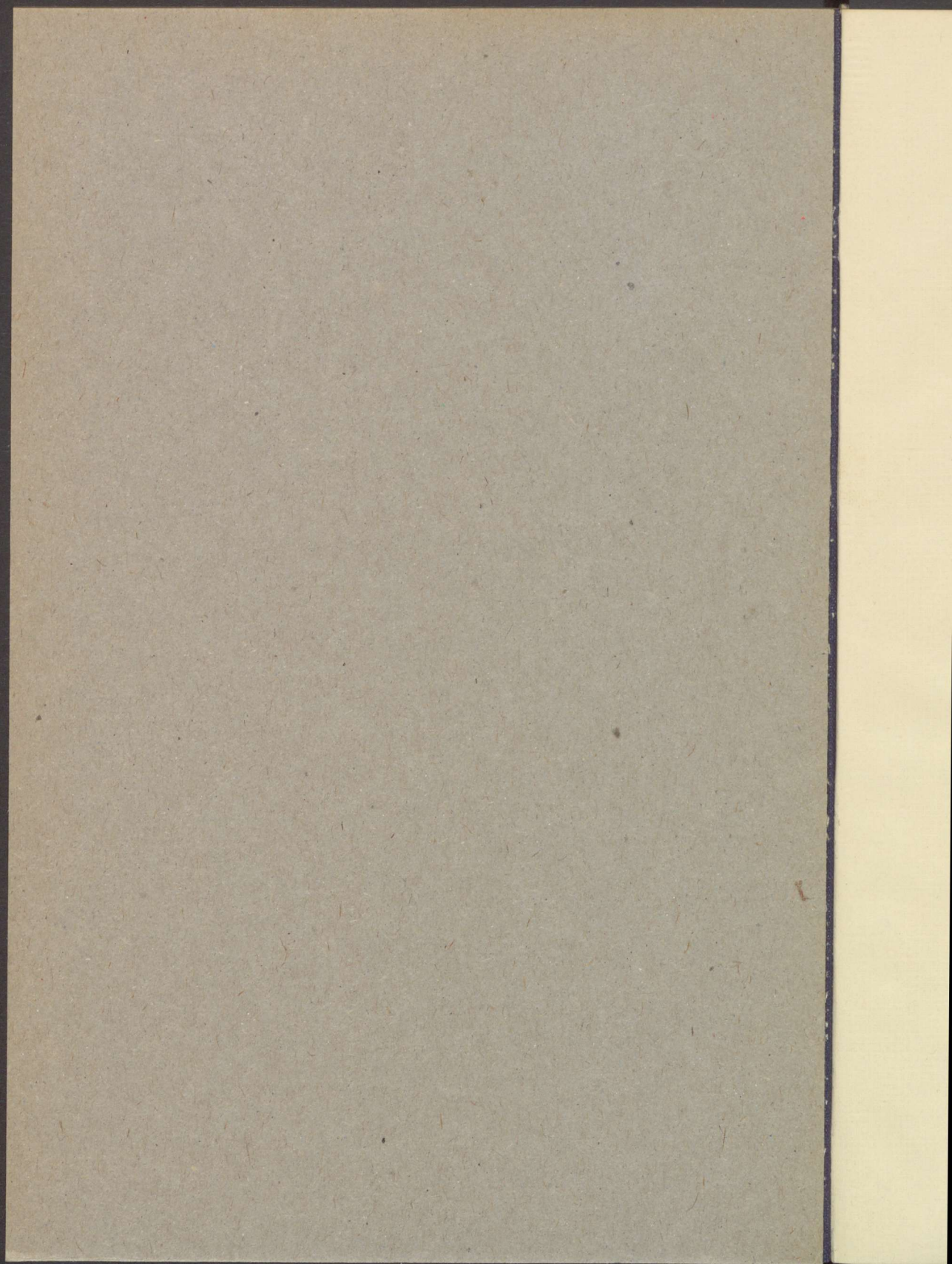
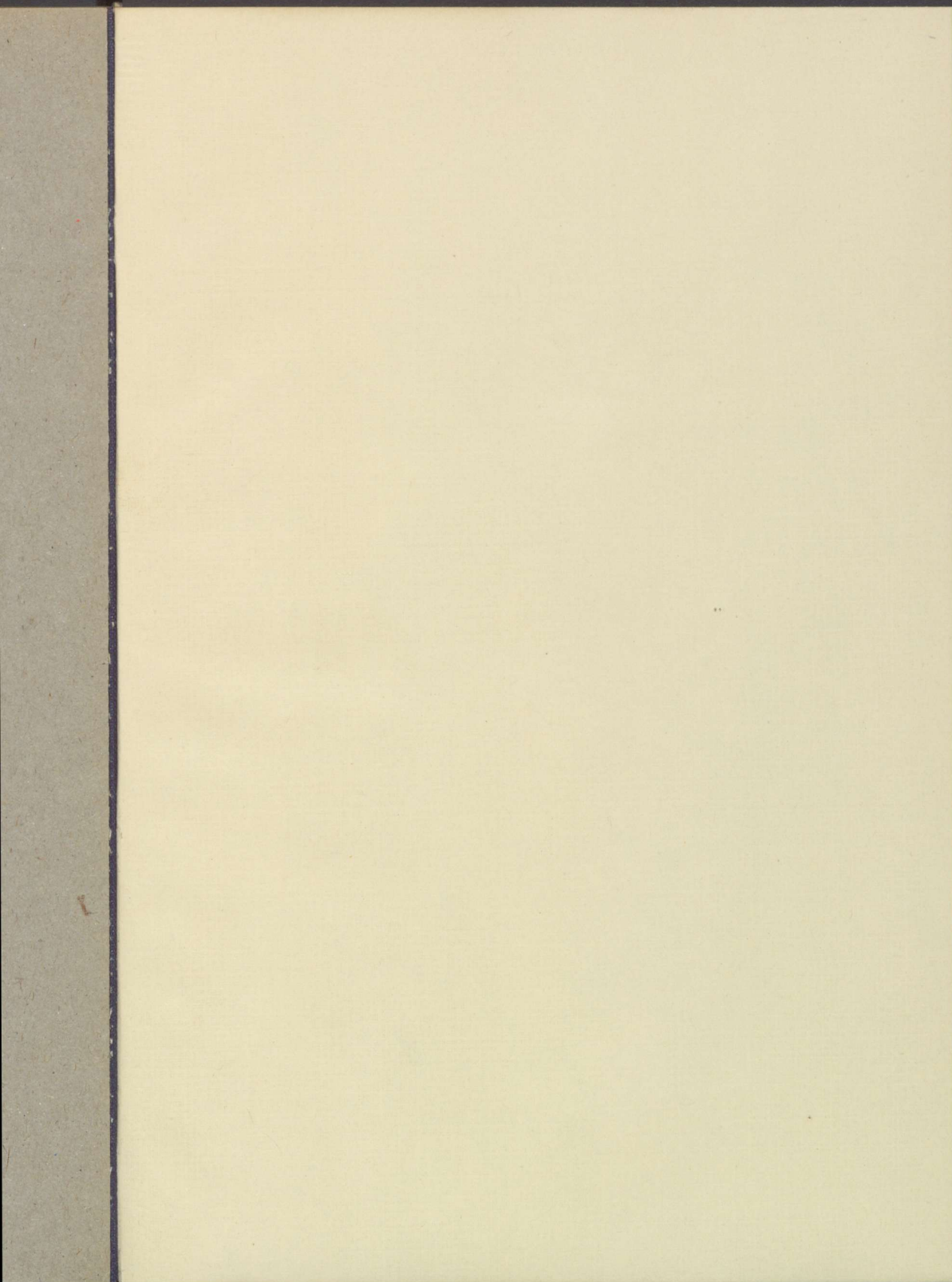


617.937





617

(R
2)

617937

Különlenyomat a *Matematikai és Fizikai Lapok* XXXVIII. kötetéből.
Budapest, 1931.

Sonderabdruck aus *Matematikai és Fizikai Lapok* Band XXXVIII
Budapest 1931.

Sz. Nagy Gyula.

(R
2)

EGY POLINOM DERIVÁLTJA ZÉRÓHELYEINEK HELYZETÉRŐL.

I. Ismeretes a Gauss-tól származó következő tétel:

Azon a legkisebb konvex Π polygonon kívül (illetőleg azon a legkisebb intervallumon kívül), amely az $f(x)$ polinom összes zéróhelyeit magában foglalja, a polinom $f'(x)$ deriváltja nem tűnhetik el. Az $f'(x)$ polinomnak azok a zéróhelyei, amelyek az $f(x)$ polinomnak nem többszörös zéróhelyei, mind a Π polygonnak (illetőleg intervallumnak) belsejében fekszenek.

Ennek a dolgozatnak célja bizonyos tartományoknak (csillagtartományoknak) a Π konvex polygonból való kirekesztésével az $f'(x)=0$ egyenlet gyökeinek helyzetét a Π polygonban pontosabban meghatározni.¹ Vizsgálatainkban egy előző dolgozatunk módszerét fogjuk felhasználni anélkül azonban, hogy annak eredményeire szükségünk volna.² Az általános esetet fogjuk szem előtt tartani, amikor az $f(x)=0$ egyenlet gyökei nem fek-

¹ A derivált zéróhelyeinek helyzetével három dolgozatban foglalkoztunk:

A: Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln, Jahresbericht des Deutschen Math. Verein. 27. kötet (1918), 37—43. oldal.

B: Über geometrische Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten, Jahresbericht d. Deutschen Math. Verein. 27. köt. (1918), 44—48. oldal.

C: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen, Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinf. 31. köt. (1922), 238—251. oldal.

² Az előbb B alatt idézett dolgozat. Ez a dolgozat véletlenül az irodalomban meglehetősen ismeretlen maradt. Ennek a dolgozatnak egy speciális tételét PÓLYA és SZEGŐ bevették kitűnő munkájukba, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis Bd. II. 244. oldal. M. BERNACKI csak azt a speciális tételt idézi, Bull. de l'Acad. Pol. d. Sc. et d. Lettr. Cl. d. Sc. Math. 1927, 629.

617.937

szenek mind egy egyenesen, megállapításaink azonban arra az esetre is érvényesek, amikor a II poligon egy intervallumra esik össze. Ekkor a II poligonon belül fekvő pont az intervallum belsejében fekvő pontot, a poligonnak egy szögpontja pedig az intervallumnak egy végpontját jelenti.

Dolgozatunk utolsó részében csupa reális gyökökkel bíró algebrai egyenletekre vonatkozó néhány eredményünket általánosítjuk komplex gyökökkel is bíró reális együtthatójú algebrai egyenletekre, röviden kifejezve: reális algebrai egyenletekre.

Minthogy az $f(x)-A$ és az $f(x)$ polinom deriváltja ugyanaz, azért tételeink akkor is érvényben maradnak, ha azokban az $f(x)$ polinomot az $f(x)-A$ polinommal helyettesítjük, s így az $f(x)$ polinom zérőhelyei helyett A helyeiről beszélünk, bármilyen szám legyen is az A állandó. Reális polinomokra vonatkozó tételekben azonban A is köteles reális lenni.

2. Ha a_1, a_2, \dots, a_n az $f(x)=0$ n -edfokú algebrai egyenlet gyökei és β az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek az a_1, a_2, \dots, a_n gyököktől különböző gyöke, akkor fennáll a következő egyenlet:

$$\frac{f'(\beta)}{f(\beta)} = \frac{1}{\beta-a_1} + \frac{1}{\beta-a_2} + \dots + \frac{1}{\beta-a_n} = 0. \quad (1)$$

Ha ϕ egy tetszőleges szöget jelent és ha

$$a_k - \beta = r_k \cdot e^{i\varphi_k} = r_k \cdot e^{i(\psi_k + \psi)} \quad \text{és} \quad \frac{r_k}{\sin \phi_k} = a_k^i, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

akkor a

$$- e^{i\psi} \frac{f'(\beta)}{f(\beta)} = 0$$

egyenletnek tiszta képzetes részére fennáll a következő összefüggés

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 0. \quad (2)$$

Ebben az egyenletben a_k annak az a_k és β gyökponatokon átmenő körnek átmérője, amelynek érintője a β ponton átmenő és a valós tengellyel ϕ szöget alkotó e egyenes. Az a_k átmérő

az e egyenesnek az egyik oldalán levő gyökpontokra vonatkozólag pozitív, a másik oldalán fekvőkre negatív előjelű, az e egyenesen fekvő gyökpontokra nézve pedig az a_k átmérő végtelen.

Abból, hogy a (2) egyenletben az a értékek nem lehetnek mind pozitívok, vagy mind negatívok, következik a GAUSS-féle tétel.

Föltételezhetjük, hogy az a_i gyökpontok indexeit úgy választottuk meg, hogy a (2) egyenlet első h tagja pozitív, a következő k tag negatív és az utolsó $n-k-h$ (≥ 0) tag zéró és azonkívül

$$\begin{aligned} 0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_h, \quad b_i = -a_{h+i}, \quad (i=1, 2, \dots, k) \\ 0 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_k. \end{aligned}$$

Ilyen jelölésekkel a (2) egyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_h} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k}. \quad (3)$$

Ha az a_1 , illetőleg a_{h+1} az $f(x)=0$ egyenletnek p -szeres, illetőleg q -szoros gyöke, akkor fennállanak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{p}{a_1} \leq \frac{k}{b_1}, \quad \frac{q}{b_1} \leq \frac{h}{a_1}; \quad (4)$$

$$\frac{h}{a_1} \geq \frac{k}{b_k}, \quad \frac{k}{b_1} \geq \frac{h}{a_h}. \quad (5)$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből lehozhatók B dolgozatunk eredményei.

Ha a_i ($i \leq h$), illetőleg a_j ($h < j \leq h+k$) az $f(x)=0$ egyenletnek egy különben tetszőleges legfeljebb p -szeres, illetőleg legfeljebb q -szoros gyöke, amelyhez az a , illetőleg b átmérő tartozik, akkor fennállanak nyilvánképen a

$$\frac{p}{a} \leq \frac{k}{b_1}, \quad \frac{q}{b} \leq \frac{h}{a_1} \quad (6)$$

egyenlőtlenségek is.

3. A (6) egyenlőtlenségek alapján bebizonyítjuk a következő tételt:

I. Ha a az $f(x)=0$ n -edfokú algebrai egyenletnek olyan p -szeres gyöke, amelyen átmenő egyeneseknek bármelyik oldalán legfeljebb s gyöke fekszik az egyenletnek, és, ha K az a gyökponton átmenő olyan kör, amelynek belsejében az $f(x)=0$ egyenletnek egy gyöke sem fekszik, akkor az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek egy gyöke sincs a K kört az a pontban belülről érintő és $\frac{p}{p+s}$ -szer kisebb sugarú körnek belsejében.

Tételezzük fel ugyanis, hogy ez a tétel nem igaz és így van az $f'(x)=0$ egyenletnek egy β gyöke a K kört a -ban belülről érintő $\frac{p}{p+s}$ -szer kisebb sugarú k kör belsejében. Jelöljük a K körnek az a és β pontokon átmenő egyenessel való második metszéspontját γ -val, a K kört a γ pontban belülről érintő és a β ponton átmenő kört K_1 -gyel, a K_1 kört a β pontban kívülről érintő és az a ponton átmenő kört pedig k_1 -gyel.

Ha D , d , a és b jelölik a K , k , k_1 , illetőleg K_1 körök átmérőit és f_1 , illetőleg f_2 az $a\beta$, illetőleg $\beta\gamma$ vonaladarabok hosszát, akkor fennáll az

$$\frac{b}{a} = \frac{f_2}{f_1} > \frac{D-d}{d} = \frac{D - \frac{Dp}{p+s}}{\frac{Dp}{p+s}} = \frac{s}{p}$$

egyenlőtlenség.

Ha tehát b_1 annak a legkisebb körnek az átmérője, amely a β pontban a k_1 kört kívülről érinti és az $f(x)=0$ egyenletnek egy gyökpontján keresztül megy, akkor

$$\frac{b_1}{a} \geq \frac{b}{a} > \frac{s}{p}.$$

Ez az egyenlőtlenség azonban ellentmondáshoz vezet, mert a (6) egyenlőtlenség miatt

$$\frac{b_1}{a} \leq \frac{k}{p} \leq \frac{s}{p}.$$

Ebből az ellentmondásból következik az I. tétel igazsága.

4. Az I. tételből következik a következő:

II. Legyen G_a az a legkisebb körívpolygon, melynek belsejében az $f(x)=0$ algebrai egyenletnek legalább p -szeres a gyökén kívül nincs más gyöke és amely az a -n keresztülmenő minden olyan kört, melyen belül az $f(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke, egészen magában foglal. Legyen továbbá $G_a(\rho)$ a G_a tartománynak a -ra, mint külső hasonlósági pontra vonatkozólag $1:\rho$ ($\rho < 1$) arányban kisebbitett képe. Ha az a -n keresztülmenő egyeneseknek akármelyik oldalán az $f(x)=0$ egyenletnek legfeljebb s gyöke fekszik, akkor az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek a -tól különböző gyökei közül egy sem fekszik a $G_a\left(\frac{p}{p+s}\right)$ tartomány belsejében.

Olyan a gyökre, amely az $f(x)=0$ algebrai egyenlet gyökeit magában foglaló legkisebb Π konvex polygon csúcspontjaitól különbözik, $p+s \leq n-1$. A II. tételből tehát következik a következő:

III. Ha a az $f(x)=0$ n -edfokú egyenlet gyökeit bezáró legkisebb konvex polygon szögpontjaitól különböző és legalább p -szeres gyöke, akkor az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek egy a -tól különböző gyöke sem fekszik a $G_a\left(\frac{p}{n-1}\right)$ tartomány belsejében.

A II. tételből következnek még a következő tételek:

IV. Ha a az $f(x)=0$ n -edfokú polinomnak legalább p -szeres zéróhelye, akkor az $f'(x)$ derivált polinomnak nincs a -tól különböző zéróhelye a $G_a\left(\frac{p}{n}\right)$ tartomány belsejében.

V. Ha a K_a kör belsejében az $f(x)=0$ n -edfokú egyenletnek legalább p -szeres a gyökén kívül más gyöke nincs és ha a $K_a(\rho)$ kör a K_a körnek a -ra, mint külső hasonlósági pontra vonatkozó $1:\rho$ arányban ($\rho < 1$) kisebbitett képe, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincsen a -tól különböző gyöke a $K_a\left(\frac{p}{n}\right)$ kör belsejében.

Ha a nem szögpontja az $f(x)=0$ egyenlet gyökeit magában

foglaló legkisebb konvex poligonnak, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek a $K_a\left(\frac{p}{n-1}\right)$ kör belsejében sincs gyöke, de nincsen a $K_a\left(\frac{p}{p+s}\right)$ körön belül sem, ha az a -n átmenő egyenesek bármely oldalára az $f(x)=0$ egyenletnek legfeljebb s számú gyöke esik.¹

VI. Ha d az $f(x)=0$ n -edfokú egyenlet egy a gyökpontjának a legközelebbi gyökpontjától való távolsága, akkor az a pont körül $\frac{d}{n}$ sugárral leírt körön belül nincs a -tól különböző gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.

¹ Az V. tétel első része J. L. WALSH következő fontos tételének („On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms, and of the derivative of a rational function”, Transactions of the Amer. Math. Soc. 22. kötet (1921), 115. oldal; lásd PÓLYA-SZEGŐ: Aufgaben und Lehrsätze II. kötet 245–246. old.) következménye:

Ha az $f(x)=0$ $n=n_1+n_2$ -edfokú algebrai egyenletnek n_1 gyöke a K_1 , a többi n_2 gyöke pedig a K_2 körtartományban fekszik, akkor az $f'(x)=0$ egyenlet akármelyik gyöke beleesik a

$$K_1, K_2 \text{ és } K_3 = \frac{n_1 K_2 + n_2 K_1}{n_1 + n_2}$$

körtartományok valamelyikébe.

Egy K körtartomány a síknak egy olyan véges vagy végtelen nagy tartományát jelenti, amelynek határa a K kör vagy határesetben a K egyenes.

Ha x_1 és x_2 a GAUSS-féle számsíkon a K_1 , illetőleg K_2 körtartomány egy tetszőleges pontja, akkor a K_3 körtartomány mindazoknak a pontoknak összessége, amelyekhez tartozó komplex számok

$$x_3 = \frac{n_1 x_2 + n_2 x_1}{n_1 + n_2}$$

alakban állíthatók elő.

J. L. WALSH kimondotta az előbbi tételből lehozható következő tételt is:

Ha az $f(x)=0$ n -edfokú egyenletnek a p -szerez gyöke és a többi $n-p$ gyöke a K körtartományban van, akkor az $f'(x)=0$ egyenlet gyökei a -ban, K -ban és abban a K' körtartományban fekszenek, amely a K körtartománynak az a pontra vonatkozólag $\frac{p}{n}$ arányban kisebbitett képe.

Ha az a pont a K körön belül van és a K körtartomány a K körön kívül fekszik, akkor a K' körtartomány az V. tételben szereplő $K_a\left(\frac{p}{n}\right)$ körön kívüleső körtartomány, s így az V. tétel első részét kapjuk.

Ha a az $f(x)=0$ egyenletnek legalább p -szeres gyöke, akkor az a gyökpontra körül $p \frac{d}{n}$ sugárral leírt körön belül sincs az $f'(x)=0$ egyenletnek a -tól különböző gyöke.¹

VII. Ha a az $f(x)=0$ n -edfokú egyenlet összes gyökeit magában foglaló legkisebb konvex poligon szögpontjaitól különböző gyökpontra az egyenletnek, melynek multipllicitása legalább p és amelynek távolsága a legközelebbi gyökpontra d , akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs a -tól különböző gyökpontra az a körül $p \frac{d}{n-1}$ sugárral leírt körön belül, de a koncentrikus $p \frac{d}{p+s}$ sugarú kör belsejében sincs, ha az a -n átmenő egyenesek bármely oldalára az $f(x)=0$ egyenletnek legfeljebb $s (< n-p)$ számú gyöke esik.

5. Az előző tételek kiegészítéséül kimutatjuk a két utolsó tétel pontosságát, vagyis azt, hogy a bennük meghatározott kör általánosságban nem helyettesíthető az $f'(x)=0$ egyenlet a -tól különböző gyökei közül belsejében egyet sem tartalmazó koncentrikus nagyobb körrel.

Ha ugyanis

$$f(x) = x(x-1)^{n-1} = 0, \text{ illetve } f(x) = x^p(x-1)^{n-p} = 0,$$

akkor $a=0$ mellett $d=1$. Ekkor az $f'(x)=0$ egyenletnek $\frac{d}{n} = \frac{1}{n}$, illetve $p \cdot \frac{d}{n} = \frac{p}{n}$ gyöke, ami a VI. tétel pontosságát igazolja.

Ha pedig

$$f(x) = x^p(x-1)^s(x+t)^{n-p-s} = 0, \quad n-p-s \geq s \text{ és } t \geq 1$$

¹ A VI. tétel első részét először J. W. ALEXANDER bizonyította be, *Annals of Math.* II. 17. kötet (1915), 16. oldal. A tétel második része J. L. WALSH egy régebbi tételének is következménye (*Transactions of the Amer. Math. Soc.*, 19. köt. (1918), 298. oldal), de egyszersmind könnyen belátható következménye B dolgozatunk (1918) tételeinek is.

tesszük, akkor $a=0$ mellett $d=1$ és az $f'(x)=0$ egyenletnek

$$\beta_t = \frac{2p}{p+s - \frac{n-s}{t} + \sqrt{\left(p+s - \frac{n-s}{t}\right)^2 + \frac{4np}{t}}}$$

gyöke. Ebből következik, hogy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t = \frac{p}{p+s},$$

amiből következik a VII. tétel pontossága.

Ezek alapján belátható a II–V. tételek pontossága is, amennyiben a bennük szereplő $G_\alpha\left(\frac{p}{p+s}\right)$, $G_\alpha\left(\frac{p}{n-1}\right)$, $G_\alpha\left(\frac{p}{n}\right)$, $K_\alpha\left(\frac{p}{n}\right)$, $K_\alpha\left(\frac{p}{n-1}\right)$, illetőleg $K_\alpha\left(\frac{p}{p+s}\right)$ tartomány nem mindig helyettesíthető az α külső hasonlósági pontra vonatkozólag hasonló olyan nagyobb tartománnyal, amely az $f'(x)=0$ egyenlet α -tól különböző gyökei közül egyet sem tartalmaz belsejében.

A II. tételben szereplő $G_\alpha\left(\frac{p}{p+s}\right)$ tartomány csillagtartomány az α középpontra vonatkozólag. Ha ugyanis P ennek a tartománynak egy pontja, akkor az α és a P pont közé eső egész vonalдарab, intervallum hozzátartozik a $G_\alpha\left(\frac{p}{p+s}\right)$ tartományhoz. Ennek a csillagtartománynak α középpontját a tartomány határpontjaival összekötő sugarakat legalább bizonyos irányokban meg lehet úgy nyújtani, hogy ezek megnyújtása által a $G_\alpha\left(\frac{p}{p+s}\right)$ csillagtartományból kapott nagyobb csillagtartomány még mindig ne tartalmazza az $f'(x)=0$ egyenletnek egy α -tól különböző gyökét sem. Ez belátható a következő tétel alapján:

VIII. Ha az $f(x)=0$ algebrai egyenlet legalább p -szeres α gyökponáján keresztülmenő K kör belsejében nincs az egyenletnek más gyöke, ha továbbá e jelöli a K kör érintőjét az α pontban, γ a körkerület egy tetszőleges pontját és r az $(\alpha\gamma)$ intervallum hosszát és ha végül s számú gyök van az egyenesnek γ -t tartalmazó oldalán, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek

nincs gyöke az $(\alpha\gamma)$ intervallum $\frac{p}{p+s}r$ hosszúságú $(\alpha\beta)$ részintervallumának belsejében. Ha a β ponton át e -vel párhuzamosan húzott e' egyenesnek γ -t tartalmazó oldalán az $f(x)=0$ egyenletnek csak $s'(<s)$ gyöke van, akkor az $(\alpha\gamma)$ intervallum $\frac{p}{p+s'}r$ hosszúságú $(\alpha\beta')$ részintervallumának belsejében sincs gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek. Ha pedig a β' ponton e -vel párhuzamosan húzott e'' egyenesnek γ -t tartalmazó oldalán az $f(x)=0$ egyenletnek csak $s''(<s')$ gyöke van, akkor az $(\alpha\gamma)$ intervallum $\frac{p}{p+s''}r$ hosszúságú $(\alpha\beta'')$ részintervallumának egy be'ső pontja sem lehet gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.

Az itt leírt eljárás továbbfolytatásával az $(\alpha\beta'')$ intervallumot esetleg még tovább lehet nyújtani, a nélkül, hogy a megnyújtott intervallum belsejében lenne gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.

A VIII. tétel az I. tétel és bizonyítása alapján minden nehézség nélkül belátható.

6. Az előző tételek alapján az $f(x)=0$ egyenlet bármely gyöke körül kijelölhetünk egy-egy olyan kisebb vagy nagyobb csillagtartományt, amelynek belsejében nincs az $f'(x)=0$ egyenletnek az $f(x)=0$ egyenlet többszörös gyökeitől különböző gyöke. Ezeknek a csillagtartományoknak lehetnek egymással közös pontjaik és lehetnek pontjaik a Π konvex poligonon kívül is. Ezeknek a csillagtartományoknak a síkból való kiemelése után a Π poligon belsejének megmaradt részében vagy annak határán fekszenhetnek csak a $f'(x)=0$ egyenletnek az $f(x)=0$ egyenlettel nem közös gyökei.

Bizonyos esetekben azonban csillagtartományok helyett egész szögtereket lehet a síkból eltávolítani, amelyek a Π poligon egy részét is magában foglalják, amelyekben szintén nincs az $f(x)=0$ algebrai egyenlet többszörös gyökeitől különböző gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.

Ki fogjuk mutatni a következő tételt:

IX. Jelöljön $S_\alpha(2\varphi)$ egy $2\varphi(<\pi)$ nyílású a szögponntal bíró szögteret és jelölje $S_\alpha(2\varphi+\pi)$, illetőleg $S_\alpha(2\varphi-2\varphi)$ azt a $(2\varphi+\pi,$

illetőleg $2\varphi - 2\phi$ nyílású a szögponthoz birtok) szögteret, melynek ugyanaz a szögfelező félegyenese, mint az $S_a(2\varphi)$ szögtérnek. Ha a az $f(x)=0$ algebrai egyenletnek egy p -szeres gyöke, ha továbbá nincs gyöke az egyenletnek az $S_a(2\varphi)$ szögtér belsejében, de legfeljebb s számú gyöke van az $S_a(2\varphi + \pi)$ szögtérben foglalt bármely félsík belsejében és ha végül

$$\frac{s}{s+2p} = \sin \phi < \sin \varphi, \quad \left(0 < \psi < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$$

akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke az $S_a(2\varphi - 2\phi)$ szögtér belsejében.

Legyen ugyanis e az $S_a(2\varphi - 2\phi)$ szögtérnek a szögponthoz kiinduló tetszőleges félegyenese. Tegyük fel, hogy a tétellel ellenkező módon ennek a félegyenestnek egy β pontja az $f'(x)=0$ egyenletnek gyöke. Jelölje K_1 azt a kört, amelynek az a hosszúságú (a, β) intervallum átmérője. Legyen K_2 a K_1 kört a β pontban kívülről érintő legkisebb kör, amely az $f(x)=0$ egy gyök-pontján keresztül megy és legyen b_1 ennek a körnek átmérője. Ha az $f(x)=0$ egyenletnek k számú gyöke van a K_1 és K_2 körök β pontjához tartozó közös t érintőnek azon az oldalán, amelyen a K_2 kör fekszik, akkor a (6) egyenlőtlenség miatt

$$\frac{p}{a} \leq \frac{k}{b_1} \leq \frac{s}{b_1},$$

amiből

$$\frac{b_1}{b_1+2a} \leq \frac{s}{s+2p}.$$

Az a pontból a K_2 körhöz húzható érintők azonban az e egyenessel olyan ϕ_1 hegyes szöget alkotnak, amelyre fennáll a

$$\sin \phi_1 = \frac{b_1}{b_1+2a} \leq \frac{s}{s+2p} = \sin \phi$$

egyenlőtlenség, amiből $\phi_1 \leq \phi$. Ebből következik, hogy az a pontból a K_2 körhöz húzható érintők és velük az egész K_2 kör az $S_a(2\varphi)$ szögtérbe esik. Ez a K_2 kör tehát — feltételünkkel

ellentétben — nem mehet az $f(x)=0$ egyenletnek egyetlen gyök-pontján sem át.

Ebből az ellentmondásból következik a tétel igazsága.

Az előző tétel bizonyítása alapján könnyen belátható a következő tétel is.

X. Ha a az $f(x)=0$ algebrai egyenletnek legfeljebb p -szeres gyöke, ha továbbá nincs gyöke az egyenletnek annak a területnek belsejében, amely egy $S_a(2\varphi)$ szögtéren belül és az a középpont körül leírt egy K_a körön kívül fekszik, és ha végül a K_a kört az $S_a(2\varphi)$ területen belül érintő egyeneseknek K_a -val ellenkező oldalán az $f(x)=0$ egyenletnek legfeljebb s számú gyöke van, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs az $S_a(2\varphi)$ szögtér közepén szimmetrikus fekvésű $S_a(2\varphi-2\psi)$ szögtér belsejében és egyúttal a K_a körön kívül fekvő gyöke, feltéve, hogy van az

$$\frac{s}{s+2p} = \sin \psi < \sin \varphi \quad \text{és} \quad 0 < \psi < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

egyenlőtlenségeknek eleget tevő ψ szög.

A IX. tételből következik a következő két tétel is:

XI. Ha a_1, a_2, a_3 az $f(x)=0$ harmadfokú egyenlet gyökei és ha az $a_1 a_2 a_3$ háromszög a_1 szögpontjánál fekvő szöge $2\varphi > \frac{\pi}{3}$, akkor e szöget alkotó két oldal $S_{a_1}(2\varphi)$ szögterének közepén szimmetrikusan fekvő $S_{a_1}\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ szögtérnek belsejében nem fekszik gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.

XII. Ha az $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a)^p=0$ algebrai egyenletnek a gyöke az $a_1 a_2 a_3$ háromszög belsejében fekszik és ha ϕ a $\sin \phi = \frac{1}{1+p}$ egyenletnek eleget tevő hegyes szög, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke azon három $S_a(2\phi)$ szögtéren kívül, amelyeknek az aa_1, aa_2 , illetőleg aa_3 félegyenes belső szögfelezője.

Ha $p=1$, akkor $\phi = \frac{\pi}{6}$, ha $p > 57$, akkor $\phi < 1^\circ$.

További speciális tételek lehozása nem okoz nehézséget.

7. Az $f(x)$ polinom zéróhelyeit magában foglaló legkisebb

konvex Π poligon határának egy pontja csak akkor lehet a derivált $f'(x)$ polinomnak zéróhelye, ha az egyszersmind az $f(x)$ polinomnak is zéróhelye. Ebből következik, hogy a Π poligon oldalaihoz elég közel fekvő pontjaiban szintén nem tűnhetik el az $f'(x)$ polinom, feltéve, hogy azokban a pontokban az $f(x)$ polinomnak nincs többszörös zéróhelye. Erre vonatkozólag a következő tétel nyújt további felvilágosítást:

XIII. Legyen az $f(x)=0$ algebrai egyenlet a_1 és a_2 egyszeres gyöke az egyenlet gyökeit magában foglaló legkisebb Π konvex poligon egy oldalának két végpontja, amelyen az egyenletnek nincs más gyökpontja. Legyen $S_{a_1}(2\varphi_1)$, illetőleg $S_{a_2}(2\varphi_2)$ a Π poligon egy részét magában foglaló olyan szögtér, amelynek egyik szára tartalmazza az a_1a_2 poligonoldalt, másik szára az egyenlet egy gyökpontját köti össze az a_1 , illetőleg a_2 szögponttal és amelynek belsejében nincs az egyenletnek gyöke. Ha a_3 az egyenlet olyan gyökpontja, hogy az $a_1a_2a_3$ háromszög belsejében nincs az egyenletnek gyöke, ha a_{12} az a_1a_2 oldal felezőpontja és a' a háromszög a_3a_{12} súlyvonalának felezőpontja, ha továbbá φ_3 , illetőleg φ_4 az a szög, amely alatt az a_3a' távolság az a_1 , illetőleg a_2 pontokból látható és ha végül φ a $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ és φ_4 szögek közül a legkisebb, akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke abban a Π poligonba eső körszeletben, amelynek köríve az a_1a_2 poligonoldallal φ szöget zár be.

Ennek a tételnek bebizonyítása végett feltételezzük, hogy az $f'(x)=0$ egyenletnek egy β gyöke ebben a körszeletben fekszik. Ha a_1 az a_1, a_2 és β pontokon átmenő K_{12} kör átmérője, b pedig a K_{12} kört β pontban kívülről érintő és az a_3 ponton átmenő K_3 körnek átmérője, akkor fennáll a $\frac{2}{a_1} \geq \frac{1}{b}$ egyenlőtlenség. Ez az egyenlőtlenség az (5) egyenlőtlenségekből következik, mert a szerkesztés szerint a K_{12} és K_3 körök β pontjához tartozó e érintőnek az egyik oldalán csak a_1 és a_2 gyöke fekszik az $f(x)=0$ egyenletnek.

Azalatt, amíg egy β' pont az $a_1a_2a_3$ háromszögben a K_{12} körön mozog, az a_3 ponton átmenő és a K_{12} kört β' pontban

érintő K'_3 kör b' átmérője maximumát akkor éri el, ha az a_1 , a_2 pontok egyikével összeesik. Ha b' az a_1 pontban veszi fel B maximumát és ha d_2 és d_3 , illetőleg δ_1 és δ_2 jelöli az $a_1a_2a_3$ háromszög a_1a_2 és a_1a_3 oldalát, illetőleg a_1 és a_3 szögpontjánál levő szög nagyságát, s ha végül ϕ jelöli azt a hegyes szöget, amelyet az a_1a_2 oldal alkot a K_{12} körnek a_1 pontján átmenő érintővel, akkor fennállanak a következő összefüggések:

$$a_1 = \frac{d_2}{\sin \phi}, \quad B = \frac{d_3}{\sin(\delta_1 - \phi)},$$

$$\frac{b}{a_1} < \frac{B}{a_1} = \frac{d_3 \sin \phi}{d_2 \sin(\delta_1 - \phi)} < \frac{d_3 \sin \varphi}{d_2 \sin(\delta_1 - \varphi)} \leq \frac{d_3 \sin \varphi_3}{d_2 \sin(\delta_1 - \varphi_3)}.$$

Az $y = \frac{\sin x}{\sin(\delta_1 - x)}$ függvény ugyanis x -nek növénye, mert deriváltja pozitív. Azonkívül $0 < \phi < \varphi \leq \varphi_3 < \delta_1$, mert a β pont a φ szögű körszeletben fekszik.

Mivel az a_3a' vonal darab az $a_1a_2a_3$ háromszög súlyvonala, azért

$$\frac{d_3 \sin \varphi_3}{d_2 \sin(\delta_1 - \varphi_3)} = \frac{1}{2} \quad \text{és így} \quad \frac{b}{a_1} < \frac{B}{a_1} < \frac{1}{2}.$$

Ez az egyenlőtlenség azonban ellentmond az (5) egyenlőtlenségből következő $\frac{2}{a_1} \geq \frac{1}{b}$ egyenlőtlenségnek.

Ebből az ellentmondásból következik a XIII. tétel igazsága.

8. Dolgozatunk következő része reális koefficiensű, vagy röviden reális polinomokkal foglalkozik és a csupa reális zéróhelyekkel bíró polinomokra vonatkozó néhány eredményünket általánosítja.¹

Kimutatjuk LAGUERRE egy tételének következő általánosítását:

XIV. Ha az $f(x)=0$ reális algebrai egyenletnek a és b ($a < b$) reális gyökei közé nem esik egy gyök reális része sem és ha az egyenletnek h_a számú olyan gyöke van, amelynek reális

¹ A értekezés VII. tétel, 41. old.

része nem nagyobb a -nál, akkor az $f'(x)=0$ derivált egyenletnek nincs gyöke a

$$\left(b - \frac{b-a}{h_a+1}, b\right)$$

intervallum belsejében.

Ha pedig az $f(x)=0$ egyenletnek h_b számú olyan gyöke van, melynek reális része nem kisebb, mint b , akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek nincs gyöke az

$$\left(a, a + \frac{b-a}{h_b+1}\right)$$

intervallum belsejében.

Ha a_1, a_2, \dots, a_n jelöli az $f(x)=0$ reális n -edfokú algebrai egyenlet gyökeit növekvő reális részük sorrendjében és ha az a_k és a_{k+1} gyökök reálisak, akkor az $f'(x)=0$ egyenlet egy olyan β reális gyökére, amely az (a_k, a_{k+1}) intervallumba esik, fennáll az

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta-a_1} + \frac{1}{\beta-a_2} + \dots + \frac{1}{\beta-a_k} = \\ = \frac{1}{a_{k+1}-\beta} + \frac{1}{a_{k+2}-\beta} + \dots + \frac{1}{a_n-\beta} \end{aligned} \quad (7)$$

egyenlet. Ennek az egyenletnek mindkét oldalán a valós gyökökre vonatkozó tagok és a komplex gyökökre vonatkozó tagok reális részei pozitívak, s így a konjugált komplex gyökpárokra vonatkozó két-két tag összege pozitív. Ha ugyanis $a_h = p + qi$, akkor a szerint, amint $h < k$, illetőleg $h < k+1$

$$\frac{1}{\beta-a_h} = \frac{(\beta-p)+qi}{(\beta-p)^2+q^2}, \text{ illetőleg } \frac{1}{a_h-\beta} = \frac{(p-\beta)-qi}{(p-\beta)^2+q^2}.$$

A (7) egyenlet mindkét oldalán az a tag, amely közvetlenül az egyenlőségi jel mellett áll nagyobb, vagy legalább nem kisebb, mint azon az oldalon szereplő akármelyik tagnak reális része. Ebből következnek a

$$\frac{k}{\beta-a_k} \geq \frac{1}{a_{k+1}-\beta} \text{ és } \frac{n-k}{a_{k+1}-\beta} \geq \frac{1}{\beta-a_k} \quad (8)$$

egyenlőtlenségek, amikből pedig

$$\alpha_{k+1} - \beta \geq \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{k+1} \quad \text{és} \quad \beta - \alpha_k \geq \frac{\alpha_{k+1} - \alpha_k}{n-k+1}. \quad (9)$$

Ezzel ki van mutatva a XIV. tétel, mert ha $\alpha_k = a$ és $\alpha_{k+1} = b$, akkor $h_a = k$ és $h_b = n - k$.

Minthogy $h_a \leq n-1$ és $h_b \leq n-1$, azért a XIV. tétel magában foglalja a P. MONTEL-től kimutatott következő tételt:¹

Ha az $f(x)$ n -edfokú reális polinomnak a és b reális zéróhelyei közé nem esik a polinom egy zéróhelyének reális része sem és ha az (a, b) intervallumot n egyenlő részre osztjuk, akkor a két szélső osztásrész belsejében sehol sem tűnhetik el az $f'(x)$ derivált polinom.

A (9) egyenlőtlenségekből lehozható egyszersmind a következő tétel:

XV. Ha mindazokat az n -edfokú reális polinomokat tekintetbe vesszük, amelyeknek 1., a és b közös reális zéróhelyük ($a < b$), 2., egy zéróhelyük reális része sem esik az (a, b) intervallum belsejébe, 3., h_a , illetőleg h_b számú a -nál nem nagyobb, illetőleg b -nél nem kisebb reális részű zéróhelye van, akkor ezen polinomok deriváltjainak az (a, b) intervallumba eső zéróhelyei az (a, b) intervallumnak egy

$$L = \left(1 - \frac{1}{h_a+1} - \frac{1}{h_b+1}\right)(b-a)$$

hosszúságú részintervallumában vannak. Erre az L hosszúságra nézve fennállanak az

$$\frac{n-2}{2n}(b-a) \leq L \leq \frac{n-2}{n+2}(b-a)$$

egyenlőtlenségek, ha n páros szám és az

$$\frac{n-2}{2n}(b-a) \leq L \leq \left(1 - \frac{4(n+2)}{(n+1)(n+3)}\right)(b-a) < \frac{n-2}{n+2}(b-a)$$

egyenlőtlenségek, ha n páratlan.

¹ Sur les zéros des dérivées des fonctions analytiques, Bull. de la Société Math. de France, 58. köt. (1930), 149. oldal.

Ha ugyanis a (7) egyenletben az a_1, a_2, \dots, a_{k-1} gyököket az a_k -val összeadjuk és $(k+1 < n)$ esetben az $a_{k+2}, a_{k+3}, \dots, a_n$ gyökök reális részét elég nagynak vesszük fel, akkor a (8) alatti első egyenlőtlenség bal és jobboldala olyan pontosan egyezik, amilyen pontossággal éppen akarjuk. Hasonlót elérhetünk a (8) második egyenlőtlenségére is. Másrészt pedig nyilvánvaló, hogy az

$$\frac{1}{h_a+1} + \frac{1}{h_b+1} = \frac{n+2}{(h_a+1)(h_b+1)}, \quad h_a+h_b=n, \\ (1 \leq h_a \leq n-1, 1 \leq h_b \leq n-1)$$

összeg maximumát akkor éri el, ha a h_a és h_b tényező közül az egyik az egység, minimumát pedig akkor, ha a két tényező egyezik egymással (n páros értéke esetén), vagy csak egységben különböznek egymástól (n páratlan értéke mellett).

9. Csupa reális zérőhelyekkel bíró n -edfokú polinomokra kimutattuk,¹ hogy a zérőhelyeket tartalmazó legkisebb intervallum n egyenlő részre való osztása után kapott két szélső osztásrész akármelyike tartalmazza a derivált polinomnak legalább egy zérőhelyét. Ez a tétel olyan reális polinomokra, amelyek két reális zérőhelyének intervalluma tartalmazza a többi reális zérőhelyet és a komplex gyököknek reális részeit, minden további nélkül nem általánosítható, miként ez az x^n-1 polinom n páros értéke mellett látható.

Kimondhatjuk azonban a következő tételt:

XVI. Ha az $f(x)$ reális polinomnak legalább k reális zérőhelye van, melyek közül a legkisebb a , a legnagyobb pedig b , ha továbbá a polinomnak nincs a -nál kisebb reális részű zérőhelye és végül ha az $f'(x)$ polinom legkisebb reális zérőhelyénél kisebb reális része az $f(x)$ polinom egy zérőhelyének sincs az a zérőhely kivételével, akkor az $f'(x)$ polinomnak van legalább egy zérőhelye az $\left(a, a + \frac{b-a}{k}\right)$ intervallumban.

A megfelelő feltételek fennállása esetén hasonló tétel mond-

¹ A. I. tétel, 37. oldal.

ható ki az $f'(x)$ polinom legnagyobb reális gyökére is, miként ez a kimondott tételből következik, ha azt az $f(-x)$ polinomra alkalmazzuk.

A tétel kimutatása végett feltételezzük, hogy $a=a_1, a_2, \dots, a_s=b, a_{s+1}, \dots, a_n$ az $f(x)$ n -edfokú polinom zéróhelyei a reális részek növekvő sorrendjében, továbbá, hogy a tétel értelmében az a és b reálisak és az $f'(x)$ polinomnak van olyan β reális zéróhelye, amely a_2 reális részénél nem nagyobb. Feltételezhetjük, hogy $\beta \neq a_1$. Erre a β zéróhelyre fennáll az

$$\frac{1}{\beta - a_1} = \frac{1}{a_2 - \beta} + \frac{1}{a_3 - \beta} + \dots + \frac{1}{a_s - \beta} + \dots + \frac{1}{a_n - \beta}$$

egyenlet, melynek mindkét oldalán a tagok valós részei pozitívak.

Ha jobboldalon a konjugált komplex gyökpárookra vonatkozó tagokat kihagyjuk és a valós tagokat a legkisebbel helyettesítjük, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\beta - a} \geq \frac{k-1}{b - \beta}, \quad \text{amiből} \quad \beta - a \leq \frac{b-a}{k}.$$

Ezzel a kimondott tétel be van bizonyítva.

Az $f'(x)$ polinomnak mindig van az előbbi tétel feltételeinek megfelelő reális gyöke, ha az $f(x)$ polinom zéróhelyeire a következő tétel feltételei teljesülnek:

XVII. *Ha az $f(x)$ reális polinom «a» reális zéróhelyén átmenő és a valós tengelyre merőleges egyenesnek ugyanarra az oldalra esik a polinom többi zéróhelye és ha azok közül az egyenlő reális résszel bíró zéróhelyek közül, melyeknek r reális része legközelebb van a -hoz, van legalább egy olyan, melynek a reális tengelytől való távolsága az «a» pontból legfeljebb $\frac{\pi}{6}$ szög alatt látszik, akkor az $f'(x)$ polinomnak van legalább egy zéróhelye az $\left(a, a + 2 \frac{r-a}{3}\right)$ intervallumban vagy annak határán.*

Ha ugyanis a_1, a_2, \dots, a_n az $f(x)$ polinom zéróhelyei növekvő reális részük sorrendjében, akkor a tétel bizonyítása végett fel-

tehetjük, hogy $a=a_1$ negatív szám, $a_2=qi$ tiszta képzetes, a_3 pedig konjugáltja.

Ha az $f'(x)=0$ egyenletnek van az $(a, 0)$ intervallumban egy β gyöke, akkor az

$$\frac{1}{\beta-a} = \frac{1}{qi-\beta} + \frac{1}{-qi-\beta} + \frac{1}{a_4-\beta} + \dots + \frac{1}{a_n-\beta} \quad (10)$$

egyenletben bármely tag reális részének pozitívnak kell lennie.

Ha van az $(a, 0)$ intervallumban olyan β_1 szám, amelyre az

$$\frac{1}{\beta_1-a} \leq \frac{-2\beta_1}{\beta_1+q^2} \quad (11)$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor ezen β_1 mellett a (10) egyenlet baloldala kisebb, mint a jobboldala. Ebből következik, hogy akkor az $f'(x)=0$ egyenletnek van gyöke az (a, β_1) intervallumban, mert a (10) egyenlet baloldala ennek az intervallumnak a -hoz elég közeli pontjaiban nagyobb, mint a jobboldala.

A (11) egyenlőtlenség

$$3\beta_1 - 2a\beta_1 + q^2 \leq 0$$

alakban írható. Ez az egyenlőtlenség mindig kielégíthető valós β_1 -val, ha

$$a^2 - 3q^2 \geq 0.$$

Ekkor azonban az a_2 pontot az a ponttal összekötő egyenes a valós tengellyel legfeljebb $\frac{\pi}{6}$ hegyesszöget alkot, mert ezt a hegyesszöget φ -vel jelölve

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{q}{a} \right| \leq \sqrt{\frac{1}{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}.$$

Ha azonban

$$a^2 - 3q^2 \geq 0,$$

akkor a

$$3\beta_1 - 2a\beta_1 + q^2 = 0$$

egyenletnek van két valós gyöke. Ha ezek közül az algebrailag kisebbet β_1 jelöli, a másik pedig β_2 , akkor

$$\beta_1 \leq \frac{a}{3}, \quad \text{mert} \quad \beta_1 + \beta_2 = \frac{2a}{3}.$$

Ezzel a tétel ki van mutatva, mivel az előbbiek szerint az $f'(x)=0$ egyenletnek van gyöke az (a, β_1) s így van az $\left(a, \frac{a}{3}\right)$ intervallumban.

A XVII. tétel helyett pontosabban is kimondhatunk, ha az α_2 és α_3 gyökponatok mellett még továbbiakat is figyelembe veszünk. A XVI. tétel mintájára minden nehézség nélkül általánosíthatók A alatt idézett dolgozatunk IV., V. és VII. tételei is megfelelő reális polinomokra.

Sz. Nagy Gyula.

ÜBER DIE LAGE DER NULLSTELLEN DES DERIVierten EINES POLYNOMS.

Allgemein bekannt ist der folgende GAUSS-sche Satz:

Ausserhalb des kleinsten konvexen Polygons Π (bzw. ausserhalb der kleinsten Strecke), das sämtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x)=0$ einschliesst, kann die derivierte Gleichung $f'(x)=0$ keine Wurzel haben.

Diese Arbeit schliesst aus dem Polygone Π gewisse Gebiete aus, wo die derivierte Funktion $f'(x)$ ausserhalb der mehrfachen Wurzeln von $f(x)=0$ nicht verschwindet. Diese Gebiete sind entweder Sterngebiete oder Winkelräume, deren Mittelpunkte bzw. Scheitelpunkte in den Wurzelpunkten von $f(x)=0$ liegen, oder gewisse über die Seiten des Polygons Π geschriebene Kreissegmente.

Es bestehen z. B. die folgenden speziellen Sätze:

Liegt die wenigstens p -fache Wurzel a der algebraischen Gleichung n -ten Grades $f(x)=0$ im Innern des Polygons Π und ist d der Abstand zwischen a und der nächstliegenden Wurzel von $f(x)=0$, so kann die derivierte Funktion $f'(x)$ im Innern des Kreises, der den Mittelpunkt a und den Halbmesser $\frac{p}{n-1} \cdot d$ hat, ausserhalb von a nicht verschwinden.

Liegt die p -fache Wurzel a der Gleichung

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - a)^p = 0$$

im Innern des Dreieckes $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, so liegt keine Wurzel der Gleichung $f'(x)=0$ ausserhalb der drei Winkelräume mit dem gemeinsamen Scheitel a , deren Winkelhalbierenden die Halbgeraden $a\alpha_1$, $a\alpha_2$, $a\alpha_3$

sind und deren Öffnung 2ψ ist, wo der Spitzwinkel ψ der Gleichung $\sin \psi = \frac{1}{1+p}$ genügt.

Am Ende der Arbeit werden einige Sätze des Verfassers über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln (Jahresbericht der Math. Vereinigung Bd. 27 (1918), S. 37—43) für reelle Gleichungen verallgemeinert.

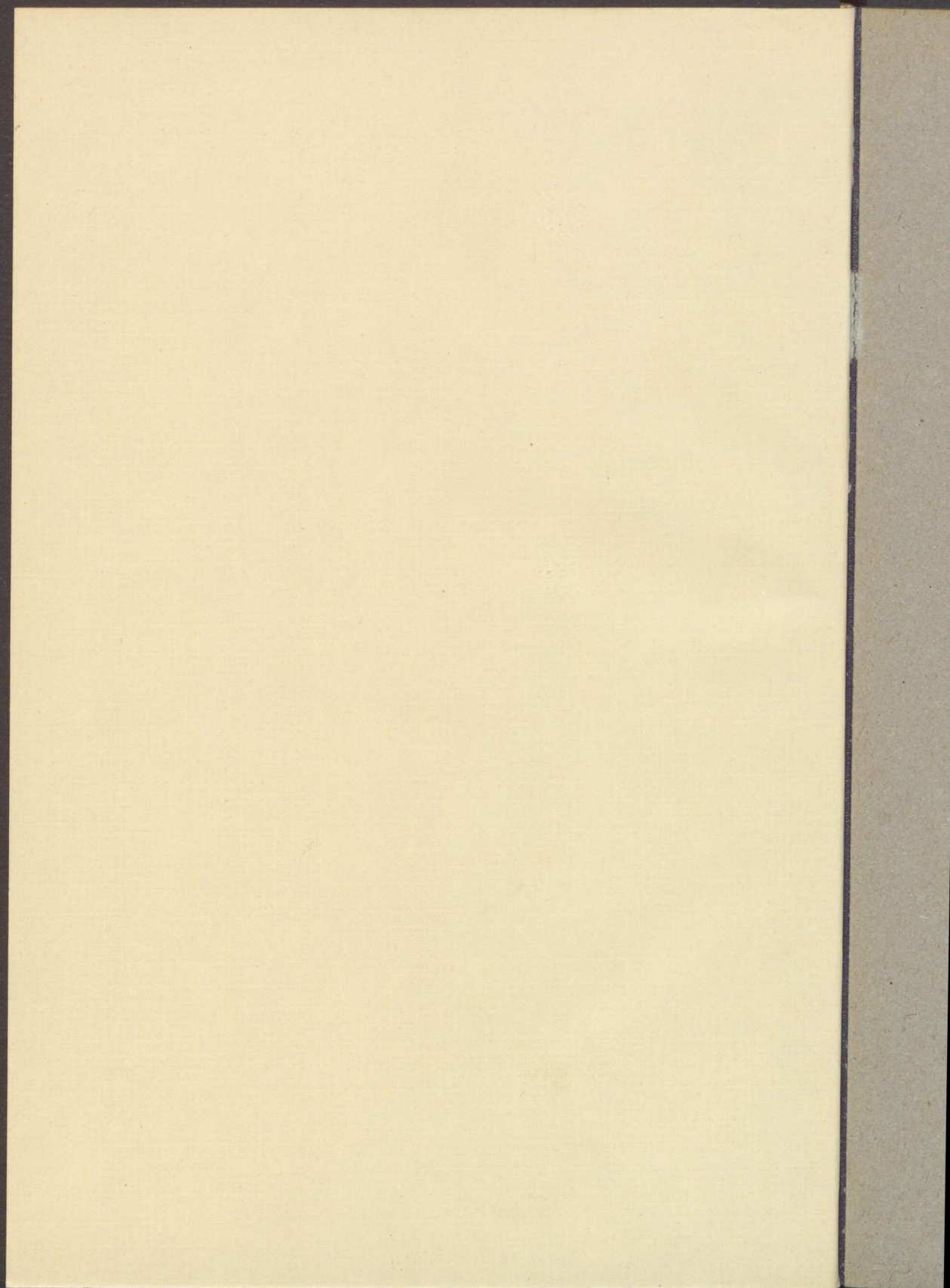
Es gilt z. B. der folgende Satz:

Sind α und β ($>\alpha$) reelle Wurzeln der algebraischen Gleichung n -ten Grades $f(x)=0$ mit reellen Koeffizienten, hat die Gleichung keine Wurzel, deren Realteil im Innern des Intervalles (α, β) liegt und ist h bzw. k die Anzahl der Wurzeln von $f(x)=0$, deren Realteile kleiner als β bzw. grösser als α sind, so hat die derivierte Gleichung $f'(x)=0$ keine Wurzel im Innern der Intervalle

$$\left(\alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{k + 1}\right) \quad \text{und} \quad \left(\beta - \frac{\beta - \alpha}{h + 1}, \beta\right).$$

Julius v. Sz. Nagy.





1974 NOV 0 6

