$ , azaz a görbe asszimptotikus vonal. Tehát a simulósik és a felületi érintősik összeesése jellemző tulajdonsága az asszimptota vonalaknak.

Még megemlítjük, hogy minden felületi egyenes vagy egyenes szakasz asszimptóta vonal. Ez belátható I.-ből a  $C = 0$  figyelembevételével, de abból is, hogy az egyenes irányában a normálmetszet maga az egyenes, és ennek görbülete zéró.

Mivel  $K$  a helynek folytonos függvénye, így a pozitív értékű, azaz ellip-



tikus pontokat a negatív értékű, azaz hiperbolikus pontoktól zéró  $K$  értékű, azaz parabolikus pontok választják el. A csupa parabolikus pontokon keresztül-menő görbéket parabolikus vonalaknak nevezzük. Ezek egyenlete

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0.$$

#### 44. A Gauss és Weingarten-féle egyenletek.

Láttuk a Frenet képletek nagy jelentőségét a görbék elméletében. Most ezek hasonmását akarjuk megalkotni a felületelméletben. Így először is szükségünk van a felület minden pontjában definiált háromélre. Kézenfekvő a  $\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u^\alpha}$  és az  $\mathcal{N}$  választása. De itt meg kell jegyeznünk, hogy míg a görbék elméletében a kísérő háromél vektorai páronként merőleges egységvektorok voltak, és függetlenek a görbén bevezetett paraméterből, addig itt ezek a tulajdonságok elesnek, csak a lineáris függetlenség marad meg.

Tegyük fel hogy a felület legalább kétszer folytonosan differenciálható, és képezzük először a  $\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u^\alpha}$  vektorok derivációját a paraméterek szerint. A derivációk nyilván a háromél vektoraiból kombinálhatók

$$\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha \beta}^\sigma \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u^\sigma} + c_{\alpha \beta} \mathcal{N}$$

Határozzuk meg az együtthatókat az első és a második alapmennyiségek segítségével. Szorozzunk először  $\mathcal{N}$ -el. Így

$$\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \mathcal{N} = c_{\alpha \beta}$$

Tehát

$$c_{\alpha \beta} = b_{\alpha \beta}$$

Sorozzunk most  $\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u^\mu}$ -vel, így

$$\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u^\mu} = \Gamma_{\alpha \beta}^\sigma g_{\sigma \mu}$$

és vezessük be a

I.

$$\Gamma_{\alpha \beta}^\sigma g_{\sigma \mu} = \Gamma_{\alpha \mu \beta}$$

jelölést.



A  $\Gamma_{\alpha\mu\beta}(u^1, u^2)$  mennyiségeket elsőfajú, a  $\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$  mennyiségeket másodfajú Christoffel-féle szimbólumoknak nevezzük. Így feladatunk ezeket meghatározni az első és második alapmennyiségekkel. E célból képezzük a  $g - k$  parciális differenciálhányadosait

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\tau}} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\tau}} \frac{\partial u^{\tau}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\beta} \partial u^{\tau}}$$

$$\frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial u^{\alpha}} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\beta} \partial u^{\alpha}} \frac{\partial u^{\tau}}{\partial u^{\tau}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\beta}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\tau} \partial u^{\alpha}}$$

$$\frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\tau} \partial u^{\beta}} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\tau}} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}}$$

és ezekből

$$\frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\tau\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\tau}} = 2 \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} \frac{\partial u^{\tau}}{\partial u^{\tau}} = 2 \Gamma_{\alpha\tau\beta}$$

Ha az elsőfajú Christoffel-féle szimbólumok ismeretesek úgy a másodfajúak I-ből már meghatározhatók, mivel ez egy inhomogén egyenletrendszernek fogható fel, amelynek determinánsa

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = g > 0$$

Oldjuk fel ezt az egyenletrendszert az inverz elemek segítségével. Legyen

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g}, \quad g^{12} = g^{21} = -\frac{g_{12}}{g} \quad \text{és} \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g}$$

Igy  $g_{\alpha\sigma} g^{\beta\sigma}$  jelenti, hogy a determináns  $\alpha$ -ik sorának elemeit rendre szorozzuk a  $\beta$ -ik sor elemeinek inverzeivel, és ezeket összeadjuk. Így ennek értéke nyilván 1 ha  $\alpha = \beta$ , azaz egy sort a saját inverz elemeivel szorzunk, és 0 ha  $\alpha \neq \beta$ . Ezt így szoktuk kifejezni

$$\text{II.} \quad g_{\alpha\sigma} g^{\beta\sigma} = \delta_{\alpha}^{\beta}$$

ahol tehát a  $\delta_{\alpha}^{\beta}$  értéke 1 vagy 0 aszerint amint  $\alpha = \beta$ , ill.  $\alpha \neq \beta$ . Mivel ugy az első alapmennyiségek, mint azok inverzei indexekben szimmetrikusak, azaz



$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$  és  $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$ , így a II. eredmény a szummációs index helyétől függetlenül érvényes.

Ezek segítségével az I. egyenletrendszer feloldása

$$\Gamma_{\alpha\mu\beta} g^{\nu\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} g_{\sigma\mu} g^{\nu\mu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \delta_{\sigma}^{\nu}$$

és mivel az utolsó kifejezésben a  $\sigma$ -ra való szummációnál csak akkor kapunk zérótól különböző eredményt, ha  $\sigma = \nu$ , így

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = \Gamma_{\alpha\mu\beta} g^{\nu\mu}$$

Ezek az eredmények azt is jelentik, hogy a Christoffel-féle szimbólumok csak az első alapmennyiségektől függenek.

Tehát a  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}}$  deriváltjai:

$$(62) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\sigma}} + b_{\alpha\beta} \mathcal{H}$$

Ezeket az egyenleteket Gauss-féle egyenleteknek nevezzük.

Ennek mintájára képezzük a felületi normális derivációt.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}} = -b_{\alpha}^{\sigma} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\sigma}} + a_{\alpha} \mathcal{H}$$

Határozzuk meg az együtthatókat. Szorozzunk  $\mathcal{H}$ -el.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}} \mathcal{H} = a_{\alpha}$$

Azonban  $\mathcal{H}^2 = 1$ -et differenciálva  $u^{\alpha}$  szerint

$$2\mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}} = 0, \quad \text{tehát} \quad a_{\alpha} = 0,$$

ami azt jelenti, hogy a felületi normális deriváltja az érintősíkba esik. Határozzuk meg a  $b_{\alpha}^{\sigma}$ -t.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\beta}} = -b_{\alpha}^{\sigma} g_{\sigma\beta}$$

Azonban  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\beta}} \mathcal{H} = 0$ -t differenciálva  $u^{\alpha}$  szerint

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\beta}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}} = 0$$



azaz

$$(63) \quad b_{a\beta} = b_a^\sigma g_{\sigma\beta}$$

Oldjuk fel ezt az egyenletrendszert  $b_a^\sigma$  szerint

$$b_{a\beta} g^{\mu\beta} = b_a^\sigma g_{\sigma\beta} g^{\mu\beta} = b_a^\sigma \delta_\sigma^\mu = b_a^\mu$$

tehát

$$b_a^\mu = b_{a\beta} g^{\mu\beta}$$

A

$$(64) \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^a} = - b_a^\sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\sigma}$$

egyenleteket Weingarten-féle egyenleteknek nevezzük.

#### 45. Olinde Rodrigues formula.

A Weingarten-féle egyenletek segítségével módunkban áll a görbületi vonalaknak még néhány nevezetes tulajdonságát kimutatni.

Állítjuk, hogy egy görbületi vonal mentén a felületi normális deriváltja nemcsak a felületi érintősíkban van, hanem a görbületi vonal érintőjének irányába esik, és az arányossági tényező pedig a görbületi vonal irányában érvényes főnormálgörbület negatív értéke.

Azaz ha a görbületi vonal  $\gamma = \gamma(t)$ , e mentén a felületi normális  $\mathcal{N}(t)$ , úgy

$$(65) \quad \frac{d\mathcal{N}}{dt} = -K \frac{d\gamma}{dt}$$

Ha a görbületi vonal mentén  $u^a = u^a(t)$ , úgy a Weingarten-féle egyenletek szerint

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial u^a} \frac{du^a}{dt} = - b_a^\sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\sigma} \frac{du^a}{dt} = - g^{\sigma\beta} b_{a\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^\sigma} \frac{du^a}{dt}.$$

Kihasználva, hogy a görbe görbületi vonal, azaz hogy a görbe mentén

$$(b_{a\beta} - K g_{a\beta}) \frac{du^a}{dt} = 0$$



$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= - g^{\epsilon\beta} K g_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{\partial M}{\partial u^\epsilon} = - K \delta_\alpha^\epsilon \frac{\partial M}{\partial u^\epsilon} \frac{du^\alpha}{dt} = \\ &= - K \frac{\partial M}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt} = - K \frac{d\mathcal{L}}{dt}\end{aligned}$$

Állítjuk ez fordítva is igaz olyan formában, hogy ha egy  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(t)$  felületi görbe mentén  $\frac{dM}{dt} = - \lambda \frac{d\mathcal{L}}{dt}$ , úgy  $\mathcal{C}(t)$  görbületi vonal, és  $\lambda$  az illető irányban érvényes normálgörbület.

Ha az  $\mathcal{C}(t)$  mentén  $u^\alpha = u^\alpha(t)$ , úgy

$$- \lambda \frac{\partial M}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt} = \frac{\partial M}{\partial u^\alpha} \frac{du^\alpha}{dt} = - b_\alpha^\epsilon \frac{\partial M}{\partial u^\epsilon} \frac{du^\alpha}{dt}$$

Szorozva  $\frac{\partial M}{\partial u^\beta}$  -val

$$- \lambda g_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} = - b_\alpha^\epsilon g_{\epsilon\beta} \frac{du^\alpha}{dt} = - b_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt}$$

azaz

$$I. \quad (b_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) \frac{du^\alpha}{dt} = 0$$

Tehát I. -nek szükségképpen teljesedni kell, ha az adott feltételek fennállnak, mégpedig úgy hogy  $\dot{u}^1$  és  $\dot{u}^2$  seholsem zéró egyszerre, mert akkor a görbe érintője nullvektor lenne ellentétben a 2. pontban tett feltevéseinkkel. Tehát az I. egyenlet rendszernek  $\dot{u}^\alpha$  -ra a triviálistól különböző megoldásának kell lennie. Ez viszont a 38. pont szerint csak a  $\lambda = K_1$  vagy  $K_2$  esetén lehetséges. Egy görbe pedig amely I. teljesedik  $\lambda = K_1$  vagy  $K_2$  mellett, az a 42. pont szerint görbületi vonal.

A görbületi vonalaknak még egy egyszerű jellegzetes tulajdonságát mutatjuk meg.

Állítjuk, hogy egy görbületi vonal mentén a felületi normálisok torzfelületet alkotnak, és minden olyan görbe amely mentén a felületi normálisok torzfelületet képeznek görbületi vonal.

Ha t.i. az  $\mathcal{C}(t)$  görbületi vonal, úgy a felületi normálisok által alkotott vonalfelület

$$M(t, \tau) = \mathcal{C}(t) + \tau M(t)$$



és mivel  $\dot{m} = -K \dot{\epsilon}$ , így

II.  $(\dot{\epsilon}, \dot{m}, \dot{m}) = 0$

és így a vonalfelület a (37) szerint torzfelület.

Fordítva, ha egy görbe mentén II. teljesül, úgy van olyan egyszerre nem mind zéró  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\gamma(t)$ , hogy

$$\alpha \dot{\epsilon} + \beta \dot{m} + \gamma \dot{m} = 0$$

Szorozva  $m$ -el adódik, hogy  $\gamma = 0$ . Így  $\alpha \dot{\epsilon} + \beta \dot{m} = 0$ . Mivel  $\dot{\epsilon} \neq 0$  (mint egy görbe érintője), kell hogy  $\beta \neq 0$  legyen, mert különben  $\alpha$  is zéró lenne. Osszva  $\beta$ -val

$$\dot{m} + \lambda \dot{\epsilon} = 0$$

ami az előzőek szerint azt jelenti, hogy  $\epsilon(t)$  görbületi vonal.

#### 46. Az asszimptota vonalak csavarodása.

A Weingarten-féle képletek ismeretében módunkban áll egy igen egyszerű formájú összefüggést megadni egy nem egyenes asszimptóta vonal csavarodása és a felület Gauss-féle görbülete között. Azt állítjuk, hogy  $T = \pm \sqrt{-K}$  ahol a két különböző előjel az illető ponton áthaladó két különböző asszimptóta vonalra vonatkozik.

Vonatkoztassuk az asszimptóta vonalat mint görbét az ívhosszára mint paraméterre. Tudjuk hogy nem egyenes asszimptóta vonal mentén a görbe binormálisa összeesik a felületi normálissal

$$b(s) = n(s)$$

A Frenet képletek alapján

$$\dot{n} = b' = -T f$$

ahol  $f$  a görbe főnormálisa. Így a Weingarten-féle egyenletek felhasználásával:

$$\begin{aligned} T &= -n' f = -\frac{\partial n}{\partial u^a} \frac{du^a}{ds} f = b_a^B \frac{\partial n}{\partial u^B} u'^a (b \times t) = \\ &= b_a^B \frac{\partial n}{\partial u^B} u'^a (b \times \frac{\partial n}{\partial u^T} u'^T) = b_a^B u'^a u'^T \left( \frac{\partial n}{\partial u^B} \cdot b, \frac{\partial n}{\partial u^T} \right) \end{aligned}$$

ami csak akkor különböző zérótól ha  $\beta \neq T$ . Így



$$T = (b_{\alpha}^2 u'^{\alpha} u'^1 - b_{\alpha}^1 u'^{\alpha} u'^2) \left( \frac{\partial H}{\partial u^1}, \frac{\partial H}{\partial u^2}, h \right).$$

Az első zárójelben levő kifejezést tovább alakítva és figyelembevée, hogy a determináns értéke a  $\frac{\partial H}{\partial u^{\alpha}}$  vektorok által meghatározott parallelogramma területe

$$T = b_{\alpha\lambda} u'^{\alpha} (g^{2\lambda} u'^1 - g^{1\lambda} u'^2) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Mivel a görbe asszimptóta vonal, így a görbe mentén

$$I. \quad b_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta} = 0.$$

Szorozzuk ezt  $b_{11}$ -el, adjunk hozzá mindkét oldalon  $b_{12}^2 (u'^2)^2$ -et, és emeljünk teljes négyzetre, majd vonjunk négyzetgyököt, így

$$II. \quad b_{1\lambda} u'^{\lambda} = \pm u'^2 \sqrt{b_{12}^2 - b_{11} b_{22}}.$$

Hasonló uton csak  $b_{22}$ -vel szorozva  $b_{21} (u'^1)^2$ -et hozzáadva

$$III. \quad b_{2\lambda} u'^{\lambda} = \mp u'^1 \sqrt{b_{12}^2 - b_{11} b_{22}}.$$

Vezessük be pillanatnyilag a következő jelöléseket:

$$b_{1\lambda} u'^{\lambda} b_{2\mu} u'^{\mu} = A$$

$$u'^1 u'^2 (b_{12}^2 - b_{11} b_{22}) = u'^1 u'^2 (-b) = B$$

Ha egy asszimptóta vonal mentén II. és III.-nál különböző előjelet veszünk, úgy az  $A = -B$  I. figyelembevételével azonosan teljesül. Ha azonban megegyező előjeleket vennénk, úgy az  $A = -B$  mellett  $A = B$  is fennállna, azaz  $B = 0$ , ami általában nem teljesedik. Tehát egy asszimptóta vonal mentén különböző előjeleket választunk. Különböző seregekhez tartozó asszimptóta vonalak esetén ha II.-nél is III. is a felső előjeleket, vagy mindkét asszimptóta vonal esetén az alsó előjeleket választanánk, úgy a metszés pontokban egyenlő irányok adódnak, ami általában megint nem igaz, így a felső előjelek az egyik asszimptótavonal seregére, az alsó előjelek a másik asszimptóta vonalseregére vonatkoznak.

Ezek figyelembevételével

$$\begin{aligned} T &= \left[ \pm u'^2 \sqrt{-b} (g^{21} u'^1 - g^{11} u'^2) \mp u'^1 \sqrt{-b} (g^{22} u'^1 - g^{12} u'^2) \right] \sqrt{g} = \\ &= \frac{1}{g} \left[ \pm (-g_{12} u'^1 u'^2 - g_{22} (u'^2)^2 - g_{11} (u'^1)^2 - g_{12} u'^1 u'^2) \right] \sqrt{-b} \sqrt{g} = \end{aligned}$$



$$= \mp g_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta} \sqrt{-\frac{b}{g}}$$

és mivel  $(\frac{dr}{ds})^2 = g_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta} = 1$ , és  $\frac{b}{g} = K$

$$(66) \quad T = \mp \sqrt{-K}$$

Ezt a tételt Beltrami - Enneper tételnek szokták nevezni.

#### 47. Parabolikus pontokból álló felület.

Egyszerű számítással kimutatható, hogy bármely torzfelület minden pontja parabolikus. Most kimutatjuk, hogy ha egy négyszer folytonosan differenciálható felület minden pontja parabolikus azaz

$$I. \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$$

ugy a felület torzfelület.

Ekkor az asszimptóta vonalak (58) differenciálegyenlete

$$b_{11} \dot{u}^1{}^2 + 2\sqrt{b_{11}b_{22}} \dot{u}^1 \dot{u}^2 + b_{22} \dot{u}^2{}^2 = 0$$

azaz

$$(\sqrt{b_{11}} \dot{u}^1 + \sqrt{b_{22}} \dot{u}^2)^2 = 0$$

azaz

$$II. \quad \sqrt{b_{11}} \dot{u}^1 + \sqrt{b_{22}} \dot{u}^2 = 0$$

alakban írható. Ez esetben az (59)  $f = g$  függvényeit a  $-\sqrt{\frac{b_{22}}{b_{11}}}$  kifejezés szolgáltatja, és mint már a 43. pontban megállapítottuk ekkor két asszimptótavonal sereg összeesik.

Vezessük be ezeket az asszimptótavonalakat az  $u^1 = \text{konst.}$  paramétervonalaknak. Így egy ilyen paraméter vonal mentén  $\dot{u}^1 = 0$ ,  $\dot{u}^2 \neq 0$ , és így II. miatt  $b_{22} = 0$ , és ennek felhasználásával I. szerint  $b_{12} = 0$ . Zárjuk ki azt az esetet amikor  $b_{11}$  is zéró. (Ebben az esetben kimutatható, hogy a felület sík, azaz a felület ekkor is torzfelület.)

Kimutatjuk, hogy az  $u^1 = \text{konst.}$  paramétervonalak mentén a felületi érintősíkok párhuzamosak, azaz ezen paramétervonalak mentén a felületi normálisok párhuzamosak. A Weingarten-féle képletek szerint

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u^2} = -b_2^e \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u^e}$$



Határozzuk meg a koefficienseket. Szorozzunk  $\frac{\partial W}{\partial u^a}$  -val

$$\frac{\partial W}{\partial u^2} \frac{\partial W}{\partial u^a} = -b_2^\sigma g_{a\sigma} = -b_{2a}.$$

Az előzőek szerint azonban  $b_{22} = b_{21} = b_{12} = 0$ , így mivel a

$$b_2^\sigma g_{a\sigma} = 0$$

homogén egyenletrendszernek a determinánsa  $g \neq 0$ , csak a triviális megoldása van, így minden pontban

$$b_2^\sigma = 0.$$

De ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\partial W}{\partial u^2} \equiv 0,$$

azaz  $W$  csak az  $u^1$  függvénye, azaz egy  $u^1 = \text{konst.}$  görbe mentén fix, amint állítottuk.

De egy  $u^1 = \text{konst.}$  asszimptóta vonal mentén nemcsak párhuzamosak az érintősíkok, hanem össze is esnek. Ha ugyanis a görbe egyenes szakasz, úgy az erre illeszkedő párhuzamos normálisú síkok azonosak, a nem egyenes asszimptóta vonalnál pedig az asszimptóta vonal binormálisa összeesik a felületi normálissal. De itt a felületi normális, azaz a binormális fix, így a görbe síkgörbe, és ennek a simulásikjai, azaz a felületi érintősíkok összeesnek.

Eszerint azonban a felület érintősíkjai egy egyparaméteres sokaságot alkotnak, és a 31. pont szerint ha ezek normálisai kétszer folytonosan differenciálható függvényei a paraméternek, ami itt fennáll, úgy a síksokaság egy torzfelületet burkol. Az érintősíkok által burkolt felület azonban az eredeti felület, így a tekintett felület torzfelület.

#### 48. Formaprobléma, összefüggések az alaplennnyiségek között, theorema egregium.

A 12. pontban bebizonyítottuk, hogy ha két görbének azonos az ívhosszra vonatkoztatott görbülete és csavarodása, úgy a két görbe egymástól legfeljebb csak egy mozgásban különbözik. Azaz adott  $C(s)$  görbülettel és  $T(s)$  csavaro-



dással rendelkező görbe ha van, úgy mozgástól eltekintve csak egy van. Nem bizonyítottuk azonban hogy egy előre megadott  $C(s)$  és  $T(s)$  függvényhez van olyan  $r(s)$  görbe, amelynek az adott  $C(s)$  a görbülete, és az adott  $T(s)$  a csavarodása.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy ez az állítás igaz. A bizonyítás alap gondolata a következő. Ha van ilyen görbe, úgy az eleget tesz a Frenet képleteknek az adott  $C(s)$  és  $T(s)$  függvényekkel. Azaz komponensekben felírva a

$$\frac{dt_1}{ds} = C(s) n_1(s)$$

$$I. \quad \frac{dn_1}{ds} = -C(s) t_1(s) + T(s) b_1(s)$$

$$\frac{db_1}{ds} = -T(s) n_1(s)$$

Fogjuk fel most I-et, mely kilenc egyenletet, és kilenc ismeretlen függvényt tartalmaz egy differenciálegyenletrendszernek. Ha  $C(s)$  és  $T(s)$  folytonos, úgy ennek van megoldása, úgy hogy  $A$  és  $t_1$  minden pontban egy egységvektorokból álló orthogonális háromélt képez, és a  $t_1$  integrálásával kapott  $r(s)$  görbének  $C(s)$  a görbülete és  $T(s)$  a torziója, tehát megoldás. A differenciálegyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és módunkban áll a kezdő feltételek révén és a  $t_1$  integrálásánál fellépő konstans révén megadni, hogy egy megoldás melyik pontból és milyen irányban induljon ki, és ezek egymástól csak egy mozgásban különböznek.

Vessük fel a hasonló kérdést a felületeknél. Van-e tetszőlegesen adott  $g_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$ ,  $b_{\alpha\beta}(u^1, u^2)$  függvényekhez felület, melynek ezek az első illetve a második alaplennységei. Ezt a problémát formaproblémának szokták nevezni.

Erre a válasz ilyen formában tagadó. Hiszen láttuk például, hogy egy felületnél az első alaplennységek egy pozitív definit kifejezés együtthatói, tehát ez például egy olyan feltétel, amelynek a  $g_{\alpha\beta}$ -knak szükségképpen eleget kell tenni, ha azt akarjuk hogy azok egy felület első alaplennységei legyenek.

Nézzük meg, hogy nem találunk-e még olyan feltételeket melyeknek az első ill. második alaplennységeknek szükségképpen eleget kell tenni.

Induljunk ki egy háromszor folytonosan differenciálható felületből. Így



$$\frac{\partial^2}{\partial u^\beta \partial u^\tau} \left( \frac{\partial M}{\partial u^\alpha} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial u^\tau \partial u^\beta} \left( \frac{\partial M}{\partial u^\alpha} \right)$$

A Gauss és a Weingarten féle egyenletek felhasználásával

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial u^\tau} \frac{\partial M}{\partial u^\sigma} + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \frac{\partial^2 M}{\partial u^\tau \partial u^\sigma} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\tau} M + b_{\alpha\beta} \frac{\partial M}{\partial u^\tau} \equiv \\ & \equiv \frac{\partial \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma}{\partial u^\beta} \frac{\partial M}{\partial u^\sigma} + \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma \frac{\partial^2 M}{\partial u^\beta \partial u^\sigma} + \frac{\partial b_{\alpha\tau}}{\partial u^\beta} M + b_{\alpha\tau} \frac{\partial M}{\partial u^\beta} \end{aligned}$$

újra alkalmazva a Gauss és a Weingarten féle egyenleteket és  $\frac{\partial M}{\partial u^\sigma}$  és  $M$  szerint rendezve

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \left( \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial u^\tau} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \Gamma_{\tau\delta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\tau}^\delta \Gamma_{\beta\delta}^\sigma + b_{\alpha\tau} b_\beta^\sigma - b_{\alpha\beta} b_\tau^\sigma \right) \frac{\partial M}{\partial u^\sigma} + \\ & + \left( \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\tau} - \frac{\partial b_{\alpha\tau}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta b_{\tau\delta} - \Gamma_{\alpha\tau}^\delta b_{\beta\delta} \right) M \equiv 0 \end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\text{II.} \quad R_{\alpha\beta\tau}^\sigma = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial u^\tau} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \Gamma_{\tau\delta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\tau}^\delta \Gamma_{\beta\delta}^\sigma$$

Mivel azonban I. csak úgy lehet azonosan zéró, ha a koefficiensek eltűnnek, így

$$\text{III.} \quad R_{\alpha\beta\tau}^\sigma = b_{\alpha\beta} b_\tau^\sigma - b_{\alpha\tau} b_\beta^\sigma$$

Szorozzuk ez  $g_{\sigma\epsilon}$ -al, és vezessük be az

$$\text{IV.} \quad R_{\alpha\beta\tau}^\sigma g_{\sigma\epsilon} = R_{\alpha\epsilon\beta\tau}$$

jelölést, így

$$R_{\alpha\epsilon\beta\tau} = b_{\alpha\beta} b_{\tau\epsilon} - b_{\alpha\tau} b_{\beta\epsilon},$$

és

$$(67) \quad R_{1212} = b_{11} b_{22} - b_{12}^2.$$

Ezekből igen fontos eredményt tudunk leolvasni. II.szerint  $R_{\alpha\beta\tau}^\sigma$  a másodfajú Christoffel-féle szimbólumok, így a 44. pont szerint az első alapmenyiségek bizonyos függvénye. Így III. egy összefüggést ábrázol az első és másod-



dik alaplennységek között, melynek szükségképpen teljesedni kell. De IV. szerint  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  és így  $R_{1212}$  is csak az első alaplennységek függvénye. De (67) a Gauss-féle görbület számlálója. Így (67) szerint a Gauss-féle görbület csak az első alaplennységek függvénye. Gauss ezt a nevezetes tételt theorema egregiumnak nevezte.

Most vizsgáljuk meg még, hogy mit jelent I.-ben az  $\mathcal{H}$  együtthatójának az eltűnése. Amint látjuk ez  $\beta = \bar{\gamma}$ -ra azonosan zéró, így nem jelent semmilyen feltételt. Így legyen  $\beta = 1, \bar{\gamma} = 2$ . Ekkor

$$(68) \quad \frac{\partial h_{\alpha 1}}{\partial u^2} - \frac{\partial h_{\alpha 2}}{\partial u^1} + h_{2\delta} \Gamma_{\alpha 1}^{\delta} - h_{1\delta} \Gamma_{\alpha 2}^{\delta} = 0$$

Ez a két egyenlet újra egy szükséges összefüggést ábrázol az első és a második alaplennységek között. A  $\bar{\gamma} = 1, \beta = 2$ -re ugyanezt kapjuk negatív előjellel, így az nem jelent külön feltételt. Ezeket az egyenleteket Mainardi-Codazzi-féle egyenleteknek nevezzük.

Kérdés, hogy az eddig megállapított szükséges feltételek elegendők-e.

A válasz igenlő. Bonnet tétele, vagy a felületelmélet főtétele szerint ha az adott  $g_{\alpha\beta}$  és  $b_{\alpha\beta}$  függvények eleget tesznek a theorema egregiumnak, és a Mainardi-Codazzi-féle egyenleteknek, valamint a  $g_{\alpha\beta}$  egy pozitív definit kvadrátikus alak együtthatói, úgy van olyan felület, és mozgásoktól eltekintve csak egy olyan felület van, melynek ezek az első ill. második alaplennységei.

A bizonyítás a görbék elmélete megfelelő tételének bizonyítása hoz hasonlóan azon mulik, hogy a differenciálegyenletrendszernek felfogott Gauss és Weingarten a fenti feltételek mellett integrálhatók, azaz a differenciálegyenletrendszernek van megoldása. Ezért a fenti feltételeket integrabilitási feltételeknek is szokták nevezni.

#### 49. Felületek egymásra való leképezései.

Legyen adva az

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(u^1, u^2) \quad \text{és az} \quad \bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

felület. Képezzük le a második felület pontjait az első felület pontjaira az

$$u^{\alpha} = u^{\alpha}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$



függvények segítségével. Legyen ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű, azaz legyen

$$\frac{\partial (u^1, u^2)}{\partial (\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \neq 0,$$

és legyenek az inverz függvények

$$I. \quad \bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^1, u^2).$$

Hajtsuk végre az I. paramétertranszformációt második felületen, így

$$\bar{u} = \bar{u}(u^1, u^2).$$

Igy a két felület megfelelő pontjai ugyanazon paraméterértékekhez tartoznak.

Az  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  függvények a két felületen egymásnak megfelelő görbéket, az  $\dot{u}^\alpha(t_0)$  egymásnak megfelelő irányokat az  $u^1, u^2$  síknak egy  $T$  tartománya pedig a két felületen egymásnak megfelelő felületdarabokat határoz meg.

Két felület olyan kölcsönösen egyértelmű leképezését, ahol az egymásnak megfelelő pontokban az első alapmennyiségek is megegyeznek izometrikus leképezésnek, vagy hajlításnak nevezzük.

Mivel az ívhossz éppúgy mint a szög és a felszín csak az első alapmennyiségek segítségével van meghatározva, így az ilyen leképezés távolság, szög és felszín-tartó. Innen az izometrikus elnevezés. Ha egy papírlapot hajlítunk, és az eredeti és utolsó forma megfelelő pontjait egymásra vonatkoztatjuk, úgy ez ilyen leképezést jelent. Innen a hajlítás elnevezés.

Legyen most két felület kölcsönösen egyértelműen vonatkoztatva egymásra, most azonban nem tesszük fel, hogy ez a leképezés izometrikus. Legyen ez a két felület az

$$u = u(u^1, u^2) \quad \text{és az} \quad \bar{u} = \bar{u}(u^1, u^2).$$

Értelmezni akarjuk a leképezés torzítását. A leképezés torzítását egy pontban valamely irányban a pontból az illető irányba kiinduló ívelem, és a megfelelő ívelem hányadosának határértékeként fogjuk értelmezni, ha az ívelem az illető pontra huzódik össze.

$$(69) \quad \lambda = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{s}}{\Delta s}$$

A két ívelem hossza



$$\bar{s} = \int_{t_0}^t \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} dt \quad \text{és} \quad s = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} dt$$

így

$$\left(\frac{d\bar{s}}{dt}\right)^2 = \bar{g}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \quad \text{és} \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

Tudjuk hogy az  $s = s(t)$  függvénynek létezik az inverz függvénye. Jelöljük ezt  $t = t(s)$ -el. Így  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{ds}}$ . Vezessük be a  $t = t(s)$  transzformációt az  $\bar{s} = \bar{s}(t)$  függvénynél. Így

$$\left(\frac{d\bar{s}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\bar{s}}{ds} \frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = \frac{\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}$$

Azaz

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \bar{s}}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = \lambda^2$$

Mivel az I. integrálokban  $\bar{s}$  és  $s$  előjele egyformán kisebb vagy nagyobb mint zéró aszerint amint az integrál felső határa kisebb vagy nagyobb mint az alsó, úgy  $\frac{\Delta \bar{s}}{\Delta s}$  mindig pozitív így

$$\lambda = \lambda(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) = + \sqrt{\frac{\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}}$$

Vizsgáljunk most egy távolságtartó leképezést. Ebben az esetben seholsincs torzítás, azaz  $\lambda \equiv 1$ . De így

$$\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \equiv g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

Az  $\dot{u}^1, \dot{u}^2$  közül legalább az egyik nem zéró. Legyen  $\dot{u}^2 \neq 0$ , osszunk  $(\dot{u}^2)^2$ -el és írjuk a következő alakban az azonosságot

$$(\bar{g}_{11} - g_{11}) \left(\frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2}\right)^2 + 2(\bar{g}_{12} - g_{12}) \frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} + (\bar{g}_{22} - g_{22}) \equiv 0$$

Ez azonban csak úgy teljesedhet azonosan ha az együtthatók zérók, mert különben egy legfeljebb másodfoku egyenletnek végtelen sok megoldása lenne. Tehát ha a leképezés távolságtartó, úgy

(70)

$$g_{\alpha\beta} \equiv \bar{g}_{\alpha\beta}$$



A harmadik bekezdésben megmutattuk, hogy (70) elegendő ahhoz, hogy a leképezés távolságtartó legyen, most pedig megmutattuk, hogy ez szükséges is. De mivel (70) egyuttal a szög és felszintartáshoz is elegendő, így minden távolságtartó leképezés egyuttal szög és felszintartó is.

Legyen most a leképezés olyan, hogy a torzítás egy pontban minden irányban ugyanaz, de különböző pontokban általában különböző. Így  $\lambda$  csak a helynek a függvénye, azaz

$$\bar{g}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = \lambda^2 g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

Az előzőhöz hasonló megfontolás alapján

$$(\bar{g}_{11} - \lambda^2 g_{11}) \left( \frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} \right)^2 + 2(\bar{g}_{12} - \lambda^2 g_{12}) \frac{\dot{u}^1}{\dot{u}^2} + (\bar{g}_{22} - \lambda^2 g_{11}) = 0$$

azaz

$$I. \quad \bar{g}_{\alpha\beta}(u^1, u^2) = \lambda^2(u^1, u^2) g_{\alpha\beta}(u^1, u^2).$$

Az ilyen leképezés azonban pontonként szögtartó. Ami azonnal belátható, ha a 34. pont szerint képezzük a két felület  $u_0^\alpha$  pontjában az  $\dot{u}_1^\alpha$  és  $\dot{u}_2^\alpha$  irányok által meghatározott szögeket, figyelembe vesszük I-et, és  $\lambda^2$ -el egyszerűsítünk. Tehát I. a szögtartás elegendő feltétele.

Legyen most a leképezés felszintartó, azaz az  $u^\alpha$  bármely  $T$  tartományára

$$\iint_T \sqrt{\bar{g}} du^1 du^2 = \iint_T \sqrt{g} du^1 du^2.$$

Állítjuk ekkor

$$II. \quad \bar{g} = g.$$

Tegyük fel hogy az  $u_0^\alpha$  pontban  $\bar{g}_0 \neq g_0$ , hanem pl.  $\bar{g}_0 > g_0$ . A  $\bar{g}$  és a  $g$  a folytonos  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  ill.  $g_{\alpha\beta}$  mennyiségeknek racionális egész függvénye, így maga is folytonos. Így van az  $u_0^\alpha$  pontnak olyan  $B$  környezete, amelyben mindenhol  $\bar{g} > g$ . De így  $\iint_B \sqrt{\bar{g}} du^1 du^2 \neq \iint_B \sqrt{g} du^1 du^2$  lenne ellentétben a feltevésünkkel.

Hogy II. a felszintartáshoz elegendő, az nyilvánvaló.

Megjegyezzük még hogy mivel a theorema egregium szerint a Gauss-~~féle~~ görbület csak az első alapmennyiségek függvénye így (70) szerint izometrikus le-



képezéssel szemben invariáns. Tehát két felület izometrikus leképezésekor a Gauss-féle görbületeknek az egymásnak megfelelő pontokban való megegyezése szükséges feltétel.

Ez azt jelenti, hogy pl. a gömb, melynek minden pontjában a Gauss-féle görbület  $\frac{1}{r^2} > 0$  nem képezhető le izometrikusan a síkra, melynek a Gauss-féle görbülete mindenhol zéró. A szögtartás, vagy a felszintartás enyhébb feltétele azonban külön-külön kielégíthető. Ezeknek a megállapításoknak a térképészetben van gyakorlati jelentőségük.

#### 50. A felület gömbi képe.

Megmutatjuk hogy a Gauss-féle görbület a síkgörbék görbületének általánosítása a felületekre. Egy görbe görbületét az ívhossz szerinti második differenciálhányados abszolútértékeként értelmeztük, de megmutattuk, hogy ez ugyanaz mint a görbe érintőivel képezett gömbi kép ívhossza, és a megfelelő görbe ívhossz hányadosának határértéke. Síkgörbe esetén a gömbi kép körképpé fajul, és az érintő és a főnormális által leírt körív egyenlő. Ennek általánosításakor ívhossz helyett felszint fogunk venni, a gömbi leképezést pedig a felületi normálisok segítségével értelmezzük.

Tehát tekintsünk egy kétszer folytonosan differenciálható felületet

$$I. \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(u^1, u^2)$$

Mérjük fel I. felületi normálisait az origóból. Ezen pontokat az

$$II. \quad \bar{\mathcal{N}} = \mathcal{N}(u^1, u^2)$$

vektorfüggvény állítja elő. Ezek a pontok az egység sugarú gömbön helyezkednek el. II.-t az I. gömbi képének nevezzük. Mivel II. a feltételünk szerint folytonosan differenciálható, így II. a 26. pont értelmében felületet állít elő, ha még a  $\left\| \frac{\partial \bar{\mathcal{N}}}{\partial u^a} \right\|$  rangja kettő. Szorítkozzunk ilyen pontokra. Mivel így II. pontjai és az  $u^1, u^2$  értelmezési tartományának pontjai között, valamint az értelmezési tartomány és az I. pontjai között is kölcsönös egyértelmű a vonatkoztatás, így I. és II. pontjai között is az.

Tekintsünk I.-en egy  $P(u_0^1, u_0^2)$  pontot. Vegyünk egy körülötte fekvő felületdarabot, és írjuk fel ennek a felszínét:



$$F = \iint_T \sqrt{g} \, du^1 du^2$$

Vegyük a felületdarab gömbi képét, és írjuk fel annak felszínét:

$$F_g = \iint_T \sqrt{g} \, du^1 du^2$$

Állítjuk hogy

$$(71) \quad \lim_{T \rightarrow u_0^\alpha} \frac{\iint_T \sqrt{g} \, du^1 du^2}{\iint_T \sqrt{g} \, du^1 du^2} = K(u_0^1, u_0^2),$$

ahol  $T \rightarrow u_0^\alpha$  azt jelenti, hogy a tekintett felületdarab a  $P(u_0^1, u_0^2)$  pontra huzódik össze.

Számítsuk ki a  $\bar{g}$ -t, azaz II. első alapmennyiségeinek determinánsát.

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x}{\partial u^\beta} = b_\alpha^\epsilon \frac{\partial x}{\partial u^\epsilon} b_\beta^\mu \frac{\partial x}{\partial u^\mu} = b_\alpha^\epsilon b_\beta^\mu g_{\epsilon\mu} = b_{\alpha\mu} b_\beta^\mu = b_{\alpha\mu} g^{\mu\tau} b_{\beta\tau}$$

így

$$|\bar{g}_{\alpha\beta}| = |b_{\alpha\mu}| |g^{\mu\tau}| |b_{\beta\tau}| = \frac{b^2}{g}$$

és mivel  $\frac{b}{g} = K$  ;  $b = Kg$

$$\bar{g} = |\bar{g}_{\alpha\beta}| = bK = K^2 g$$

Ezek figyelembevételével

$$\lim_{T \rightarrow u_0^\alpha} \frac{\iint_T \sqrt{\bar{g}} \, du^1 du^2}{\iint_T \sqrt{g} \, du^1 du^2} = \lim_{T \rightarrow u_0^\alpha} \frac{\iint_T K \sqrt{g} \, du^1 du^2}{\iint_T \sqrt{g} \, du^1 du^2}$$

Alkalmazva az integrálszámítás középértéktételét és a paramétersíkban lévő  $T$  tartomány felszínét is  $T$ -vel jelölve a fenti kifejezés

$$\lim_{T \rightarrow u_0^\alpha} \frac{T K(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \sqrt{g(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}}{T \sqrt{g(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}}$$

alakú lesz, ahol  $\bar{u}^\alpha$  és  $\bar{u}^\alpha$  a  $T$  tartomány valamely pontja. Áttérve a határértékre



$$\lim_{T \rightarrow u_0^\alpha} \frac{\iint_T \sqrt{g} du^1 du^2}{\iint_T \sqrt{g} du^1 du^2} = \frac{\mathcal{K}(u_0^1, u_0^2) \sqrt{g(u_0^1, u_0^2)}}{\sqrt{g(u_0^1, u_0^2)}} = \mathcal{K}(u_0^1, u_0^2)$$

amint állítottuk.

### 51. Torzfelületek lefejtése.

Állítjuk, hogy a torzfelületek mind lefejthetők, azaz izometrikusan leképezhetők egymásra.

Ezt azáltal bizonyítjuk be, hogy kimutatjuk, hogy bármely torzfelület lefejthető a síkra.

Legyen a torzfelület az

$$I. \quad \mathcal{M}(s, t) = \mathcal{C}(s) + t \mathcal{M}(s) \quad ; \quad (\mathcal{C}', \mathcal{M}', \mathcal{M}) = 0$$

alakban előállítva. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $\mathcal{C}$  az alkotók egy orthogonális trajektóriája, s az  $\mathcal{C}$  ívhossza, és  $\mathcal{M}(s)$  is egy-ségvektor, azaz

$$II. \quad \mathcal{C}'^2 = 1, \quad \mathcal{M}^2 = 1, \quad \mathcal{C}' \mathcal{M} = 0.$$

Feladatunkat úgy oldjuk meg, hogy a síkot olyan paramétervonal rendszerre vonatkoztatjuk, hogy az egymásnak megfelelő pontokban az első alapmennyiségek egyenlők.

Számítsuk ki az I. felület alapmennyiségeit

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial s} = \mathcal{C}' + t \mathcal{M}', \quad \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = \mathcal{M}$$

II. figyelembevételével

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + 2t \mathcal{C}' \mathcal{M}' + t^2 \mathcal{M}'^2 \\ g_{12} &= 0 \\ g_{22} &= 1 \end{aligned}$$

A síkot állítsuk elő az

$$III. \quad \bar{\mathcal{M}}(s, t) = \bar{\mathcal{C}}(s) + t \bar{\mathcal{M}}(s) \quad (\bar{\mathcal{C}}'^2 = 1, \quad \bar{\mathcal{M}}^2 = 1, \quad \bar{\mathcal{C}}' \bar{\mathcal{M}} = 0)$$

alakban.

Igy itt az alapmennyiségek



$$\bar{g}_{11} = 1 + 2t \bar{e}' \bar{\eta}' + t^2 \bar{\eta}'^2$$

$$\bar{g}_{12} = 0$$

$$\bar{g}_{22} = 1$$

Igy az egymásnak megfelelő  $P(s, t)$  és  $\bar{P}(s, t)$  pontokban akkor lesznek egyenlők az alapmennyiségek, ha

II.  $\bar{e}' \bar{\eta}' = e' \eta'$  és  $\bar{\eta}'^2 = \eta'^2$ .  
Tehát célunk adott torzfelület mellett  $\bar{e}(s)$ -t és  $\bar{\eta}(s)$ -t úgy meghatározni, hogy ennek eleget tegyenek.

Két esetet fogunk megkülönböztetni.

1.)  $\eta' = U$ , azaz a felület henger.

Igy  $e' \eta' = 0$ ,  $\eta'^2 = 0$ , és  $g_{11} = 1$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{22} = 0$ , tehát k-hogy  $\bar{e}' \bar{\eta}' = 0$ ;  $\bar{\eta}'^2 = 0$  legyen. Az utóbbi csak úgy lehetséges ha  $\bar{\eta}(s) = \text{konst.}$ , az első pedig az  $\bar{e}' \bar{\eta}' = 0$  feltétel miatt csak úgy ha  $\bar{e}' = U$ ; azaz  $\bar{e}(s) = \bar{u} + s U$ . Valamint a III.feltételek miatt:  $\bar{e}^2 = \bar{e}$ . Ebben az esetben

$$\bar{x}(s, t) = \bar{u} + s U + t \bar{e}$$

és

$$g_{11} = 1 \quad g_{12} = 0 \quad g_{22} = 1,$$

a leképezés izometrikus. Az V. által meghatározott koordinátarendszer Descartes-féle orthogonális koordináta rendszer.

2.)  $\eta' \neq U$ .

Határozzuk meg az  $\bar{e}' \bar{\eta}'$  és az  $\bar{\eta}'^2$  értékeit. Mivel  $(e', \eta', \eta) = 0$  így van olyan egyszerre nem mind zéró  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$ ,  $\gamma(s)$ , hogy

$$\alpha e' + \beta \eta' + \gamma \eta = U.$$

Mivel most sem  $\eta$  sem  $\eta'$  nem nullvektor, így ezek az  $\eta'^2 = 1$ -ből következő  $2\eta \eta' = 0$  szerint egymásra merőlegesek, és így lineárisan függetlenek, azaz  $\beta \eta' + \gamma \eta \neq U$ . Így  $\alpha \neq 0$ . Osszunk  $\alpha$ -val:

$$e' = \lambda \eta' + \mu \eta$$

$\eta$ -al szorozva II. figyelembevételével adódik, hogy  $\mu = 0$ . Így



VI.

amiből

$$\bar{c}' = \lambda \eta'$$

$$\begin{aligned} \bar{c}'^2 &= \lambda \bar{c}' \eta' \\ \bar{c}' \eta' &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

VI-ot négyzetreemelve

$$\begin{aligned} \bar{c}'^2 &= \lambda^2 \eta'^2 \\ \eta'^2 &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

és

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\eta'^2}}$$

Igy kell hogy

VII.

$$\bar{c}' \eta' = \frac{1}{\lambda}$$

legyen. Vezessük be pillanatnyilag az

$$\eta'^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \text{ azaz } \eta' = \frac{1}{\lambda} \bar{c}'$$

juk meg a  $\eta' = \frac{1}{\lambda} n$  mellett még az  $n' = -\frac{1}{\lambda} \eta'$  fennállását is.

$$\eta' = \frac{1}{\lambda} n$$

VIII.

$$n' = -\frac{1}{\lambda} \eta'$$

De ezek éppen a Frenet-féle képletek. A 48. pont szerint folytonos  $\frac{1}{\lambda(s)}$  esetén van olyan  $\eta = \bar{\eta}$  és  $n = \bar{c}'$  függvény mely VIII.-nak, és így VII.-nek is eleget tesz. Tehát az így kapott  $\bar{\eta}(s)$  és  $\bar{c}(s) = \int \bar{c}'(s) ds$  függvények segítségével a síkon a III.szerint bevezetett koordinátarendszer olyan, hogy az egymásnak megfelelő pontokban az első alapmennyiségek egyenlők.

Nem bizonyítottuk még, hogy a leképezés kölcsönösen egyértelmű. De ez az egész felületre nem is áll fenn mindig. Pl. olyan kup esetén, melynek a kup csúcspontja körül rajzolt egységsugarú gömbbel való metszetgörbájének a hossza nagyobb mint  $2\pi$ . Tudniillik a kifejtésnél ez a görbe egy körbe megy át, melynek lesznek kétszer számító pontjai.

Igy ez a leképezés a felületnek egy olyan darabjára izometrikus, amelyre a leképezés kölcsönösen egyértelmű.

Még megjegyezzük, hogy torzfelületre más felület nem képezhető le izometrikusan. Egy torzfelület minden pontjában  $K \neq 0$ , így erre a felületre a 49. pont szerint csak olyan felület fejthető le, melynek megvan a hasonló tulajdon-



sága. Ilyen felület pedig a 47. pont szerint csak torzfelület lehet.

### 52. Belső geometria.

Legyen adva egy

$$I. \quad g_{\alpha\beta} (u^1, u^2) y^\alpha y^\beta$$

pozitív definit kvadratikus forma, amiben nyilván csak a  $g_{\alpha\beta}$  koeficienssek a lényegesek. Tekintsük az összes ilyen első alapformával rendelkező felületet, tehát az összes ezek közül valamelyikre izometrikusan leképezhető felületet. Mivel két felületen az első alapformák meg egyezése, és bármely két egymásnak megfelelő görbeív hosszának a meg egyezése a 49. pont szerint *equivalens*, és továbbá ez az egész metrika meg egyezését jelenti a két felületen, így azt is mondhatjuk, hogy tekintsük az összes az I. által meghatározott metrikával rendelkező felületet.

Ez a metrika azonban már a paraméter síkban is tanulmányozható. Legyen pl. az  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  által a felületeken egy görbe és a  $t_1$ , és  $t_2$  által annak egy íve meghatározva. Az  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  függvények és a  $t_1, t_2$  értékek a paraméter síkban is egy görbe ívet határoznak meg. Ennek a görbeívnek a közös ívhossza  $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{u}^1{}^2 + \dot{u}^2{}^2} dt$ , míg ennek a felületeken megfelelő görbe ívhossza

$$II. \quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} dt$$

Ha azonban a paramétersíkban ilyen szabály szerint mérjük az ívhosszat annak megvan az az előnye, hogy az így mért ívhossz meg egyezik a görbének a felületeken megfelelő görbe ívhosszával. Hasonlóképpen az egy pontban értelmezett  $\dot{u}_1^\alpha$  és  $\dot{u}_2^\alpha$  irányok szögének cosinusán ne a  $\cos \alpha = \frac{\dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\alpha}{\sqrt{\dot{u}_1^\beta \dot{u}_1^\beta} \sqrt{\dot{u}_2^\gamma \dot{u}_2^\gamma}}$  hanem

$$III. \quad \cos \alpha = \frac{g_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_1^\beta} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}_2^\alpha \dot{u}_2^\beta}}$$

és az  $u^\alpha$  egy  $T$  tartományának felszínén ne az  $\iint_T du^1 du^2$  kifejezést,

hanem az  
Sz.TTK.9968.



IV. 
$$F = \iint_T \sqrt{|g_{\alpha\beta}|} du^1 du^2$$

értéket értsük. Az I. segítségével II., III. és IV. által egy új geometriát értelmeztünk. Ennek a különleges metrikának megvan az az előnye, hogy a megfelelő elemekre a felületen fennálló közönséges metrikával azonos.

A belső geometria ezen felületek közös tulajdonságaival foglalkozik. Mivel azonban a metrika ezeken a felületeken, és ebben a síkgeometriában közös, így a metrikus tételek is közösek. Tehát az I. -hez tartozó felületek belső geometriája, vagy az I., ..., IV. által meghatározott síkgeometria ekvivalens.

Ezeknek a gondolatoknak többdimenziós terekre való kiterjesztései képezik a Riemann-féle geometriák kiindulását.

Megjegyezzük, hogyha egy kifejezés csak az első alaplennységek segítségével kifejezhető, úgy az belső geometriai tulajdonságot jelent. T.i. hajlítással szemben az első alaplennységek, és így az egész kifejezés invariáns. Mi a továbbiakban a belső geometriai tulajdonságok megállapításának ezt az útját fogjuk követni. Nem az I., ..., IV. által meghatározott síkgeometriát, hanem továbbra is konkrét felületeket fogunk tanulmányozni, és igénybe vesszük a felületet körülvevő háromdimenziós teret is, és ha egy eredményünkről kimutatjuk, hogy az csak az első alaplennységek segítségével megfogalmazható, úgy azt belső geometriai tulajdonságnak fogjuk nevezni.

Megjegyezzük még, hogy a most értelmezett új síkgeometria speciálesenként tartalmazza a régi u.n. euklideszi geometriát is. Ha t.i.  $g_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}$  úgy az ívhossz, szög és felszín az ezekre definiált közönséges értékeket veszi fel.

### 53. Geodetikus vonalak.

Legyen adva a kétszer folytonosan differenciálható  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(u^1, u^2)$  felület, és annak két  $u_1^\alpha, u_2^\alpha$  pontja. Kérdezzük, hogy melyik a legrövidebb ívhosszugörbe a két pont között. Azaz mely  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  függvények elégítik ki az

I. 
$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} dt = \min ! \quad u^\alpha(t_1) = u_1^\alpha, \quad u^\alpha(t_2) = u_2^\alpha$$

feltételt.

Sz.TTK.9968.



Ez a kérdés a variációszámításhoz vezet.

Jelölje  $\xi(t)$  az  $n$  dimenziós térben az  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  értékek által meghatározott pontot és legyen

$$F = F(\xi, \xi', \dots, \xi^{(k)})$$

ahol  $F$  a változóknak kétszer folytonosan differenciálható függvénye. Kérdés hogy melyik az az  $\xi = \xi(t)$  görbe, azaz melyek azok az  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  függvények, melyekre

$$II. \quad J = \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \xi', \dots, \xi^{(k)}) dt = \min !$$

ugy hogy

$$III. \quad \xi(t_1) = \xi_1, \quad \xi(t_2) = \xi_2$$

amit kerületi feltételnek nevezünk.

Bár ez is szélsőérték feladat, mégis sokban különbözik a közönséges szélsőérték feladatoktól. Függvényoperáción olyan függvényeket értünk, mely függvényekhez rendel hozzá számokat, tehát olyan függvény melynek értelmezési tartománya függvényekből, értékészlete számokból áll. Ilyen függvény operáció pl. II., mely az  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  függvényekhez rendeli hozzá az  $J$  számot, és minden határozott integrál. A variációszámítás általában függvényoperációknak, szűkebb értelemben éppen integrálok szélsőértékeinek kiszámításával foglalkozik, mely szélsőértékek még bizonyos feltételeknek, itt pl. a III.-nak tesznek eleget.

Szoritkozzunk a  $k = 1$  esetre, és keressünk a szélsőértékhez szükséges feltételeket. Tegyük fel tehát hogy az  $\xi = \xi_0(t)$  II-t, és III.-at már kielégíti, és legyen e mentén

$$\int_{t_1}^{t_2} F(\xi_0, \xi_0') dt = J_0.$$

Vegyük egy III.-at kielégítő folytonosan differenciálható  $\xi(t)$  görbét.

Az ilyen görbék képezik a megengedhető konkurrenciát. Ilyen görbék mentén az integrál csak nagyobb vagy egyenlő lehet mint  $J_0$ . Ilyen görbéket úgy kapunk, ha az  $\xi_0(t)$  - hez olyan folytonosan differenciálható vektorfüggvényeket adunk hozzá, melyek értéke a  $t_1$  és  $t_2$  -ben nullvektor. Legyen tehát



IV.

$$u = u(t)$$

$$u(t_1) = u(t_2) = v$$

egy folytonosan differenciálható vektorfüggvény. Így a konkurencia az

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \varepsilon u(t)$$

görbesereg, mely  $\varepsilon$  minden értékére egy görbét ad. Ezek mentén a II. integrál  $\varepsilon$  függvénye.

$$\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \dot{\xi}) dt = J(\varepsilon)$$

De  $J(\varepsilon)$ -nak az  $\varepsilon = 0$  helyen szélső értéke van. Így szükségképpen

$$J'(\varepsilon)|_0 = J'(0) = 0.$$

Számítsuk ki  $J'(0)$ -at. Képezzük először az  $J'(\varepsilon)$ -t. Mivel  $F$  folytonosan differenciálható, szabad az integráljel alatt differenciálni.

$$J'(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ F_{\xi}(\xi, \dot{\xi}) u + F_{\dot{\xi}}(\xi, \dot{\xi}) \dot{u} \right] dt,$$

ahol

$$F_{\xi}(\xi, \dot{\xi}) u = \sum_{i=1}^n F_{x_i}(x_1(t), \dots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) a_i(t)$$

és így

$$J'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ F_{\xi}(\xi_0, \dot{\xi}_0) u + F_{\dot{\xi}}(\xi_0, \dot{\xi}_0) \dot{u} \right] dt.$$

A második tagot parciálisan integrálva

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\dot{\xi}} \dot{u} dt = \left[ F_{\dot{\xi}} u \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} (F_{\xi}) u \right] dt.$$

IV. miatt azonban a kiintegrált rész eltűnik. Így

$$V. \quad J'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left( F_{\xi} - \frac{d}{dt} F_{\dot{\xi}} \right) u dt = 0.$$

Ez azonban csak úgy teljesül, ha

$$F_{\xi} - \frac{d}{dt} F_{\dot{\xi}} = 0,$$

azaz ha

Sz.TTk.9968.



$$(72) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Egyébként u.i. a IV-nek elegettevő  $M$  komponensei mindig választhatók úgy, hogy az V. integrál pl. pozitív legyen.

(72) tehát a szélsőérték szükséges feltétele.

(72) egy másodrendű differenciálegyenletrendszer, az u.n. Euler-Lagrange féle differenciálegyenletrendszer.

Mivel (72) csak szükséges feltétel, így a (72) megoldásairól nincs biztosítva hogy azok II-t mind kielégítik, mégis a (72) megoldásait extrémálisoknak szokás nevezni.

Térjünk vissza az eredeti I. problémára.

A megoldások az I. problémához tartozó Euler-Lagrange-féle differenciálegyenletrendszer megoldásai közt vannak. Itt most

$$F = F(u^1, u^2, \dot{u}^1, \dot{u}^2) = \sqrt{g_{\alpha\beta}(u^1, u^2) \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}$$

Azaz  $k = 1$ ,  $n = 2$ , és az  $x$ -ek helyett  $u$ -kat használunk.

Irjuk fel az Euler-Lagrange-féle differenciál egyenletrendszert.

$$\frac{\partial F}{\partial u^\epsilon} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial u^\epsilon} - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\epsilon \partial u^\alpha} \dot{u}^\alpha - \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\epsilon \partial \dot{u}^\alpha} \ddot{u}^\alpha$$

Képezzük az itt szereplő kifejezéseket.

$$\frac{\partial F}{\partial u^\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\epsilon} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = \frac{1}{2F} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\epsilon} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\epsilon} = \frac{1}{2F} 2 g_{\epsilon\beta} \dot{u}^\beta$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\epsilon \partial u^\alpha} = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} g_{\epsilon\beta} \dot{u}^\beta + \frac{1}{F} \frac{\partial g_{\epsilon\beta}}{\partial u^\alpha} \dot{u}^\beta$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^\epsilon \partial \dot{u}^\alpha} = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\alpha} g_{\epsilon\beta} \dot{u}^\beta + \frac{1}{F} g_{\epsilon\alpha}$$

Ezek alapján az Euler-Lagrange-féle egyenlet

$$\frac{1}{2F} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\epsilon} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} g_{\epsilon\beta} \dot{u}^\beta \dot{u}^\alpha - \frac{1}{F} \frac{\partial g_{\epsilon\beta}}{\partial u^\alpha} \dot{u}^\beta \dot{u}^\alpha +$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\alpha} g_{\sigma\beta} \dot{u}^\beta \ddot{u}^\alpha - \frac{1}{F} g_{\sigma\alpha} \ddot{u}^\alpha = \\
 & = \frac{1}{F} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial u^\beta} \right) \dot{u}^\beta \dot{u}^\alpha - g_{\sigma\alpha} \ddot{u}^\alpha \right] + \\
 & + \frac{1}{F^2} \left( \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} \dot{u}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\alpha} \ddot{u}^\alpha \right) g_{\sigma\beta} \dot{u}^\beta = 0
 \end{aligned}$$

azonban

$$\frac{d}{dt} \log F = \frac{1}{F} \left( \frac{\partial F}{\partial u^\alpha} \dot{u}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial \dot{u}^\alpha} \ddot{u}^\alpha \right),$$

és figyelembevée az elsőfajú Christoffel-féle szimbólumoknak a 44. pontban adott értelmezését

$$\frac{1}{F} \left( -\Gamma_{\alpha\sigma\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta - g_{\sigma\alpha} \ddot{u}^\alpha \right) + \frac{1}{F} \left( \frac{d}{dt} \log F \right) g_{\sigma\beta} \dot{u}^\beta = 0$$

azaz

$$g_{\sigma\alpha} \ddot{u}^\alpha + \Gamma_{\alpha\sigma\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = \left( \frac{d}{dt} \log F \right) g_{\sigma\beta} \dot{u}^\beta.$$

Szorozzuk ezt  $g^{\sigma\tau}$ -vel

$$\ddot{u}^\tau + \Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = \left( \frac{d}{dt} \log F \right) \dot{u}^\tau$$

Tekintsük most az ívhosszat paraméternek. Ekkor  $F = \sqrt{g_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta} = 1$ , így

$$(73) \quad \frac{d^2 u^\tau}{ds^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^{\tau} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds}.$$

Ez tehát az eredeti problémánkhoz tartozó Euler-Lagrange-féle differenciálegyenletrendszer. Ebből sokmindent leolvashatunk.

Ennek a megoldásait geodetikus vonalaknak nevezzük.

Mivel (73) teljesülése az eredeti problémánk megoldásához csak szükséges feltétel, így a legrövidebb vonalak geodetikus vonalak, de nem minden geodetikus vonal jelenti a legrövidebb utat.

(73) másodrendű differenciálegyenletrendszer. Ennél nemcsak azt szabhatjuk meg, hogy a megoldás milyen pontból induljon ki, hanem azt is, hogy milyen irányban. Így minden ponthoz és irányhoz tartozik egy geodetikus vonal.

Továbbá mivel a másodfajú Christoffel-féle szimbólumok csak az első alapmennyiségek függvényei, és a geodetikus vonalak differenciálegyenletrendszere csak ezek segítségével van meghatározva, így ez hajlítással szemben inva-  
Sz.TTK.9968.



riáns, azaz egy geodetikus vonal a felület hajlítása után is geodetikus vonal marad. Tehát hogy egy vonal geodetikus-e vagy sem az belső geometriai tulajdonság.

(73) egyszerű következménye, hogy az euklideszi síkban, tehát a közöséges euklideszi metrikával felruházott síkban két pont közti legrövidebb távolság az egyenes. Mert ha az euklideszi síkot derékszögű koordinátarendszerre vonatkoztatjuk, úgy  $g_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\beta}$ , és így  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$ , azaz a geodetikus vonalak egyenlete  $\frac{d^2 u^{\gamma}}{ds^2} = 0$ , a megoldások pedig egyenesek.

(73) segítségével a geodetikus vonalaknak egy karakterisztikus tulajdonságát adhatjuk meg. Azt állítjuk, hogy egy geodetikus vonal mentén a görbe főnormálisának iránya összeesik a felületi normális irányával és fordítva, ha ez teljesül, úgy a görbe geodetikus vonal.

Legyen  $\ell = \ell(s)$  egy az ívhosszra mint paraméterre vonatkoztatott felületi görbe az  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(u^1, u^2)$  felületen. Így a Frenet képletek szerint

VI.

$$\frac{d^2 \ell}{ds^2} = C \ell.$$

Más részből

$$\text{VII.} \quad \frac{d^2 \ell}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}} u'^{\alpha} \right) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha} \partial u^{\beta}} u'^{\alpha} u'^{\beta} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\alpha}} u''^{\alpha}$$

VI. és VII., valamint a Gauss-féle egyenletek szerint

$$\text{VIII.} \quad C \ell = \left( \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} u'^{\alpha} u'^{\beta} + u''^{\gamma} \right) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\gamma}} + b_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta} \mathcal{H}$$

Ha azonban  $\ell$  geodetikus vonal úgy (73) szerint  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\gamma}} = 0$ , és  $\ell = \mathcal{H}$ . Fordítva: ha  $\ell = \mathcal{H}$  úgy  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\gamma}} = 0$ , azaz a görbe geodetikus vonal.

VIII.-ből az is következik, hogy ha  $\ell$  egyenes, azaz  $C \equiv 0$ , úgy  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u^{\gamma}} = 0$  együtthatója is eltűnik, azaz minden egyenes geodetikus vonal.

Végül VIII-ből azt is leolvashatjuk, hogy egy geodetikus vonal görbülete  $C = |b_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta}|$ . Ez azonban egyébként is következik (45)-ből, figyelembevéve hogy ha a görbe az ívhosszra van vonatkoztatva úgy  $g_{\alpha\beta} u'^{\alpha} u'^{\beta} = 1$ .



#### 54. Geodetikus görbület.

Egy  $\ell(s)$  felületi görbe egy  $P$  pontjában a görbe geodetikus görbületén értjük azon  $\bar{\ell}(s)$  görbe  $P$ -beli bizonyos előjellel ellátott közönséges görbületét, melyet úgy kapok, ha az eredeti görbét merőleges vetítéssel a felület illető pontbeli érintősíkjaára vetítjük. A geodetikus görbületet  $C_g$ -vel fogjuk jelölni.

Állítjuk, hogy az ivhosszra mint paraméterre vonatkoztatott  $\ell(s)$  görbe geodetikus görbülete a  $s$  pontban

$$(74) \quad C_g(s) = (\ell'(s), \ell''(s), \mu(s)) .$$

Tekintsük az  $\ell(s)$ -nek az érintősíkra való vetítésekor a vetítésugarak által alkotott hengert.  $\bar{\ell}(s)$  ennek egy normálmetszete. Továbbá a  $P$ -beli  $\ell'(s)$  és  $\bar{\ell}'(s)$  egyirányúak. Így Meusnier tétele értelmében a két görbe görbülete között a  $P$  pontban a

$$\bar{C}(s) = C(s) |\cos \alpha|$$

összefüggés áll fenn, ahol  $\bar{C}$  az  $\bar{\ell}$   $P$  pontbeli görbülete,  $\alpha$  pedig a hengerfelület  $P$  pontbeli normálisa, és az  $\ell$   $P$  pontbeli főnormálisa által bezárt szög, ami ugyanaz mint az  $\mu$  felületi normális, és a  $\ell$  binormális által bezárt szög. Ez  $\cos \alpha$  előjelével ellátva fogja adni a geodetikus görbületet. Így

$$C_g(s) = C(\ell, \mu) = (\ell \times C\ell)\mu = (\ell' \times \ell'')\mu = (\ell', \ell'', \mu)$$

amint állítottuk.

(74) fontos következménye, hogy geodetikus vonal geodetikus görbülete zéró, mivel geodetikus vonal mentén  $\ell' = \mu \ell''$  és  $\mu$  egyirányú. Valamint fordítva, ha  $C_g \equiv 0$  úgy a görbe geodetikus vonal. Mert a  $C_g = 0$  csak úgy teljesülhet, ha  $\ell', \ell''$  és  $\mu$  egy síkban van. De  $\ell''$  és  $\mu$  mindig merőleges  $\ell'$ -re. Így ha egy síkban vannak akkor is, azaz  $\ell'' = \lambda \ell'$ , tehát a görbe geodetikus vonal.

Állítjuk, hogy  $C_g$  hajlítással szemben invariáns. Ezt úgy bizonyítjuk be, hogy  $C_g$ -t előállítjuk csak az első alaplennyiségek segítségével. Legyen

$$\ell = \ell(s) = \ell(u^1(s), u^2(s))$$



így

$$I. \quad \frac{d\epsilon}{ds} = \frac{\partial \epsilon}{\partial u^\alpha} u'^\alpha = \frac{\partial \epsilon}{\partial u^t} u'^t$$

$$II. \quad \frac{d^2 \epsilon}{ds^2} = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} u'^\alpha u'^\beta + \frac{\partial \epsilon}{\partial u^\alpha} u''^\alpha$$

$$= \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial u^\sigma} u'^\alpha u'^\beta + b_{\alpha\beta} u u'^\alpha u'^\beta + \frac{\partial \epsilon}{\partial u^\alpha} u''^\alpha$$

és

$$\epsilon' \times \epsilon'' = \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} u'^\alpha u'^\beta u'^t \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial u^t} \times \frac{\partial \epsilon}{\partial u^\sigma} \right) +$$

$$+ b_{\alpha\beta} u'^\alpha u'^\beta u'^t \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial u^t} \times u \right) + u'^t u''^\alpha \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial u^t} \times \frac{\partial \epsilon}{\partial u^\alpha} \right)$$

De

$$C_g = (\epsilon', \epsilon'', u) = (\epsilon' \times \epsilon'') u = \left( \Gamma_{\alpha\beta}^{\epsilon} u'^\alpha u'^\beta u'^t + u'^t u''^\epsilon \right) \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial u^t}, \frac{\partial \epsilon}{\partial u^\sigma}, u \right)$$

Ha  $t = 6$  úgy a determináns értéke zéró, így csak a  $t = 1$ ,  $\sigma = 2$ , és a  $t = 2$ ,  $\sigma = 1$  esetet kell venni, amikor a determináns értéke  $\sqrt{g}$  ill.  $-\sqrt{g}$ . Így

$$III. \quad C_g = \left[ \left( \Gamma_{\alpha\beta}^2 u'^1 - \Gamma_{\alpha\beta}^1 u'^2 \right) u'^\alpha u'^\beta + u'^1 u'^2 - u'^2 u'^1 \right] \sqrt{g}$$

A jobboldal azonban a görbét meghatározó  $u^\alpha(s)$  kivételével csak az első alaplennyiségek függvénye, tehát  $C_g$  hajlítással szemben invariáns.

Mint megállapítottuk a  $C_g = 0$  szükséges és elegendő ahhoz, hogy egy görbe geodetikus legyen. Ez a geodetikus vonalak újabb egyenleteinek a megállapítására ad lehetőséget. Így például

$$(\epsilon', \epsilon'', u) = 0$$

Térjünk át a kitüntetett  $s$  paraméterről az  $s = s(t)$  transzformációval egy tetszőleges  $t$  paraméterre.

$$\frac{d\epsilon}{ds} = \frac{d\epsilon}{dt} \frac{dt}{ds} = \lambda \dot{\epsilon}$$

$$\frac{d^2 \epsilon}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{d\epsilon}{dt} \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\epsilon}{dt} \frac{d^2 t}{ds^2} = \mu \ddot{\epsilon} + \nu \dot{\epsilon}$$

Igy a geodetikus vonalak egyenlete tetszőleges  $t$  paraméterben

$$(\lambda \dot{\epsilon}, \mu \ddot{\epsilon} + \nu \dot{\epsilon}, u) = \lambda \mu (\dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}, u) = 0$$



$$(\xi, \ddot{\xi}, u) = 0.$$

Igy I. és II. mintájára képezve a  $\frac{d\xi}{dt}$ ,  $\frac{d^2\xi}{dt^2}$  kifejezéseket a geodetikus vonalak egy újabb egyenletét adja a III. kifejezés, ha a  $C_g$  helyébe zérót, a jobboldalon pedig az  $s$  szerinti deriváltak helyébe  $t$  szerinti deriváltakat irok, azaz  $\sqrt{g} \neq 0$ -val osztva

$$\left( \Gamma_{\alpha\beta}^2 \dot{u}^1 - \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^2 \right) \ddot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \dot{u}^1 \ddot{u}^2 - \dot{u}^2 \ddot{u}^1 = 0.$$

### 55. Geodetikus parallel koordináta rendszer.

Megmutatjuk, hogy az  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(u^1, u^2)$  felület egy folytonosan differenciálható  $u^\alpha = u^\alpha(s)$  ( $s_0 \leq s \leq s_1$ ) görbájének elég kis környezetében bevezethető olyan orthogonális paramétervonal rendszer, ahol az egyik paramétervonal sereg geodetikus vonalakkól áll, a másik paramétervonal sereg pedig ezek orthogonális trajektóriái.

Legyen az  $u^\alpha = u^\alpha(s)$  az  $\bar{u}^1 = 0$  paramétervonal, és legyen ezen  $\bar{u}^2$  az ívhossz, azaz

$$I. \quad u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^2)$$

Tekintsük ezen görbe pontjaiból a rá merőleges irányban kiinduló geodetikus vonalakat. Legyenek ezek az  $\bar{u}^2 = \text{konst.}$  görbék, ahol  $\bar{u}^2$  a kiindulási pont  $\bar{u}^2$  értéke. Legyen ezek valamelyikén, pl. az  $\bar{u}^2 = 0$ -n az  $\bar{u}^1$  az ívhossz.

Állítjuk, hogy a geodetikus vonalak tekintett serege az  $\bar{u}^1 = 0$  elég kis  $K$  környezetében mezőt alkot, azaz egyrétűen fedi  $K$ -t. Az  $u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^2)$  pontból kiinduló valamely geodetikus vonal bármely pontjának koordinátáit meghatározza az  $u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^2)$  pont, a kiindulási irány, mely a mi esetünkben merőleges az I. görbe érintőjére, és melyet jelöljünk  $p^\alpha(\bar{u}^2)$ -vel, valamint a geodetikus vonal  $s$  ívhossza. Azaz egy geodetikus vonal valamely pontjának koordinátái ezen mennyiségek valamilyen függvényei

$$u^\alpha = f_\alpha(s, u^\alpha(\bar{u}^2), p^\alpha(\bar{u}^2)) = g_\alpha(s, \bar{u}^2)$$

Képezzük a

$$D = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(s, \bar{u}^2)}$$



függvénydetermináns az I. görbe mentén, azaz az  $s = 0$  mellett. Azonban

$$\left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial s} \right)_{s=0} = p^\alpha(\bar{u}^2)$$

mert ez egy geodetikus vonal érintője az I. görbével alkotott metszéspontjában, és

$$\left( \frac{\partial}{\partial \bar{u}^2} u^\alpha(s, \bar{u}^2) \right)_{s=0} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^2} u^\alpha(0, \bar{u}^2) = \frac{d}{d\bar{u}^2} u^\alpha(\bar{u}^2) = u'^\alpha(\bar{u}^2)$$

az I. görbe érintője. Így

$$D|_{s=0} = \begin{vmatrix} p^1(\bar{u}^2) & p^2(\bar{u}^2) \\ u'^1(\bar{u}^2) & u'^2(\bar{u}^2) \end{vmatrix}$$

mely zérótól különböző  $\bar{u}^2$  minden értékére, mert a két sor egymásra merőleges irányokat határoz meg, valamint ezek a mennyiségek folytonosak, így az I. görbének van olyan  $K$  környezete, ahol  $D \neq 0$ .  $K$ -ban a geodetikus vonalak pontjai és a felület pontjai között kölcsönös egyértelmű vonatkoztatás áll fenn, azaz  $K$  minden pontján egy és csak egy geodetikus vonal halad át, azaz a tekintett geodetikus vonalak  $K$ -ban mezőt alkotnak.

A további megfontolásainkat ezen  $K$  környezetre korlátozzuk. Tekintsük ezen geodetikus vonalak orthogonális trajektóriáit. Ezek a differenciálegyenletek elmélete szerint szintén mezőt alkotnak. Legyenek ezek az  $\bar{u}^1 = \text{konst.}$  görbék, mégpedig minden orthogonális trajektóriához azt az  $\bar{u}^1$  értéket rendeljük hozzá, amilyen  $\bar{u}^1$  értéknél metszi az illető orthogonális trajektória az  $\bar{u}^2 = C$  görbét. Mivel a geodetikus vonalak egy másodrendű differenciálegyenlet megoldásai, így maguk is folytonosan differenciálhatók, így az orthogonális trajektóriáik is, így  $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^1}$  folytonos. És mivel ezek merőlegesek, így  $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^1} \times \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^2} \neq 0$ , azaz a  $\left\| \frac{\partial r_i}{\partial \bar{u}^\alpha} \right\|$  matrix rangja kettő. Így ezek a görbék a 26. pont szerint bevezethetők paramétervonalaknak.

Vezessük be ezeket a görbéket paramétervonalaknak. Ezt a koordináta rendszert geodetikus parallel koordinátarendnek nevezzük.

Jelöljük a koordinátákat egyszerűség kedvéért ezen új koordináta rendszerben  $\bar{u}^\alpha$  helyett újra  $u^\alpha$ -val. Vizsgáljuk ebben a koordinátarendszerben az első alapformát. Mindenesetre  $g_{12} = 0$ . Használjuk ki továbbá, hogy az  $u^2 = \text{konst.}$



görbék geodetikus vonalak, azaz eleget tesznek az

I.  $u'^2 = -\Gamma_{\alpha\beta}^2 u'^\alpha u'^\beta$   
 differenciálegyenletnek. Mivel azonban  $u'^2 = u''^2 = 0$ , így

$$0 = -\Gamma_{11}^2 u'^1{}^2$$

és mivel egy ilyen görbe mentén  $u'^1 \neq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{11}^2 = g^{\alpha 2} \Gamma_{1\alpha 1} = g^{12} \Gamma_{111} + g^{22} \Gamma_{121} = -\frac{g_{12}}{g} \Gamma_{111} + \frac{g_{11}}{g} \Gamma_{121} = \\ &= \frac{g_{11}}{g} \Gamma_{121}. \end{aligned}$$

De mivel  $g_{12} = 0$ , így  $g_{11}$  nem lehet zéró, mert különben  $g$  is zéró lenne, így

$$0 = \Gamma_{121} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2},$$

azaz

$$\text{II.} \quad \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0,$$

azaz  $g_{11}$  csak az  $u^1$  függvénye. De az  $u^2 = c$  görbén  $u^1$  az ívhossz, így ott  $g_{11} = 1$ . De  $g_{11}$  az  $u^2$ -től nem függ, így bármely  $u^2 = \text{konst.}$  mentén 1, azaz

$$g_{11} \equiv 1$$

azaz  $u^1$  mindegyik geodetikus vonalon az ívhossz. Így az első alapforma a következő egyszerű formát ölti

$$(75) \quad 1 \dot{u}^1{}^2 + g_{22} \dot{u}^2{}^2.$$

Fordítva, (75)-ből, tehát a  $g_{11} = 1$ ,  $g_{12} = 0$  -ből II.-től visszafelé következik I., tehát ha az első alapforma (75) alakú, úgy az  $u^2 = \text{konst.}$  görbék geodetikus vonalak, az  $u^1 = \text{konst.}$  görbék az orthogonális trajektóriák, azaz a koordináta rendszer geodetikus parallel koordináta rendszer, (75) tehát a geodetikus parallel koordináta rendszerre jellemző.

Állítjuk bármely geodetikus vonalnak két  $u^1 = u_1^1$  és  $u^1 = u_2^1$  paraméter vonal közé eső íve egyenlő. A görbe  $u^2 = \text{konst.}$  Az ívhossz

$$s = \int_{u_1^1}^{u_2^1} \sqrt{1 \dot{u}^1{}^2 + g_{22} \dot{u}^2{}^2} dt = \int_{u_1^1}^{u_2^1} \dot{u}^1 dt = u_2^1 - u_1^1 = \text{konst.}$$



Az ilyen görbét geodetikus párhuzamosoknak nevezzük.

Mostmár módunkban áll kimutatni, hogy a  $P_0, P_1$  pontokat összekötő geodetikus ív bizonyos viszonylatban a legrövidebb. Legyen a  $\overline{P_0 P_1}$  geodetikus ív egy geodetikus párhuzamos koordinátarendszer egy geodetikus paramétervonalának egy szakasza. Állítjuk, hogy ezen koordináta rendszeren belül futó  $P_0, P_1$ -et összekötő görbék között épp a tekintett a legrövidebb. Legyenek a többi  $P_0$  és  $P_1$ -et összekötő görbék  $u^1 = u^1, u^2 = f(u^1)$  alakban adva. Így az ívhossz

$$s = \int_{u_0^1}^{u_1^1} \sqrt{1 + g_{22} f'^2(u^1)} du^1,$$

ami akkor minimális ha  $f'(u^1) = 0$ , azaz ha  $u^2 = f(u^1) = \text{konst}$ , azaz geodetikus paramétervonal mentén. A  $P_0$  és  $P_1$ -et összekötő geodetikus paramétervonal viszont csak a kiindulási geodetikus ív.

#### 56. Geodetikus polárkoordináta rendszer.

Tekintsük egy kétszer folytonosan differenciálható felület egy  $P_0$  pontját. Állítjuk ennek bizonyos  $K$  környezetében bevezethető olyan paramétervonal rendszer, ahol a paramétervonalak egyik seregét a  $P_0$ -ból kiinduló geodetikus vonalak, a másik sereget ezek orthogonális trajektóriái képezik. Ennek az úgynevezett geodetikus polárkoordináta rendszernek  $P_0$  nyilván szinguláris pontja, továbbá az is látható hogy ez a geodetikus párhuzamos koordinátarendszernek egy speciális esete, hiszen itt is geodetikus vonalak és azok orthogonális trajektóriái képezik a két paraméter vonal seregét, csak a geodetikus vonalak egy pontból indulnak ki. A bizonyítás is egészen hasonló gondolatmenetű.

Először is állítjuk, hogy a  $P_0$ -ból kiinduló geodetikus vonalak  $P_0$  bizonyos környezetében  $P_0$  kivételével mezőt alkotnak. Legyen a kezdeti koordináta rendszer olyan, hogy  $P_0$  koordinátái  $u^1 = u^2 = 0$ , valamint  $g_{11}(0,0) = g_{22}(0,0) = 1$ , és  $g_{12}(0,0) = 0$ , amit az általánosság megszorítása nélkül feltehetünk. Legyenek egy a  $P_0$ -ból kiinduló az  $s$  ívhosszra mint paraméterre vonatkoztatott geodetikus vonal érintőjének komponensei a  $P_0$ , azaz az  $s = 0$  pontban

$$\left. \frac{du^1}{ds} \right|_{s=0} = \cos \vartheta \quad \left. \frac{du^2}{ds} \right|_{s=0} = \sin \vartheta.$$



Tekintsük ezen geodetikus vonalon valamely  $s_0$  értékhez tartozó  $P$  pontot, és vezessünk be a  $s = s_0$   $S$  paraméter transzformációval a  $S$  paramétert. Így a  $P_0$ -hoz továbbra is a  $0$ , a  $P$ -hez pedig az  $1$  paraméterérték fog tartozni. Mivel a  $P_0$ -on átmenő bármely geodetikus vonal valamely pontját a geodetikus vonal  $P_0$ -beli kiindulási iránya, és az illető ponthoz tartozó paraméterérték meghatározza, így egy  $P_0$ -on átmenő geodetikus vonal pontjai

$$u^\alpha = f_\alpha \left( s, \left. \frac{du^1}{ds} \right|_{s=0}, \left. \frac{du^2}{ds} \right|_{s=0} \right).$$

formában állíthatók elő. Azonban

$$\left. \frac{du^1}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{du^1}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{ds}{ds} \right|_{s=0} = s_0 \cos \vartheta \quad \text{és hasonlóan}$$

$$\left. \frac{du^2}{ds} \right|_{s=0} = s_0 \sin \vartheta.$$

Igy

$$u^\alpha = f_\alpha(s, s_0 \cos \vartheta, s_0 \sin \vartheta).$$

Rögzítsük most  $S$ -et  $S = 1$ -re, és változtassuk  $s_0$ -at. Így

$$u^\alpha = g_\alpha(s \cos \vartheta, s \sin \vartheta)$$

ahol  $s = 0$  szolgáltatja a  $P_0$ -at. Vezessük be az

$$x^1 = s \cos \vartheta$$

I.

$$x^2 = s \sin \vartheta$$

jelölést. Ezekután

$$u^\alpha = g_\alpha(x^1, x^2).$$

Megjegyezzük, hogy ezen  $x^\alpha$  mennyiségeket Riemann-féle normál koordinátáknak nevezzük. - Vizsgáljuk most a

$$D = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x^1, x^2)}$$

függvénydeterminánst a  $P_0$  pontban, azaz az  $x^1 = x^2 = 0$  helyen.

Tekintsük a



$$\text{II.} \quad \left. \frac{du^\alpha}{ds} \right|_{P_0} = \left( \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1} \frac{dx^1}{ds} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^2} \frac{dx^2}{ds} \right) \Big|_{P_0} = \left. \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^1} \right|_{P_0} \cos \vartheta + \left. \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^2} \right|_{P_0} \sin \vartheta$$

kifejezést. De

$$\left. \frac{du^1}{ds} \right|_{P_0} = \cos \vartheta, \quad \left. \frac{du^2}{ds} \right|_{P_0} = \sin \vartheta.$$

Igy II.-t a  $\vartheta = 0$  és  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  helyen tekintve kapjuk hogy

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u^1}{\partial x^1} \right|_{P_0} &= 1 & \left. \frac{\partial u^1}{\partial x^2} \right|_{P_0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial u^2}{\partial x^1} \right|_{P_0} &= 0 & \left. \frac{\partial u^2}{\partial x^2} \right|_{P_0} &= 1 \end{aligned}$$

azaz

$$D(P_0) = 1,$$

és mivel  $D$  elemei folytonosak, így  $P_0$ -nak van egy olyan  $K$  környezete, ahol  $D \neq 0$ . Így ezen  $K$  környezetben a felület  $u^\alpha$  pontjai és az  $x^\alpha$  számpárok között kölcsönös egyértelmű a vonatkoztatás. De I. szerint az  $(x^1, x^2)$  és a geodetikus vonal sereg  $(s, \vartheta)$  pontjai között is kölcsönös egyértelmű a <sup>vonathoz tartozó</sup>  $a^\nu$   $P_0$  kivételével, azaz minden ponton egy és csak egy geodetikus vonal halad át  $P_0$  kivételével, azaz a  $P_0$ -ból kiinduló geodetikus vonalak  $P_0$  egy megfelelő  $K$  környezetében a  $P_0$  kivételével mezőt alkotnak.

A továbbiakban  $K$ -ra szorítkozva tekintsük ezen geodetikus vonal sereg orthogonális trajektóriáit. Ezek szintén egy mezőt alkotnak.

Ekkor azonban mint az előző pontban újra két  $K$ -t egyrétűen fedő görbeseregünk van, melyeknek egyike geodetikus vonalakkal áll. Azonos feltételekből azonban azonos következtetéseket tudunk levonni, tehát az első alapforma itt is (75) alakú. Részletesebben: tekintsük a geodetikus vonalakat a  $\vartheta = \text{konst.}$  görbéknek, az orthogonális trajektóriákat pedig a  $\delta = \text{konst.}$  görbéknek, ahol  $\delta$  azon pont  $s$  értékével egyezzen meg, amelyben az orthogonális trajektória a  $\vartheta = 0$  geodetikus vonalat metszi. A geodetikus polárkoordináta rendszer első alapmennyiségeit újra  $g_{\alpha\beta}$ -val jelölve mindenesetre  $g_{12} \equiv 0$ . Az előző pontbeli bizonyítás szerint pedig  $g_{11} \equiv 1$ . Így  $\delta$  ívhossz az összes geode-

Sz.TTK. 9968.



tikus vonalon. Így  $s$ -től mindegyik geodetikus vonalon legfeljebb csak egy konstansban tér el. Azonban  $P_0$ -ban  $s = 0$  és  $\sigma = 0$ , mivel ez az orthogonális trajektória a  $P_0$  pontra huzódik össze, így  $\sigma \equiv s$ . Így az első alapforma

$$(76) \quad \dot{s}^2 + g_{22} \dot{\sigma}^2$$

Az orthogonális trajektóriák a  $P_0$ -tól egyenlő távolságban lévő pontokból álló görbék. Ezeket geodetikus köröknek nevezzük.

### 57. A Gauss-féle görbület geodetikus koordináta rendszerben.

A 48. pontban megállapítottuk, hogy a Gauss-féle görbület csak az első alaplennységek függvénye, de nem határoztuk meg hogy azoknak milyen függvénye, mert eddig arra nem volt szükségünk. Így most először meghatározzuk hogy a Gauss-féle görbület hogyan függ az első alaplennységektől, utána pedig az első alapforma geodetikus koordináta rendszerben való (75) ill. (76) formájának felhasználásával megállapítjuk hogy hogyan egyszerűsödik ez geodetikus koordináta rendszer esetén.

48. III. szerint

$$\begin{aligned} R_{12}^2 &= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \\ &= b_{11}g^{2\alpha}b_{2\alpha} - b_{12}g^{2\alpha}b_{1\alpha} \\ &= g^{21}(b_{11}b_{21} - b_{12}b_{11}) + g^{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= \frac{g_{11}}{g} b = g_{11} K \end{aligned}$$

Írjuk fel még  $R_{12}^2$  értéket 48. II. szerint, így

$$g_{11} K = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^{\delta} \Gamma_{2\delta}^2 - \Gamma_{12}^{\delta} \Gamma_{1\delta}^2$$

Az itt szereplő másodfajú, és ezenkívül az elsőfajú Christoffel-féle szimbólumok is az első és utolsó indexükben szimmetrikusak, mert

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^{\gamma}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^{\gamma}} \right) = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} \end{aligned}$$

és így

Sz.TTK. 9968.



$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} = g^{\tau\delta} \Gamma_{\alpha\tau\beta} = g^{\tau\delta} \Gamma_{\beta\tau\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\delta}$$

Ezen szimmetria felhasználásával  $g_{11}^K$  előző kifejezésével való összehasonlítás útján belátható hogy

$$g_{11}^K = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^1) - \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^1) + 2(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2)$$

A második és harmadik tag zárójelében lévő kifejezés ilyen formájú:  $\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\alpha}$   
Állítjuk, hogy

$$2 \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha}^{\alpha} = 2 (\Gamma_{1\beta}^1 + \Gamma_{2\beta}^2) = \frac{\partial \log g}{\partial u^{\beta}}$$

Ugyanis

$$\frac{\partial \log g}{\partial u^{\beta}} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u^{\beta}} = \frac{g_{22}}{g} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^{\beta}} + \frac{g_{11}}{g} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^{\beta}} - 2 \frac{g_{12}}{g} \frac{\partial g_{12}}{\partial u^{\beta}} = g^{\alpha\tau} \frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial u^{\beta}}$$

Azonban

$$\Gamma_{\alpha\tau\beta} + \Gamma_{\tau\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial u^{\beta}}$$

ami a baloldal részletes kiírásából azonnal adódik. Így

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log g}{\partial u^{\beta}} &= g^{\alpha\tau} (\Gamma_{\alpha\tau\beta} + \Gamma_{\tau\alpha\beta}) = g^{1\tau} \Gamma_{1\tau\beta} + g^{1\tau} \Gamma_{\tau 1\beta} + g^{2\tau} \Gamma_{2\tau\beta} + \\ &+ g^{2\tau} \Gamma_{\tau 2\beta} = \Gamma_{1\beta}^1 + g^{11} \Gamma_{11\beta} + g^{12} \Gamma_{21\beta} + \Gamma_{2\beta}^2 + g^{21} \Gamma_{12\beta} + g^{22} \Gamma_{22\beta} \\ &= 2(\Gamma_{1\beta}^1 + \Gamma_{2\beta}^2), \end{aligned}$$

mert pl. a második és ötödik tag összege  $g^{11} \Gamma_{1\alpha\beta} = \Gamma_{1\beta}^1$ . Tehát ezen részletállításunkat bebizonyítottuk. Ebből következik, hogy

$$\Gamma_{1\beta}^1 + \Gamma_{2\beta}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u^{\beta}} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^{\beta}}$$

Ezt alkalmazva

$$g_{11}^K = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^1} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^2} - \Gamma_{12}^2 \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^1} + 2(\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2)$$

Szorozzuk ezt  $\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}$ -el, és a jobb oldal első tagjában írjunk  $\frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2}$



helyett  $\frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) - t$ , és az elkövetett hibát a megfelelő tag hozzáadásával korrigáljuk. Járjunk el hasonlóan a második tagnál. Így

$$\begin{aligned} \sqrt{g} K = & \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right) + \left[ \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^2} - \frac{\partial}{\partial u^2} \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \right] \Gamma_{11}^2 + \\ & + \left[ - \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^1} + \frac{\partial}{\partial u^1} \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \right] \Gamma_{12}^2 + 2 \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2) . \end{aligned}$$

Jelöljük az első szögletes zárójelet A -val, a másodikat B -vel, így

$$A = \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial u^2} \frac{1}{g_{11}} + \frac{1}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \sqrt{g} = \frac{\sqrt{g}}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$$

és hasonlóan

$$B = - \frac{\sqrt{g}}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} .$$

Így

$$\begin{aligned} \sqrt{g} K = & \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right) + \frac{\sqrt{g}}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \Gamma_{11}^2 - \\ & - \frac{\sqrt{g}}{g_{11}^2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \Gamma_{12}^2 + 2 \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2) . \end{aligned}$$

Fejezzük ki a  $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha}$  - t a másodfajú Christoffel-féle szimbólumok segítségével, hogy a 3., 4. és 5. tagban egyformán a  $\Gamma$  - k szorzatát kapjuk.  $\Gamma_{11\alpha}$  -t definíciója szerint felírva

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} = 2 \Gamma_{11\alpha} = 2 g_{1\mu} \Gamma_1^{\mu\alpha}$$

Ha ezt az értéket beírjuk  $\sqrt{g} K$  kifejezésébe, és a  $\mu$  -re a szummációt, és a szorzásokat elvégezzük, úgy azt találjuk, hogy a 3., 4. és 5. tag összege zéró,

Így

$$(77) \quad K = \left[ \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right) \right] \frac{1}{\sqrt{g}} .$$

Ha az  $R_{12}^2$  helyett az  $R_{21}^1$  kifejezésből indulunk ki, úgy azt kapjuk,

hogy

$$(78) \quad K = \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{11}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \Gamma_{12}^2 \right) \right] \frac{1}{\sqrt{g}} .$$

(77) és (78) -ban  $K$  konkrét formában van az első alapmennyiségek se-

gítségével kifejezve.



Nézzük meg hogyan egyszerűsödik ez az eredményünk geodetikus koordináta rendszerben. Itt (75) és (76) szerint  $g_{11} = 1$ ,  $g_{12} = 0$ . Így  $g = g_{22}$ . Tehát (78) így alakul

$$K = \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{22}} \Gamma_{22}^1 \right) - \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{22}} \Gamma_{21}^1 \right) \right] \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}.$$

Számítsuk ki  $\Gamma_{22}^1$ -et és  $\Gamma_{21}^1$ -et geodetikus koordináta rendszerben.

$$I. \quad \Gamma_{22}^1 = g^{1\alpha} \Gamma_{2\alpha 2} = g^{11} \Gamma_{21 2} + g^{12} \Gamma_{22 2}.$$

$$\text{Azonban } g^{12} = -\frac{g_{12}}{g} = 0 \quad \text{és} \quad g^{11} = \frac{g_{22}}{g} = \frac{g_{22}}{g_{22}} = 1, \text{ így}$$

$$II. \quad \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{21 2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

Hasonló számítás eredményeképpen  $\Gamma_{21}^1 = 0$ . Így

$$K = \left[ -\frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right)$$

azaz

$$(79) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1{}^2}.$$

A geodetikus polárkoordináta rendszer segítségével módunkban áll a Gauss-féle görbületnek még egy érdekes értelmezését adni.

Legyen P egy geodetikus koordinátarendszer középpontja. Határozzuk meg egy  $s_0$  sugaru geodetikus kör területét. Ezen kör egyenlete  $s = s_0$ ,  $\vartheta = \vartheta$ . A területet L -el jelölve

$$L = \int_0^{2\pi} \int_0^{s_0} \sqrt{g_{22}} \, d\vartheta \, ds.$$

Fejtsük  $\sqrt{g_{22}}$ -t a P környezetében s szerint hatványsorba. Először is állapítsuk meg  $g_{22}$  értékét a P pontban. Induljunk ki az előző pont kezdeti  $u^\alpha$  koordináta rendszeréből. Jelöljük most itt ebben a koordináta rendszerben az első alaplmenyiségeket  $g_{\alpha\beta}^*$  ( $u^1, u^2$ ) -vel. Az előző pontban tett feltevések szerint  $P = (0,0)$  és  $g_{\alpha\beta}^*(0,0) = \delta_{\alpha\beta}$ . Térjünk át az előző pontban bevezetett  $x^\alpha$  koordinátákra, és jelöljük az első alaplmenyiségeket  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  - Sz.TTk.9968.



val. Továbbra is  $P = (0,0)$ . A 39. pont szerint

$$\text{III.} \quad \bar{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\beta} g_{\alpha\beta}^* .$$

Igy  $\bar{g}_{\alpha\beta}(0,0) = \delta_{\alpha\beta}$ . Térjünk át végül is az  $(s, \vartheta)$  geodetikus polárkoordináta rendszerre, és jelöljük az első alapmennyiségeket  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  - vel.

Ujra  $P = (0,0)$ , és III. szerint

$$g_{22}(s, \vartheta) = \left( \frac{\partial x^1}{\partial \vartheta} \right)^2 \bar{g}_{11} - 2 \frac{\partial x^1}{\partial \vartheta} \frac{\partial x^2}{\partial \vartheta} \bar{g}_{12} + \left( \frac{\partial x^2}{\partial \vartheta} \right)^2 \bar{g}_{22} .$$

56. I. figyelembevételével

$$g_{22}(s, \vartheta) = s^2 \cos^2 \vartheta \bar{g}_{11} - 2 s^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \bar{g}_{12} + s^2 \sin^2 \vartheta \bar{g}_{22} ,$$

és

$$\sqrt{g_{22}} = s \sqrt{\cos^2 \vartheta \bar{g}_{11} - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \bar{g}_{12} + \sin^2 \vartheta \bar{g}_{22}} .$$

Igy

$$\text{IV.} \quad \lim_{s \rightarrow 0} g_{22}(s, \vartheta) = 0 , \quad \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{g_{22}} = 0 .$$

$$\frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial s} = \sqrt{\cos^2 \vartheta \bar{g}_{11} - 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \bar{g}_{12} + \sin^2 \vartheta \bar{g}_{22}} + s \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\quad} .$$

Azonban az  $s = 0$  helyen, azaz a  $P$  pontban  $\bar{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ , így

$$\text{V.} \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial s} = 1 .$$

Határozzuk meg még a második és harmadik parciális határértékét. (79) szerint

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial s^2} = -K \sqrt{g_{22}}$$

és így IV. szerint

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial s^2} = 0 .$$

$$\frac{\partial^3 \sqrt{g_{22}}}{\partial s^3} = - \frac{\partial K}{\partial s} \sqrt{g_{22}} - K \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial s}$$

és V. szerint

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\partial^3 \sqrt{g_{22}}}{\partial s^3} = -K(0,0) .$$

Igy a hatványsor

Sz.TTK. 9968.



$$\sqrt{g_{22}} = s - \frac{s^3}{6} K(0,0) + \frac{s^4}{4!} (\dots) .$$

A geodetikus kör kerülete pedig

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \left[ s - \frac{s^3}{6} K_0 + \frac{s^4}{4!} (\dots) \right] d\vartheta \\ &= 2\pi s - \frac{2\pi}{6} s^3 K_0 + \frac{2\pi}{4!} s^4 (\dots) \end{aligned}$$

amiből

$$\frac{(2\pi s - L)}{2\pi s} \frac{6}{s^2} = K_0 - \frac{s}{4} (\dots) .$$

Az  $s = 0$  határértékre térve át .

$$(80) \quad K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2\pi s - L}{2\pi s} \frac{6}{s^2}$$

Azaz a Gauss-féle görbület határértékben egy  $s$  sugaru geodetikus, és egy  $s$  sugaru közönséges kör kerületének különbségével arányos.

#### 58. Geodetikus vonalak differenciálegyenlete geodetikus polár koordinátarendszerben.

Induljunk ki a geodetikus vonalak 54. V.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^2 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^1 - \Gamma_{\alpha\beta}^1 \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \dot{u}^2 + \dot{u}^1 \dot{u}^2 - \dot{u}^2 \dot{u}^1 = 0$$

differenciálegyenletéből, és vegyük figyelembe az első alaplmenyiségeknek a geodetikus koordinátarendszerekre jellemző értékeit, tehát hogy  $g_{11} = 1$ , és  $g_{12} = 0$ . Így az 57. I., II. -höz teljesen hasonló számítás szerint

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0 & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ \Gamma_{11}^2 &= 0 & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ \Gamma_{12}^1 &= 0 & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \end{aligned}$$

Ezek figyelembevételével<sup>54.V</sup> egy geodetikus koordináta rendszerben így alakul



$$I. \quad \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \dot{u}^1 \dot{u}^2 + \frac{1}{2 g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \dot{u}^1 \dot{u}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \dot{u}^2 + \dot{u}^1 \ddot{u}^2 - \dot{u}^2 \ddot{u}^1 = 0$$

Legyen most egy geodetikus polár koordináta rendszerben egy az  $u^2 = \text{konst.}$  - tól különböző geodetikus vonal egyenlete

$$u^1 = u(u^2)$$

II.

$$u^2 = u^2$$

formában adva. Ekkor  $\dot{u}^1 = \dot{u}$ ,  $\ddot{u}^1 = \ddot{u}$ ,  $\dot{u}^2 = 1$ ,  $\ddot{u}^2 = 0$ , és I. az

$$III. \quad \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} (\dot{u})^2 + \frac{1}{2 g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \dot{u} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \ddot{u}$$

egyenletre redukálódik ahol  $g_{22}(u^1, u^2) = g_{22}(u(u^2), u^2)$ . Legyen most  $\alpha$  a II. geodetikus vonal és az ennek a pontjain átmenő  $u^2 = \text{konst.}$  geodetikus paramétervonal érintői által bezárt szög. Az előbbi érintőjét az  $\dot{u}^1 = \dot{u}$ ,  $\dot{u}^2 = 1$ , míg az utóbbit az  $\dot{u}_g^1 = 1$ ,  $\dot{u}_g^2 = 0$  értékek határozzák meg. Így

$$\cos \alpha = \frac{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}_g^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta} \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{u}_g^\alpha \dot{u}_g^\beta}} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u}^2 + g_{22}}}$$

amiből

$$(\dot{u})^2 = (\dot{u}^2 + g_{22}) \cos^2 \alpha$$

IV.

$$\dot{u} = \sqrt{g_{22}} \frac{\cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{g_{22}} \cot g \alpha$$

és

$$V. \quad \ddot{u} = \left( \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} \dot{u} + \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^2} \right) \cot g \alpha + \sqrt{g_{22}} \left( - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \frac{d\alpha}{du^2}$$

Írjuk most be  $\dot{u}$  és  $\ddot{u}$  -nak IV. és V. szerinti értékeit III.-ba, így

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} g_{22} \cot g^2 \alpha + \frac{1}{2 g_{22}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \sqrt{g_{22}} \cot g \alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \sqrt{g_{22}} \cot g^2 \alpha + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \cot g \alpha - \sqrt{g_{22}} (1 + \cot g^2 \alpha) \frac{d\alpha}{du^2} \end{aligned}$$

Az egyszerűsítések és összevonások után pedig

Sz.TTK. 9968.



$$\frac{d\alpha}{du^2} = - \frac{1}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = - \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}$$

Tehát geodetikus polárkoordináta rendszerben az  $u^2 = \text{konst.}$ -től különböző geodetikus vonalak differenciálegyenlete az igen egyszerű formájú

$$(81) \quad \frac{d\alpha}{du^2} = - \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1}$$

differenciálegyenletre redukálódik, ha a megoldásokat a II. formában keressük.

#### 59. Gauss - Bonnet tétel.

Egy felületdarab teljes görbületén gömbi képének felszínét értjük, aminek az értéke az 50. pont szerint

$$\iint_T K \sqrt{g} du^1 du^2$$

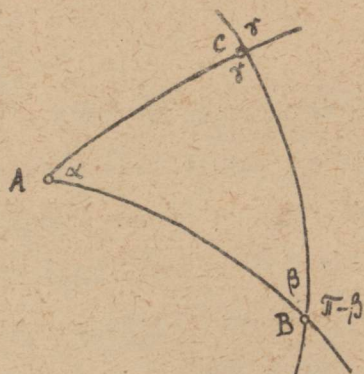
A Gauss-Bonnet tétel egy egyszerűen összefüggő felületdarab teljes görbűlete, valamint a felületdarabot határoló görbe geodetikus görbűlete, és annak törés szögei közt állapít meg összefüggést.

Először ezt az összefüggést egy igen egyszerű görbe, egy geodetikus háromszög által határolt felületdarab esetén vizsgáljuk. Majd egy önmagát nem metsző zárt görbe által határolt egyszerűen összefüggő felületdarab esetén, vigyázva arra, hogy mindig egy geodetikus polárkoordinátarendszer érvényességi körében maradjunk. Valamint kikötjük, hogy az összes tekintett sokszögeket és görbéket pozitív forgásirányban fussuk be, azaz úgy hogy a bezárt felületdarab balkéz felől essen, és minden szöget hasonlóképpen pozitív forgásirányban mérünk.

Geodetikus háromszög alatt értünk egy olyan zárt felületi görbét, mely három geodetikus vonalból tevődik össze. Legyenek ennek csúcsai  $A, B, C$ , szögei  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Vezessünk be geodetikus polár koordinátarendszert. Legyen ennek közép-pontja  $A$ . Essen az egész geodetikus háromszög a polárkoordináta rendszer érvényességi körébe. Legyen az  $u^2 = 0$  geodetikus vonal az  $AB$ . Így az  $AC$  geodetikus vonal az  $u^2 = \alpha$  geodetikus vonallal esik össze. A  $BC$  geodeti-





kus vonal egyenlete pedig legyen  $u^1 = u(u^2)$  formában adva. Jelöljük a geodetikus háromszög által bezárt felületdarabnak a paraméter síkban megfelelő tartományt  $T$  - vel. Így a geodetikus háromszög teljes görbülete

$$J = \iint_T K \sqrt{g} du^1 du^2 = \int_{u^2=0}^{\alpha} \left( \int_{u^1=0}^{u(u^2)} K \sqrt{g} du^1 \right) du^2 .$$

(79) szerint

$$J = \int_{u^2=0}^{\alpha} \left( \int_{u^1=0}^{u(u^2)} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u^{12}} \sqrt{g} du^1 \right) du^2 = - \int_{u^2=0}^{\alpha} \left. \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^1} \right|_{u^1=0}^{u^1=u(u^2)} du^2 .$$

57. V. figyelembevételével

$$J = - \int_{u^2=0}^{\alpha} \left( \left. \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^1} \right|_{u^1=u(u^2)} - 1 \right) du^2 ,$$

és (81) felhasználásával

$$J = - \int_{u^2=0}^{\alpha} \left( - \frac{d\alpha}{du^2} - 1 \right) du^2 = \gamma - (\pi - \beta) + \alpha ,$$

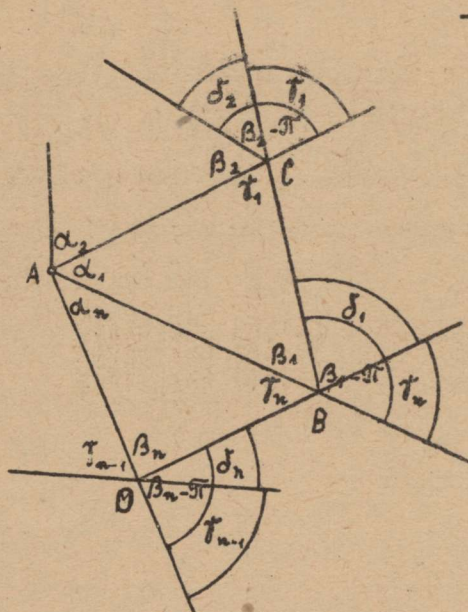
azaz

$$(82) \quad \iint_T K \sqrt{g} du^1 du^2 = \alpha + \beta + \gamma - \pi .$$

Így torzfelületen mely mindig izometrikusan leképezhető a síkra, egy geodetikus háromszög belső szögeinek összege  $\pi$ , mert  $K = 0$  és a (82) integrál zéró. Pozitív görbületű felület darabon nagyobb mint  $\pi$ , és negatív görbületű felület darabon kisebb mint  $\pi$ .

Nézzük most ezt egy  $n$  oldalú geodetikus sokszög esetén, melynek szemantikus rajzát a mellékelt ábra szemlélteti. Legyen a geodetikus polárkoordináta rendszer  $A$  középpontja a geodetikus sokszögön belül és kössük ezt össze a





geodetikus sokszög minden szögpontjával egy geodetikus vonal segítségével. Így  $n$  darab geodetikus háromszöget kaptunk, melyeknek teljes görbületét már ki tudjuk számítani. Jelöljük a geodetikus sokszög által határolt felület darabnak a paramétersíkban megfelelő tartományt  $T$ -vel és a geodetikus háromszögeket  $T_1$ -vel,

$$\begin{aligned} \iint_T K \sqrt{g} du^1 du^2 &= \sum_1 \iint_{T_1} K \sqrt{g} du^1 du^2 = \\ &= \sum_1 \alpha_1 - (\beta_1 - \pi) + \tau_1 - (\beta_2 - \pi) + \tau_2 - \dots - (\beta_n - \pi) + \tau_n \\ &= \sum_1 \alpha_1 - (\beta_1 - \pi) + \tau_n - (\beta_2 - \pi) + \tau_2 - \dots - (\beta_n - \pi) + \tau_{n-1} \\ &= \sum_1 (\alpha_1 - \delta_1) \end{aligned}$$

Tehát geodetikus sokszög esetén

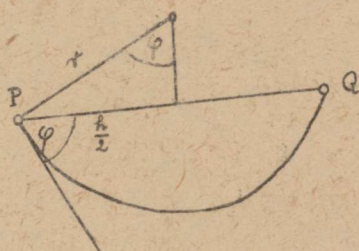
$$I. \quad \iint_T K \sqrt{g} du^1 du^2 = 2\pi - \sum_1 \delta_1$$

ahol  $\delta_1$  a sokszög törésszögei.

Végül kimutatjuk a tételt abban az esetben ha a felületdarab egy zárt, önmagát nem metsző, egyszeresen összefüggő görbe által van határolva. A bizonyítás végeredményben az előzőkön kívül egy segédtételel alapszik.

Állítjuk hogy ha a  $\widehat{PP}_1$  görbeívbe geodetikus törtvonalat írunk, és ennek oldalhosszait minden határon túl csökkentjük, úgy a törésszögek összege a geodetikus görbületnek az illető görbeív menti integráljaihoz tart.





Vegyünk először egy  $\widehat{PQ}$  síkgörbe ívet. Legyen a görbe P-beli érintője, és a  $\overline{PQ} = h$  hur által bezárt szög  $\varphi$ , és legyen a görbét P-ben érintő és Q-n átmenő kör sugara  $r$ .

Igy

$$\text{II.} \quad r = \frac{h}{2 \sin \varphi}.$$

A görbületi kör, és a görbület definíciója szerint

$$\lim_{Q \rightarrow P} r = \frac{1}{C(P)}$$

és mivel síkgörbének a közösleges és geodetikus görbülete megegyezik,

$$\text{III.} \quad \lim_{Q \rightarrow P} r = \frac{1}{C_g(P)}.$$

II. és III. figyelembevételével

$$\text{IV.} \quad \frac{\varphi}{h} = \frac{\varphi}{\sin \varphi} \frac{\sin \varphi}{h} = \frac{\varphi}{\sin \varphi} \frac{1}{2r} \rightarrow \frac{C_g(P)}{2} \quad (\text{ha } Q \rightarrow P).$$



Vegyünk most egy  $\widehat{PQ}$  felületi görbe ívet, és annak a P pontbeli érintősíkjára való  $\widehat{PQ'}$  vetületét, valamint a  $\widehat{PQ}$  geodetikus ívet, és annak az érintősíkra való  $\widehat{PQ'}$  vetületét. Mindkét görbe

beív P-beli érintője az érintősíkban van. Legyen ezeknek a  $\widehat{PQ}$  hur  $\widehat{PQ'}$  vetületével bezárt szöge újra  $\varphi$ , illetve  $\psi$ . Így  $\varphi + \psi = \alpha$  a görbe és a geodetikus ív által bezárt szög, a  $\widehat{PQ'}$  hossza pedig  $h$ . Így IV. szerint

$$\text{V.} \quad \frac{\alpha}{h} = \frac{\varphi}{h} + \frac{\psi}{h} \rightarrow \frac{C_g(P)}{2} \quad (\text{ha } Q \rightarrow P),$$

mivel a geodetikus ív geodetikus görbülete zéró. Továbbá ha a kicsiny  $\widehat{PQ}$  ív hosszát  $\Delta s$ -el jelölöm, úgy

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{h} = 1.$$



Igy V. szerint

$$\frac{C_g(P)}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha}{h} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\alpha}{\Delta s} \frac{\Delta s}{h} \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\Delta s},$$

azaz

$$\left| \frac{\alpha}{\Delta s} - \frac{C_g(P)}{2} \right| < \varepsilon$$

vagy

$$\text{VI.} \quad \left| \alpha - \frac{1}{2} C_g(P) \Delta s \right| < \varepsilon \Delta s \quad (\text{ha } \Delta s < \delta_{(\varepsilon)})$$

Vegyünk most a  $\widehat{PP_1}$  felületi görbeívet, és írjunk bele egy geodetikus törtvonalat. Így minden töréspontban két szög keletkezik a két geodetikus ív és a görbe érintője között. Ezeknek az összege adja a geodetikus törtvonal törésszögét. Tetszőlegesen adott  $\varepsilon > 0$  mellett finomítsuk a geodetikus törtvonalat úgy hogy  $\max \Delta s < \delta_{(\varepsilon)}$ , így minden töréspontban igaz VI. Szummázzuk ezeket a törésszögeket, így

$$\left| \sum_j' \delta_j - \sum_j' C_g(P_j) \Delta s \right| < 2\varepsilon \sum_j' \Delta s = 2\varepsilon \delta$$

ahol  $\delta$  a  $PP_1$  ív hossza. Tehát

$$\text{VII.} \quad \sum_j' \delta_j \rightarrow \int_{P_0}^{P_1} C_g(s) ds \quad (\text{ha } \max \Delta s \rightarrow 0)$$

Legyen a felületdarabot határoló görbe  $\Gamma$ , melynek töréspontjai is lehetnek. Írjunk ebbe geodetikus poligont. Erre fennáll I. Finomítsuk a beosztást úgy hogy a töréspontok mindig szögpontok legyenek. Így a poligon a  $\Gamma$  görbéhez, és a görbe törésszögeitől különböző  $\delta_j$  törésszögek összege a VII. integrálhoz tart, így határértékben

$$\iint_T K \sqrt{g} du^1 du^2 = 2\pi - \int_{\Gamma} C_g(s) ds - \sum_i' \delta_i$$

Szokás a  $\sqrt{g} du^1 du^2$  felületelemet  $d\omega$ -val jelölni, így

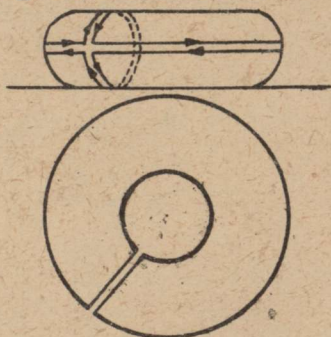
$$(83) \quad \iint_T K d\omega + \int_{\Gamma} C_g ds + \sum_i' \delta_i = 2\pi$$

amit Gauss-Bonnet tételének nevezünk.

Ennek alkalmazásaképpen állapítsuk meg egy egyszeresen összefüggő felület teljes görbületét. Ezt bármely önmagát nem metsző zárt felületi görbéje két



részre osztja. Számítsuk ki a (83) szerint ezen részek teljes görbületét, és utána adjuk össze őket. Az összeg az egész felület teljes görbülete. Azonban hogy a felület két része mindig balkéz felül essen, a két integrálásnál a görbét különböző irányban kellett befutni, így (83) baloldalának második és harmadik tagjai a két integrálásnál különböző előjelűek, azaz az összeadásnál kiesnek. Ez azonban azt jelenti, hogy tetszőleges egyszeresen összefüggő felület teljes görbülete  $4\pi$ .



Állapítsuk meg még a körgyűrű teljes görbületét. Ha az ábra szerinti négy  $\frac{\pi}{2}$  - es szögpontra, geodetikus vonalakból álló, az egész felületet körülfogó görbe mentén végezzük az integrálást, úgy mivel a görbék geodetikus

vonalak, a (83) integrál második tagja zéró, a harmadik pedig  $4 \frac{\pi}{2} = 2\pi$ , tehát a körgyűrű teljes görbülete zéró, tehát az egyszeresen összefüggő felületek teljes görbületétől különböző.

Ezek a vizsgálatok a topológiához vezetnek. A nevezetes Gauss-Bonnet tétel alkalmazására vonatkozóan bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy a teljes görbület értéke zárt felületre általában  $4\pi(1-p)$  ahol  $p$  a felületek egy osztályára jellemző topológiai invariáns.

#### 60. Állandó görbületű felületek.

Vegyünk alapul geodetikus polár koordinata rendszereket, és tekintsük az összes olyan felületeket melyek minden pontjában a Gauss féle görbület tetszőleges, de meghatározott konstans. Az ilyen felületeket konstans görbületű felületeknek nevezzük.

Meg fogjuk mutatni, hogy az egyes felületek mind egymásra izometrikusan leképezhetők, tehát belső geometriai szempontból azonosak.

Ehhez elegendő kimutatni, hogy ezeken a felületeken az első alapforma ugyanaz. Geodetikus polár koordinátarendszerben viszont  $g_{11} = 1$ ,  $g_{12} = 0$ , így csak azt kell kimutatni, hogy a  $g_{22}$  ugyanaz ezen felületek mindegyikén.

Készült: Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorozótó üzemében Budapest  
Sz.TTK. 9968.



$\sqrt{g_{22}}$  azonban adott  $K$  mellett (79) szerint a

$$I. \quad \sqrt{g_{22}} K = - \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1{}^2}$$

differenciálegyenlet megoldása. Itt minden felületen  $K=c$  tehát a  $\sqrt{g_{22}}$ -re fennálló differenciálegyenlet ugyanaz mindegyik felületnél. Egy másodrendű differenciálegyenletnek azonban kétszeresen végtelen sok megoldása van. Megkivánhatjuk t.i. hogy a megoldás és annak első differenciálhányadosa egy pontban adott értéket vegyen fel. Nálunk azonban 57. IV. ill. V. szerint  $\sqrt{g_{22}}$  értékének a koordinátarendszer kezdőpontjában zérónak, az első differenciálhányadosának pedig 1-nek kell lenni. Így I. megoldása egyértelműen megvan határozva, és a tekintett felületek mindegyikén ugyanaz. Így  $\sqrt{g_{22}}$ , azaz  $g_{22}$ , tehát az első alapforma az összes adott kontans görbülettel bíró felületeken ugyanaz.

Határozzuk meg az első alapformát. Három esetet fogunk megkülönböztetni: a.,  $K > 0$ , b.,  $K = 0$ , c.,  $K < 0$ . I. megoldásai a három esetben

$$a., \quad \sqrt{g_{22}} = \varphi(u^2) \cos(\sqrt{K} u^1) + \psi(u^2) \sin(\sqrt{K} u^1)$$

$$II. \quad b., \quad \sqrt{g_{22}} = \varphi(u^2) u^1 + \psi(u^2)$$

$$c., \quad \sqrt{g_{22}} = \varphi(u^2) \cosh(\sqrt{-K} u^1) + \psi(u^2) \sinh(\sqrt{-K} u^1)$$

ahol  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ,  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ;  $\varphi(u^2)$  és

$\psi(u^2)$   $u^2$ -nek tetszőleges függvényei. A megoldás helyességét behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. A megoldásnak azonban még teljesíteni kell a

$$III. \quad \sqrt{g_{22}}(0, u^2) = 0$$

és

$$IV. \quad \frac{\partial \sqrt{g_{22}}(0, u^2)}{\partial s} = 1$$

feltételeket is. Ezek a feltételek határozzák meg a  $\varphi(u^2)$  és a  $\psi(u^2)$  függvényeket. III. szerint

$$a., \quad 0 = \varphi(u^2) \cdot 1 + \psi(u^2) \cdot 0 \quad \text{azaz} \quad \varphi(u^2) = 0$$

$$b., \quad 0 = \varphi(u^2) \cdot 0 + \psi(u^2) \quad \psi(u^2) = 0$$

$$c., \quad 0 = \varphi(u^2) \cdot 1 + \psi(u^2) \cdot 0 \quad \varphi(u^2) = 0$$

IV. miatt pedig



$$\begin{array}{ll} \text{a.,} & 1 = \sqrt{K} \psi(u^2) \cdot 1 \qquad \text{azaz} \quad \psi(u^2) = \frac{1}{\sqrt{K}} \\ \text{b.,} & 1 = \varphi(u^2) \qquad \qquad \qquad \varphi(u^2) = 1 \\ \text{c.,} & 1 = \sqrt{-K} \psi(u^2) \cdot 1 \qquad \psi(u^2) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \end{array}$$

Igy

$$\begin{array}{ll} \text{a.,} & \sqrt{g_{22}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} u^1) \\ \text{V. b.,} & \sqrt{g_{22}} = u^1 \\ \text{c.,} & \sqrt{g_{22}} = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K} u^1) \end{array}$$

Ebből az is következik, hogy konstans görbületű felületeknél a Gauss féle görbület megegyezése nemcsak szükséges, hanem elegendő is az izometrikus leképezhetőséghez.

Sőt a megoldás független attól, hogy melyik pontot választottuk a geodetikus polárkoordinátarendszer kezdő pontjául és milyen irányt választottunk az  $u^2 = 0$  iránynak. Tehát az első alapforma a felület minden pontjában ugyanaz. Ez azonban azt jelenti, hogy egy felület egy  $T_0$  darabja a felület egy más részére izometrikusan leképezhető, áttranszformálható. Egy ilyen transzformáció megvan határozva, ha megadjuk, hogy a  $T_0$ -ban bevezetett geodetikus polár koordinátarendszer  $P_0(u_0^1, u_0^2)$  középpontja melyik  $P(u^1, u^2)$  pontba megy át, és ott az eredeti geodetikus polár koordinátarendszer  $u^2 = 0$  irányának melyik irány felel meg. Ezt három számmal lehet meghatározni. Kettő az új középpontot, egy pedig az új kezdőirányt határozza meg. Fordítva: három ilyen mennyiség egy transzformációt határoz meg. Tehát az ilyen transzformációk összessége egy három paraméteres transzformáció sereg. Könnyen megmutatható, hogy ez a transzformáció sereg csoport.

Mivel az egy ugyanazon konstans görbülethez tartozó felületek egymásra izometrikusan leképezhetők, így ezek bármelyikére megállapított belső geometriai tulajdonság a többire is egyformán érvényes. Konstans pozitív görbületű felületekre  $K$  bármely értékénél legegyszerűbb példa az  $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$  sugaru gömb. Vegyünk most egy ilyen sugaru félgömböt, és tekintsük annak a főkörnek, amely mentén a gömböt kettévágtuk a gömb középpontjára vonatkoztatott szembenfekvő pontjait azonosaknak. Tekintsük ezen gömbfelületi geometriának az 52. pont szerint a paraméter síkban megfelelő geometriát. Nevezzük a geodetikus vonalakat "egyeneseknek". A paramétersíkban így keletkező síkgeometria az euklidesihez hasonló axiómákat elégíti ki, kivéve a párhuzamossági axiómát, mert hiszen itt bármely két "egyenese" metszi egymást, mégpedig egy pontban. Ezt a félgömbön ellenőrizhetjük. Itt a geodetikus vonalak, mint tudjuk főkörök, és ezeknek a félgömbön egy és csak egy metszéspontjuk van, ha a határoló főkör diametriális pontjait azonosaknak tekintjük. A gömb helyett azért van szükségünk félgömbre, mert különben olyan geometriát kap-



nánk, ahol bármely két "egyenes" két pontban metszi egymást. Hogy az euklideszihez hasonló aximákat elégít ki az alatt pontosabban azt értjük, hogy a rendezési axiómákon kicsit változtatni kell. Ennek oka az, hogy itt az "egyenesek" zártak és két pont nem egyértelműen határoz meg egy szakaszt, hanem kétértelműen. Az ilyen geometriát elliptikus geometriának nevezzük. Így a pozitív konstans görbületű felületek, illetve nekik a paramétersíkban megfelelő geometria az elliptikus geometria egy-egy modelljét szolgáltatják.

Keressük most a konstans negatív görbületű felületek lehető egyszerű képviselőjét. Így kívánjuk meg, hogy a keresett felület a gömbhöz hasonlóan forgás felület legyen. Tehát a felületet

$$r(u^1, u^2) = u^1 \cos u^2 n_1 + u^1 \sin u^2 n_2 + f(u^1) n_3$$

formában keressük. Így az első alapforma

$$(1 + f'^2) \dot{u}^1{}^2 + u^1{}^2 \dot{u}^2{}^2$$

Vezessük be  $u^1$  helyett az  $u^1 = u$ ,  $u^2 = 0$  paramétervonal *új paraméterek, és jelöljük az* ivhosszát új paramétereket  $u$ -val és  $v$ -vel. A transzformációs képletek

$$a., \quad u = \int_{u_0}^{u^1} \sqrt{1 + f'^2} du^1 = u(u^1)$$

VI.

$$b., \quad v = u^2$$

A VI. a., integrál szigorúan monoton, és  $u^1$  szerint differenciálható. Így létezik a differenciálható inverz függvénye. Jelöljük ezt  $u^1 = h(u)$ -val. Így

$$VII. \quad h'(u) = \frac{du^1}{du} = \frac{1}{\frac{du}{du^1}} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$$

és

$$u^1{}^2 = \left( \frac{dh}{du} \frac{du}{dt} \right)^2 = \frac{1}{1+f'^2} (\dot{u})^2$$

Az első alapforma pedig

$$VIII. \quad (\dot{u})^2 + h^2(u) \dot{v}^2$$

VIII. azonban azt jelenti, hogy ez a paramétervonal rendszer geodetikus. Ez a megállapítás ezen paramétervonal rendszer konstrukciójából is következik. Hiszen az  $u^2 = \text{konst.}$  görbék meridián görbék, tehát geodetikus vonalak, a VI. transzformáció után pedig az  $u$  az ivhosszuk. Az  $u^1 = \text{konst.}$  görbék pedig parallel görbék, tehát az  $u^2 = \text{konst.}$  geodetikus vonalak orthogonális trajektorái.



Most kívánjuk meg, hogy  $K=1$  legyen. Így II.c. szerint kell hogy

$$h(u) = \varphi \cosh u + \psi \sinh(u)$$

azaz

$$h(u) = A e^u + B e^{-u}$$

legyen.  $\varphi$  és  $\psi$  II. szerint  $v$ -nek tetszőleges függvényei. Mivel itt azonban a bal oldal csak  $u$ -nak a függvénye, így  $\varphi$  és  $\psi$ , azaz  $A$  és  $B$  csak tetszőleges konstansok. Mivel ez a koordináta rendszer bár geodetikus, de nem geodetikus polár koordinátarendszer, így II. és IV. -nek nem kell szükségképpen teljesedni, így  $A$  és  $B$  felett még tetszőlegesen rendelkezünk. Legyen  $A=0$ ,  $B=1$ . Így

$$\text{IX.} \quad u^1 = h(u) = e^{-u}, \quad u = -\log u^1.$$

Az első alapforma pedig

$$\text{X.} \quad \dot{u}^2 + e^{-2u} v^2.$$

Határozzuk meg először annak a forgásfelületnek a formáját, azaz az  $f(u^1)$  függvényt. VII. és IX. szerint

$$1 + f'^2 = \left( \frac{du}{du^1} \right)^2 = \left( -\frac{1}{u^1} \right)^2 = \frac{1}{u^{12}}$$

azaz

$$f = \pm \int \frac{1}{u^1} \sqrt{1 - u^{12}} du^1$$

Hajtsuk végre az  $u^1 = \cos t$  integráltranszformációt, és ezután a pozitív előjelet választva

$$f = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \log \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin t$$

Így a meridiángörbe paraméteres előállítása

$$x = \cos t$$

$$z = \log \operatorname{tg} \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin t$$

amit traktrixnak, a  $z$  tengely körüli forgásával keletkeztetett felületet pedig pszeudoszférának nevezünk.

Vizsgáljuk ennek a felületnek a geometriáját a paramétersíkban. X. így is írható

$$\frac{e^{2u} \dot{u}^2 + \dot{v}^2}{e^{2u}}$$

Végezzünk itt még egy egyszerűsítő transzformációt. Legyen

$$e^u = y$$

azaz

$$y = \log u$$

$$v = x$$



Igy az első alapforma

$$\frac{y^2 \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \dot{x}^2}{y^2}$$

Még egy egyszerűsítés: a görbéket az  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  helyett az  $x = x(y)$ ,  $y = y$  alakban állítsuk elő. Így az első alapforma

$$\frac{1 + x'^2}{y^2}$$

Határozzuk meg a geodetikus vonalakat. Ezeket az

$$\text{XI.} \quad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1 + x'^2}}{y} dy$$

extremálisai szolgáltatják. Írjuk fel a XI.-hez tartozó Euler-Lagrange féle differenciálegyenletet.

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = 0$$

azaz itt

$$-\frac{d}{dy} \frac{1}{y} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + x'^2}} 2 x' = 0$$

Ezt integrálva

$$\frac{x'}{y \sqrt{1 + x'^2}} = C_1$$

$$x' = \frac{C_1 y}{\sqrt{1 - C_1^2 y^2}}$$

$$\int dx = \int \frac{C_1 y}{\sqrt{1 - C_1^2 y^2}} dy = -\frac{1}{C_1} \sqrt{1 - C_1^2 y^2} + C_2$$

azaz

$$\text{XII.} \quad (x + C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}$$

y azonban az  $e^u = y$  transzformáció miatt csak nagyobb vagy egyenlő lehet mint zéró. Így a XII. geodetikus vonalak félkörök, melyeknek a középpontjuk az x tengelyen van.

Nevezzük ezeket a geodetikus vonalakat "egyeneseeknek". Így itt most a paramétersíkban győződhetünk meg arról, hogy ebben a geometriában Euklidesz összes axiómái teljesülnek kivéve a párhuzamossági axiómát, ami helyett itt



az igaz, hogy bármely "egyenesthez" egy kívül fekvő ponton át végtelen sok őt nem metsző, tehát párhuzamos "egyenes" húzható. Az ilyen geometriát hiperbólikus geometriának nevezzük. Hasonló eredményre jutunk a többi  $a = 1$ -től különböző - konstans negatív görbületű felületeknél. Így a konstans negatív görbületű felületek a hiperbólikus geometria egy-egy modelljét szolgáltatják.

Vizsgáljuk még a  $K=0$  esetet. Ezek a felületek, mint bebizonyítottuk mind torz felületek, és izometrikusan leképezhetők a síkra. Nevezzük újra a geodetikus vonalakat "egyeneseknek". A sík geodetikus vonalai viszont a közös egyenesek, így itt igaz Euklidesz párhuzamossági axiómája, azaz a torzfelületek az euklideszi geometria modelljeit képezik.

Az elliptikus és hiperbólikus geometriákat nemeuklideszi geometriáknak szoktuk nevezni. Ezek természetesen távol sem foglalják magukban az összes az euklidesztől különböző, tehát nem euklideszi geometriákat.

Büszkeséggel említhetjük, hogy a hiperbólikus geometria a magyar Bolyai János, és az orosz Lobacsevszkij nevéhez fűződik, akik egymástól függetlenül kis időkülönbséggel jutottak hasonló eredményekre.

A konstans görbületű felületeknek még egy karakterisztikus tulajdonságát mutatjuk meg. Egy geodetikus háromszög teljes görbülete (82) szerint

$$\iint_T K \sqrt{g} \, du^1 \, du^2 = K \iint_T \sqrt{g} \, du^1 \, du^2 = K F = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

ahol  $F$  a geodetikus háromszög felszíne. Ez azonban azt jelenti, hogy konstans görbületű felületeknél egyenlő felszínű geodetikus háromszögek belső szögei összegének  $\pi$ -től való eltérése ugyanannyi.

Allítjuk, hogy ez a tulajdonság jellemző a konstans görbületű felületekre, amennyiben ha egy kétszer folytonosan differenciálható felületen az összes egyenlő felszínű geodetikus háromszögek belső szögei összegének  $\pi$ -től való eltérése ugyanannyi, akkor a felület konstans görbületű. Legyen ugyanis bármely  $F$  felszínű geodetikus háromszögnél

$$\text{XIII. } \alpha + \beta + \gamma - \pi = C = c F = c \iint_T \sqrt{g} \, du^1 \, du^2 \quad (c = \frac{C}{F}) .$$

Továbbá

$$\text{XIV. } \alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_T K \sqrt{g} \, du^1 \, du^2 .$$

Ha most egy  $P$  pontban  $K \neq c$ , pl.  $K > c$ , úgy  $P$ -nek van olyan környezete hogy ott mindenhol  $K > c$ . Vegyünk most egy olyan geodetikus háromszöget, amely teljesen ebben a környezetben van. Itt viszont a XIII. és a XIV. integrál feltevésünkkel ellentétben nem egyenlő.

#### 61. A vektor és tenzor számítás alapelemei.

Legyen adva az  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(u^1, u^2)$  felület. Ennek egy  $P$  pontját meghatározza a három  $r_i$  mennyiség, amiket térbeli meghatározóknak nevezhetünk, vagy az  $(u^1, u^2)$  számpár, amit felületi meghatározóknak nevezhetünk. Hasonlóképpen



egy felületi görbét meghatározza a három  $r_1(t)$  függvény mint térbeli meghatározók, vagy a két  $u^\alpha(t)$  függvény mint felületi meghatározók.

A belső geometriában, ahol a felület térbeli formáját esetleg nem is ismerjük térbeli meghatározókat nem használhatunk. A vektor fogalomra azonban továbbra is szükségünk van. Így a felület vektorainak egy új definícióját fogjuk adni.

Egyelőre vegyük igénybe a felületet körülvevő teret. A felület vektorain, vagy felületi vektorokon a felületet érintő vektorokat fogunk érteni. Az a tény azonban, hogy egy vektor érint-e egy felületet, avagy nem, az nemcsak a térbeli vektorhoz, hanem az illető felületi ponthoz is van kötve. T.i. ha az  $u$  vektor felület A pontjában érinti a felületet, úgy az a felület B pontjában általában már nem érinti a felületet. Így a továbbiakban a felület vektorait mindig egy felületi ponthoz kötve értjük.

Így a  $P(u^1, u^2)$  ponthoz tartozó felületi vektor mindig benne van a P ponthoz tartozó érintősíkban, és így mindig kifejezhető a

$$I. \quad \frac{\partial \varphi(u^1, u^2)}{\partial u^\alpha} \lambda^\alpha$$

formában. Fordítva: tetszőleges  $\lambda^\alpha$  számpár segítségével képezett I.alaku vektor mindig a P ponthoz tartozó felületi vektor. Így egy felület egy P pontjában egy felületi vektort mint egy számpárt definiálhatnánk.

Ez a számpár azonban az illető ponton kívül még az illető paramétervonal rendszerhez is van kötve. Végezzünk ugyanis egy tetszőleges megengedett paraméter transzformációt az

$$u^\alpha = u^\alpha(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$$

II.

$$u^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^1, u^2)$$

függvények segítségével, és tekintsük I. hasonlatára a

$$\frac{\partial \varphi(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}{\partial \bar{u}^\alpha} \lambda^\alpha$$

vektort, ahol  $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  a P pontnak az új koordinátái. Ez a vektor azonban bár felületi vektor, általában különbözik az I.vektortól.

Jelöljük továbbá azokat a mennyiségeket amikkel a  $\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}^\alpha} - t$  szoroz-

ni kell, hogy az I.vektort kapjuk  $\bar{\lambda}^\alpha$ -val. Kérdezzük, hogy milyen kapcsolat áll fenn a  $\lambda^\alpha$  és a  $\bar{\lambda}^\alpha$  számpárok között? Az eddig megállapítottak szerint

$$III. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} \lambda^\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{u}^\beta} \bar{\lambda}^\beta = \frac{\partial \varphi}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \bar{\lambda}^\beta$$

Azaz a



$$(84) \quad \lambda^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \bar{\lambda}^\beta$$

összefüggésnek fennállni. III.-ból az is nyilvánvaló, hogy ha (84) fennáll, úgy az I. és II. vektorok összeesnek.

Fejezzük még ki a (84) -ből a  $\bar{\lambda}^\alpha$ -t. E végből szorozzuk (84)-et  $\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha}$ -val

$$\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \lambda^\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} \bar{\lambda}^\beta = \delta_\beta^\gamma \bar{\lambda}^\beta = \bar{\lambda}^\gamma$$

azaz

$$(85) \quad \bar{\lambda}^\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \lambda^\beta$$

Ezek alapján azt mondjuk, hogy ha a felület valamely pontjához minden paramétervonal rendszerben a paramétervonal rendszertől függő módon egy számpárt rendelünk hozzá, úgy hogy ezek közt a (84) ill. (85) kapcsolat áll fenn, ha a paramétervonal rendszerek közt a II. transzformációs képletek érvényesek, úgy ezekkel a számpárokkal egy kontravariáns vektort értelmeztünk. A  $\lambda^\alpha$  számpárt a vektor a kontravariáns komponenseinek nevezzük.

A  $\lambda^1$  a vektornak a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^2}$  irányából a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^2}$ -re való vetületének a hossza a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^1}$  egységével mérve, a  $\lambda^2$  pedig a vektornak a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^1}$  irányából a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^2}$ -re való vetületének a hossza a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^2}$  egységében mérve.

Egy felületi vektort azonban nemcsak ilyen módon lehet meghatározni.

Legyen  $\lambda_1$  a vektor  $\frac{\partial \pi}{\partial u^1}$ -re való merőleges vetületének a hossza a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^1}$  egységben mérve, azaz

$$\lambda_1 = \frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \lambda^\alpha \frac{\partial \pi}{\partial u^1}$$

és hasonlóan  $\lambda_2$  a vektornak a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^2}$ -re való merőleges vetületének a hossza a  $\frac{\partial \pi}{\partial u^2}$  egységében mérve, azaz

$$\lambda_2 = \frac{\partial \pi}{\partial u^\alpha} \lambda^\alpha \frac{\partial \pi}{\partial u^2}$$

Azonban nemcsak egy vektorhoz tartozik egy értelműen egy  $\lambda_\alpha$  számpár, hanem fordítva a P pontban tetszőlegesen megadott  $\lambda_\alpha$  számpár is meghatároz a fenti módon egy a P ponthoz tartozó felületi vektort. Azonban a  $\lambda_\alpha$  számpár az épp használt koordináta rendszerhez van kötve. Így nézzük meg, hogyan transzformálódik a  $\lambda_\alpha$  számpár. Hajtsuk végre a II. paramétertranszformációt, és jelöljük  $\bar{\lambda}_\alpha$ -val a tekintett vektornak az új paramétervonalak érintővektoraira vetett merőleges vetületeinek az érintővektorok egységében mért



hosszait. Így V. és VI. hasonlatára

$$\bar{l}_\alpha = \frac{\partial q}{\partial \bar{u}^\beta} \bar{l}^\beta \frac{\partial q}{\partial \bar{u}^\alpha} = \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{l}^\beta$$

A jobboldalt álló mennyiségeket azonban ki tudjuk fejezni az eredeti koordinátarendszerbeli kifejezésekkel. Ha ezt sikerül úgy átalakítani, hogy a koordináta transzformációra jellemző mennyiségeken kívül csak a  $\lambda_\alpha$  szerepeljen benne, úgy kész a transzformációs törvény.

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= g_{\tau\delta} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\epsilon} \lambda^\epsilon = \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\alpha} \delta_\epsilon^\tau g_{\tau\delta} \lambda^\epsilon = \\ &= \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\alpha} g_{\tau\epsilon} \lambda^\epsilon = \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^\alpha} \lambda_\epsilon \end{aligned}$$

azaz

$$(86) \quad \bar{l}_\alpha = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \lambda_\beta$$

Ezek alapján azt mondjuk, hogyha a felület egy pontjához minden paramétervonal rendszerben a paramétervonal rendszertől függő módon egy számpárt rendelünk hozzá, úgy hogy ezek közt a (86) kapcsolat áll fenn, ha a paramétervonal rendszerek közt a II. transzformációs képletek érvényesek, úgy ezekkel a számpárokkal egy kovariáns vektort értelmeztünk.  $\lambda_\alpha$  számpárt a vektor kovariáns komponenseinek nevezzük.

A (86) egyenleteknek a  $\lambda_\alpha$  szerint való feloldása hasonlóan történik, mint azt a kontravariáns vektoroknál tettük. Így azonban egy ugyanazon vektort kétféleképpen is meghatározhatjuk. Kérdezzük milyen összefüggés van egy vektor kontravariáns és kovariáns komponensei között. V. és VI. szerint az összefüggés

$$(87) \quad \lambda_\alpha = g_{\alpha\beta} \lambda^\beta$$

Oldjuk fel ezt a  $\lambda^\alpha$  szerint. E végből (87)-et szorozzuk  $g^{\alpha\tau}$ -val

$$\lambda_\alpha g^{\alpha\tau} = g^{\alpha\tau} g_{\alpha\beta} \lambda^\beta = \delta_\beta^\tau \lambda^\beta = \lambda^\tau$$

azaz

$$(88) \quad \lambda^\alpha = g^{\alpha\beta} \lambda_\beta$$

Ezek a fogalmak minden nehézség nélkül általánosíthatók.

Legyen adva egy felület egy P pontjában minden koordinátarendszerben  $2^n$  mennyiség. Jelöljük ezeket az  $u^\alpha$  koordináta rendszerben

$$\text{VII.} \quad T \alpha_1, \dots, \alpha_n$$

-el, az  $\bar{u}^\alpha$  koordinátarendszerben ugyanígy csak felülvonással. Ha ezek között a



$$\bar{T}^{\beta_1 \dots \beta_n} = \frac{\partial \bar{u}^{\beta_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{u}^{\beta_n}}{\partial u^{\alpha_n}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$$

kapcsolat áll fenn, ha a paramétervonalrendeszer között a II. transzformációs képletek érvényesek, úgy a VII. mennyiségekkel egy  $n$ -ed foku kontravariáns tenzort értelmeztünk. A  $2^n$  darab VII. mennyiség a tenzor komponensei.

A kovariáns tenzort az előzőhöz pontosan hasonló általánosítással kapjuk a kovariáns vektor (86) transzformációs törvényéből. Ennek a leírása helyett áttérünk az általános esetre, ami ezt is, az előbbi is speciálesetként tartalmazza.

Legyen adva megint egy felület egy  $P$  pontjában minden koordinátarendszerben  $2^r$  mennyiség. Jelöljük ezeket az  $u^\alpha$  koordinátarendszerben

$$\text{VIII.} \quad T^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \beta_1 \dots \beta_m \quad (n + m = r)$$

-el, az  $\bar{u}^\alpha$  koordinátarendszerben ugyanígy csak felülvonással. Ha ezek között

$$\bar{T}^{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n} \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_m = \frac{\partial \bar{u}^{\bar{\alpha}_1}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{u}^{\bar{\alpha}_n}}{\partial u^{\alpha_n}} \frac{\partial u^{\beta_1}}{\partial \bar{u}^{\bar{\beta}_1}} \dots \frac{\partial u^{\beta_m}}{\partial \bar{u}^{\bar{\beta}_m}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \beta_1 \dots \beta_m$$

kapcsolat áll fenn, ha a paramétervonal rendszerek között a II. transzformációs képletek érvényesek, úgy a VIII. mennyiségekkel egy  $r$ -ed foku,  $n$ -szer kontravariáns,  $m$ -szer kovariáns tenzort értelmeztünk.

Igy a vektorok elsőfoku tenzorok, a skalárisok pedig amelyeknek értéke egy pontban a paramétervonal rendszertől független, nulladfoku tenzorok.

Az első és második alapmennyiségek a 39. pontban megmutatott transzformációs törvényük alapján másodfoku kovariáns tenzorok.

Mielőbb tovább mennénk vizsgáljuk még meg hogyan viselkednek a koordináta differenciálok. Vegyük az  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  görbét, és hajtsuk végre a II. paraméter transzformációt. Így

$$\frac{d\bar{u}^\alpha}{dt} = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \frac{du^\beta}{dt}$$

azaz

$$d\bar{u}^\alpha = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta$$

Tehát a koordináta differenciálok úgy viselkednek, mint a kontravariáns vektorok. Ez az oka, hogy a felületi koordinátákat felső indexel jelöltük.

Vizsgáljuk meg a tenzorok összeadását és szorzását.

Azt állítjuk, hogy két egyenlő fokban kontra illetve kovariáns tenzor összege szintén tenzor, mégpedig ugyanolyan fokban kontravariáns illetve kovariáns mint a tagok. Ugyanis ha  $A$  és  $B$  két egyenlő fokszámú tenzor, és összegüket  $C$ -vel jelöljük azaz



$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \beta_1 \dots \beta_m + B^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \beta_1 \dots \beta_m = C^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \beta_1 \dots \beta_m$$

ugy

$$\begin{aligned} & \bar{A}^{\tau_1 \dots \tau_n} \delta_1 \dots \delta_m + \bar{B}^{\tau_1 \dots \tau_n} \delta_1 \dots \delta_m = \\ & = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{u}}{\partial u^{\alpha_n}} \frac{\partial u^{\beta_1}}{\partial \bar{u}^{\delta_1}} \dots \frac{\partial u^{\beta_m}}{\partial \bar{u}^{\delta_m}} \left( A^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \beta_1 \dots \beta_m + B^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \beta_1 \dots \beta_m \right), \end{aligned}$$

azaz C (89) szerint tenzor, mégpedig n-szer kontravariáns és m-szer kovariáns.

Legyen most újra A és B két tenzor. Most azonban nem tesszük fel, hogy egyenlő fokú tenzorok. Jelöljük a szorzatokat C-vel azaz legyen

$$A^{\alpha_1 \dots \alpha_i} \beta_1 \dots \beta_j \cdot B^{\tau_1 \dots \tau_k} \delta_1 \dots \delta_p = C^{\alpha_1 \dots \alpha_i \tau_1 \dots \tau_k} \beta_1 \dots \beta_j \delta_1 \dots \delta_p$$

Állítjuk, hogy C tenzor mégpedig i + j + k + p - ed fokú, i + k-szor kontravariáns, és j + p -szer kovariáns. Ugyanis

$$\begin{aligned} & \bar{A}^{\epsilon_1 \dots \epsilon_i} \varphi_1 \dots \varphi_j \cdot \bar{B}^{\chi_1 \dots \chi_k} \mu_1 \dots \mu_p = \\ & = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{u}}{\partial u^{\alpha_i}} \frac{\partial u^{\epsilon_1}}{\partial \bar{u}^{\varphi_1}} \dots \frac{\partial u^{\epsilon_j}}{\partial \bar{u}^{\varphi_j}} \frac{\partial u^{\chi_1}}{\partial \bar{u}^{\tau_1}} \dots \frac{\partial u^{\chi_k}}{\partial \bar{u}^{\tau_k}} \frac{\partial u^{\beta_1}}{\partial \bar{u}^{\delta_1}} \dots \frac{\partial u^{\beta_j}}{\partial \bar{u}^{\delta_j}} \frac{\partial u^{\delta_1}}{\partial \bar{u}^{\mu_1}} \dots \frac{\partial u^{\delta_p}}{\partial \bar{u}^{\mu_p}} C^{\alpha_1 \dots \alpha_i \tau_1 \dots \tau_k \beta_1 \dots \beta_j \delta_1 \dots \delta_p} \end{aligned}$$

azaz (89) szerint az állításunk igaz.

Ugyanígy az is belátható, hogy egy tenzornak egy skalárral alkotott szorzata ugyanolyan fokú tenzor.

Az előző tételnél az összes szereplő  $\alpha, \beta, \tau, \delta$  indexek egymástól függetlenek voltak. Nézzük meg milyen következménye van annak, ha a két tényezőben egy kontravariáns és egy kovariáns index megegyezik. Ezt az általános eset helyett csak egy speciális eseten mutatjuk meg, aminek a példájára azonban az általános esetet bárki könnyen igazolhatja. Legyen a két tényező  $A^{\alpha \beta \tau}$



és  $B^{\dagger}_{\delta}$ . Így

$$\begin{aligned} \bar{A}^{\epsilon\varphi}_{\gamma} \bar{B}^{\psi}_{\kappa} &= \bar{C}^{\epsilon\varphi\psi}_{\kappa} = \frac{\partial \bar{u}^{\epsilon}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\varphi}}{\partial u^{\beta}} \frac{\partial \bar{u}^{\psi}}{\partial u^{\gamma}} \frac{\partial u^{\gamma}}{\partial \bar{u}^{\kappa}} A^{\alpha\beta}_{\gamma} B^{\dagger}_{\delta} = \\ &= \frac{\partial \bar{u}^{\epsilon}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\varphi}}{\partial u^{\beta}} \frac{\partial u^{\delta}}{\partial \bar{u}^{\kappa}} C^{\alpha\beta}_{\delta} \end{aligned}$$

Azaz a szorzat tenzor kettővel alacsonyabb fokú tenzor, mint a tényezők fokszámának összege. Mégpedig eggyel kevesebbszer kontravariáns, és eggyel kevesebbszer kovariáns, mintha az indexek mind függetlenek lettek volna. Ezt a fontos műveletet kontrakciónak nevezzük.

Tenzorok, ezek összeadása, szorzása, kontrakciója eddig is több helyen szerepelt. Az első és második alapmennyiségeken kívül tenzort alkotnak pl. a  $g^{\alpha\beta}$  mennyiségek, mégpedig egy kétszer kontravariáns tenzort. Egyszer kontravariáns és egyszer kovariáns tenzort alkotnak a 44. pontban levezetett  $b^{\beta}_{\alpha}$  mennyiségek. Tenzorok szorzására és összeadására példa a 48. III., a kontrakcióra pedig a 48. IV. Így az  $R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}$  mennyiségek is tenzort alkotnak. Nem alkotnak azonban tenzort sem a  $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$  sem a  $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$  mennyiségek.

Eddig a tenzorokat mindig a felület pontjaihoz rendeltük hozzá. A felületi pontok és a megfelelő paramétersíkbeli pontok között azonban kölcsönös egyértelmű a vonatkoztatás, és mindkettőt ugyanaz az  $u^{\alpha}$  számpár határozza meg. Így tehát mindegy, hogy a tenzorokat a felület pontjaihoz vagy egy másik kétdimenziós sokaság, a paramétersík pontjaihoz rendeljük hozzá. Így a tenzorok mostmár egy sík pontjaihoz vannak hozzárendelve. Mostmár nincs semmi akadálya a tenzorok fogalmának az  $n$  dimenziós terekre való általánosításának.

Legyen adva az  $n$  dimenziós tér egy  $P(x^1, \dots, x^n)$  pontjában  $n^r$  mennyiség. Jelöljük ezeket

$$IX, \quad T^{j_1 \dots j_p}_{k_1 \dots k_q} \quad (j_1, \dots, j_p, k_1, \dots, k_q = 1, \dots, n) \quad (p + q = r)$$

-val az  $x$  koordináta rendszerben, és ugyanígy <sup>csak</sup> felülvonással az  $\bar{x}$  koordináta rendszerben. Ábrázolják a két koordináta rendszer közötti összefüggéseket

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \\ \bar{x}^i &= \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n) \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n)$$



$$\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)} \neq 0$$

függvények. Ha most a  $T$  és a  $\bar{T}$  közt a

$$\bar{T}^{r_1 \dots r_p} s_1 \dots s_q =$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^{r_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{r_p}}{\partial x^{j_p}} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^{s_1}} \dots \frac{\partial x^{k_q}}{\partial \bar{x}^{s_q}} T^{j_1 \dots j_p}{}_{k_1 \dots k_q}$$

összefüggés áll fenn úgy a IX. mennyiségekkel a  $P$  pontban egy  $r$ -ed fokú  $n$ -ed rendű tenzort értelmeztünk, mely  $p$ -szer kontravariáns, és  $q$ -szor kovariáns.

Ennek speciál esetei az  $n$  dimenziós vektorok. Az összeadás, szorzás, és kontrakció is teljesen hasonlóan történik mint két dimenzióban.



A vektoranalízis alapfogalmai.

62. Divergencia, rotáció. Gradiens, potenciál. Nabla operátor.

Ha az  $\mathcal{U} = X\mathbf{i}_x + Y\mathbf{i}_y + Z\mathbf{i}_z$  vektor komponensei  $x, y, z$  differenciálható függvényei, akkor az  $\mathcal{U}$  vektor divergenciája a

$$\operatorname{div} \mathcal{U} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

skaláris, rotációjja pedig a

$$\operatorname{rot} \mathcal{U} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \mathbf{i}_x + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \mathbf{i}_y + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \mathbf{i}_z$$

vektor.

Ha van olyan  $\phi(x, y, z)$  függvény, amelynek  $x, y$  ill.  $z$  szerinti parciális differenciálhányadosa  $X, Y$  ill.  $Z$ , akkor az  $\mathcal{U}$  vektort  $\phi$  gradiensének  $\phi$ -t pedig  $\mathcal{U}$  potenciáljának nevezzük. Vagyis

$$\mathcal{U} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{i}_z = \operatorname{grad} \phi \quad \text{és} \quad \phi = \operatorname{pot} \mathcal{U}.$$

Ebből az értelmezésből következik, hogy legalább kétszer folytonosan differenciálható potenciál gradiensének rotációjja nullavektor, mert a differenciálás sorrendjének felcserélhetősége miatt komponensei eltűnnek. Így

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0 \text{ stb.}$$

Ha  $\phi(x, y, z)$  az  $\mathcal{U}$  vektor potenciálja, akkor nyilvánkép tetszőleges  $A$  állandóra  $\phi(x, y, z) - A$  is potenciálja. A térnek azok a pontjai, amelyekben a potenciál értéke ugyanaz az  $A$  állandó, a  $\phi(x, y, z) - A = 0$  potenciálfelületen, nivófelületen, vagy rétegfelületen vannak. Egy potenciálfelület pontjaiban a gradiens a felület normálisába esik.

Ha ugyanis  $\mu(t) = x(t)\mathbf{i}_x + y(t)\mathbf{i}_y + z(t)\mathbf{i}_z$  a potenciálfelület egy  $P$  pontján átmenő tetszőleges felületi görbe egyenlete, akkor a

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi_x x'(t) + \phi_y y'(t) + \phi_z z'(t) = 0$$

egyenlősége miatt az  $\mathcal{U} = \phi_x \mathbf{i}_x + \phi_y \mathbf{i}_y + \phi_z \mathbf{i}_z$  gradiens az  $\mu'(t)$  érintőre merőleges.

Azt a műveletet, amellyel a potenciálfüggvényből gradiense származik, szimbolikusan

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z$$

jellel jelölik és Hamilton-féle nabla operátornak nevezik. Ezzel a jelöléssel

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{i}_z = \operatorname{grad} \phi,$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \phi_x x'(t) + \phi_y y'(t) + \phi_z z'(t) = \operatorname{grad} \phi \cdot \mu'(t) = \nabla \phi \cdot \mu'(t)$$

A nabla operátor skalárisból vektort, vektorból azonban skalárist, a



vektor divergenciáját származtatja, mert

$$\nabla \mathcal{U} = \nabla (X i_x + Y i_y + Z i_z) = \frac{\partial X}{\partial x} i_x + \frac{\partial Y}{\partial y} i_y + \frac{\partial Z}{\partial z} i_z = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \text{div } \mathcal{U}$$

Nabla operátor és vektorszorzat egymásutánja vektorból rotációját származtatja, mert

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathcal{U} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} i_x + \frac{\partial}{\partial y} i_y + \frac{\partial}{\partial z} i_z \right) \times (X i_x + Y i_y + Z i_z) = \\ &= \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) i_x + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) i_y + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) i_z = \text{rot } \mathcal{U}. \end{aligned}$$

### 63. Vonalas integrál.

Ha  $\mathcal{U}(x,y,z) = X i_x + Y i_y + Z i_z$  egy  $P = (x,y,z)$  pont koordinátáinak folytonos függvénye és ha  $\mathcal{U}(t)$  az  $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$  és az  $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$  pontot összekötő  $\Gamma$  görbe rádiuszvektora, amelyre  $\mathcal{U}(t_1) = \vec{OA}_1$  és  $\mathcal{U}(t_2) = \vec{OA}_2$ , akkor az

$$\int_{A_1}^{A_2} \mathcal{U} d\mathcal{U} = \int_{A_1}^{A_2} (X, Y, Z) \mathcal{U}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [X x'(t) + Y y'(t) + Z z'(t)] dt$$

integrált vonalas integrálnak nevezzük. Itt az  $X(x,y,z)$ ,  $Y(x,y,z)$ ,  $Z(x,y,z)$  függvényben  $x, y$  és  $z$  helyébe az  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  függvényt kell helyettesíteni.

Ha az  $\mathcal{U}(x,y,z)$  vektor a  $P = (x,y,z)$  tömegpontra ható erőt jelenti, akkor az előbbi vonalas integrál az a munka, amelyet az erő az alatt elvégez, amíg hatása alatt a tömegpont  $A_1$ -ből  $A_2$ -ig halad a  $\Gamma$  görbén.

Ez az integrál az  $A_1$  és  $A_2$  határon kívül általában a  $\Gamma$  görbétől és az  $\mathcal{U}$  vektortól függ. Ha azonban az  $\mathcal{U}$  vektor gradiens, akkor a vonalas integrál a  $\Gamma$  görbétől független. Ha ugyanis  $\mathcal{U}$  potenciálja  $\phi(x,y,z)$ , akkor

$$\begin{aligned} \int_{A_1}^{A_2} \mathcal{U} d\mathcal{U} &= \int_{A_1}^{A_2} [\phi_x i_x + \phi_y i_y + \phi_z i_z] [x'(t) i_x + y'(t) i_y + z'(t) i_z] dt = \\ &= \int_{A_1}^{A_2} [\phi_x x'(t) + \phi_y y'(t) + \phi_z z'(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{d}{dt} \phi(x,y,z) \right] dt \\ &= \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

Ha  $\Gamma$   $A_1$ -ből kiinduló és oda visszatérő zárt görbe, akkor a vonalas integrál jelölése

$$\oint_{(\Gamma)} \mathcal{U} d\mathcal{U}$$



Gradiens vektor vonalas integrálja bármely zárt görbe mentén eltűnik, mert ha  $\Gamma$ -nak  $A_1$ -től  $A_2$ -ig vezető darabja  $\Gamma_1$ ,  $A_2$ -től  $A_1$ -ig vezető darabja pedig  $\Gamma_2$ , akkor

$$\int_{A_1}^{A_2} \mathcal{R} d\mathcal{R} = - \int_{A_2}^{A_1} \mathcal{R} d\mathcal{R} \text{ és így } \oint_{(\Gamma)} \mathcal{R} d\mathcal{R} = \int_{(\Gamma_1)}^{A_1} \mathcal{R} d\mathcal{R} + \int_{(\Gamma_2)}^{A_2} \mathcal{R} d\mathcal{R} = 0.$$

Ha  $\vec{P_0P} = \mathcal{R} = |\mathcal{R}| \mathcal{R}_0 = r \mathcal{R}_0$  és ha  $C = k M m$  állandó, akkor az

$$\mathcal{R} = C \frac{\mathcal{R}}{r^3} = C \frac{\mathcal{R}_0}{r^2}, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

vektor Newton-féle tömegvonzó erő, avagy elektromos és mágneses tömegekre vonatkozó Coulomb-féle vonzó vagy taszító erő. Ez az erő gradiens, potenciálja a

$$\text{pot } \mathcal{R} = \Phi = - \frac{C}{r} \text{ Newton-féle vagy Coulomb-féle potenciál.}$$

Az  $\mathcal{R} = \frac{C}{r^2}$  gradiens potenciálja a  $\Phi = C \log r$  logarithmikus potenciál.

#### 64. Gauss integráltétele.

Ha az  $\mathcal{R} = X i_x + Y i_y + Z i_z$  vektor az  $F$  /zárt/ felülettel határolt  $V$  test  $P = (x, y, z)$  pontjaiban folytonosan differenciálható és ha

$$\mathcal{R} = \cos \alpha i_x + \cos \beta i_y + \cos \gamma i_z$$

jelöli az  $F$  felület egy  $P$  pontjában a  $V$  testből kifelé mutató normális egységvektort, akkor

$$\iiint_{(V)} \text{div } \mathcal{R} dV = \iint_{(F)} \mathcal{R} \mathcal{N} dF, \quad \text{div } \mathcal{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

A baloldali térfogatintegrálhoz úgy jutunk, hogy a  $(V)$  testet a koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal kis kiterjedésű  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , élű téglákra bontjuk. Mindegyik téglában választunk egy pontot és a téglát  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  térfogatát megszorozzuk a  $\text{div } \mathcal{R}$  függvénynek abba a pontjába tartozó értékével. A szorzatok összegének a téglák számának minden határon túli növelésekor van határértéke, mivel  $\text{div } \mathcal{R}$  függvény folytonos, s ez a határérték a térfogatintegrál.

A jobboldali területintegrálhoz úgy jutunk, hogy az  $F$  felületet  $\Delta F$  területű kis kiterjedésű darabokra bontjuk, ezeket a területeket megszorozzuk az  $\mathcal{R} \mathcal{N}$  függvénynek a felületdarab egy-egy pontjához tartozó értékével, s a szorzatok összegének határértékét vesszük, amikor a felületdarabok száma minden határon túl növekedik.

A tétel bizonyítására egyszerűség kedvéért föltételezzük, hogy  $F$  konvex felület, s azt a  $z$  tengellyel párhuzamosan a  $z = 0$  síkra vetítjük. Így egy  $\Gamma'$  görbével határolt  $T$  konvex tartományt kapunk. Az  $F$  felületnek  $z$  tengellyel párhuzamos érintőin az érintéspontok egy  $\Gamma$  görbét alkotnak,



amely a felületet egy  $F_1$  alsó és egy  $F_2$  felső süvegre bontja. Ha  $z = z_1(x, y)$  illetőleg  $z = z_2(x, y)$  az  $F_1$  ill.  $F_2$  süveg egyenlete, akkor

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \frac{\partial z}{\partial z} dV &= \iiint_{(V)} \frac{\partial z}{\partial z} dx dy dz = \iint \left[ \int_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} \frac{\partial z}{\partial z} dz \right] dx dy = \\ &= \iint \left\{ z[x, y, z_2(x, y)] - z[x, y, z_1(x, y)] \right\} dx dy = \iint_{(T)} z_2(x, y) dx dy - \\ &\quad - \iint_{(T)} z_1(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Az  $F$  felületnek az  $F_2$  ill.  $F_1$  süvegre eső pontjaiban a normális egység vektorok a  $z$  tengellyel hegyes ill. tompa szöget alkotnak. Harmadik iránycosinusuk tehát pozitív ill. negatív.

Az  $\iint_{(T)} z_2 dx dy$  integrál kiszámítására az  $F_2$  süveget érintő sokla-

pokkal közelítjük meg. Ha a soklap egy  $\Delta f$  területű lapja a felületet  $P$  pontban érinti és a normálisnak  $\cos \tau$  a harmadik iránycosinusa, továbbá  $\Delta T$  a lap vetületének területe, akkor  $\Delta T = \Delta f \cos \tau$  és

$$\iint_{(T)} z_2 dx dy = \iint_{(F_2)} z_2 \cos \tau df = \iint_{(F_2)} z \cos \tau df.$$

Az  $F_1$  süveg pontjaiban  $\cos \tau$  negatív, ezért

$$\iint_{(T)} z_1 dx dy = - \iint_{(F_1)} z_1 \cos \tau df = - \iint_{(F_1)} z \cos \tau df.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \frac{\partial z}{\partial z} dV &= \iint_{(T)} z_2 dx dy - \iint_{(T)} z_1 dx dy = \iint_{(F_1)} z_1 \cos \tau df + \iint_{(F_2)} z_2 \cos \tau df = \\ &= \iint_{(F)} z \cos \tau df. \end{aligned}$$

Hasonló megfontolással

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial x}{\partial x} dV = \iint_{(F)} x \cos \alpha df \quad \text{és} \quad \iiint_{(V)} \frac{\partial y}{\partial y} dV = \iint_{(F)} y \cos \beta df.$$

Összeadással tehát



$$\iiint_{(V)} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dV = \iint_{(F)} (X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma) d\sigma, \quad -163-$$

(V)  
vagyis

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \mathcal{R} dV = \iint_{(F)} \mathcal{R} \mathcal{N} d\sigma$$

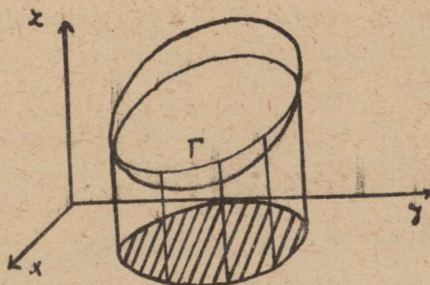
Ezzel az F konvex felületre Gauss integráltételét bebizonyítottuk.

A bizonyításban nem kötöttük ki, hogy a F felületnek minden pontjában a felületi normális határozott és folytonos legyen. Nem folytonos függvénynek is lehet határozott integrálja. Az F felületnek lehetnek

csúcspontjai és élei is, csak az szükséges, hogy az ilyen pontokat be lehessen foglalni egy zérusmértékű halmazba. Gauss integrálképlete érvényben marad akkor is, ha a felületnek sík lapjai és csúcsai is vannak.

Ilyen módon be lehet látni, hogy a tétel akkor is érvényben marad, ha F nem konvex, de felszíne létezik. Az ilyen felülettel határolt (V) testet konvex darabokra lehet vágni, amelyekre a tétel érvényes. A felületi integrálok összeadásakor a közös felületdarabokra vonatkozó integrálok mint elmentéses értékek kiesnek. A térfogatintegrálok összege a (V) testre vonatkozó értéket, a felületi integrálok összege pedig csak az eredeti F felületre vonatkozó értékét tartalmazza.

Gauss integráltétele térfogatintegrált alakit át felületintegrállá.



## 65. Stokes tétele.

Stokes tétele felületi integrál értékét állítja elő vonalas integrállal s következőképp fejezhető ki:

Ha az  $\mathcal{R} = X i_x + Y i_y + Z i_z$  vektor egy  $\Gamma$  zárt görbével határolt egyszerűen összefüggő F felületen és határvonalán folytonosan differenciálható, akkor

$$\oint_{(\Gamma)} \mathcal{R} d\sigma = \iint_{(F)} (\operatorname{rot} \mathcal{R}) \mathcal{N} d\sigma, \quad \operatorname{rot} \mathcal{R} = \left( -\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) i_x + \left( -\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) i_y + \left( -\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) i_z$$

Ebben a tételben  $\Gamma$  egy körüljáráshoz az F felület  $\mathcal{N}$  normális vektorának az az iránya tartozik, amelyre vonatkozólag a körüljárás jobbra forduló.

Ha az F felület sűveg egyenlete  $z = g(x, y)$ , ha tovább a  $\Gamma$  görbének illetőleg az F sűvegnek a z-tengellyel párhuzamos vetülete a  $z = 0$  síkra a  $\Gamma'$  zárt síkgörbe ill. a T tartomány, és ha végül  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  a  $\Gamma$  görbe egyenlete, akkor  $\oint_{(\Gamma)} X(x, y, z) x'(t) dt = \oint_{(\Gamma')} X(x, y, z) dx = \oint_{(T)} X(x, y, g(x, y)) dx = \oint_{(T)} \varphi(x, y) dx$



mert mialatt egy pont a  $\Gamma$  görbét leírja, azalatt a vetület pontja a  $\Gamma'$  görbét írja le. Feltételezhetjük, hogy  $\Gamma$  körüljárásából  $\Gamma'$  pozitív körüljárása következik.

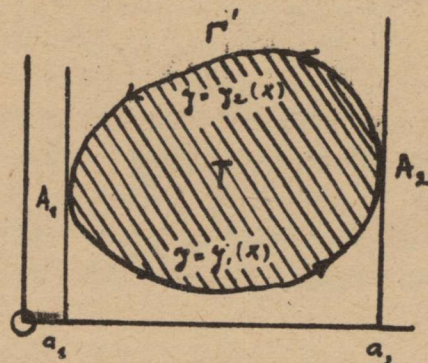
Stokes tételnek igazolására felhasználjuk a következő segédtételt:

Ha a  $\varphi(x,y)$  egy  $\Gamma'$  görbével határolt egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban és határán folytonosan differenciálható függvény, akkor a görbe pozitív irányu befutásakor

$$\oint_{(\Gamma')} \varphi(x,y) dx = - \iint_{(T)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy.$$

A görbét az  $x = a_1$  és  $x = a_2$  egyenes közé szorítjuk. Ha  $A_1$  és  $A_2$  a görbének közös pontja a két egyenessel, akkor  $A_1$  és  $A_2$  a görbét egy alsó  $y = y_1(x)$  és egy felső  $y = y_2(x)$  görbére bontja.

Ha a  $T$  tartományt a  $\Gamma'$  görbe határolja és ha először  $y$ , s azután  $x$  szerint integrálunk, akkor



$$\begin{aligned} \iint_{(T)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_{a_1}^{a_2} [\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1)] dx = \\ &= - \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x, y_1) dx - \int_{a_2}^{a_1} \varphi(x, y_2) dx = - \oint_{(\Gamma')} \varphi(x, y) dx. \end{aligned}$$

Ezzel a segédtételt igazoltuk. Ez akkor is érvényes, ha az  $x = a$  ( $a_1 < a < a_2$ ) egyeneseknek kettőnél több közös pontjuk van a görbével.

E szerint a segédtétel szerint

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} X(x,y,z) dx &= \oint_{(\Gamma')} X(x,y,g(x,y)) dx = - \iint_{(T)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \\ &= - \iint_{(T)} X_y dx dy - \iint_{(T)} X_z g_y dx dy \end{aligned}$$

mert

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} \cdot -\frac{dz}{dy} = X_y + X_z g_y.$$

Ha az  $F$  süveget érintő soklapokkal megközelítjük, ha továbbá egy ilyen soklap egy lapjának területe  $\Delta f$  és ha ez a lap az  $F$  süveget

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i}_x + \cos \beta \vec{i}_y + \cos \gamma \vec{i}_z$$



normálissal bíró pontban érinti, akkor a lap  $z = 0$  ill.  $y = 0$  síkra való vetületének területe  $\Delta T_z = \Delta f \cos \vartheta$  ill.  $\Delta T_y = \Delta f \cos \beta$  és

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}} \quad \cos \beta = \frac{-g_y}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}},$$

mert  $\Gamma$  körüljárása pozitív és mert  $\cos \alpha : \cos \beta : \cos \vartheta = -g_x : -g_y : 1$ .

Emiatt

$$\oint_{(\Gamma)} X(x, y, z) dx = \iint_{(F)} X_z \cos \beta \, df - \iint_{(F)} X_y \cos \vartheta \, df = \iint_{(F)} (X_z \cos \beta - X_y \cos \vartheta) \, df.$$

Ennek a képletnek lehozásakor föltételeztük, hogy az  $F$  süvegnek a  $z=0$  síkra való merőleges vetülete a  $\Gamma'$  görbével határolt  $T$  tartomány. A képlet azonban akkor is érvényes, ha az  $F$  süvegnek van olyan  $F_1$  darabja, amelynek vetülete a  $\Gamma$  görbén kívül esik.

Ha  $F_0$  az  $F$  süveg olyan darabja, amelynek vetülete a  $T$  tartomány, akkor az  $F$  süvegen van olyan (részben a görbéből álló) zárt  $\Gamma_0$  görbe, amely az  $F$  süvegnek határvonala, s amelynek vetülete a  $\Gamma'$  görbére esik. Ha pedig  $T_1$  az  $F$  süvegnek az az összefüggő része, amelynek vetülete a  $\Gamma'$  görbén kívül esik, akkor az  $F$  süvegen van olyan ( $\Gamma'$  görbével közös ívvel bíró)  $\Gamma_1$  zárt görbe, amelynek vetülete  $T_1$  határgörbéje. Ez a  $\Gamma_1$  görbe az  $F_1$  felületet egy alsó és egy felső süvegre bontja. Erre a két süvegre vonatkozó felületintegrálok összege eltűnik, mert a két süveg közös  $\Gamma_1$  határgörbéjének egy körüljárása a felső és alsó süvegen ellentétes fordulást határoz meg. Az  $F_0$  és  $F_1$  felületre és határvonalukra vonatkozó integrálok összeadásával a lehozott képletet az  $F$  süvegre is igazolhatjuk.

Hasonlóképp kapjuk, hogy

$$\oint_{(\Gamma)} Y(x, y, z) dy = \iint_{(F)} -\frac{\partial Y}{\partial x} \cos \vartheta \, df - \iint_{(F)} -\frac{\partial Y}{\partial z} \cos \beta \, df \quad \text{és}$$

$$\oint_{(\Gamma)} Z(x, y, z) dz = \iint_{(F)} -\frac{\partial Z}{\partial y} \cos \alpha \, df - \iint_{(F)} -\frac{\partial Z}{\partial x} \cos \beta \, df.$$

Ebből a három képletből összeadással kapjuk Stokes tételét, mert

$$\oint_{(\Gamma)} X dx + Y dy + Z dz = \iint_{(F)} \left[ \left( -\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( -\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( -\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos \vartheta \right] df = \iint_{(F)} (\operatorname{rot} \mathcal{A}) \cdot \mathcal{N} \, df.$$

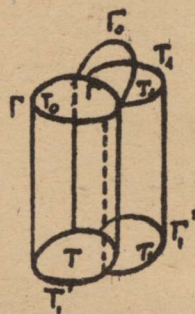
A görbének egy koordinátasíkra való merőleges vetülete önmagát metsző  $\Gamma'$  görbét is adhat, a  $\Gamma'$  görbével bezárt tartomány tehát több darabból is



állhat. Ekkor az integrálást az egyes darabokra a görbe körüljárásának értelmében kell végezni. Összeadással ismét igazolhatjuk a Stokes-féle tétel érvényességét ekkor is.

Stokes tételéből következik, hogy az  $\mathcal{R}$  vektornak egy zárt görbe mentén vett integrálja akkor és csak akkor tűnik el, ha  $\mathcal{R}$  rotációja eltűnik, vagyis ha  $\mathcal{R}$  gradiens vektor.

Ha az  $F$  zárt felületen  $\mathcal{R}$  egy olyan görbe, amelyet folytonos deformációval egy pontra lehet összehuzni, akkor



$$\iint_{(F)} (\text{rot } \mathcal{R}) \cdot \mathcal{R} \, df = 0$$



Tartalomjegyzék :

I. Görbék elmélete.

	oldalszám
1. Vektorok differenciáljányadosa.	3
2. Térgörbék előállítás.	7
3. Ivhosszuság.	9
4. Érintő és érintővektor.	12
5. Normálsík.	13
6. Simulósík.	14
7. Főnormális és binormális. Kisérő hároml.	16
8. Görbület, görbületi sugár. Görbületi középpont, görbületi kör vagy simulókör, Egységsgömbre való leképezés az érintőkkel	18
9. Csavarodás vagy torzió.	19
10. Teljes görbület. Frenet képletei.	21
11. A térgörbe alakja egy pontjának környezetében.	23
12. Görbék természetes egyenletei.	24
13. Közöséges csigavonal.	26
14. Lejtővonalak vagy hengeres csavarvonalak.	28
15. Bertrand-féle görbék.	31
16. Négy köröspont tétele.	33
17. Sikgörbe és a görbületi kör kölcsönös helyzete	35
18. Magasabb rendű érintkezés.	37
19. A simulósík és a görbe érintkezése.	40
20. A simulókör és a görbe érintkezése.	41
21. A simuló gömb.	42
22. Görbesereg burkolója.	43
23. Sik görbe evolútája és evolvens.	45
24. Az evolúta csúcspontja.	46
25. Evoluta és evolvens térgörbékénél.	48

II. Felületek.

26. A felület előállítás.	51
27. Felületi görbe, paramétervonalak.	54
28. Érintő, érintősík, normális.	54
29. Vonalfelület, torzfelület.	55
30. Érintőfelület, főnormális és binormális felület.	57
31. Egy paraméteres siksereg burkolója.	58
32. Polár felület, polár görbe, rektifikáló felület.	61
33. Az ivhossz, az első alapforma.	63
34. Szögmérés.	65
35. Felszinszámítás.	66
36. A második alapmennyiségek.	73
37. Meusnier tétele.	74
38. Főnormálgörbület, a Gauss-féle és a középgörbület.	77
39. Euler tétele.	80
40. Dupin-féle indikatrix.	84



41. Konjugált irányok.	89
42. Görbületi vonalak.	92
43. Asszimptota vonalak.	95
44. A Gauss és Weingarten-féle egyenletek.	98
45. Olinde Rodrigues formula.	101
46. Az asszimptota vonalak csavarodása.	103
47. Parabolikus pontokból álló felület.	105
48. Formaprobléma, összefüggések az alapmennyiségek között, theorema egregium.	106
49. Felületek egymásra való leképezései.	109
50. A felület gömbi képe.	113
51. Torzfelületek lefejtése.	115
52. Belső geometria.	118
53. Geodetikus vonalak.	119
54. Geodetikus görbék.	125
55. Geodetikus parallel koordináta rendszer	127
56. Geodetikus polárkoordináta rendszer	130
57. A Gauss-féle görbület geodetikus koordináta rendszerben.	133
58. Geodetikus vonalak differenciálegyenlete geodetikus polár koordinátarendszerben.	138
59. Gauss - Bonnet tétel.	140
60. Állandó görbületű felületek.	145
61. A vektor és tenzor számítás alapelemei.	151
III. A vektoranalízis alapfogalmai.	
62. Divergencia, rotáció. Gradiens, potenciál. Hable operátor.	159
63. Vonalas integrál.	160
64. Gauss integráltétele.	161
65. Stokes integráltétele.	163







Ára: 8,60 Ft

T. sz.: 61—4222