

M  
252.945<sup>OSZK</sup>

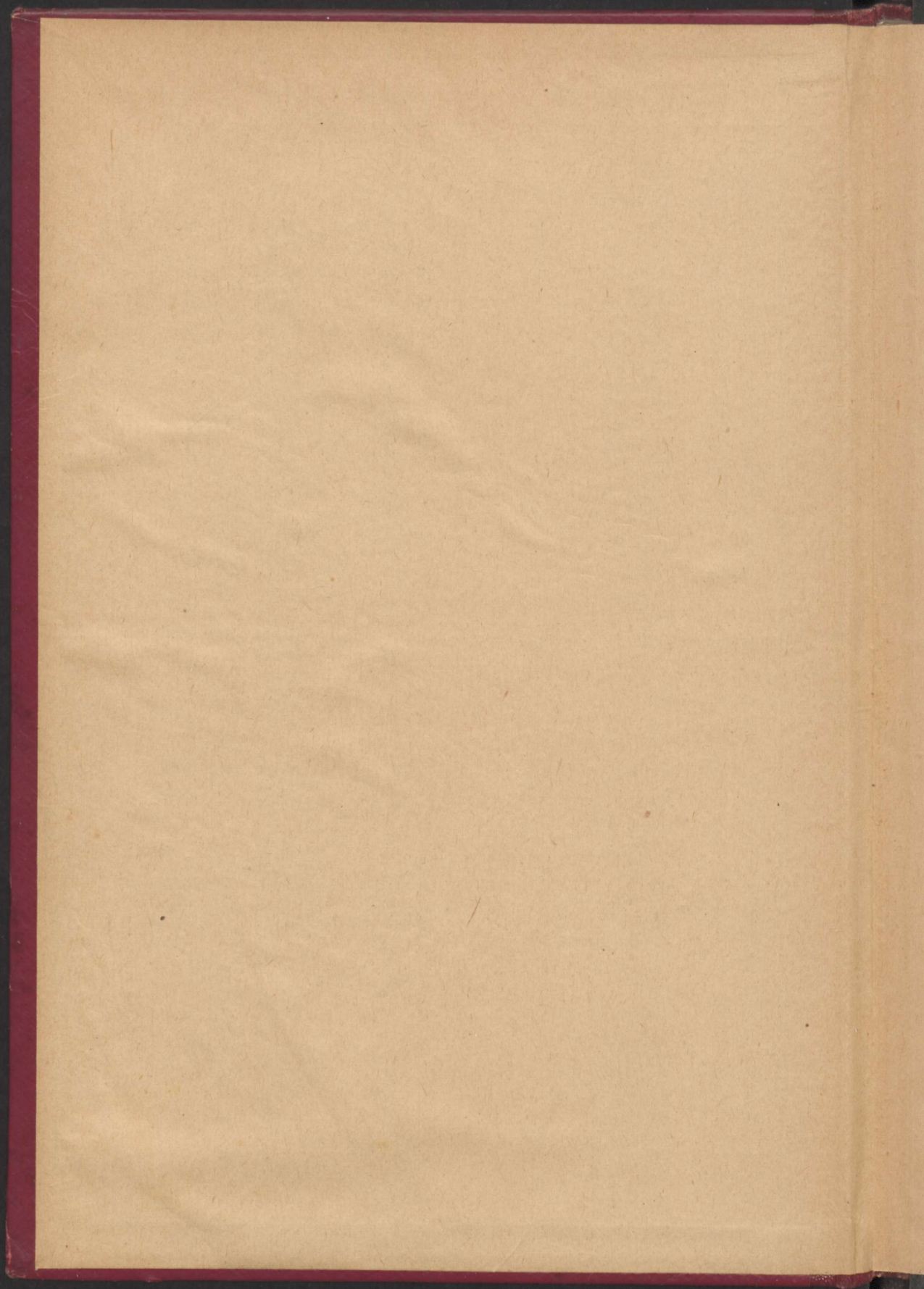
SUTÁK JÓZSEF

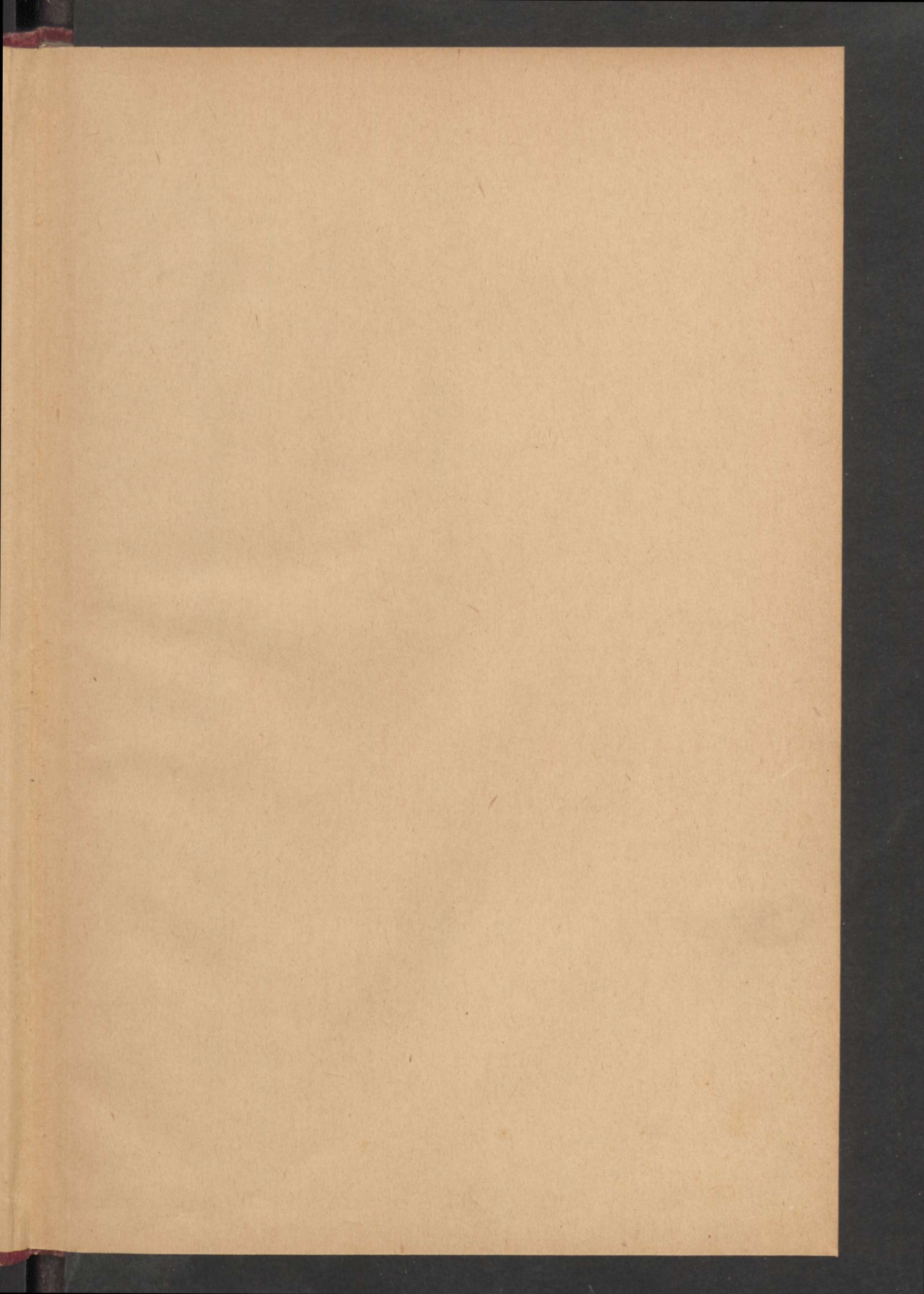
AZ

ISOKLIN NORMÁLISOK GÖRBÉI.

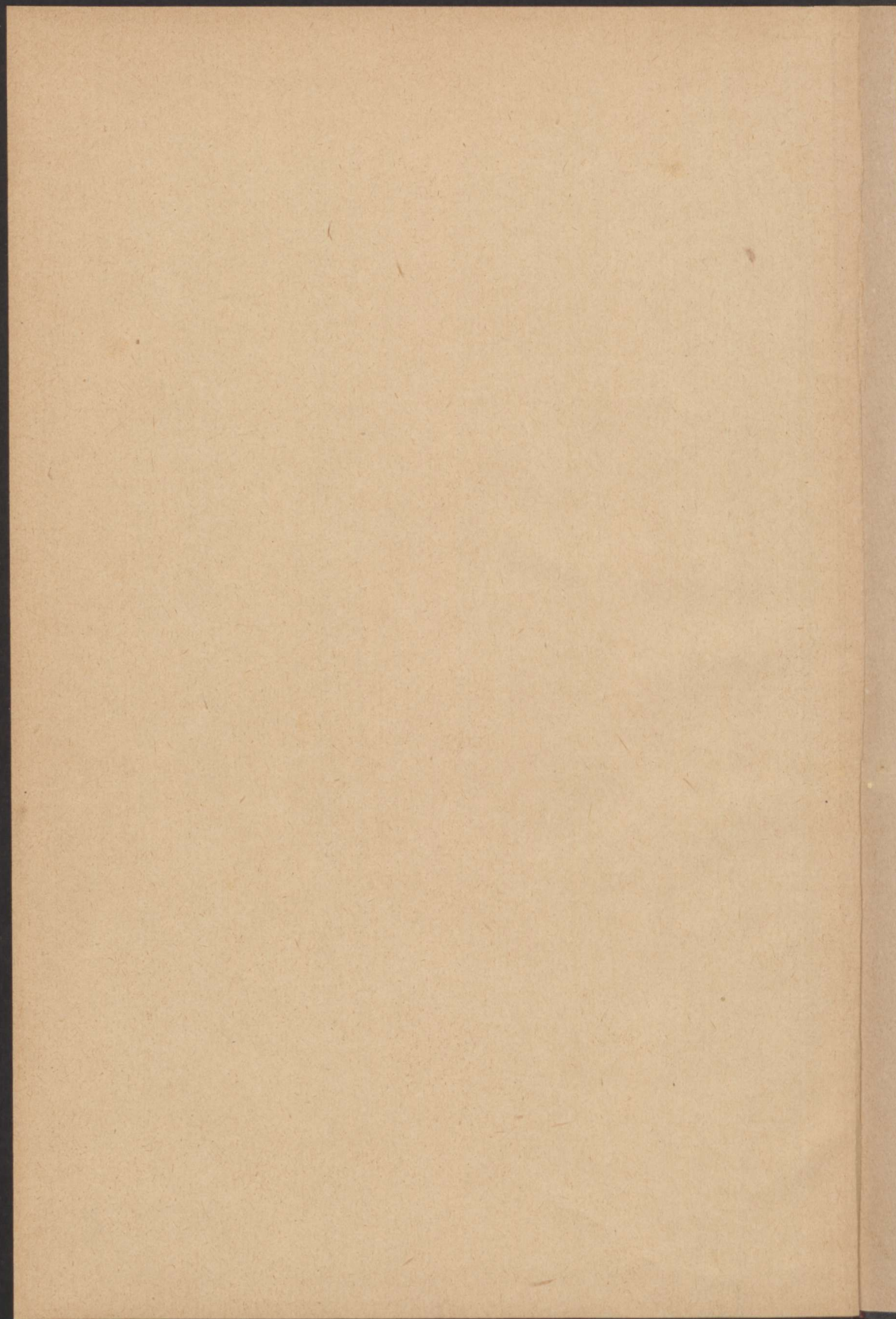














# AZ ISOKLIN NORMÁLISOK GÖRBÉINEK

MEGHATÁROZÁSA ÉS ALKALMAZÁSA

A MÁSODRENDÜ FELÜLETEKRE.

IRTA

SUTÁK JÓZSEF.



BUDAPEST.

1891.

M 252.995



ORSZÁGOS SZÉCHÉNYI KÖNYVTÁR  
1968/R. évi kiadás  
FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA



## BEVEZETÉS.

E sorokban néhány szóval ismertetem a módszert, melyvel eljárám s röviden összefoglalom az eredményeket, melyeket kutatásaimban elértem. Szükségesnek tartottam a másodrendű felületek osztályozásának táblázatát Vályi Gyula előadásai után értékeztésem elejére függeszteni; mert az egész tárgyalás folyamán az ő táblázatban használt jelöléseket használtam.

Az isoklin normálisok görbéinek értelmezése s általános jellemük ismertetése után következik egyenleteinek lehozása, midőn a felület egyenlete  $z=f(x, y)$ ,  $f(x, y, z)=0$ , vagy  $z=f_1(u, v)$ ,  $y=f_2(u, v)$ ,  $z=f_3(u, v)$  alakban van adva.

Az általános elméletben azon esetet tárgyalom, midőn az isoklin normálisok párhuzamosak valamely fölvett síkhoz; a görbék symboluma a behozott jelölés alapján  $(\alpha\beta\gamma o)$ ; eredményül nyerjük, hogy minden végtelen távoli pontnak a felületre vonatkoztatott első polár felületének felületünkkel való metszés vonala  $(\alpha\beta\gamma o)$  görbe; ha a polárfelület síkokba degenerál, akkor az  $(\alpha\beta\gamma o)$  görbe még görbületi görbe is. Joachimsthalnak a görbületi görbékre vonatkozó tétele szintén alkalmazást nyert s ennek alapján kimutattam, hogy a forgási felület összes görbületi görbéi  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék.

A másodrendű felületekre való alkalmazásban a közös jellegű felületeket csoportosítom, ily módon az alkalmazás a felületek három főosztálya szerint három főrészt öszlik.

A centralis felületekre vonatkozó általános jellemű eredmények: Az isoklin normalisok görbéit kimetsző felület általában véve oly kúp, melynek csúcsa a felület centrumában van, e kúp mindig realis, de degenerálhat síkká, ha t. i. csúcsa és vezérvonala

egy síkban van, vagy egyenessé, ha vezérvonala egy ponttá zsugorodik össze s ilyenkor azt szokás mondani, hogy a kúp képzetes, jóllehet a képzetesség fogalma elfogadható értelmezés alapján egészen kiküszöbölhető.

Ez alapon kimondhatjuk a centralis felületeknél a következő általános tételeket: A centralis felületek  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéi általában negyedrendű térbeli görbék, de azok degenerálhatnak egy kétszeres síkgörbévé, melyeket a diametral síkok metszenek ki, vagy két sík görbévé, vagy két ponttá.

A fokális görbék pontjainak polár síkjai szintén  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéketszenek ki a felületből; a forgási felületekre vonatkozó tételek az általános elméletben elért eredményeket megerősítik.

A paraboloidokból az isoklin normálisok görbéit kimetsző felületek ellipticus, hyperbolicus, vagy parabolicus hengerek, melyek azonban síkká vagy egyenessé is degenerálhatnak.

A hengereknél a felület minden görbéje az isoklin normálisok közé tartozik, ugyanaz áll a forgási kúpokról is.

Az általánosan lehozott eredmények specziális alkalmazást is nyernek, így különösen az egymásra merőleges három conjugált diametrál síkhoz isoklin normálisok görbéit vizsgáltam meg.

A másodrendű felületek negyedik osztályát képezik a degenerált másodrendű felületek, azaz a síkok, az ezekre való alkalmazást méltán el lehetett hagyni, minthogy normálisaik minden más síkhoz isoklinek, tehát a síkok összes görbéihez vont felületi normálisok a tér összes síkjaihoz isoklinek.

Az utolsó pontban kimutattam, hogy ha a felület valamely pontján két  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbe megy át, akkor azon még végtelen sok más  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbe megy keresztül.

Ebből következik, hogy a másodrendű felületek minden pontján végtelen sok  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbe megy át.



## TARTALOM.

### A másodrendű felületek osztályozási táblázata.

1. Az isoklin normálisok görbéinek értelmezése s azok sokasága.
2. Az isoklin normálisok görbéinek egyenletei.
3. Az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék rendszáma.
4. Az  $(\alpha\beta\gamma o)$  görbék.
5. Következtetések Joachimsthal tételéből.
6. Általános alkalmazás a másodrendű felületekre.
7. A diametrál síkok által kimetszett görbék megvizsgálása.
8. A focális görbék viszonya az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbékhez.
9. Az egymásra merőleges conjugált síkokhoz isoklin normálisok görbéi.
10. Alkalmazás a kúpokra.
11.  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék a forgási felületeken.
12. A paraboloidok  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéi.
13. A paraboloidok  $(\alpha\beta\gamma o)$  görbéi.
14. A paraboloidok  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéinek további tárgyalása.
15. A parabolicus hengerek  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéi.
16. Az ellipticus és hyperbolicus hengerek  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéi.
17. Az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék tárgyalása a  $(c)$  alakban.
18. Az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék rendszerei.

## A másodrendű felületek osztályozási táblázata.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0$$

felület determinansa  $a_{ir} = a_{ri}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

átlói aldeterminansait jelöljük  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{33}$ ,  $A_{44}$ -el.

Egyenletünk által képviselt felületek

I. *Centralis felületek*, ha

$$A_{44} \leq 0$$

és pedig

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ Ellipsoidok, ha } & \left\{ \begin{array}{l} D > 0 \text{ képzetes ellipsoid} \\ D = 0 \text{ képzetes kúp} \\ D < 0 \text{ reális ellipsoid} \end{array} \right. \\ a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0, a_{11} A_{44} > 0 & \\ 2. \text{ Hyperboloidok, ha } & \left\{ \begin{array}{l} D > 0 \text{ egy köpenyű hyperboloid} \\ D = 0 \text{ reális kúp} \\ D < 0 \text{ két köpenyű hyperboloid} \end{array} \right. \\ a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0, a_{11} A_{44} < 0 & \\ a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0 & \end{array}$$

II. *Paraboloidok*, ha

$$A_{44} = 0 \quad D \leq 0$$

1.  $D > 0$  hyperbolicus paraboloid

2.  $D < 0$  ellipticus paraboloid.

III. *Hengerek*, ha

$$A_{44} = 0, D = 0, A_{11}, A_{22}, A_{33} \text{ nem mind nullok.}$$

1.  $A_{44}$  átlói aldeterminansai pozitívek  $\left\{ \begin{array}{l} a_{ii} A_{jj} > 0 \text{ képzetes henger} \\ a_{ii} A_{jj} < 0 \text{ reális ellipticus henger.} \end{array} \right.$
2.  $A_{44}$  átlói aldeterminansai negatívek, hyperbolicus henger.
3.  $A_{44}$  átlói aldeterminansai nullok, parabolicus henger.

IV. *Síkok*, ha

$$D = A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = 0.$$

1. A másodfokú aldeterminansok pozitívek: két conjugált complex sík.
2. A másodfokú aldeterminansok negatívek: két reális sík.
3. A másodfokú aldeterminansok nullok: egy kétszeres sík.



## 1. Az isoklin normálisok görbéinek értelmezése s azok sokasága.

Valamely felület isoklin normálisai alatt a felület azon normálisait értjük, melyek egy tetszőlegesen felvett síkhoz egyenlő szög alatt hajlanak.

Az adott felületnek valamely síkhoz isoklin normálisai által beburkolt felülettel való metszés vonalát az isoklin normálisok görbéjének nevezzük, mit  $(X, \alpha)$  symbolummal képviselhetünk, hol  $\alpha$  az  $X=0$  síkhoz isoklin normálisok hajlási szöge.

$(X, \alpha)$  a tér összes síkjaihoz ugyanazon szög alatt hajló normálisok görbéit képviseli, ha  $X$  a változó, míg ha  $\alpha$  a változó, akkor  $X=0$  síkhoz tartozó isoklin normálisok görbéinek képviselője, ha pedig, mind  $X$ , mind  $\alpha$  változó, úgy symbolumunk az isoklin normálisok minden görbáját magában foglalja.

$(X, \alpha)$  négyszeresen végtelen sokaságot alkot, ha  $X$  és  $\alpha$  független változókkul lépnek fel. Minthogy valamely síkhoz az egyszeresen végtelen sokaságot alkotó párhuzamos síkok mindegyikéhez ugyanazon isoklin normálisok tartoznak; azért a párhuzamos síkok rendszerét elég lesz egy síkkal képviselni, a mi azután kimondja a tételt: hogy az *isoklin normálisok görbéi* a felületen *háromszorosán végtelen* sokaságot alkotnak. Természetes, hogy e sokaságok nem mindegyikének kell okvetetlenül reálisnak lenni, miként legtöbb geometriai feladat megoldásánál, úgy itt is akadhatnak képzetes megoldásokra, melyek, ha sikerül őket kellően értelmezni, azonnal elvesztik képzetes színezetüket.

## 2. Az isoklin normálisok görbéinek egyenletei.

a) Ha a felület egyenlete

$$z=f(x, y) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

úgy  $x, y, z$  pontjához húzott normális egyenletei

$$\begin{aligned}(\xi - x) + p(\xi - z) &= 0 \\ (\eta - y) + q(\xi - z) &= 0\end{aligned} \quad . . . . . (2)$$

hol

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Legyen

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad . . . . . (3)$$

egy tetszőlegesen felvett sík, melynek iránycosinusait  $\alpha, \beta, \gamma$ -val, a normális iránycosinusait pedig  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ -el jelölve meg

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \text{const.}$$

mondja ki a feltételt arra nézve, hogy felületünk normálisai a felvett síkhoz isoklinek.

$\lambda$ -val jelölve meg azon szög sinusát, melyet a normálisok a felvett síkkal képeznek, eljutunk a feltétel új alakjához, mely

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = \lambda.$$

Tekintettel a normális iránycosinusainak értékére

$$\lambda = \frac{\gamma - \alpha p - \beta q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad . . . . . (4)$$

Ha ezen egyenletbe  $p$  és  $q$  értékét az (1)-ből meghatározva behelyettesítjük, azután  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ -t constansoknak  $x, y$ -t változóknak tekintjük, nyilvánvaló, hogy az (1) és (4) egyenletek együttesen az isoklinnormálisok görbéinek egyenletei; mert e két egyenletet egyszerre csakis oly  $x, y, z$ -ék elégítik ki, melyekhez húzott felületi normálisok a (3) síkhoz isoklinek, minthogy ezen görbéknek a felületen való elhelyezkedése  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ -tól függ, azért azokat ezentúl  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéknek fogjuk röviden nevezni. A (4) alakja mutatja, hogy csakugyan háromszorosan végtelen sokasággal van dolgunk.

b) Legyen a felület egyenlete

$$f(x, y, z) = 0 \quad . . . . . (1')$$

alakban adva, úgy normálisának iránycosinusai



$$\alpha_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \quad \beta_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\gamma_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

tehát

$$\lambda = \frac{\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \quad \dots \quad (4')$$

c) Ha pedig a felületek analytikai kifejezésére a következő egyenletek szolgálnak:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) \quad \dots \quad (1'')$$

akkor a felület normálisának iránycosinusai

$$\alpha_1 = \frac{f_{23}}{\sqrt{f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2}}, \quad \beta_1 = \frac{f_{31}}{\sqrt{f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2}},$$

$$\gamma_1 = \frac{f_{12}}{\sqrt{f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2}},$$

hol

$$f_{23} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$f_{31} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$f_{12} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Ezen értékek figyelembe vételével

$$\lambda = \frac{\alpha f_{23} + \beta f_{31} + \gamma f_{12}}{\sqrt{f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2}} \quad \dots \quad (4'')$$

Az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék egyenletei tehát háromféle alakban jelennek meg, melyeket röviden  $(a)$ ,  $(b)$  és  $(c)$  alakoknak nevezünk.

### 3. Az $(\alpha\beta\gamma\lambda)$ görbék rendszáma.

Ha  $f(x, y, z) = 0$   $n$ -ed rendű felület, akkor  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  és  $\frac{\partial f}{\partial z}$  általában  $n-1$  fokúak, miért is a  $(4')$   $2(n-1)$  fokú felület egyenlete, melynek az adottal való átmetszete  $2n(n-1)$  rendű görbéhez vezet, mely azonban több alacsonyabb rendű görbére is oszthatik, így pl. tudjuk, hogy két másodrendű felület egy, vagy általánosabban két kúpszeletben is metszheti egymást.

### 4. $(\alpha\beta\gamma o)$ görbék.

Az általános elméletben vizsgáljuk meg azon esetet, midőn az isoklin normálisok párhuzamosak egy tetszésszerint felvett síkhoz; ekkor  $\lambda = 0$ , a  $(b)$  alak szerint  $(\alpha\beta\gamma o)$  görbék egyenletei

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

A mi kimondja a tételt, hogy bármely végtelen távoli pontnak az adott felületre vonatkozó első polár felületének az adott felülettel való metszési görbéje az isoklin normálisok görbéi közé tartozik.

$(\alpha\beta\gamma o)$  görbék görbületi görbék is egyszersmind; mert pontjaikban meghúzott normálisok lefejthető felületet, még pedig henger felületet alkotnak. E tétel, mely magából az értelmezésből következik, direct úton is könnyen igazolható. Ugyanis a normálisok lefejthető felületet alkotnak, ha

$$\frac{dp}{dx + pdz} = \frac{dq}{dz + qdz} \dots \dots \dots (2)$$

hol

$$p = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z}, \quad q = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$



az (1) második egyenlete tehát a már ismert

$$r - ap - \beta q = 0$$

alakba írható, innen  $dp = -\frac{\beta}{a} dq$  a (2)-ba helyettesítve

$$adx + \beta dy + r dz = 0,$$

mely nem más mint a fölvet

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

vagy

$$ax + \beta y + rz + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

síknak totális differentiálisa; a jelen esetben tehát a (2) csakugyan teljesül.

Ha az (1) második egyenlete linearis factorokra oszlik, akkor az azok által képviselt síkok mindegyikéhez a normálisok isoklinek, a mi kiviláglik akár az általok kimetszett görbék természetéből, akár Joachimsthal ismeretes tételéből, mely kimondja, hogy ha a felület valamely görbületi görbéje síkgörbe, akkor a görbe egymásután következő pontjaiban megszerkesztett felületi normálisok isoklinek a görbületi görbe síkjához.

##### 5. Következtetések Joachimsthal tételéből.

Joachimsthalnak imént idézett tételéből következik, hogy a felület összes síkgörbületi görbéi az isoklin normálisok görbéihez tartoznak. Ez alapon leszarmaztathatom azon felületet, mely az isoklin normálisok síkgörbéit metszi ki a felületből.

Ha a felület egyenlete tetszőleges coordinata rendszerben van adva, úgy  $z=c$  szintén egy tetszőleges sík egyenlete, mit ha a görbületi görbék síkjául választunk a

$$\frac{dp}{dx + pdz} = \frac{dq}{dy + qdz}$$

egyenlet  $dz=0$  feltételnél fogva

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy}$$

egyenletbe megy át, mit ha

$$dz = p dx + q dy = 0$$

feltétel mellett integrálunk

$$p^2 + q^2 = \text{const.}$$

egyenlethez jutunk, mely kapcsolatban felületünk egyenletével a szóban forgó görbék egyenletét képviseli, a mit az is bizonyít, hogy a (001 $\lambda$ ) görbék ( $a$ ) alakja

$$p^2 + q^2 = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2}.$$

Ha tehát ki tudom mutatni valamely felületről, hogy annak összes görbületi görbéi síkgörbék, akkor már azt is kimutattam, hogy azok ( $a\beta\gamma\lambda$ ) görbék is egyszersmind. Pl.:

1. A forgási felületek differentiál egyenlete  $z$ -t választván forgási tengelyül

$$yp + xq = 0.$$

Görbületi görbéit képviselő egyenletben tekintettel kell lennünk arra, hogy a forgási felületek minden normálisa átmegy a forgási tengelyen, a jelen esetben  $x=0$ ,  $y=0$  egyenesen, miért is  $dx=0$ ,  $dy=0$  és így a görbületi görbék egyenlete

$$\frac{dp}{pdz} = \frac{dq}{qdz}$$

vagy

$$(qdp - pdq)dz = 0.$$

A forgási felületek differential egyenlete alapján

$$\frac{qdp - pdq}{q^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right),$$

tehát a görbületi görbéket vagy  $z=c$ , vagy  $\frac{x}{y} = c_1$  azaz a  $z$  tengelyvel párhuzamos, vagy pedig a rajta keresztül menő síkok metszik ki, miért is ezek ( $a\beta\gamma\lambda$ ) görbék.



2. A forgási kúpnak, melynek tengelye  $z$ -vel párhuzamos, egyenlete

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2).$$

Ha a kúp csúcsa  $xy$  sík egy tetszőleges görbe vonalán mozog, úgy a beburkolt felület differential egyenlete

$$p^2 + q^2 = m^2.$$

Ez alapon könnyű kimutatni, hogy a beburkolt felület minden görbületi görbéje  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbe.

### 6. Általános alkalmazás a másodrendű felületekre.

A másodrendű felületek általános egyenlete homogén koordinátákban

$$f(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0 \quad (1)$$

Elfogadva, hogy  $a_{ir} = a_{ri}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial t} &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéket kimetsző felület  $(b)$  alakját rendezve  $f$  deriváltjai szerint

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 - \alpha^2) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - 2\alpha\beta \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + (\lambda^2 - \beta^2) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2\alpha\gamma \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} - \\ - 2\beta\gamma \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} + (\lambda^2 - \gamma^2) \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ez egyenlet könnyebb értelmezése végett alkalmazzuk a következő koordináta transzformációt: a (2) három első egyenlete által

képviselt síkokat válasszuk sorban az új rendszer  $x', y', z'$  síkjaiul,  $t$ -t meghagyván változatlanul, ha behozzuk

$$M = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2}$$

$$N = \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2}$$

$$S = \sqrt{a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2}$$

jelöléseket s ha az új rendszer  $x', y', z'$  tengelyének az  $x'=0$ ,  $y'=0$ ,  $z'=0$  síkokhoz való hajlásainak sinusait  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\sigma$ -val s végül  $M\mu$ ,  $N\nu$ ,  $S\sigma$  szorzatokat rendre  $M_1$ ,  $N_1$ ,  $S_1$ -el jelöljük, a megejtett transzformáció után a 3. új alakja, elhagyván a koordináták mellől a felső indexeket:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda^2 - a^2) M_1^2 x^2 - 2a\beta M_1 N_1 xy + (\lambda^2 - \beta^2) N_1^2 y^2 - \\ - 2a\gamma M_1 S_1 xz - 2\beta\gamma N_1 S_1 yz + (\lambda^2 - \gamma^2) S_1^2 z^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

E transzformáció föltételezi, hogy  $A_{44} \leq 0$ , miért is a kutatás eredményei csakis a centrális felületekre lesznek érvényesek.

A (4) determinansa  $D=0$ , tehát realis vagy képzetes kúpot, hengereket vagy síkokat képviselő egyenlettel van dolgunk. A további analízis már  $A_{44}$  és aldeterminánsainak tüzetesebb megvizsgálását teszi szükségessé.

$$A_{44} = M_1^2 N_1^2 S_1^2 \begin{vmatrix} \lambda^2 - a^2, & -a\beta, & -a\gamma \\ -a\beta, & \lambda^2 - \beta^2, & -\beta\gamma \\ -a\gamma, & -\beta\gamma, & \lambda^2 - \gamma^2 \end{vmatrix}$$

kifejtve

$$A_{44} = M_1^2 N_1^2 S_1^2 \lambda^4 (\lambda^2 - 1)$$

továbbá

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = M_1^2 N_1^2 \begin{vmatrix} \lambda^2 - a^2, & -a\beta \\ -a\beta, & \lambda^2 - \beta^2 \end{vmatrix} = M_1^2 N_1^2 \lambda^2 (\lambda^2 - a^2 - \beta^2)$$

mivel  $a^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$  azért

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 &= M_1^2 N_1^2 \lambda^2 (\lambda^2 + \gamma^2 - 1) \\ a_{11}A_{44} &= M_1^4 N_1^2 S_1^2 \lambda^4 (\lambda^2 - a^2) (\lambda^2 - 1) \end{aligned}$$

I. Legyen  $\lambda^2 < 1$ .

Az ismeretes criteriumok alapján tehát kimondhatjuk, hogy a



(4) reális kúpokat képvisel, ha

$$\lambda^2 + \gamma^2 - 1 > 0, (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - 1) < 0,$$

vagy ha

$$\lambda^2 + \gamma^2 - 1 \leq 0$$

ellenben képzeteseket, ha

$$\lambda^2 + \gamma^2 - 1 > 0, (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - 1) > 0,$$

$\lambda^2 < 1$  feltételünk figyelembe vételével

$$\lambda^2 > a^2 *$$

a reális,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &\leq a^2 + \beta^2 \\ \lambda^2 &> a^2 + \beta^2, \lambda^2 < a^2 \end{aligned}$$

a képzetes kúpokra vonatkozó criterium.

II. Ha  $\lambda^2 = 1$ , akkor  $A_{44} = 0$ , mivel

$$\frac{A_{44}}{M_1^2 N_1^2 S_1^2} = \begin{vmatrix} \lambda^2 - a^2, & -\alpha\beta, & -a\gamma \\ -\alpha\beta, & \lambda^2 - \beta^2, & -\beta\gamma \\ -a\gamma, & -\beta\gamma, & \lambda^2 - \beta^2 \end{vmatrix}$$

átlói aldeterminansai  $a^2, \beta^2, \lambda^2$  ennél fogva a (4) két complex síkot képvisel, legyenek azok

$$\begin{aligned} X_1 + iX_2 &= 0 \\ X_1 - iX_2 &= 0 \end{aligned}$$

hol  $X_1, X_2$  a koordináták első fokú függvényei, e két conjugált complex sík keresztül megy  $X_1 = 0$  és  $X_2 = 0$  síkok metszésvonalán, tehát metszésvonaluk reális s az a felületből általában két pontot metsz ki. A centrális másodfokú felületeken tehát csakis két pont létezik, melyeknek normálisai egy tetszés szerint felvett síkhoz merőlegesek, azaz a felület normálisai hengerfelületet nem alkotnak.

III. Midőn  $\lambda = 0$ , akkor nemcsak  $A_{44}$ , hanem átlói aldeterminánsai is nullok, tehát két összeeső síkkal van dolgunk, melyek közös egyenlete, visszatérve a régi coordinatarendszerre

\* E criterium már magában foglalja  $\lambda^2 + \gamma^2 - 1 > 0$  feltételt is; mert ennek más alakja  $\lambda^2 > a^2 + \beta^2$ .

$$\alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

a mi pedig nem más mint a végtelen távoli pont polárisa, azaz a felület diametrál síkja, tehát a centrális felületek diametrál síkjai által kimetszett görbék az isoklin normálisok görbéi közé tartoznak, de ezek az általános elméletben felállított tantételnél fogva görbületi görbék is.

A további vizsgálódás már felületünk egyenletének transformatióját teszi szükségessé.

### 7. A diametrál síkok által kimetszett görbék megvizsgálása.

Coordinata rendszerünk origóját a centrumba helyezi a következő substitutio

$$x = x' + \frac{A_{14}}{A_{44}} t'$$

$$y = y' + \frac{A_{24}}{A_{44}} t'$$

$$z = z' + \frac{A_{34}}{A_{44}} t'$$

$$t = t'.$$

Felületünk egyenlete az új coordináta rendszerben a felső indexek elhagyásával

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}yz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \frac{D}{A_{44}} t^2 = 0.$$

A coordináta síkok egymáshoz való hajlása egészen tetszőleges, azért azok egyike által kimetszett görbe tulajdonságai általános érvényűek. Lássuk  $z=0$  által kimetszett görbét, egyenlete

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{D}{A_{44}} t^2 = 0$$

a mi kúpszeleteket képvisel,  $D=0$  esetben pedig két reális, vagy conjugált complex egyenest, tehát az ellipszoidok- és hyperboloidokból a centrumon átmenő síkok kúpszeleteket, a kúpokból pedig egyeneseket metszenek ki.



Vizsgáljuk meg, hogy a kimetszett görbék között hány kör van. Ha az egymásra merőleges három conjugált irányt vesszük coordináta tengelyekül, a centrális felületek általános egyenlete a következő alakban jelenik meg

$$\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3 z^2 - 1 = 0$$

$$|\mu_3| \geq |\mu_2| \geq |\mu_1|.$$

Az ezen felületből a köröket kimetsző síkok két serege léteznek, melyek

$$\sqrt{\mu_3 - \mu_2} x + \sqrt{\mu_2 - \mu_1} z = 0$$

$$\sqrt{\mu_3 - \mu_2} x - \sqrt{\mu_2 - \mu_1} z = 0$$

síkokkal párhuzamosak, miből látható, hogy az előttünk lévő két sík által kimetszett körök az isoklin normálisok görbéi közé tartoznak, tehát az ellipsoidokon és paraboloidokon az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék között két kör van.

Könnyű meggyőződni, hogy a három egymásra merőleges conjugált síkhoz párhuzamos normálisok görbéit kimetsző sík azonos a megfelelő conjugált síkkal, tehát e görbék a felület  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$ , görbületi és geodeticus görbéi közé is sorakoznak, különben megjegyezhetjük, hogy a geodeticus görbék valamennyien  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék is.

### 8. A fokális görbék viszonya az $(\alpha\beta\gamma\lambda)$ görbékhez.

Azon kérdésnek az eldöntése, hogy vannak-e az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék közt a már tárgyaltakon kívül más síkgörbék is, szükségképpen a fokális görbékkel hoz kapcsolatba.

Könnyű belátni, hogy a kúpok közül csakis a forgási kúpok alkotói lehetnek valamely síkhoz t. i. a tengelyükre merőleges síkhoz isoklinek, de ekkor a kúp összes normálisai is isoklinek e síkhoz. Ebből azután következik, hogy az érintő forgási kúpok  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéket metszenek ki a felületből, melyek valamennyien síkgörbék s síkjaikat adja a forgási kúp csúcsának a felületre vonatkoztatott polárisa, áll tehát e tétel: A fokális görbék pontjainak polársíkjai  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéket metszenek ki a felületből. Így pld.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad a > b > c$$

ellipsoid fokális görbéi

$$z=0 \text{ síkban } \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0$$

$$y=0 \text{ síkban } \frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

E görbék pontjainak polársíkjai  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbék metszenek ki a felületből. Hasonlóképpen írhatjuk fel a többi centrális felületek fokális görbéit, mint az  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbék kimetsző síkok pólusainak mértani helyét.

#### 9. Az egymásra merőleges conjugált síkokhoz isoklin normálisok görbéi.

A centrális felületek általános normál egyenlete.

$$\mu_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \mu_3 z^2 + b = 0$$

hol  $b = -1$ , vagy  $0$ .

Az  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbék kimetsző kúp egyenlete

$$a\mu_1 x + \beta\mu_2 y + \gamma\mu_3 z = \lambda \sqrt{\mu_1^2 x^2 + \mu_2^2 y^2 + \mu_3^2 z^2}.$$

A  $z=0$  síkhoz isoklin normálisok görbéinek egyenlete, mivel ez esetben

$$\gamma = 1, \quad \beta = 0, \quad a = 0$$

$$\lambda^2 \mu_1^2 x^2 + \lambda^2 \mu_2^2 y^2 + (\lambda^2 \mu_3^2 - \mu_3^2) z^2 = 0$$

ami

$$\lambda^2 < 1$$

esetben reális kúpot képvisel, (1). Pld. A három tengelyű ellipsoid  $(001\lambda)$ ,  $(010\lambda)$ ,  $(100\lambda)$  görbéinek egyenletei sorban.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{a^4} x^2 + \frac{\lambda^2}{b^4} y^2 + \frac{1}{c^4} (\lambda^2 - 1) z^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} (001\lambda)$$



$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{a^4} x^2 + \frac{1}{b^4} (\lambda^2 - 1) y^2 + \frac{\lambda^2}{c^4} z^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} (010\lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^4} (\lambda^2 - 1) x^2 + \frac{\lambda^2}{b^4} y^2 + \frac{\lambda^2}{c^4} z^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} (100\lambda)$$

Ha a következő jelöléseket

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} &= \frac{a}{b} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}, & \frac{1}{\mu_2} &= \frac{a}{\lambda c} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} + \frac{\lambda^2}{a^2}} \\ \frac{1}{\mu'_1} &= \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}, & \frac{1}{\mu'_2} &= \frac{b}{\lambda c} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} + \frac{\lambda^2}{b^2}} \\ \frac{1}{\nu_1} &= \frac{a}{\lambda b} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} + \frac{\lambda^2}{a^2}}, & \frac{1}{\nu_2} &= \frac{a}{c} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \\ \frac{1}{\nu'_1} &= \frac{c}{\lambda a} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} + \frac{\lambda^2}{c^2}}, & \frac{1}{\nu'_2} &= \frac{c}{a} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \\ \frac{1}{\rho_1} &= \frac{b}{\lambda a} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2}}, & \frac{1}{\rho_2} &= \frac{b}{c} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} \\ \frac{1}{\rho'_1} &= \frac{c}{\lambda a} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\lambda^2}{c^2}}, & \frac{1}{\rho'_2} &= \frac{c}{b} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} \end{aligned}$$

görbéink vetületeinek egyenletébe behozzuk, úgy azok egyszerűbb alakja.

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{\mu_1^2} - \frac{z^2}{\mu_2^2} + 1 &= 0 & \frac{x^2}{\mu_1^2} + \frac{z^2}{\mu_2^2} - 1 &= 0 & (001\lambda) \\ -\frac{y^2}{\nu_1^2} + \frac{z^2}{\nu_2^2} + 1 &= 0 & \frac{y^2}{\nu_1^2} + \frac{x^2}{\nu_2^2} - 1 &= 0 & (010\lambda) \\ -\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{z^2}{\rho_2^2} + 1 &= 0 & \frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2} - 1 &= 0 & (100\lambda) \end{aligned}$$

Ez egyenletek kimondják, hogy a coordináta síkokhoz isoklin normálisok görbéi ellipticus és hyperbolicus hengerek metszésvonalai gyanánt tekinthetők; miért is e görbéket ellipticus hyperboláknak, vagy hyperbolicus ellipsiseknek lehet nevezni.

2. Pld. Az egy köpenyű hyperboloid egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

A három coordináta síkhoz isoklin normálisok görbéinek egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{a^4} x^2 + \frac{\lambda^2}{b^4} y^2 + \frac{1}{c^4} (\lambda^2 - 1) z^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} (001\lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{a^4} x^2 + \frac{1}{b^4} (\lambda^2 - 1) y^2 + \frac{\lambda^2}{c^4} z^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} (010\lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^4} (\lambda^2 - 1) x^2 + \frac{\lambda^2}{b^4} y^2 + \frac{\lambda^2}{c^4} z^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} (100\lambda)$$

A  $(001\lambda)$  görbének a három coordináta síkra való vetületei:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{b^2} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) y^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) z^2 + \frac{\lambda^2}{a^2} &= 0 \\ \frac{\lambda^2}{a^2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) x^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) z^2 + \frac{\lambda^2}{b^2} &= 0 \\ \frac{\lambda^2}{a^2} \left( \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{\lambda^2}{c^2} \right) + \frac{1}{b^2} \left( \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{\lambda^2}{c^2} \right) y^2 + \frac{1}{c^2} (1 - \lambda^2) &= 0. \end{aligned}$$

Ez egyenletek kimondják, hogy a vetületek nem mindig reálisak minden coordináta síkra és pedig ha

$$\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0 \quad \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0$$

a vetület  $(yz)$  és  $xy$  síkban képzetes,  $(xz)$  síkban pedig hyperbola

$$\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0 \quad \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} > 0$$



feltétel  $(yz)$  síkban képzetes vetületet,  $(xz)$  és  $(xy)$ -ban pedig ellipsist és hyperbolát ad.

$$\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} > 0 \quad \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} > 0$$

$$\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} > 0 \quad \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0$$

esetekben a vetületek mind a három síkra reálisak, és pedig az első esetben  $(yz)$ -re hyperbola  $(xz)$  és  $(xy)$ -ra ellipsis, a másodikban mind a három síkra parabola.

Hasonló kutatást lehet véghezvinni a  $(010\lambda)$ ,  $(100\lambda)$  görbék vetületeire is.

A két köpenyű hyperboloidra

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

alkalmazva elméletünket a most kifejtettekhez igen hasonló eredményre jutunk.

#### 10. Alkalmazás a kúpokra.

A kúpok normal egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

A felület  $(001\lambda)$ ,  $(010\lambda)$ ,  $(100\lambda)$  görbéinek egyenletei

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{a^4} x^2 + \frac{\lambda^2}{b^4} y^2 + \frac{1}{c^4} (\lambda^2 - 1) z^2 &= 0 \\ \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (001\lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{a^4} x^2 + \frac{1}{b^4} (\lambda^2 - 1) y^2 + \frac{\lambda^2}{c^4} z^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (010\lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda^2}{a^4} (\lambda^2 - 1) x^2 + \frac{\lambda^2}{b^4} y^2 + \frac{\lambda^2}{c^4} z^2 &= 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0 \end{aligned} \right\} (100 \lambda)$$

(001  $\lambda$ ) vetületei

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{b^2} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) y^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) z^2 &= 0 \\ \frac{\lambda^2}{a^2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) x^2 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) z^2 &= 0 \\ \frac{1}{a^2} \left( \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{\lambda^2}{c^2} \right) x^2 + \frac{1}{b^2} \left( \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{\lambda^2}{c^2} \right) y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Ez egyenletekből kiolvasható, hogy a vetületek két reális, vagy két conjugált complex egyenest ábrázolnak. Mind a három vetület reális, ha

$$\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} > 0, \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0$$

Egy vetület reális, ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0, \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0 &\text{ vagy} \\ \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} > 0, \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{b^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} > 0 &\text{ vagy} \\ \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} < 0, \frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} > 0 \end{aligned}$$

Tehát vagy mind a három vetület reális, vagy csak egy. Ha mind a három vetület reális, azok bármelyikén és a vetületi síkra merőleges coordinata tengelyen átmenő síkok metszik ki az isoklin normálisok görbéit, melyek tekintettel a már 7. §-ban is megállapított tételre, négy egyenesbe degenerálnak. Ha pedig a vetület csak egy coordinata síkra reális, ez azt jelenti, hogy maga a vetület képezi az isoklin normálisok görbáját, a miből azután következik, hogy a másik két vetületnek képzetesnek kell lenni.



### 11. $(\alpha\beta\gamma\lambda)$ görbék a forgási felületeken.

Az ellipsoid egyenletében, ha  $a=b$  a két tengelyű forgásai ellipsoidhoz jutunk, melynek egyenlete

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Könnyű meggyőződni, hogy a  $z=0$  síkhoz isoklin normálisok görbéi, vagyis a  $(001 \lambda)$  görbék

$$z = \pm \frac{c}{a} \lambda \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2}}$$

centrummal bíró

$$r = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

sugarú körök.

Az egy köpenyű forgási hyperboloidok egyenlete

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

hasonlóképen találjuk, hogy a  $(001 \lambda)$  görbék

$$r = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2}}}$$

sugarú körök, melyeknek centruma

$$z = \pm \frac{c}{a} \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} - \frac{\lambda^2}{c^2}}$$

Az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék egyenleteinek lehozásánál eljutunk ama az általános elméletben már megállapított tantételnek mintegy bővebb értelmezésére, mely szerint azokat

$$ax + \beta y = 0$$

síkok metszik ki.

A forgási kúpok egyenlete

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék egyenletei

$$\lambda^2 \left( \frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) = \left( \frac{ax}{a^2} + \frac{\beta y}{a^2} - \frac{\gamma z}{c^2} \right)^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

vagy

$$\frac{\lambda^2 (a^2 + c^2)}{a^2 c^4} z^2 = \left( \frac{ax}{a^2} + \frac{\beta y}{a^2} - \frac{\gamma z}{c^2} \right)^2$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Tehát minden a centrumon átmenő sík  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbét metsz ki a felületből, vagyis a kúp minden alkotója  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbe. Könnyű kimutatni azt is, hogy a forgási kúp minden normálisa isoklin a kúp tengelyéhez mérőleges síkhoz. Ugyanis a  $(001\lambda)$  görbe egyenletei

$$\frac{\lambda^2 (a^2 + c^2)}{a^2 c^4} z^2 = \frac{z^2}{c^4}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{a^2}{a^2 + c^2}$$

mellett az első egyenlet minden  $z$  mellett teljesül, tehát  $z = 0$  síkhoz a felület összes normálisai isoklinek s hajlási szögük

$$\arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

A forgási felületek legnevezetesebb alakja a gömb, egyenlete

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

$(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéinek egyenletei

$$\lambda a = ax + \beta y + \gamma z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$



Ebből látható hogy a gömb  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéi síkgörbék és pontjaiban meghuzott normálisok isoklinek a görbe síkjához, tehát görbületi görbékkel van dolgunk,  $\lambda = 0$  esete mutatja, hogy az  $(\alpha\beta\gamma o)$  görbék, vagyis a gömb legnagyobb körei geodeticus vonalak.

Az általános elméletnek eme specialis esetekre való alkalmazása elég világos képet nyújt arról, hogyan kell az isoklin normálisok görbéinek meghatározásában eljárni. A letárgyalt esetekben a metszési görbék vetületei első-, másodrendű görbék vagy pontok voltak, ezek tulajdonságai ismeretesek. Sokkal bonyadalmasabb a tárgyalás bármely általánosabb eset megvizsgálásában, ekkor általánosan a vetületek negyedrendű görbéknek adnak, tehát ily esetekben az isoklin normálisok görbéi, mint negyedrendű hengerek metszésvonalai jelennek meg, de minthogy a térbeli görbéknek ép oly jellemzők azon felületek, melyeknek metszésvonalát képezik, mint vetületeik, azért a centrális felületekre vonatkozó vizsgáldást ezzel bezárom.

## 12. A paraboloidok $(\alpha\beta\gamma\lambda)$ görbéi.

A másodrendű felületeknek többi fajaira való alkalmazásban ezentúl azok normál egyenletéből indulok ki, minthogy a szükségképen alkalmazandó koordináta transformatiók általánosabb tárgyalást alig engednének meg.

Azon másodrendű felületeket, melyeknek centruma a végtelenben van, paraboloidoknak nevezzük, normál egyenletük:

$$2x - p_1 y^2 - p_2 z^2 = 0.$$

az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéket kimetsző felület egyenlete

$$\lambda \sqrt{1 + p_1^2 y^2 + p_2^2 z^2} = a_1 - \beta p_1 y - \gamma p_2 z$$

rendezett alakban

$$p_1^2 (\lambda^2 - \beta^2) y^2 + p_2^2 (\lambda^2 - \gamma^2) z^2 - 2\beta\gamma p_1 p_2 yz + 2\alpha\beta p_1 y + 2\alpha\gamma p_2 z + \lambda^2 - a^2 = 0$$

E felület a hengerek egyenletét képviseli, megvizsgálendő természetete; determinansa  $D$ , valamint aldeteminansai közül  $A_{22}$ ,  $A_{33}$ ,  $A_{44}$  nullok, míg

$$A_{11} = p_1^2 p_2^2 \begin{vmatrix} \lambda^2 - \beta^2, & -\beta\gamma, & a\beta \\ -\beta\gamma, & \lambda^2 - \gamma^2, & a\gamma \\ a\beta, & a\gamma, & \lambda^2 - a^2 \end{vmatrix}$$

vagy

$$A_{11} = p_1^2 p_2^2 \lambda^4 (\lambda^2 - 1)$$

$A_{11}$  átlói aldeterminansai

$$p_2^2 (\lambda^2 + \beta^2 - 1)$$

$$p_1^2 (\lambda^2 + \gamma^2 - 1)$$

$$p_1^2 p_2^2 (\lambda^2 + a^2 - 1)$$

Ha  $\lambda^2 < 1$ , akkor  $A_{11} < 0$ . Kimutatjuk, hogy ha  $a_{ii} A_{11} > 0$ , akkor  $A_{11}$  átlói aldeterminansai negatívek, míg ha  $A_{11}$  átlói aldeterminansai pozitívek, akkor  $a_{ii} A_{11} < 0$

$$a_{ii} A_{11} > 0, \text{ ha}$$

$$\lambda^2 < a^2, \lambda^2 < \beta^2, \lambda^2 < \gamma^2$$

mely föltételnél fogva, mivel  $a^2 + \beta^2 - 1 = -\gamma^2$

$$\lambda^2 + a^2 - 1 < 0$$

$$\lambda^2 + \beta^2 - 1 < 0$$

$$\lambda^2 + \gamma^2 - 1 < 0$$

míg ha az átlói aldeterminansok pozitívek, az azt jelenti, hogy

$$\lambda^2 \geq a^2 + \beta^2, \lambda^2 \geq a^2 + \gamma^2, \lambda^2 \geq \beta^2 + \gamma^2$$

a mi kimondja, hogy  $a_{ii} A_{11} < 0$ .

Ha  $A_{11}$  átlói aldeterminansai nullok ez azt jelenti, hogy

$$a^2 = \beta^2 = \gamma^2$$

$$\lambda^2 = 2 a^2 = 2 \beta^2 = 2 \gamma^2$$

Ha tehát az átlói aldeterminansok pozitívek, akkor realis ellipticus hengerrel, ha negatívek hyperbolicus, ha nullok parabolicus hengerrel van dolgunk. Áll tehát a tétel:  $\lambda^2 < 1$  esetben a paraboloidokból az isoklin normálisok görbéit kimetsző felületek mindig reális hengerek.

Ha  $\lambda^2 = 1$ , akkor  $A_{11} = 0$  átlói aldeterminansai pozitívek,



tehát két conjugált complex síkkal van dolgunk, a mi kimondja, hogy hengerfelületünk egyenessé degenerál, a mi mindannyiszor bekövetkezik, valahányszor a henger vezetővonala egy ponttá zsugorodik össze.

Végül ha  $\lambda = 0$ , akkor  $A_{11}$ , valamint átlói aldeteminansai is nullók, tehát egyenletünk síkot képvisel, a mi a hengerek azon különös esetének felel meg, midőn vezetővonaluk egyenes.

### 13. A paraboloidok $(\alpha\beta\gamma o)$ görbéi.

Az  $(\alpha\beta\gamma o)$  görbékét kimetsző sík egyenlete

$$\alpha - \beta p_1 y - \gamma p_2 z = 0$$

mely mutatja, hogy az  $x$  tengelylyel párhuzamos síkkal van dolgunk, minthogy pedig a párhuzamos síkok hasonló görbéket metszenek ki a felületből, azért elég lesz az  $x$  tengelyen átmenő síkok egyike által kimetszett görbe természetét kutatni, e végből czélszerű lesz oly koordináta-rendszerre áttérni, mely a régiből a  $z = 0$  és  $y = 0$  síkoknak az  $x$  tengely körül való kiforgatása által jön létre, az új rendszerben valamely pont koordinátáit  $x_1, y_1, z_1$ -el jelölván meg, az új koordináta tengelyek irányecsinusai  $0, 0, 1; (0 \alpha_1 \beta_1); (0_1 \alpha_2 \beta_2)$ , tehát a transformatió formulák

$$x_1 = x$$

$$y_1 = \alpha_1 y + \gamma_1 z$$

$$z_1 = \alpha_2 y + \gamma_2 z$$

innen

$$x = x_1$$

$$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 z_1$$

$$z = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 z_1$$

Ha ezen értékeket a paraboloidok normál egyenletébe behelyettesítjük

$$2x_1 - p_1(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 z_1)^2 - p_2(\gamma_1 y_1 + \gamma_2 z_1)^2 = 0.$$

Ha a felületet  $z_1 = 0$ , vagy  $y_1 = 0$  síkkal metszettük, nemcsak hogy az isoklin normálisok görbéihez tökéletesen hasonló görbékhez jutottunk, hanem mint látható, egyúttal  $(\alpha\beta\gamma o)$  görbékkel van

dolgunk.  $z_1 = 0$  síkkal való metszési görbe egyenlete

$$y_1^2 = \frac{2}{a_1^2 p_1 + r_1^2 p_2} x_1$$

Evvel kimutattuk, hogy a felület  $(a\beta\gamma o)$  görbéi általában parabólák, ha pedig  $a_1^2 p_1 + r_1^2 p_2 = 0$  akkor

$$z_1 = 0, x_1 = 0,$$

míg ha  $a_2^2 p_1 + r_2^2 p_2 = 0$  akkor

$$y_1 = 0, x_1 = 0$$

egyenesek is az  $(a\beta\gamma o)$  görbék közé tartoznak, látni való, hogy ez esetek csakis a hyperpolicus paraboloidoknál fordulhatnak elő, midőn  $p_1$  és  $p_2$  ellenkező előjelűek.

#### 14. A paraboloidok $(a\beta\gamma\lambda)$ görbéinek további tárgyalása.

Azon általános esetben, midőn  $0 < \lambda^2 < 1$ , az  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbék kimetsző felület egyenlete, mint láttuk

$$\lambda \sqrt{1 + p_1^2 y^2 + p_2^2 z^2} = a - \beta p_1 y - \gamma p_2 z$$

ez egyenlet az  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbéknek a vetületét állítja elő az  $yz$  síkra. Ha egyenletünkből és a felület egyenletéből egyszer  $y$ -t s egyszer  $z$ -t küszöböljük ki, nyerjük az isoklin normálisok görbéinek vetületét az  $xz$  illetve  $xy$  síkokra, de ezek már negyedrendű görbék; miért is a paraboloidok  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbéi mint a másod- és negyedrendű hengerfelületek metszéséből származó görbék foghatók fel. Lássuk közelebbről a  $(001\lambda)$ ,  $(010\lambda)$ ,  $(1,00\lambda)$  görbéket.

Egyenleteik

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 y^2 + p_2^2 (\lambda^2 - 1) z^2 + \lambda^2 &= 0 \\ 2x - p_1 y^2 - p_2 z^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (001\lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 (\lambda^2 - 1) y^2 + p_2^2 z^2 + \lambda^2 &= 0 \\ 2x - p_1 y^2 - p_2 z^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (010\lambda)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 y^2 + p_2^2 z^2 + \lambda^2 - 1 &= 0 \\ 2x - p_1 y^2 - p_2 z^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (100\lambda)$$



$\lambda^2 < 1$  esetben tehát a (001 $\lambda$ ) és (010 $\lambda$ ) görbékét kimetsző hengerek hyperbolicusak, míg az (100 $\lambda$ ) görbékét elliptikus hengerek metszik ki. Görbéink vetületei az  $yx$  síkra

$$\begin{aligned} p_1[p_1 - p_2(\lambda^2 - 1)]y^2 + 2p_2(\lambda^2 - 1)x + \lambda^2 &= 0, \\ p_1[p_1(\lambda^2 - 1) - p_2]y^2 + 2p_2x + \lambda^2 &= 0, \\ p_1(p_1 - p_2)y^2 + 2p_2x + \lambda^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

az  $xz$  síkra pedig

$$\begin{aligned} p_2[p_1(\lambda^2 - 1) - p_1]z^2 + 2p_1x + \lambda^2 &= 0, \\ p_2[p_2 - p_1(\lambda^2 - 1)]z^2 + 2p_1(\lambda^2 - 1)x + \lambda^2 &= 0, \\ p_2(p_2 - p_1)z^2 + 2p_1x + \lambda^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ezen egyenletek általában parabolákat képviselnek, tehát a (001 $\lambda$ ) és (010 $\lambda$ ) görbékét hyperbolicus paraboláknak, az (100 $\lambda$ ) görbékét ellipticus paraboláknak lehet nevezni; mert míg amazok hyperbolicus és parabolicus, addig emezek ellipticus és parabolicus hengerek átmetszéséből származó görbe vonalak.

$p_1 = p_2 = p$  vagyis a forgási ellipticus paraboloidok (100 $\lambda$ ) görbéinek vetületei a három koordináta síkra

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= \frac{1 - \lambda^2}{p} \\ x &= \frac{1 - \lambda^2}{2p} \\ x &= \frac{1 - \lambda^2}{2p} \end{aligned}$$

tehát az (100 $\lambda$ ) oly  $r = \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{p}}$  sugarú kör, melynek centruma a forgási tengelyben van az origótól  $\frac{1 - \lambda^2}{p}$  távolságra.

Ha  $p_2 = p_1(\lambda^2 - 1)$ , akkor a (010 $\lambda$ ) görbének vetületei

$$\begin{aligned} y^2 + (\lambda^2 - 1)z^2 + \frac{\lambda^2}{p_1^2(\lambda^2 - 1)} &= 0 \\ x + \frac{\lambda^2}{2p_1(\lambda^2 - 1)} &= 0 \\ x + \frac{\lambda^2}{2p_1(\lambda^2 - 1)} &= 0 \end{aligned}$$

tehát  $x + \frac{\lambda^2}{2p_1(\lambda^2-1)} = 0$  síkban oly hyperbolával van dolgunk, melynek tengelyei

$$b = \frac{\lambda}{p_1 \sqrt{1-\lambda^2}}, \quad c = \frac{\lambda}{p_1(1-\lambda^2)}$$

Hasonlóképen, ha  $p_1 = p_2(\lambda^2-1)$ , akkor a  $(001\lambda)$  görbék vetületei

$$(\lambda^2-1)y^2+z^2+\frac{\lambda^2}{p_2^2(\lambda^2-1)}=0$$

$$x+\frac{\lambda^2}{2p_2(\lambda^2-1)}=0$$

$$x+\frac{\lambda^2}{2p_2(\lambda^2-1)}=0$$

az az  $x + \frac{\lambda^2}{2p_2(\lambda^2-1)} = 0$  síkban levő oly hyperbolával van dolgunk, melynek tengelyei

$$b = \frac{\lambda}{p_2(1-\lambda^2)}, \quad c = \frac{\lambda}{p_2 \sqrt{1-\lambda^2}}$$

Vizsgáljuk még meg a paraboloid  $(aaoa)$  görbéit, csak hamar találjuk, hogy egyenletei

$$2x - p_1 y^2 - p_2 z^2 = 0$$

$$xz + \frac{1}{p_1 p_2} = 0$$

Ha tehát valamely pont a paraboloidon úgy tartozik mozgani, hogy  $x$  és  $z$  coordinátáinak szorzata mindig  $-\frac{1}{p_1 p_2}$  legyen, úgy a pont mozgásából keletkező görbe  $(aaoa)$  görbe.

### 15. A parabolicus hengerek $(a\beta\gamma\lambda)$ görbéi.

A parabolicus hengerekre való alkalmazás csak egy specialis esetét képezi az imént tárgyalt eseteknek, ugyanis ha a paraboloidok egyenletében  $p_2=0$ , akkor

$$2x = p_1 y^2$$



a parabolicus hengerek egyenletét képviseli, e felület  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbéit kimetsző felület egyenlete

$$p_1^2(\lambda^2 - \beta^2)y^2 + 2\alpha\beta p_1 y + \lambda^2 - a^2 = 0$$

innen

$$y = -\frac{\alpha\beta}{p_1(\lambda^2 - \beta^2)} \pm \sqrt{\frac{a^2\beta^2 - (\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - \beta^2)}{p_1^2(\lambda^2 - \beta^2)}}$$

vagy

$$y = -\frac{\alpha\beta \mp \lambda \sqrt{1 - \lambda^2 - \gamma^2}}{p_1(\lambda^2 - \beta^2)},$$

$$1 - \lambda^2 - \gamma^2 > 0$$

esetben két-reális párhuzamos síkkal van dolgunk, azaz minden  $x=0$  síkhoz párhuzamos sík  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbét metsz ki a felületből, melyeknek vetületeit  $xy$  síkra

$$x = \left[ \frac{\alpha\beta \pm \lambda \sqrt{1 - \lambda^2 - \gamma^2}}{p_1(\lambda^2 - \beta^2)} \right]^2$$

pontok képviselik, szóval áll a tétel, hogy a parabolicus hengerek alkotói  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék. Könnyű továbbá látni, hogy a felület (0010) görbéi határozatlanok, ami azt mondja ki, hogy a felület összes normálisai az  $xy$  síkkal párhuzamosak, tehát a felület összes görbéi (0010) görbék.

Ha

$$1 - \lambda^2 - \gamma^2 = 0, \quad \lambda^2 = 1 - \gamma^2,$$

akkor

$$y = \frac{\alpha\beta}{p_1(\lambda^2 - \beta^2)} = \frac{\beta}{p_1 a}, \quad x = \frac{\beta^2}{p_1^2 a^2}$$

$1 - \lambda^2 - \gamma^2 < 0$  kimondja, hogy vannak síkok, melyekhez az isoklin normálisok görbéi két végtelen távoli ponttá degenerálnak.

## 16. Az ellipticus és hyperbolicus hengerek $(\alpha\beta\gamma\lambda)$ görbéi.

Az ellipticus és hyperbolicus hengerek egyenletének normál alakja

$$p_1 x^2 + p_2 y^2 = 1$$

az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbékét kimetsző felület egyenlete

$$p_1^2(\lambda^2 - \alpha^2)x^2 + p_2^2(\lambda^2 - \beta^2)y^2 - 2\alpha\beta p_1 p_2 xy = 0$$

innen

$$\frac{y}{x} = \frac{\alpha\beta p_1 \pm \lambda p_1 \sqrt{1 - \lambda^2 - \gamma^2}}{p_2(\lambda^2 - \beta^2)}$$

tehát a  $z$  tengelyen átmenő összes síkok  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbékét metszenek ki a felületből, más szóval a felület összes alkotói  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék, de könnyű azt is látni, hogy a felület  $(0010)$  görbéi határozatlanok, azaz a felület összes normálisai az  $xy$  síkhoz párhuzamosak.

### 17. Az $(\alpha\beta\gamma\lambda)$ görbék tárgyalása a (c) alakban.

Az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbék egyenleteinek (c) alakja

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

$$\lambda = \frac{\alpha f_{23} + \beta f_{31} + \gamma f_{12}}{\sqrt{f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2}}$$

Azonnal meg fogunk győződni, hogy az isoklin normálisok görbéinek tárgyalása ezen alakban igen fáradságos s nehezen célra vezető. Határozzuk meg pl. a három tengelyű ellipsoid  $(\alpha\beta\gamma\alpha)$  görbéit a (c) alakban.

A felület egyenletei

$$\begin{aligned} x &= a \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v} \\ y &= b \cos u \cos v \\ z &= c \sin v \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 u} \end{aligned}$$

Ezen egyenleteket  $u, v$  szerint deriválva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= a \cos u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= - \frac{ak^2 \sin u \sin v \cos v}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= - b \sin u \cos v \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial v} &= -b \cos u \sin v \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= -\frac{c(1-k^2) \sin u \cos u \sin v}{\sqrt{1-(1-k^2) \sin^2 u}} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= c \cos v \sqrt{1-(1-k^2) \sin^2 u}\end{aligned}$$

Ezekből pedig

$$\begin{aligned}f_{23} &= -\frac{bc \sin u [\cos^2 u - k^2 (\sin^2 v - \sin^2 u)]}{\sqrt{1-(1-k^2) \sin^2 u}} \\ f_{31} &= -\frac{ac \cos u \cos v [\cos^2 u - k^2 (\sin^2 v - \sin^2 u)]}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 v} \sqrt{1-(1-k^2) \sin^2 u}} \\ f_{12} &= -\frac{ab \sin v [\cos^2 u - k^2 (\sin^2 v - \sin^2 u)]}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 v}}\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \sin u \sqrt{1-k^2 \sin^2 v} \alpha + \frac{1}{b} \cos u \cos v \beta + \\ + \frac{1}{c} \sin v \sqrt{1-(1-k^2) \sin^2 u} \gamma = 0\end{aligned}$$

egyenlet a felület egyenleteivel együtt az ellipsoid  $(\alpha\beta\gamma)$  görbéinek egyenleteit képezik.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  tényezőinek figyelmes megtekintése mutatja, hogy legutóbbi egyenletünk

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0$$

egyenlettel azonos, mely már az előbbiekből ismeretes. A számítás menetének hosszadalmas és fárasztó volta meggyőz arról, hogy a (c) alak a kutatásokra legtöbb esetben igen alkalmatlan s csak azon esetben használható sikerrel, midőn a felület egyenlete is szokottabb a jelzett alakban így pl. A csavarfelület egyenletei

$$z = au, \quad x = v \cos u, \quad y = v \sin u$$

Ezekből

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -v \sin u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \cos u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v \cos u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \sin u$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = a, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$f_{23} = -a \sin u$$

$$f_{31} = a \cos u$$

$$f_{12} = -v$$

$$\sqrt{f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2} = \sqrt{a^2 + v^2}$$

Ennélfogva

$$-aa \sin u + a\beta \cos u - \gamma v = \lambda \sqrt{a^2 + v^2}$$

$$z = au, \quad x = v \cos u, \quad y = v \sin u$$

a csavarvonal  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbéinek általános egyenleteit képezik.

### 18. Az $(a\beta\gamma\lambda)$ görbék rendszerei.

Az  $(a_1 \beta_1 \gamma_1 \lambda_1)$ ,  $(a_2 \beta_2 \gamma_2 \lambda_2)$  görbéket kimetsző kúpok metszészonalán átmenő kúpok szintén  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbéket metszenek ki a felületből, melyeket a következő symbolum képvisel

$$(a_1 + \nu a_2 \beta_1 + \nu \beta_2 \gamma_1 + \gamma \gamma_2 \lambda_1 + \nu \lambda_2)$$

hol  $\nu$  határozatlan parameter.

Ha  $(a_1 \beta_1 \gamma_1 \lambda_1)$  és  $(a_2 \beta_2 \gamma_2 \lambda_2)$  görbék metszik egymást, akkor  $(a_1 + \nu a_2 \beta_1 + \nu \beta_2 \gamma_1 + \nu \gamma_2 \lambda_1 + \nu \lambda_2)$  görbék valamennyien átmennek a két alapgörbe metszési pontjain, miből következik, hogy ha a felület valamely pontján két  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbe átmegy, akkor azon még végtelen sok más  $(a\beta\gamma\lambda)$  megy át.

Az  $(a_1 \beta_1 \gamma_1 \lambda_1)$ ,  $(a_2 \beta_2 \gamma_2 \lambda_2)$ ,  $(a_3 \beta_3 \gamma_3 \lambda_3)$  görbéket kimetsző kúpok metszési pontjain átmenő kúpok szintén  $(a\beta\gamma\lambda)$  görbéket metszenek ki a felületből, melyeknek symboluma

$$(a_1 + \nu a_2 + \nu_1 a_3 \beta_1 + \nu \beta_2 + \nu_1 \beta_3 \gamma_1 + \nu \gamma_2 + \nu_1 \gamma_3 \lambda_1 + \nu \lambda_2 + \nu_1 \lambda_3)$$



tehát a föntebbi három görbe metszési pontjain kétszeresen végtelen sok más  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  görbe megy át.

Ha a három adott görbe közül az egyik átmegy a másik kettő metszési pontjain, akkor

$$(a_1 + \nu a_1 \beta_1 + \nu \beta_1 \gamma_1 + \nu \gamma_1 \lambda_1)$$

$$(a_1 + \nu_1 a_3 \beta_1 + \nu_1 \beta_3 \gamma_1 + \nu_1 \gamma_3 \lambda_1)$$

$$(a_2 + \nu_2 a_3 \beta_2 + \nu_2 \beta_3 \gamma_2 + \nu_2 \gamma_3 \lambda_2)$$

görbék szintén átmennek ugyanazon pontokon.

Végül az  $(\alpha\beta\gamma\lambda)$  symbolumban előforduló  $a, \beta, \gamma, \lambda$  jellemző számok változásainak határaitól meg kell jegyezni, hogy mivel  $a, \beta, \gamma$  iránycosinusok,  $\lambda$  a normálisak hajlásszögének sinusa, azért  $a, \beta, \gamma$  egymástól függetlenül mindazon értékeket felvehetik, melyek az irányszögek  $0$  és  $\pi$  közt levő változásainak felelnek meg, míg  $\lambda$  azon értékeken mehet át, melyeket a normálisok  $\frac{\pi}{2}$  és  $-\frac{\pi}{2}$  szögek közt váltakozó hajlásai határoznak meg.



