

262.096

-8

2

262096

A MÁSODOSZTÁLYŰ
FELÜLETEK
ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

IRTA

D^r SUTÁK JÓZSEF

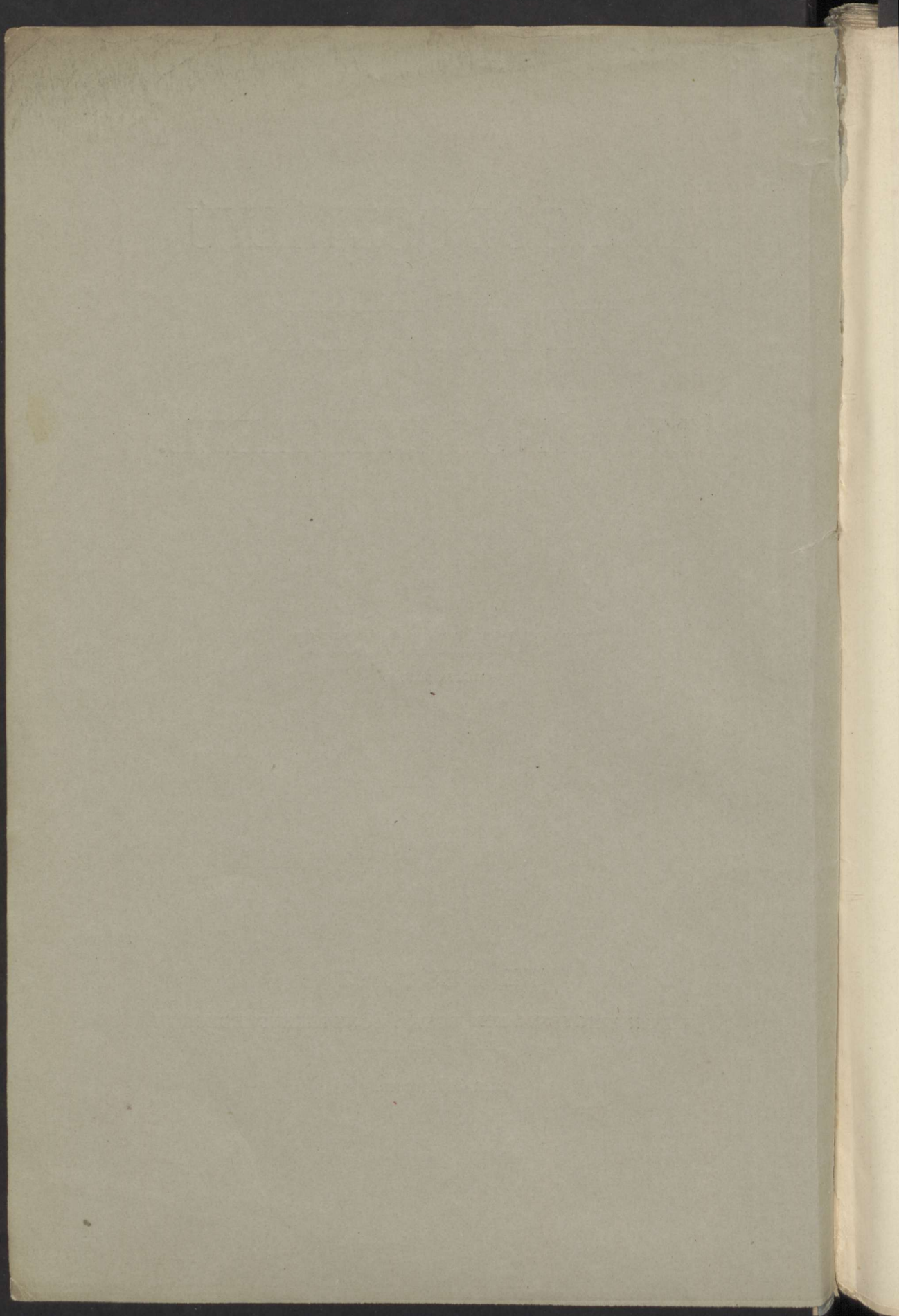
PIARISTA TANÁR.

BUDAPEST, 1895.

KILIÁN FRIGYES M. KIR. EGYET. KÖNYVKERESKEDÉSE

IV., Váci-utca 28.

Ára 3 korona.

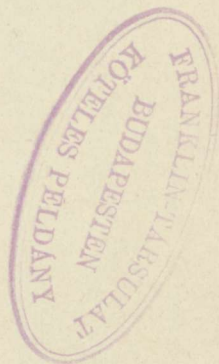


A MÁSODOSZTÁLYÚ
FELÜLETEK
ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

IRTA

DE SUTÁK JÓZSEF

PIARISTA TANÁR.



BUDAPEST.

1895.

Math. p.
488-ly.

A M. N. MUZEUM KÖNYVTÁRA

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA

NYOMTATV. NÖVEDEKNAPLÓ



262096

M. N. MUZEUM KÖNYVTÁRA
Nyomtatv. Növedéknapló

1895. évf. 513. sz.



FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ELŐSZÓ.

A dualitás elvét síkidomokra vonatkozólag először PONCELET (*Traité des propriétés projectives des figures*; 1822) és GERGONNE (*Sur la théorie des surfaces*; *Annales de mathématiques* VIII. 1817—18, *Crelle Journal* v. K.) alkalmazták; a térre nézve pedig ezt az elvet először MÖBIUS mondja ki (1827); jóllehet szorosan csak PLÜCKER (*Crelle Journal* v. K. 1830) állapította meg a síkkoordináták bevezetésével. Én a jelen munka bevezető soraiban a pont és sík egymáshoz való viszonyából következtetem ki a dualitás elvének néhány alapjelentőségű tételét; különösen azokat, melyek a később következő tárgyalást — mintegy — megvilágítják.

A dualitás elvének bevezetése óta az egymásra nézve duálidomok oly szoros kapcsolatba léptek, hogy a téridomok tulajdonságaiba való mélyebb bepillantás igazán csakis a duálrokonság segítségével történhetik. Fontos tehát, hogy az idomoknak duáljait is megvizsgáljuk; mert az itt talált különösségek nagyban hozzájárulnak a tér-fogalmaink tisztázására s tökéletesítésére.

A jelen munka a másodrendű felület duálját, a másodosztályú felületet akarja analitikai tárgyalással megvilágítani. Ismeretes, hogy erre a felületre vonatkozó tételeket rendszeren a duálrokonság alapján szokták megállapítani; ennek azután az a következménye: hogy a tételek a dualitás elvének nem egészen helyes alkalmazásával, sokszor nem valami precíz fogalmazásban, vagy pedig hiányosan jelennek meg (Pl. CLEBSCH *Vorlesungen über Geometrie*, II. K. 262. l. Nr. 4., 5., 6., . . .) Legtöbb kérdés azonban csak érintve, vagy hiányosan megoldva jelenik meg (Pl. a jelen munka 8., 9., 11., 13., 16., 27., 28. §§.); sőt némelyik teljesen említés nélkül marad (2., 12., 15., 22., 26. §§.).

A bevezető sorok után mellékelt tartalmi kimutatás, úgy hiszem, elég világos képet nyújt arról a körről, a melyben ez a munka mozog; s azt hiszem, felöleli mindazokat az alapvető általános kérdéseket, melyek a másodrendű felületekre nézve ismeretesek; ezeket a kérdéseket természetesen a bevezető sorokban megállapított dualitási elvek szerint formuláztam. Csak azt jegyzem itt meg, hogy a másodrendű *felület általánosított görbületi vonalainak duáljait általánosított görbületi felületeknek neveztem*. Mivel ezek a felületek, miként kimutattam (26. §.), azonosak azokkal a negyedosztályú lefejtető felületekkel, melyeket egy adott másodrendű felület és a vele alkotott felület-csomó tagjai definiálnak, azért, úgy hiszem, hogy ez az elnevezés is elég helyes; mert hiszen a felület csomó tagjainak forgatásával együtt jár az általánosított görbületi felületek forgása is.

Ami a módszert illeti: a polár-elméletekben a másodrendű felületekre vonatkozó alapvető tételek megállapításánál általánosan elterjedt módszert használtam; a másodosztályú felületek osztályozásánál különös tekintettel voltam hazai irodalmunkra (VÁLYI: Math. és Phys. lapok I. K., 6. f., 340. l.; II. K., 1. f., 1. l.); a másodosztályú felületek egymáshoz való viszonyának tanulmányozásánál a kanonikus alakok megállapításában a CLEBSCH-féle módszert követtem; azonban nem egy helyen (19. §. III. V., VI., X., 21. §.) egyszerűbben, sőt talán világosabban is megjelenítettem azokat a koordináta rendszereket, melyekben a kanonikus alakok megjelennek. Az általánosított görbületi vonalak definíciója MONGE-től ered (*Application d'analyse à la géométrie*, Paris 1795.), s a reájuk vonatkozó tételt DUPIN általánosított tételének nevezhetjük; a másodosztályú felületeknek a lineáris komplexushoz való viszonyát s a felületeknek önmagukba való transzformációját szintén CLEBSCH idézett munkájában közölt módszerrel tárgyaltam.

BEVEZETÉS.

a) A tér pontjai és síkjai között levő legfontosabb relációk.

Azt a pontot, melynek tetraéder-koordinátái x_1, x_2, x_3, x_4 , nevezzük röviden x -nek.

Azt a síkot, melynek tetraéder-koordinátái u_1, u_2, u_3, u_4 , nevezzük röviden u -nak.

Az u sík átmegy x ponton, ha teljesül a következő egyenlet:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0. \quad (1')$$

Ez az egyenlet x pont egyenlete, ha benne u -t tekintjük változónak.

Ha

$$\left. \begin{array}{l} U_1=0, \quad U_2=0 \\ U_3=0, \quad U_4=0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

u -nak különböző, de homogén lineáris függvényeit jelölik, akkor azok négy pont egyenletét képviselik.

$$\mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 = 0 \quad (3)$$

egy oly pontnak az egyenlete, mely rajta van az (U_1, U_2) egyenesen; és μ_1, μ_2 ugyanannak a pontnak kétméretű koordinátái az

$$U_1=0, \quad U_2=0$$

pontok képviselte vonalkoordináta-rendszerre vonatkozólag; az alappontok koordinátái rendre:

Ez az egyenlet u sík egyenlete, ha benne x -t tekintjük változónak.

Ha

$$\left. \begin{array}{l} X_1=0, \quad X_2=0 \\ X_3=0, \quad X_4=0 \end{array} \right\} \quad (2')$$

x -nek különböző, de homogén lineáris függvényeit jelölik, akkor azok négy sík egyenletét képviselik.

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0 \quad (3')$$

egy oly síknak az egyenlete, mely átmegy az (X_1, X_2) egyenesen; és λ_1, λ_2 ugyanannak a síknak a koordinátái az

$$X_1=0, \quad X_2=0$$

síkok képviselte vonalkoordináta-rendszerre vonatkozólag; az alapsíkok koordinátái rendre:

$$(1, 0), (0, 1). \\ \mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 + \mu_3 U_3 = 0 \quad (4)$$

egy oly pontnak az egyenlete, mely rajta van az (U_1, U_2, U_3) síkon; és μ_1, μ_2, μ_3 ugyanakkor a pontnak háromméretű koordinátái az

$$U_1=0, U_2=0, U_3=0$$

pontok képviselte háromszög koordináta-rendszerre vonatkozólag; az alappontok koordinátái rendre:

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

$$\mu_1 U_1 + \mu_2 U_2 + \mu_3 U_3 + \mu_4 U_4 = 0 \quad (5)$$

a tér egy tetszőleges pontjának az egyenlete; és $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ ugyanennek a pontnak négy-méretű koordinátái az

$$U_1=0, U_2=0, U_3=0, U_4=0$$

pontok meghatározta tetraéder-koordináta-rendszerre vonatkozólag; az alappontok koordinátái:

$$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), \\ (0, 0, 0, 1).$$

$$(1, 0), (0, 1). \\ \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 = 0 \quad (4')$$

egy oly síknak az egyenlete, mely átmegy az (X_1, X_2, X_3) ponton; és $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ugyanannak a síknak háromméretű koordinátái az

$$X_1=0, X_2=0, X_3=0$$

síkok képviselte háromél-koordináta-rendszerre vonatkozólag; az alapsíkok koordinátái rendre:

$$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

Ha pedig alakzatunkat egy tetszőleges síkkal metszük, akkor ezen az X_1, X_2, X_3 síkok egy háromszöget határoznak meg, melyre, mint koordináta-háromszögre vonatkozólag $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ annak az egyenesnek koordinátái, melyet a $(4')$ sík a tetszőleges síkból kimetsz.

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0 \quad (5')$$

a tér egy tetszőleges síkjának az egyenlete; és $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ugyanennek a síknak négy-méretű koordinátái az

$$X_1=0, X_2=0, X_3=0, X_4=0$$

síkok meghatározta tetraéder-koordináta-rendszerre vonatkozólag; az alapsíkok koordinátái:

$$(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), \\ (0, 0, 0, 1).$$

Tehát az (x, y) egyenesen levő pontok koordinátái:

$$z_i = \mu_1 x_i + \mu_2 y_i. \quad (6)$$

Az (x, y, z) síkban levő pontok koordinátái:

$$t_i = \mu_1 x_i + \mu_2 y_i + \mu_3 z_i. \quad (7)$$

Ezek után könnyű belátni, hogy a következő egy sorba írt alakzatok egymásnak duáljai:

Pont.

Két ponton átmenő egyenes.

Egyenes.

Egy sík pontjai (pontmező).

A sík egy pontja.

A sík egy pontján átmenő, de a síkban levő egyenesek (sugárcsomó).

Egy ponton átmenő egyenesek (sugárnyaláb).

Egyszeresen végtelen folytonos pontsokaság (görbe vonal).

Pontjai.

Két szomszédos pontján átmenő egyenes (a görbe érintője).

Két szomszédos ponton átmenő sík (érintő sík).

Egy ponton átmenő egyenes (a görbét szelő egyenes).

Egy síkban levő egyszeresen végtelen folytonos pontsokaság (síkgörbe).

Tehát az (u, v) egyenesen átmenő síkok koordinátái:

$$w_i = \lambda_1 u_i + \lambda_2 v_i. \quad (6')$$

Az (u, v, w) ponton átmenő síkok koordinátái:

$$s_i = \lambda_1 u_i + \lambda_2 v_i + \lambda_3 w_i. \quad (7')$$

Sík.

Két sík metszés vonala.

Egyenes.

Egy ponton átmenő síkok (síknyaláb).

A ponton átmenő egy sík.

A ponton átmenő síkban levő, de a ponton átmenő egyenesek (sugárcsomó).

Egy síkban levő egyenesek (sugármező).

Egyszeresen végtelen folytonos síksokaság (lefejthető felület).

Érintő síkok.

Két szomszédos sík metszés vonala (a lefejthető felület alkotója).

Két szomszédos síkban levő pont (a lefejthető felület pontja).

Az érintő síkban levő egyenes (a lefejthető felület érintője).

Egy ponton átmenő egyszeresen végtelen folytonos síksokaság (kúp).

A görbét analitikailag pontkoordinátákban kétegyenletképviselem.

A görbe vonalat analitikailag pontkoordinátákban egy egyenlettel nem képviselhetjük.

Kétszeresen végtelen folytonos pontsokaság (felület, vagy lefejtető felület).

A felületet pontkoordinátákban egy egyenlet képviselem.

A lefejtető felületet pontkoordinátákban egy egyenlet képviselem.

A lefejtető felületet síkkoordinátákban két egyenlet képviselem.

A lefejtető felületet analitikailag síkkoordinátákban egy egyenlettel nem képviselhetjük.

Kétszeresen végtelen folytonos síksokaság (felület, vagy görbe vonal).

A felületet síkkoordinátákban egy egyenlet képviselem.

A görbe vonalat síkkoordinátákban egy egyenlet képviselem.

β) Az egyenesre vonatkozó néhány tétel:

Azt az egyenest, melynek koordinátái

$$\rho p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k \quad (p_{ik} = -p_{ki}) \quad (8)$$

röviden p -nek nevezzük, két egyenes p és p' metszési feltétele:

$$\sum \sum p_{ik} p'_{lm} = 0,$$

vagy pedig, mivel

$$p_{lm} = \sigma q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k, \quad (8')$$

azért a metszési feltétel más alakja

$$\sum \sum p_{ik} q'_{ik} = 0. \quad (9')$$

A

$$\sum \sum a_{ik} p_{ik} = 0 \quad (10)$$

$$(a_{ik} = -a_{ki}, \quad a_{ii} = 0)$$

egyenlet képviselete alakzatot lineáris komplexusnak nevezzük; ezt az egyenletet különben még

$$\sum \sum a_{ik} q_{lm} = 0 \quad (10')$$

alakba is írhatjuk. Ha a (10)-ben y -t, a (10')-ben v -t tekintjük konstansnak, akkor az egy sík-, emez pedig egy pont egyenletét képviselem, tehát a lineáris komplexusnak egy ponton át-

menő egyenesei egy síkban vannak, az egy síkban levők pedig egy ponton mennek keresztül.

Ha pedig a (10) egyenletet y mint változó koordináta szerint

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0$$

alakba rendezzük, akkor mivel az u -k x függvényei, azért a lineáris komplexus a tér minden pontjához mellé rendel egy síkot, melynek koordinátáit a következő egyenletek határozzák meg:

$$\left. \begin{aligned} \rho u_1 &= +a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \rho u_2 &= a_{21}x_1 + +a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ \rho u_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + +a_{34}x_4, \\ \rho u_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Minthogy a (10) $x=y$ mellett azonosan zérus; azért a lineáris komplexus minden ponthoz egy oly síkot rendel, mely rajta átmegy. A (10') szerint ennek a tételnek a duálja is érvényes. A pontoknak és síkoknak egymásra való vonatkozásának ezt a módját null-rendszernek nevezzük.

Ha egy pont egyenes vonalat ír le, akkor a mellé rendelt síkok síkcsomót alkotnak, mely a pontsorra perspektív hely-helyzetű, az egyenest és a síkcsomó tengelyét a komplexusra nézve konjugált polárisoknak nevezzük. Mivel a komplexus egy ponthoz tartozó egyenesei benne vannak a pont mellé rendelt síkban, azért két konjugált polárison átmenő összes egyenes a komplexushoz tartozik. Ebből következik, hogy ha koordináta-tetraéderünk két élül két egymásra nézve konjugált polárist választunk, pl. az $x_1=0$, $x_2=0$ és $x_3=0$, $x_4=0$ éleiül, akkor a komplexus egyenlete

$$a_{12}p_{12} + a_{34}p_{34} = 0$$

alakban jelenik meg; kimutatása hasonló módszerrel történik, mint a felületeknél a polártetraéderre, mint koordináta-tetraéderre vonatkozó analitikai alaknak a megállapítása.

3. A szimbolikus jelölések értelmezése:

Az x , y , z pontok meghatározta sík koordinátáit, miként ismeretes

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

matrix harmadrendű aldeterminansai képezik; szimbolikusan legyen

$$\mu_i = (xyz)_i,$$

tehát

$$\sum u_i t_i = (xyzt).$$

Legyen továbbá

$$\sum_{i=1}^4 A_i x_i = A_x.$$

Akkor a másodosztályú felület egyenletét szimbolikusan következőképen jelöljük:

$$F = \Sigma \Sigma A_{ik} u_i u_k = A_u^2 = B_u^2 = C_u^2 = \dots,$$

hol

$$A_i A_k = B_i B_k = C_i C_k = A_{ik}.$$

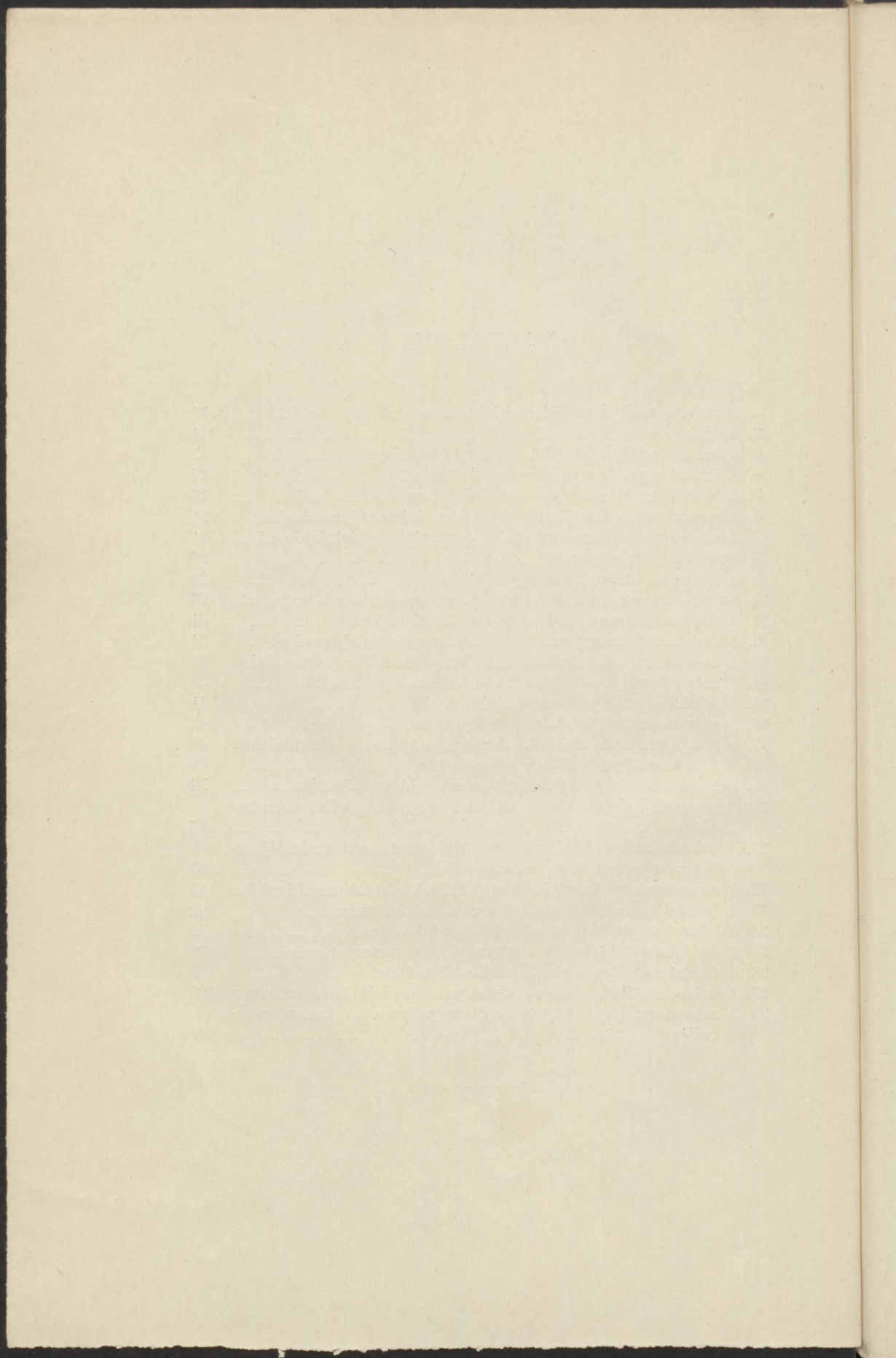
$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u_i} = A_i A_u = B_i B_u = C_i C_u = \dots,$$

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial F}{\partial u_i} v_i = A_v A_u = B_v B_u = C_v C_u.$$

Ezek a jelölések különben az algebrai alakok tanából már nagyon ismeretesek s a függvények invariáns karakterének eldöntésénél játszanak különösen nagy szerepet.

TARTALOM.

1. A másodosztályú felületek értelmezése	13
2. Az érintő kúp	14
3. A másodosztályú felületek polártulajdonságai	15
4. A felület egyenlete pontkoordinátákban	17
5. A felület egyenlete vonalkoordinátákban	18
6. A másodosztályú felületek egyenletének kanonikus alakja	21
7. A végtelen távolban levő síkok és pontok polártulajdonságai	24
8. Az érintő kúp egyenlete	27
9. A sík metszésvonalának egyenlete	28
10. Az egyenesnek a felülettel való metszéspontjainak egyenlete	29
11. Elenyésző determinansú másodosztályú felületek	31
12. A degenerált másodosztályú felületek polártulajdonságai	34
13. A degenerált másodosztályú felületek analitikai formulázása	36
14. A másodosztályú felületeket meghatározó feltételekről	39
15. A felületek osztályozása alkotóik szerint	41
16. A másodosztályú felületek osztályozása	42
17. A másodosztályú felületek viszonya a képzetes gömbkörhöz	46
18. A másodosztályú felületek körmetszetei	48
19. Két másodosztályú felület egymásra való vonatkozása	52
20. Degenerált másodosztályú felületek egymásra való vonatkozása	78
21. A másodosztályú felületek egyenletének transzformációja a képzetes gömbkörre nézve	81
22. A másodosztályú forgási felületek kriteriumainak megállapítása	89
23. A forgási felületeket meghatározó feltételek száma	92
24. A képzetes gömbkörre vonatkozó felületsorok	92
25. A felületsorok tagjainak egymással való metszésvonalai	99
26. A felületcsomók tagjainak lefejthető felületei	103
27. A másodosztályú felületek viszonya a lineáris komplexushoz	106
28. A másodosztályú felületeknek önmagukba való transzformációja	109



1. A másodosztályú felületek értelmezése.

Másodosztályú felületeknek nevezzük azokat a felületeket, melyekhez a tér tetszőleges egyenesén keresztül általában két érintő síkot lehet fektetni; egyenletük tehát

$$A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3 + A_{33}u_3^2 + 2A_{14}u_1u_4 + 2A_{24}u_2u_4 + 2A_{34}u_3u_4 + A_{44}u_4^2 = 0,$$

vagy röviden

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 A_{ik} u_i u_k = 0 \quad (1)$$

($A_{ik} = A_{ki}$)

analitikai alakban jelenik meg, minthogy az evvel képviselt felülethez a tér bármely egyenesén keresztül általában csakugyan két érintősík tartozik. Legyen ugyanis v és w a tér tetszőleges két síkjá, akkor metszéspontjukon átmenő összes síkokat

$$\rho u_i = v_i + \mu w_i$$

($i=1, 2, 3, 4$)

koordináták jellemzik; ezek közül a síkok közül csakis azok lehetnek a fentebb értelmezett felületnek érintő síkjai, melyek eleget tesznek

$$F_{vv} + 2\mu F_{vw} + \mu^2 F_{ww} = 0 \quad (2)$$

egyenletnek, hol

$$F_{vv} \equiv \sum \sum A_{ik} u_i v_k,$$

$$F_{ww} \equiv \sum \sum A_{ik} w_i w_k,$$

$$F_{vw} \equiv \frac{\partial F_{vv}}{\partial v_1} w_1 + \frac{\partial F_{vv}}{\partial v_2} w_2 + \frac{\partial F_{vv}}{\partial v_3} w_3 + \frac{\partial F_{vv}}{\partial v_4} w_4$$

$$= \frac{\partial F_{ww}}{\partial w_1} v_1 + \frac{\partial F_{ww}}{\partial w_2} v_2 + \frac{\partial F_{ww}}{\partial w_3} v_3 + \frac{\partial F_{ww}}{\partial w_4} v_4.$$

A (2) egyenlet μ számára általában két értéket határoz meg, tehát a felülethez a (v, w) egyenesen keresztül általában két síkot fektethetünk.

Ha pedig felületünk egyenletét szimbolummal képviseljük

$$\Sigma \Sigma A_{ik} u_i u_k = A_u^2 = B_u^2 = \dots,$$

akkor

$$F_{vv} = A_v^2 = B_v^2 = \dots,$$

$$F_{ww} = A_w^2 = B_w^2 = \dots,$$

$$F_{vw} = A_v A_w = B_v B_w = \dots,$$

2. Az érintő kúp.

Három v , w és s sík találkozási pontján átmenő síkok koordinátáit

$$\rho u_i = \lambda_1 v_i + \lambda_2 w_i + \lambda_3 s_i \quad (3)$$

kifejezések képviselik; ha ezeket az (1) egyenletbe helyettesítjük, akkor

$$F_{vv} \lambda_1^2 + 2F_{vw} \lambda_1 \lambda_2 + F_{ww} \lambda_2^2 + 2F_{vs} \lambda_1 \lambda_3 + 2F_{ws} \lambda_2 \lambda_3 + F_{ss} \lambda_3^2 = 0 \quad (4)$$

egyenlethez jutunk, melyet csakis a (v, w, s) pontból a felülethez vont érintő síkokat jellemző λ értékek elégítenek ki.

Ha r sík a v , w , s síkokkal tetraédert alkot, akkor, miként ismeretes, λ_1 , λ_2 , λ_3 az r síkban (u, r) egyenesnek arra a háromszögre vonatkoztatott vonal-koordinátái, melyet (v, r) , (w, r) , (s, r) egyenesek alkotnak; a (4) tehát λ változókra nézve oly kúpszeletnek az egyenlete, melyet az r sík a (v, w, s) pontból a felülethez vont érintő kúpból kimetsz.

A másodosztályú felülethez tehát a tér bármely pontjából vont érintő kúp másodrendű kúp.

Különösen érdekesek a tér azon pontjai, melyekre nézve

$$\begin{vmatrix} F_{vv} & F_{vw} & F_{vs} \\ F_{vw} & F_{ww} & F_{ws} \\ F_{sv} & F_{sw} & F_{ss} \end{vmatrix} = 0;$$

mert ezekre a pontokra nézve a (4) egyenlet képviselte kúpszelet két ponttá degenerál, ennél fogva az érintő kúp két síkcsomóvá

válí, ez az eset általában csak akkor következhetik be, ha a síkcsomók tengelyei szintén a felületen vannak. Ugyanis az érintési pontoknak össze kell esniök a síkcsomók tengelyeivel; mert ha nem esnének össze, hanem más görbe vonalat írnának le, akkor az érintési kúp sem degenerálhatna két síkcsomóba; már pedig, ha az érintési pontok mértani helye a síkcsomó két tengelye, akkor azoknak a felülettel össze kell esniök; s találkozási pontjuk a két síkcsomó közös síkjának érintési pontja. *Vannak tehát a másodosztályú felületek között olyanok is, melyeken egymást metsző vonalak fordulnak elő.*

3. A másodosztályú felületek polártulajdonságai.

Az 1. §. szerint a (v, w) egyenesen átmenő érintő síkok meghatározására szolgáló egyenlet:

$$F_{vv} + 2\mu F_{vw} + \mu^2 F_{ww} = 0.$$

Jelöljük ennek az egyenletnek gyökeit μ_1 és μ_2 -vel, tehát

$$v + \mu_1 w \quad \text{és} \quad v + \mu_2 w$$

a (v, w) vonalon átmenő érintő síkok, ezeknek a v és w síkokkal való kettős viszonya:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = a.$$

Különös fontosságú az az eset, midőn

$$a = -1;$$

akkor a síkok *harmonikus fekvésűek*; az ilyen v, w síkokat *a felületre nézve konjugált síkoknak* nevezzük; koordinátaikat tehát

$$F_{vw} = 0 \tag{5}$$

egyenlet kapcsolja össze.

Ha az (5) egyenletben pl. v -t változónak tekintjük, akkor az egy pont egyenletévé lesz; ezt a pontot a w sík pólusának, a síkot pedig a pont pólársíkjának nevezzük. Tehát az egy s ugyanazon síkhoz tartozó, valamely másodosztályú felületre nézve konjugált síkok egy pontban, a pólusban találkoznak. v és w fel-

cserélhetősége következtében, ha v átmegy w pólusán, akkor w is átmegy v pólusán.

Az (5) szerint a w sík pólusának koordinátái:

$$\rho z_i = A_{i1}w_1 + A_{i2}w_2 + A_{i3}w_3 + A_{i4}w_4; \quad (6)$$

$(i=1, 2, 3, 4)$

v sík pólusának koordinátái pedig:

$$\rho y_i = A_{i1}v_1 + A_{i2}v_2 + A_{i3}v_3 + A_{i4}v_4,$$

következőleg:

$$\rho(y_i + \lambda z_i) = A_{i1}(v_1 + \lambda w_1) + A_{i2}(v_2 + \lambda w_2) + A_{i3}(v_3 + \lambda w_3) + A_{i4}(v_4 + \lambda w_4).$$

Tehát az egy s ugyanazon egyenesen átmenő síkok pólusai szintén egy egyenes vonalat írnak le; ezeket az egyeneseket a felületre nézve konjugált polárisoknak nevezzük.

Ha v érintő sík és w konjugáltja, azaz:

$$F_{vw} = 0, \quad (5')$$

akkor a μ -k meghatározására szolgáló egyenlet értelmében μ -nek mind a két értéke zérus, tehát a (v, w) vonalon átmenő másik érintő sík szintén összeesik a v síkkal; az ilyen (v, w) vonalakat a felület érintőinek nevezzük. Az (5') egyenlet tehát, ha abban w -t változónak tekintjük, a v síkban levő érintő vonalak találkozási pontjának egyenlete; ez a pont pedig nem lehet más, mint v sík érintési pontja; másrésről ez a pont v síknak pólusa, tehát az érintő síknak a felületre vonatkoztatott pólusa benne van az érintő síkban és összeesik az érintési ponttal.

A felület valamely érintőjén átmenő síkok pólusai egy egyenes vonalat írnak le, mely átmegy az érintési ponton; mint-hogy az érintőn átmenő érintő sík pólusa benne van az érintő síkban s összeesik az érintési ponttal, tehát valamely érintőnek polárisa az érintővel az érintési pontban találkozik. Könnyű azonban azt is belátni, hogy az érintő polárisa szintén érintő; mert ha nem volna az, akkor a rajta átmenő síkok egyikének pólusa sem eshetik össze magával a síkkal, a miből aztán az következne, hogy ennek az egyenesnek a polárisa nem azonos az érintővel; ami ellentmondást tartalmaz; mert azon kölcsönös és egyértelmű vonatkozásnál fogva, mely a pólus s a po-

lársík között van: ha az a egyenesen átmenő síkok pólusai b egyenesben vannak, akkor b egyenesen átmenő síkok pólusai a egyenest írják le.

4. A felület egyenlete pontkoordinátákban.

Az előbbi fejezet (6) egyenleténél fogva az u síkhoz tartozó pólus koordinátái:

$$\rho x_i = A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + A_{i3}u_3 + A_{i4}u_4. \quad (6')$$

Ennek az egyenlet-rendszernek a determinánsát, melyet egyszerűsített másodosztályú felület determinánsának nevezünk, jelöljük egyszer s mindenkorra α -val, az A_{ik} elemhez tartozó al-determinánsát pedig α_{ik} -val, tehát

$$\alpha = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix};$$

mivel ez a determináns szimmetrikus, azért

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki};$$

ezenkívül ismeretesek még a következő relációk:

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \alpha^3; \quad \text{I.}$$

ha α_{ik} al-determinánsát α_{ik} -val jelöljük, akkor

$$\alpha_{ik} = \alpha^2 A_{ik}, \quad \text{II.}$$

$$\alpha_{hi} \alpha_{lk} - \alpha_{hk} \alpha_{li} = \alpha (A_{hi} A_{lk} - A_{kk} A_{li}) \quad \text{III.}$$

$$\alpha_{ii} \alpha_{kk} - \alpha_{ik}^2 = \alpha (A_{hh} A_{kk} - A_{hk}^2) \quad \text{IV.}$$

$$\alpha_{ii} \alpha_{kl} - \alpha_{ik} \alpha_{il} = \alpha (A_{hh} A_{kl} - A_{hl} A_{hk}) \quad \text{V.}$$

A (6') egyenletrendszer u szerint való megoldása, ha $\alpha \neq 0$,

$$\sigma = \alpha : \rho$$

jelölés alkalmazásával

$$\sigma u_i = a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + a_{3i} x_3 + a_{4i} x_4 \quad (7)$$

($i=1, 2, 3, 4$)

relációkhoz vezet; kimondhatjuk tehát a következő tételt:

Azokra a másodosztályú felületekre nézve, melyeknek determinánsuk nem zérus, minden ponthoz, mint pólushoz, tartozik egy sík, mint polársík s viszont.

Ha az u síkban pólusa is benne van, akkor teljesülni kell az

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 \quad (8)$$

relációnak; azok a pontok tehát, melyek polársíkjukkal összesnek rajta vannak a

$$\sum \sum a_{ik} x_i x_k = 0 \quad (8')$$

felületen, mely az előbbi fejtegetések alapján nem más, mint a másodosztályú felület egyenlete pontkoordinátákban, tehát a másodosztályú felület egyszersmind másodrendű is.

A (8) egyenletet különben determinans alakba is írhatjuk és pedig következőképen:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (8'')$$

Ezt az egyenletet különben úgy is megkapjuk, ha a (7) és (8) alatt levő egyenletekből σ , u_1 , u_2 , u_3 és u_4 -t kiküszöböljük.

5. A felület egyenlete vonal-koordinátákban.

Legyen az (x, y) egyenes a felületnek érintője és az érintési ponthoz tartozó polársík u , akkor, ha az érintési pont koordinátáit a

$$zx_i + \lambda y_i$$

($i=1, 2, 3, 4$)

kifejezések jelölik, és megfontoljuk, hogy az érintősík u összesik az érintővel, a következő egyidejűleg érvényes egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + A_{i3}u_3 + A_{i4}u_4 = zx_i + \lambda y_i;$$

$$(i=1, 2, 3, 4)$$

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0,$$

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 + y_4 u_4 = 0,$$

melyből, ha az $u_1, u_2, u_3, u_4, z, \lambda$, mennyiségeket kiküszöböljük

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & x_1 & y_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & x_2 & y_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & x_3 & y_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & x_4 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

egyenlethez jutunk, melyet x és y -nak minden oly értékrendszere kielégít, melyek a felület valamely érintőjéhez tartoznak.

Ha az (x, y) egyenes koordinátáit p_{ik} -vel, vagy q_{hl} -el jelöljük, akkor

$$p_{ik} = \rho q_{hl} = x_i y_k - y_i x_k,$$

hol ρ arányossági tényező; ennél fogva a (9) egyenletet még a következő alakba is írhatjuk:

$$\sum_{i,k} \sum_{h,l} (A_{hi} A_{lk} - A_{hk} A_{li}) q_{hl} q_{ik} = 0; \quad (9')$$

ez az egyenlet a másodosztályú felület egyenlete vonalkoordinátákban. Azonban a következő eljárás szintén a vonalkoordinátákban kifejezett felületegyenlethez vezet. Ha (u, v) egyenes a felület érintője és a rajta átmenő érintő sík koordinátái:

$$xu_i + \lambda v_i,$$

$$(i=1, 2, 3, 4)$$

akkor, ha x az érintési pont, érvényesek a következő egyenletek:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 = xu_i + \lambda v_i;$$

$$(i=1, 2, 3, 4)$$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0,$$

honnan $x_1, x_2, x_3, x_4, z, \lambda$ kiküszöbölésével

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}u_1v_1 \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}u_2v_2 \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}u_3v_3 \\ a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}u_4v_4 \\ u_1 u_2 u_3 u_4 0 0 \\ v_1 v_2 v_3 v_4 0 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

egyenlethez jutunk, melynek más alakja:

$$\sum_{i,k} \sum_{h,l} (a_{hi}a_{lk} - a_{hk}a_{li}) p_{hl}p_{ik} = 0. \quad (10')$$

Lássuk ezek után a vonalkoordinátákban kifejezett egyenlet szimbolikus alakját. Legyen a felület egyenlete

$$F = \Sigma \Sigma A_{ik} u_i u_k = A_u^2 = B_v^2,$$

tehát u és v síkok pólusainak koordinátái rendre:

$$\begin{aligned} \rho x_i &= A_i A_u = B_i B_v, \\ \rho y_i &= A_i A_v = B_i B_u; \end{aligned}$$

ennélfogva (x, y) egyenes vonalkoordinátái:

$$\mu p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k = A_i B_k (A_u B_v - B_u A_v);$$

p vonal konjugáltjának koordinátái pedig:

$$\nu q'_{ik} = u_i v_k - v_i u_k;$$

p egyenes érintő, ha konjugáltja metszi, azaz: ha teljesül

$$\Sigma \Sigma p_{ik} q'_{ik} = 0$$

reláció, melybe, ha p és q értékeit behelyettesítjük

$$(A_u B_v - B_u A_v) \Sigma \Sigma (u_i v_k - v_i u_k) A_i B_k = 0$$

egyenlethez jutunk.

Mint hogy A és B ugyanarra a quadratikusra vonatkoznak, tehát szabad őket egymással felcserélni, azaz: legutóbbi egyenletünknek a következő alakot is adhatjuk:

$$(B_u A_v - A_u B_v) \Sigma \Sigma (u_i v_k - v_i u_k) A_k B_i = 0.$$

Ha a két legutolsó egyenletet összeadjuk s azután az összeget 2-vel osztjuk

$$\frac{1}{2} (A_u B_v - B_u A_v) \Sigma \Sigma (u_i v_k - v_i u_k) (A_i B_k - B_i A_k) = 0$$

egyenlethez jutunk, mely a két legutóbbi akármelyikével azonos. Minthogy

$$\begin{aligned} A_u B_v - B_u A_v &= \Sigma \Sigma (u_i v_k - v_i u_k) (A_i B_k - B_i A_k) \\ &= \rho \Sigma \Sigma (x_i y_h - y_i x_h) (A_i B_k - B_i A_k) \\ &= \rho (ABxy), \end{aligned}$$

azért $\frac{1}{2} \rho^2$ arányossági tényezőtől eltekintve, a *vonalkoordinátákban kifejezett egyenlet szimbolikus alakja*:

$$(ABxy)^2 = 0. \quad (11)$$

Ha pedig a másodosztályú felület pontkoordinátákban kifejezett egyenletéből indulunk ki és

$$\Sigma \Sigma a_{ik} x_i x_k = a_x^2 = \beta_x^2$$

szimbolikus jelöléseket használjuk, akkor

$$\begin{aligned} \sigma u_i &= a_i a_x = \beta_i \beta_x, \\ \sigma v_i &= a_i a_y = \beta_i \beta_y; \\ \mu q_{ik} &= u_i u_k - v_i v_k, \\ \nu p'_{ik} &= a_i \beta_k (a_x \beta_y - a_y \beta_x). \end{aligned}$$

A metszés föltétele

$$\Sigma \Sigma p'_{ik} q_{ik} = 0.$$

Honnan az előbbihez tökéletesen azonos eljárás után találjuk, hogy a másodosztályú felület *vonalkoordinátákban kifejezett egyenletének második szimbolikus alakja*:

$$(a\beta uv)^2 = 0.$$

6. A másodosztályú felületek egyenletének kanonikus alakja.

A másodosztályú felületek egyenlete igen egyszerű alakban jelenik meg, ha koordináta-tetraéderül egy, úgynevezett *polár-tetraédert* választunk. *Polártetraédert* oly négy sík alkot, melyek bármelyikének pólusa összeesik a tetraéder szemközt levő szög-pontjával. Lássuk előbb, hány polártetraédere van egy másod-

osztályú felületnek. A tér háromszorosan végtelen sok síkja közül egyet, α -t választunk tetraéderünk egyik síkjául; pólusát pedig egyik szögpontjául A ; ezen a szögpontra átmenő kétszeresen végtelen sok sík egyikét választunk tetraéderünk másik síkjául β , pólusát pedig, mely az α síkban van, másik szögpontjául B ; az (A, B) egyenesen átmenő egyszeresen végtelen sok sík egyikét választunk tetraéderünk harmadik síkjául γ , pólusát pedig, mely szintén benne van az α síkban harmadik szögpontjául C ; az (α, β, γ) pont D lesz a tetraéder negyedik szögpontja; polársíkja csakugyan összeesik az (A, B, C) síkkal δ .

Tehát a másodosztályú felületre nézve hatszorosan végtelen sok polártetraéder létezik.

Határozzuk meg most a másodosztályú felület egyenletét abban az esetben, midőn egyik polártetraéderét választjuk koordinátarendszerül.

Ha u és v síkok a polártetraéder síkjai, akkor mivel a felületre nézve konjugáltak, tehát

$$F_{uv}=0;$$

mivel pedig u és v -nek, mint koordinátarendszerünk síkjainak koordinátái rendre:

$$\begin{aligned} &1, 0, 0, 0; \\ &0, 1, 0, 0, \end{aligned}$$

azért F_{uv} null csak úgy lehet, ha

$$A_{12}=0.$$

Hasonlóképen találjuk még, hogy

$$A_{13}=A_{14}=A_{23}=A_{24}=A_{34}=0.$$

A másodosztályú felület egyenlete tehát vonatkoztatva egyik polártetraéderére, mint koordináta-tetraéderre, a következő alakban jelenik meg:

$$\mu_1 u_1^2 + \mu_2 u_2^2 + \mu_3 u_3^2 + \mu_4 u_4^2 = 0. \quad (12)$$

Ha pontkoordinátákra térünk át, akkor a felület egyenlete

$$\frac{x_1^2}{\mu_1} + \frac{x_2^2}{\mu_2} + \frac{x_3^2}{\mu_3} + \frac{x_4^2}{\mu_4} = 0, \quad (12')$$

ha pedig vonalkoordinátákra, akkor

$$\mu_1 \mu_2 q_{12}^2 + \mu_1 \mu_3 q_{13}^2 + \mu_1 \mu_4 q_{14}^2 + \mu_2 \mu_3 q_{23}^2 + \mu_2 \mu_4 q_{24}^2 + \mu_3 \mu_4 q_{34}^2 = 0 \quad (12'')$$

alakban jelenik meg; a felület *egyenletének ezen alakjait kanonikus alakoknak* nevezzük.

Ha a másodosztályú felületeknek reális alkotói vannak, akkor egyenletüket meg sokkal egyszerűbb alakba transzformálhatjuk.

Láttuk, hogy a felület valamely alkotóján átmenő síkok valamennyien érintő síkok és az érintési pontok — illetőleg a megfelelő pólusok — mértani helye összeesik a síkcsomó tengelyével, azaz: *a felület valamely alkotója önmagának polárisa*. Ezenkívül kimutattuk, hogy a felület valamely pontján átmenő két alkotóra helyezett sík a felületet az alkotók találkozási pontjában érinti. Válaszszunk két ilyen érintéspontot, más szóval a felület két tetszőleges pontját, koordináta-tetraéderünk szögpontjaiul (A, B); kimutatjuk, hogy az A ponton átmenő két alkotó a B ponton átmenőket páronként metszi. Jelöljük ugyanis az A ponton átmenő alkotókat b és c -vel; mivel a másodosztályú felület egyúttal másodrendű is, azért az a sík, mely a felületről egy egyenest kimetsz, még egy másikat is kimetsz, tehát a b egyenesen és B ponton átmenő sík a felületről még egy, a B ponton átmenő alkotót is kimetsz, mely b egyenessel egy (C) pontban — a sík érintési pontjában — találkozik. Hasonlóképen találjuk, hogy a B ponton átmenő másik alkotó a c egyenessel a c -én és B -én átmenő sík érintési pontjában (D) találkozik. Ha a C és D találkozási pontokat koordináta-tetraéderünk másik két szögpontjául választjuk, akkor, mivel ennek a tetraédernek az a nevezetes tulajdonsága van: *hogy a szögpontjain átmenő négy alkotó a tetraéder élét képezi és egy nem egysíkú négyszöget alkot, a tetraéder másik két éle pedig egymásnak konjugált polárisa*; mert az egyik élben levő két szögpont polársíkjai (a jelen esetben a szögpontokon átmenő érintő síkok) átmennek a tetraéder szemközi fekvő élén, azért, ha a négy szögpont egyenleteit

$$u_1=0, \quad u_2=0, \quad u_3=0, \quad u_4=0$$

egyenletek képviselik, akkor a felület egyenlete, miként könnyű belátni:

$$\lambda u_1 u_4 + \mu u_2 u_3 = 0, \quad (13)$$

hol

$$\begin{aligned} u_1=0, \quad u_2=0; \quad u_1=0, \quad u_3=0; \\ u_4=0, \quad u_2=0; \quad u_4=0, \quad u_3=0 \end{aligned}$$

a négy alkotó egyenletei,

$$u_1=0, \quad u_4=0; \quad u_2=0, \quad u_3=0$$

pedig az egymásra nézve konjugált polárisok egyenletei; mert pl. az $(1, 0, 0, 0)$ sík pólusa $u_4=0$, a $(0, 0, 0, 1)$ sík pólusa pedig $u_1=0$, tehát $u_1=0$, $u_4=0$ csakugyan az $u_2=0$, $u_3=0$ egyenes polárisa; mert ez utóbbin átmenő két sík pólusa benne van az előbbi egyenesben.

7. A végtelen távolban levő síkok és pontok polártulajdonságai.

Mint láttuk, a másodosztályú felületre nézve a pólus és polársík koordinátáit a következő relációk kötik össze:

$$\begin{aligned} \rho x_i &= A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 + A_{i4} u_4; \\ \sigma u_i &= a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4. \end{aligned}$$

($i=1, 2, 3, 4$)

Azt is tudjuk, hogy u sík konjugáltja v harmonikus párja u -nak az (u, v) egyenesen átmenő érintő síkokra nézve. Hasonlóképpen könnyű azt is kimutatni, hogy az u sík pólusán átmenő minden egyenes oly y pontban metszi az u síkot, mely harmonikus párja x -nek az (x, y) egyenesnek a felülettel való metszés pontjaira nézve. Legyen ugyanis a felület egyenlete pontkoordinátákban

$$f_{zz} = \sum \alpha_{ik} z_i z_k = 0,$$

akkor az (x, y) egyenesnek a felülettel való metszéspontjait jellemző számok meghatározására

$$f_{xy} + 2\lambda f_{xy} + \lambda^2 f_{yy} = 0$$

egyenletünk van; mivel a föltételnél fogva y pont benne van u síkban, tehát

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0,$$

azért

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \sum_{i=1}^4 (\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 + \alpha_{i4} x_4) y_i \\ &= \sigma \sum_{i=1}^4 u_i y_i = 0, \end{aligned}$$

ennélfogva x, y és az (x, y) egyenesnek a felülettel való metszéspontjai egymásra nézve csakugyan harmonikus pontpárok.

Válaszszuk koordináta-rendszerünk $x_4=0$ síkjául a végtelen távolban fekvő síkot, ekkor a végtelenben levő sík koordinátái $(0, 0, 0, 1)$, ennek a felületre vonatkoztatott pólusát

$$\begin{aligned} \rho x_i &= A_{i4} \\ (i=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (14)$$

koordináták jellemzik, ezt a pontot a másodosztályú felület centrumának nevezzük.

Egy egészen tetszőleges végtelen távolban levő pontnak koordinátái $(x_1, x_2, x_3, 0)$, ennek a felületre vonatkoztatott polársíkjának koordinátái:

$$\begin{aligned} \sigma u_i &= \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3, \\ (i=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (15)$$

ezeket a síkokat a *felület diametrál-síkjainak* nevezzük; a pólus és polársík között levő viszonyból, sőt a (14) és (15) alatt levő egyenletekből direkt is következik, hogy a *diametrál-síkok átmennek a centrumon*.

A pólus és polársík imént kimutatott egymáshoz való viszonyából következik, hogy a *diametrál-sík felezi a pólusán átmenő húrokat*; ezek közül a húrok közül azt, mely a centrumon is átmegy, *átmérőnek* nevezzük.

Ha a most bemutatott koordináta-tetraéder még polár-tetraéder is, akkor ennek az a nevezetes tulajdonsága van, hogy egyik szögpontja a centrumban van és az itt összefutó három tetraéder-él bármelyike polárisa a másik kettő végtelen távolban levő pontjait összekötő egyenesnek. A végtelen távol fekvő síkkal bíró polár-tetraédernek a centrumban összefutó éleit egymásra nézve *konjugált átmérőknek* nevezzük; ezen kívül akármelyik átmérőt a másik kettő síkjára nézve konjugáltaknak is szokás nevezni;

tehát a diametrálsík pólusa összeesik konjugált átmérőjének végtelen távol fekvő pontjával.

Ha az egymásra nézve konjugált átmérőket, mint ferdeszögű koordináta-rendszer tengelyeit fogjuk fel, akkor ebben a koordináta-rendszerben a felület egyenlete, miként az előző fejezetben kifejtettük,

$$\mu_1 u^2 + \mu_2 v^2 + \mu_3 w^3 + \mu_4 = 0$$

alakban jelenik meg.

Azonban a konjugált átmérők között van három egymásra merőleges, s ezeket szokták koordináta-rendszerül választani. Az egymásra merőleges konjugált átmérők létezését következőképpen bizonyítjuk be:

Ha $x_1, x_2, x_3, 0$ valamely végtelen távol fekvő pont koordinátái, akkor x_1, x_2, x_3 arányosak a végtelen távol fekvő pont felé mutató egyenes iránykosinusaival a_1, a_2, a_3 -al, a polársíknak u_1, u_2, u_3 koordinátái pedig — u_4 -et most egységnek tekintjük — a sík normálisának iránykosinusaival, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -al; következőleg a pólus és polársík koordinátáit összekötő relációk a jelen esetben

$$\begin{aligned}\sigma\beta_1 &= a_{11} a_1 + a_{12} a_2 + a_{13} a_3, \\ \sigma\beta_2 &= a_{21} a_1 + a_{22} a_2 + a_{23} a_3, \\ \sigma\beta_3 &= a_{31} a_1 + a_{32} a_2 + a_{33} a_3\end{aligned}$$

alakban jelennek meg; a negyedik egyenletet elhagytuk, mint-hogy az úgy is ezeknek a következménye. Ha az a_1, a_2, a_3 irányú egyenes merőleges konjugált diametrál-síkjára, akkor

$$a_1, a_2, a_3 = \beta_1, \beta_2, \beta_3;$$

tehát

$$\begin{aligned}(a_{11} - \sigma) a_1 + a_{12} a_2 + a_{13} a_3 &= 0, \\ a_{21} a_1 + (a_{22} - \sigma) a_2 + a_{23} a_3 &= 0, \\ a_{31} a_1 + a_{32} a_2 + (a_{33} - \sigma) a_3 &= 0\end{aligned}$$

egyenlet-rendszer emelkedik érvényre, melyből a kiküszöbölésével

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \sigma & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

egyenlethez jutunk, mely σ számára három *valós** értéket határoz meg, jelöljük annak, hogy *három egymásra merőleges konjugált átmérő lehetséges; ezeket az átmérőket a felület főtengelyeinek nevezzük.*

A főtengelyekre vonatkoztatott transzformációt mellőzöm, minthogy később más úton is eljutunk a felületek egyenleteinek kanonikus alakjaihoz.

8. Az érintő kúp egyenlete.

Láttuk, hogy a másodosztályú felület vonalkoordinátákban kifejezett egyenletének szimbolikus alakja:

$$(ABxy)^2=0,$$

ha ebben az egyenletben y -t konstansnak tekintjük, pl. legyen

$$y_i=a_i,$$

akkor

$$(ABxa)^2=0$$

egyenletnek eleget tesznek mindazoknak a pontoknak a koordinátái, melyek rajta vannak az a pontból a felülethez vont érintőkön, tehát ez az egyenlet *nem más, mint az a pontból a felülethez vont érintő kúp egyenlete.*

Kifejtett alakban: a pontból a felülethez vont érintő kúp egyenlete:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & a_1 & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & a_2 & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & a_3 & x_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & a_4 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Az érintő kúp tehát, miként a 2. §-ban kifejtettük, csakugyan másodrendű kúp.

* A gyökök valós voltát először LAGRANGE, n -sorú determinánsokra pedig először CAUCHY mutatta ki.

9. A sík metszésvonalának egyenlete.

A másodosztályú felület vonal-koordinátákban kifejezett egyenletének második szimbóluma:

$$(\alpha\beta uv)^2=0,$$

ha ebben az egyenletben v -t konstansnak tekintjük, pl. legyen

$$v_i=m_i,$$

akkor

$$(\alpha\beta um)^2=0$$

egyenletnek eleget tesznek mindazoknak a síkoknak a koordinátái, melyek átmennek azokon az egyeneseken, melyek a felületet m síkban érintik, *tehát ez az egyenlet nem más, mint az m síknak a felülettel való metszésvonalának egyenlete.*

Kifejtett alakban: m síknak a felülettel való metszésvonalának egyenlete:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & u_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & u_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

A metszésvonal tehát másodosztályú görbe, azaz: kúpszelet. Pl. a végteleni távol levő $(0, 0, 0, 1)$ síknak a felülettel való metszésvonalának, azaz: a felület végtelen távol levő kúpszeletének egyenlete

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (18')$$

Kifejtett alakban

$$(a_{22} a_{33} - a_{23}^2) u_1^2 + 2(a_{33} a_{21} - a_{31} a_{23}) u_1 u_2 + (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) u_2^2 + 2(a_{22} a_{31} - a_{21} a_{32}) u_1 u_3 + 2(a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12}) u_2 u_3 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) u_3^2 = 0,$$

vagy

$$\begin{aligned}
 (A_{11} A_{44} - A_{14}^2) u_1^2 + 2 (A_{44} A_{12} - A_{14} A_{42}) u_1 u_2 + (A_{22} A_{44} - A_{24}^2) u_2^2 \\
 + 2 (A_{44} A_{13} - A_{14} A_{43}) u_1 u_3 + 2 (A_{44} A_{23} - A_{24} A_{43}) u_2 u_3 + \\
 + (A_{33} A_{44} - A_{34}^2) u_3^2 = 0.
 \end{aligned} \quad (18'')$$

Ennek a kúpszeletnek a determinánsa:

$$\begin{vmatrix}
 A_{11} A_{44} - A_{14}^2 & A_{12} A_{44} - A_{14} A_{42} & A_{13} A_{44} - A_{14} A_{43} \\
 A_{21} A_{44} - A_{14} A_{42} & A_{22} A_{44} - A_{24}^2 & A_{23} A_{44} - A_{24} A_{43} \\
 A_{31} A_{44} - A_{14} A_{43} & A_{32} A_{44} - A_{24} A_{43} & A_{33} A_{44} - A_{34}^2
 \end{vmatrix} = a A_{44}^2.$$

Azonban az m síknak a felülettel való metszésvonalának egyenletét meghatározhatjuk még

$$F_{uu} + 2\mu F_{um} + \mu^2 F_{mm} = 0$$

egyenlet alapján is; ennek az egyenletnek mind a két gyöke egyenlő egymással, ha teljesül az

$$F_{uu} F_{mm} - F_{uv}^2 = 0 \quad (18'')$$

egyenlet; ebben az esetben pedig (u, v) vonal a felületnek érintője, ha tehát ebben az egyenletben u -t változónak tekintjük, akkor annak eleget tesz minden oly u értékrendszer, mely az m sík kimetszette görbe érintőin átmenő érintő síkokat jellemzi, tehát ez az egyenlet szintén az m sík kimetszette kúpszelet egyenlete.

10. Az egyenesnek a felülettel való metszéspontjainak egyenlete.

A másodosztályú felületnek pontkoordinátákban kifejezett egyenletének szimbolikus alakja:

$$\alpha_x^2 = 0.$$

Ha (v, w) egyenes metszi ezt a felületet és a metszési ponton átmegy még u sík is, akkor, miként ismeretes, a metszéspontok koordinátáit a

$$\begin{vmatrix}
 v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
 w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4
 \end{vmatrix}$$

matrixból képzett harmadrendű determinánsok képezik, ha ezeket szimbolumunkba helyettesítjük, akkor

$$(avwu)^2=0 \quad (19)$$

egyenlethez jutunk, melynek eleget tesznek mindazok az u síkok, melyek a (v, w) egyenesnek a felülettel való metszéspontjain átmennek.

Ha a felület

$$(ABxy)^2=0$$

egyenletéből indulunk ki, akkor, mivel ennek az egyenletnek eleget tesznek a tér összes pontjaiból a felülethez húzott érintő kúpokon levő pontok, azért határozott metszési pontot nem kaphatunk; de ha a szimbolumban előforduló egyik pontot rögzítjük, akkor az a rögzített (y) pontból a felülethez vont érintő kúp egyenlete; ha tehát x helyébe a fentebb említett matrixból képzett harmadrendű determinánsokat behelyettesítjük, oly egyenlethez jutunk, melynek eleget tesznek mindazok az u koordináták, melyek az y pontból a felülethez vont érintő kúp és a (v, w) egyenes metszéspontjain átmenő síkokat jellemzik; ez az egyenlet pedig helyettesítés után a következő alakot veszi fel:

$$\begin{vmatrix} A_u & B_u & y_u \\ A_v & B_v & y_v \\ A_w & B_w & y_w \end{vmatrix}^2 = 0. \quad (19')$$

Ugyanis, ha $(ABxy)$ determinánsban x helyébe a fentebb említett matrix harmadrendű aldeterminánsait helyettesítjük, akkor az eredmény a

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

matrixoknak szorzata; * ez pedig nem más mint, az imént föl-írt determináns.

* BALTZER: «Theorie der Determinanten». 48. l.

11. Elenyésző determinánsú másodosztályú felületek.

Fejtegetéseink folyamán eddig mindig feltételeztük, hogy a másodosztályú felület determinánsa nem zérus, most megvizsgáljuk, hogyan módosulnak tételeink abban az esetben, midőn a felület determinánsa zérus, azaz:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

tehát

$a_{ii} (i=1, 2, 3, 4)$ egyenlő előjelűek.

A) Tételezzük fel először, hogy az a_{ii} -k nem mindegyike null. Ekkor az

$$A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 + A_{i4} u_4 = 0 \quad (20)$$

$i=1, 2, 3, 4$

egyenlet-rendszer megoldható; mert az egyik a többi háromnak következménye és azt a *síkot*, melynek koordinátáit ennek az egyenlet-rendszernek megoldásához tartozó u értékek képviselik, a felület szinguláris síkjának nevezzük.

Jelöljük az egyenlet-rendszerünknek eleget tevő síkkoordinátákat $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ -el, akkor az egyenletek tanából ismeretes tételnél fogva:

$$\begin{aligned} \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 &= a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{14} \\ &= a_{21} : a_{22} : a_{23} : a_{24} \\ &= a_{31} : a_{32} : a_{33} : a_{34} \\ &= a_{41} : a_{42} : a_{43} : a_{44}. \end{aligned} \quad (21)$$

Azok a pontok, melyek az ω síkkal összeesnek eleget, tesznek

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4 = 0$$

egyenletnek; ámde a föntebb fölirt relációknál fogva

$$\rho \omega_i \omega_k = a_{ik} \quad (21')$$

következőleg:

$$\rho (\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4)^2 = \sum a_{ik} x_i x_k = 0, \quad (22)$$

azaz: az *elenyésző determinánsú felületek egyenletének pont-koordinátákban megfelel a kétszeresen számított szinguláris sík egyenlete*. A mi azután azt jelenti, hogy a másodosztályú felület minden pontja benne van szinguláris síkjában, az *ilyen másodosztályú felületeket kúpszeleteknek nevezzük*, s hogy a pont-koordinátákra való áttérés nem adta meg egyenletüket, annak oka abban rejlik, hogy a térben görbe vonalat pont-koordinátákban két egyenletnél kevesebbnel nem képviselhetünk.

Mivel u minden értéke mellett

$$F_{\omega u} = 0,$$

azért, ha u érintősíkja a felületnek, akkor $u + \lambda \omega$ is az, tehát a felület csakugyan egy az ω síkban fekvő másodosztályú görbévé, azaz *kúpszeletté degenerál*.

B) Ha az a_{ii} -k mindegyike null, azaz az összes első aldeteminánsok *elenyésznek*, de a második aldeteminánsok még nem, akkor a (20) egyenlet-rendszerben csak két egymástól független egyenlet van; legyen ez a kettő:

$$A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + A_{13} u_3 + A_{14} u_4 = 0,$$

$$A_{21} u_1 + A_{22} u_2 + A_{23} u_3 + A_{24} u_4 = 0,$$

ezt a két egyenletet kielégítik mindazok a síkok, a melyek egy egyenesen, ezen két egyenlet képviselte pontokat összekötő egyenesen mennek keresztül, ezt az egyenest a *másodosztályú felület szinguláris egyenesének nevezzük*. Könnyű kimutatni, hogy ebben az esetben a felület a szinguláris egyenesben fekvő két ponttá degenerál. Legyen ugyanis ω' és ω'' két a szinguláris egyenesen átmenő sík, akkor $\omega' + \lambda \omega''$ szintén az; ha u sík a felület egyenletének eleget tesz, akkor $u + \lambda \omega'$ és $u + \lambda \omega''$ síkok is eleget tesznek, mivel ω' és ω'' a szinguláris egyenesen átmenő két tetszőleges sík koordinátái, azért (ω', ω'', u) ponton átmenő minden sík koordinátái eleget tesznek a felület egyenletének; ámde az egy ponton átmenő síkok koordinátáit a pont-koordinátáival lineáris reláció köti össze, azért a jelen esetben a felület egyenletéből egy, a sík-koordinátákban oly homogen lineáris egyenlet választható ki, mely az imént említett pontnak az egyenletét képviseli; mivel pedig a felület egyenlete másodfokú függvény, azért a változóiban lineáris egyik

faktorának eltávolítása után még egy lineáris faktor marad meg, mely egy más, szintén a szinguláris egyenesen fekvő pontot határoz meg. A másodosztályú felület tehát, ha determinánsa és első al-determinánsai mind nullok, két ponttá degenerál; ezeket a pontokat összekötő egyenest a felület szinguláris egyenesének nevezzük.

C) Ha a másodosztályú felület determinánsának második al-determinánsai is eltűnnek, akkor a (20) egyenletek közül az egyiknek a többi következménye; legyen ez az egyenlet:

$$A_1u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 + A_{14}u_4 = 0,$$

mely pontot képvisel; ezt a pontot a felület szinguláris pontjának nevezzük. Jellemző sajátága az, hogy a felület minden síkja összeesik ezzel a ponttal, legyen ugyanis ω' , ω'' és ω''' a szinguláris ponton átmenő három sík, akkor ω' , ω'' és ω''' kielégítik a felület egyenletét; ha pedig u a felületnek egészen tetszőleges síkja, akkor

$$u + \lambda_1\omega' + \lambda_2\omega'' + \lambda_3\omega'''$$

is az, tehát u sík csakugyan átmegy az $(\omega', \omega'', \omega''')$ ponton. Mivel a felület minden síkja egy ponton megy át, azért azt mondjuk, hogy a másodosztályú felület egy kettős ponttá degenerál.

Az eddig elmondottakat következőképen foglalhatjuk össze:

1. Ha a felület determinánsa zérus, de átlói al-determinánsai nem tűnnek el, akkor a felületnek van egy szinguláris síkja és a felület maga ebben a síkban fekvő kúpszeletté degenerál.

2. Ha az első al-determinánsok is elenyésznek, de a második al-determinánsok még nem, akkor a felületnek van egy szinguláris vonala, s a felület maga egy a szinguláris vonalban fekvő pontpárrá degenerál.

3. Ha a második al-determinánsok is eltűnnek, akkor a felületnek van egy szinguláris pontja és a felület maga egy kettős ponttá degenerál, mely összeesik a szinguláris ponttal.

4. Ha a harmadik al-determinánsok is eltűnnek, akkor a felület egyenlete azonosan zérus, tehát nem mond semmit.

12. A degenerált másodosztályú felületek polártulajdonságai.

A) Targyaljuk először azt az esetet, midőn a másodosztályú felület determinánsa elenyészik, de első aldeterminánsai nem. Jelöljük u síknak a felületre vonatkoztatott polusát x -el, szinguláris síkját ω -val, akkor

$$F_{\omega u} = 0$$

relációnál fogva

$$\sum_{i=1}^4 x_i \omega_i = 0,$$

azaz: *a tér bármely síkjának pólusa benne van a felületet képviselő kúpszelet síkjában.*

Minthogy a póluson átmenő egyenes polársíkját oly pontban metszi, mely harmonikus párja a pólusnak az egyenesnek a felülettel való metszéspontjaira nézve, azért *a tér valamely síkjának pólusa nem más, mint ennek a síknak a kúpszelet síkjával való metszésvonalának pólusa a kúpszeletre nézve.* Tehát *a kúpszelet síkjában fekvő pontnak a kúpszeletre vonatkoztatott polárisán átmenő síkok a pontnak polársíkjai*; ez az oka, hogy a tér háromszorosán végtelen sok síkjának a kúpszeletre nézve csak kétszeresen végtelen sok, t. i. a kúpszelet síkjában fekvő pontok felelnek meg, mint pólusok. A térnek a kúpszelet síkján kívül fekvő pontjainak a polársíkja átmegy a ponton átmenő három sík pólusán, ezek a kúpszelet síkjában vannak, tehát *a tér bármely, a kúpszelet síkján kívül fekvő pontjának polársíkja a kúpszelet síkjával azonos.*

Mivel a felület valamely pontjának polársíkja az ehhez a ponthoz tartozó érintő síkkal összeesik, azért *a kúpszelet valamely pontjának polársíkjai az ezen ponthoz tartozó érintőn átmenő síkok.*

Más szóval, ha valamely pontnak a kúpszeletre vonatkoztatott polársíkja átmegy azon a ponton, akkor az a pont a kúpszeleten van s a polársíknak a kúpszelet síkjával való metszésvonala érinti a kúpszeletet.

A tér tetszőleges egyenesének polárisa az az egyenes, melyet a felvett egyenesen átmenő síkok pólusai a kúpszelet sík-

jában leírni, ez pedig nem más, mint az egyenesnek a kúpszelet síkjával való átdöfési pontjának a kúpszeletre, mint sík-
görbére vonatkoztatott polárisa, *tehát a tér négyszeresen végtelen sok egyeneséhez csak kétszeresen végtelen sok, a kúpszelet síkjában fekvő egyenes tartozik, mint poláris.*

Megfordítva: a kúpszelet síkjához tartozó egyenes mindegyikének kétszeresen végtelen sok poláris felel meg, melyek valamennyien átmennek a fölvett egyenesnek a kúpszeletre, mint síkidomra vonatkoztatott pólusán.

B) Ha az első aldeteminánsok is eltűnnek, akkor

$$F_{u\omega'} = 0, \quad F_{u\omega''}$$

relációknál fogva

$$\sum x_i \omega'_i = 0, \quad \sum x_i \omega''_i = 0;$$

azaz: *a tér bármely síkjának pólusa benne van a szinguláris egyenesben és negyedik harmonikus a pontpárra és arra a pontra nézve, melyben a sík a szinguláris egyenest metszi.*

Ebből következik, hogy a szinguláris egyenes bármely pontjához kétszeresen végtelen sok sík tartozik, mint polársík; nevezetesen azok, melyek az adott pont és pontpárra nézve a negyedik harmonikus ponton mennek keresztül, tehát a szinguláris vonalon átmenő síkok pólusa határozatlan; mert ezek a síkok bármely pontnak negyedik harmonikusán átmennek, *azaz: a szinguláris egyenesen átmenő síkok pólusát a szinguláris egyenes bármely pontja képezheti.*

Három tetszőleges sík találkozási pontjának polársíkja átmegy a három sík pólusain, de ezek a szinguláris egyenesben vannak, *tehát a tér bármely pontjának polársíkja átmegy a szinguláris egyenesen; azaz: a tér bármely pontjához végtelen sok, a szinguláris egyenesen átmenő polársík tartozik.*

Az egy egyenesen átmenő síkok pólusai benne vannak a szinguláris egyenesben, *tehát a tér egy tetszőleges egyenesének polárisa összeesik a szinguláris egyenessel.*

Ellenben azokhoz az egyenesekhez, melyek a szinguláris egyenessel találkoznak, kétszeresen végtelen sok poláris tartozik, melyek valamennyien átmennek azon a ponton, mely negyedik harmonikus párja a pontpárra vonatkozólag annak a pontnak, melyben az adott egyenes a szinguláris egyenessel találkozik.

Ugyanis ennek a pontnak megfelel az a kétszeresen végtelen sok sík, melyek a pontpárra vonatkozólag a negyedik harmonikus ponton mennek át; az egyenes többi pontjainak pedig a szinguláris egyenesen átmenő síkok felelnek meg, ezeknek a metszéspontjai az imént említett síkokkal azonosak a fentebb említett egyenesekkel.

A pontpár valamelyikén átmenő tetszőleges sík pólusa összeesik magával a ponttal s viszont a pontpár akármelyikének polársíkjai átmennek azon a ponton, *tehát a pontpár valamelyikén átmenő egyenesnek polárisa minden azon a ponton átmenő egyenes.*

C) Ha a felület másodrendű aldeterminánsai is elenyésznek, akkor a tér bármely síkjának pólusa összeesik a szinguláris ponttal, tehát bármely egy pontban találkozó három sík pólusa összeesik a szinguláris ponttal, azaz: *a tér bármely pontjához kétszeresen végtelen sok, a szinguláris ponton átmenő polársík tartozik; ennél fogva a tér bármely egyeneséhez kétszeresen végtelen sok a szinguláris ponton átmenő polársík tartozik.*

A szinguláris ponton átmenő síkok pólusa teljesen határozatlan, s viszont a szinguláris pont polársíkja is az, valamint a szinguláris ponton átmenő egyenesek polárisai is azok.

13. A degenerált másodosztályú felületek analitikai formulázása.

A degenerált másodosztályú felületeket oly analitikai alakban mutatjuk most be, hogy abból rögtön lehessen következtetni a degeneráció természetére. Ha a felület kúpszeletté degenerál, akkor, ha a kúpszelet síkját választjuk a koordináta-tetraéder egyik síkjául, a felület analitikai alakja a kúpszelet egyenletévé lesz, tehát rögtön beszámol arról, hogy a felület mi módon degenerál.

Alkalmazzuk tehát a következő koordináta-transzformációt:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= a_{11}x + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4, \\ \xi_2 &= x_2, \\ \xi_3 &= x_3, \\ \xi_4 &= x_4.\end{aligned}$$

Legyen az új koordináta-rendszerben valamely síknak egyenlete

$$\omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \omega_3 \xi_3 + \omega_4 \xi_4 = 0,$$

a régi rendszerben pedig ugyanennek a síknak az egyenlete:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0.$$

Ha az előbbi egyenletbe ξ értékeit behelyettesítjük:

$$a_{11} \omega_1 x_1 + (a_{12} \omega_1 + \omega_2) x_2 + (a_{13} \omega_1 + \omega_3) x_3 + (a_{14} \omega_1 + \omega_4) x_4 = 0$$

egyenlethez jutunk, melynek az előbbivel való összehasonlításából

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} \omega_1, \\ u_2 &= a_{12} \omega_1 + \omega_2, \\ u_3 &= a_{13} \omega_1 + \omega_3, \\ u_4 &= a_{14} \omega_1 + \omega_4 \end{aligned}$$

relációkhoz jutunk, tehát

$$\begin{aligned} & A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 + A_{i4} u_4 \\ &= A_{i2} \omega_2 + A_{i3} \omega_3 + A_{i4} \omega_4, \\ & \sum (A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + A_{i3} u_3 + A_{i4} u_4) u_i = \sum \sum A_{ik} u_i u_k \\ &= \sum_{i=2}^4 (A_{i2} \omega_2 + A_{i3} \omega_3 + A_{i4} \omega_4) (a_{1i} \omega_1 + \omega_i) \quad (\omega_i = 0) \\ & \quad \quad \quad i=1 \\ &= \sum_{i=2}^4 (A_{i2} \omega_2 + A_{i3} \omega_3 + A_{i4} \omega_4) \omega_i \\ &= A_{22} \omega_2^2 + 2A_{23} \omega_2 \omega_3 + A_{33} \omega_3^2 + 2A_{24} \omega_2 \omega_4 + 2A_{34} \omega_3 \omega_4 + A_{44} \omega_4^2 = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Ez az egyenlet a degenerált kúpszelet egyenlete vonalkoordinátákban, vonatkozással arra a háromszögre, melyet a ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 koordináta-síkoknak a kúpszelet síkjával való metszés-vonalai képeznek egymással.

Ha a felület determinánsának első al-determinánsai is elenyésznek, akkor a felület két ponttá degenerál, melyeknek koordinátáit jelöljük x és y -nal, tehát

$$(\sum x_i u_i) (\sum y_i u_i) = \sum \sum A_{ik} u_i u_k = 0,$$

honnan

$$\begin{aligned} x_i y_i &= A_{ii}, \\ x_i y_k + x_k y_i &= 2A_{ik}. \end{aligned}$$

Ha

$$\rho_{ik} = \frac{x_i y_k - y_i x_k}{2} = -\rho_{ki}$$

jelölést használjuk, akkor könnyű meggyőződni, hogy

$$\left. \begin{aligned} x_i y_i &= A_{ii}, \\ x_i y_k &= A_{ik} + \rho_{ik}, \\ x_k y_i &= A_{ik} - \rho_{ik}; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ezek az egyenletek szolgálnak a pontok koordinátáinak meghatározására; előbb azonban ρ_{ik} -t, mely arányos a felület szinguláris vonalának koordinátaival, kell meghatározni, ez pedig következőképpen történik:

$$x_i y_k x_k y_i = A_{ik}^2 - \rho_{ik}^2 = A_{ii} A_{kk},$$

tehát

$$\rho_{ik} = \sqrt{A_{ik}^2 - A_{ii} A_{kk}}.$$

A (24) egyenletrendszer kifejtett alakja:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 &= A_{11} & x_1 y_2 &= A_{12} - \rho_{21}, & x_1 y_3 &= A_{13} - \rho_{31}, \\ x_2 y_1 &= A_{21} + \rho_{21}, & x_2 y_2 &= A_{22} & x_2 y_3 &= A_{23} - \rho_{32}, \\ x_3 y_1 &= A_{31} + \rho_{31}, & x_3 y_2 &= A_{32} + \rho_{32}, & x_3 y_3 &= A_{33} \\ x_4 y_1 &= A_{41} + \rho_{41}, & x_4 y_2 &= A_{42} + \rho_{42}, & x_4 y_3 &= A_{43} + \rho_{43}, \\ & & x_1 y_4 &= A_{14} - \rho_{41}, \\ & & x_2 y_4 &= A_{24} - \rho_{42}, \\ & & x_3 y_4 &= A_{34} - \rho_{43}, \\ & & x_4 y_4 &= A_{44}. \end{aligned}$$

Honnan:

$$\left. \begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= A_{11} : A_{12} - \rho_{21} : A_{13} - \rho_{31} : A_{14} - \rho_{41} \\ &= A_{12} - \rho_{21} : A_{22} : A_{23} - \rho_{32} : A_{24} - \rho_{42} \\ &= A_{13} - \rho_{31} : A_{23} - \rho_{32} : A_{33} : A_{34} - \rho_{43} \\ &= A_{14} - \rho_{41} : A_{24} - \rho_{42} : A_{34} - \rho_{43} : A_{44}. \\ y_1 : y_2 : y_3 : y_4 &= A_{11} : A_{12} - \rho_{21} : A_{13} - \rho_{31} : A_{14} - \rho_{41} \\ &= A_{21} + \rho_{21} : A_{22} : A_{23} - \rho_{32} : A_{24} - \rho_{42} \\ &= A_{31} + \rho_{31} : A_{32} + \rho_{32} : A_{33} : A_{34} - \rho_{43} \\ &= A_{41} + \rho_{41} : A_{42} + \rho_{42} : A_{43} + \rho_{43} : A_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

A pontok reális vagy képzetes volta tehát ρ -tól függ; minthogy

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 0, \\ (i &= 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

azért a_{ii} átlói aldeterminánsai egyenlő előjelűek, tehát

$$A_{ii}A_{kk} - A_{ik}^2$$

($i, k = 1, 2, 3, 4$)

kiéjezések egyenlő előjelűek. ρ képzetes pozitív-, reális negatív értékük mellett. Ennélfogva, ha a második aldeterminánsok pozitívek, akkor a felület két képzetes, ha pedig negatívek, akkor két valós ponttá degenerál.

Végül, ha a második átlói aldeterminánsok is elenyésznek, akkor a felület, miként a (25) alatt lévő relációkból láthatjuk, egy kétszeres ponttá degenerál.

14. A másodosztályú felületeket meghatározó feltételekről.

A másodosztályú felület általános egyenletében kilencz egymástól független konstans fordul elő, tehát az általános másodosztályú felület meghatározására kilencz egymástól független alkotó része szükséges. (Síkok, melyek közül négy nem megy át egy ponton; pontok, melyek közül négy nem fekszik egy síkban; pontok és síkok, ha három pont nem fekszik az adott síkok valamelyikében, vagy ha három adott sík találkozási pontja nem esik össze az adott pontok valamelyikével.)

Ha a felület kúpszeletté degenerál, akkor determinánsa zérus, tehát az együtthatók között van egy reláció, *ennélfogva a kúpszeletnek a térben való meghatározására nyolcz egymástól független alkotó része szükséges.* Ezt a tételt geometriailag is könnyű észrevenni; ugyanis a kúpszelet síkjának meghatározására három-, a kúpszeletnek a síkban való meghatározására pedig öt föltétel szükséges.

Ha a felület két ponttá degenerál, akkor egyenletének konstansai között három egymástól független reláció van; mert könnyű kimutatni, hogy ha

$$a = 0$$

és még két más átlói aldetermináns is null pl.

$$a_{11} = a_{22} = 0,$$

akkor a többi átlói aldetermináns is null. Ugyanis a feltételnél fogva

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{13} = a_{14} = 0, \\ a_{23} &= a_{24} = 0; \\ A_{32}a_{33} + A_{34}a_{34} &= 0, \\ A_{43}a_{34} + A_{44}a_{44} &= 0. \end{aligned}$$

Honnan

$$A_{33}A_{44}a_{33}a_{44} = A_{34}^2 a_{34}^2, \quad (26)$$

melyet ha

$$a_{33}a_{44} = a_{34}^2$$

egyenlettel osztunk

$$A_{33}A_{44} - A_{34}^2 = 0$$

relációhoz jutunk, mely azt követelné, hogy a második alde-terminánsok is eltűnjenek; de mivel ezek föltételünkénél fogva nem mindnyájan enyésznek el, azért a (26) egyenlet csak úgy állhat meg, ha pl.

$$a_{33} = a_{34} = 0,$$

de akkor az előbbi egyenletek másodikánál fogva a_{44} is zérus.

Következőleg a két ponttá degeneráló másodosztályú felület meghatározására hat feltétel szükséges.

Ha a felület kétszeres ponttá degenerál, akkor egyenletének konstansai között hat reláció van; ugyanis ha az

$$a = a_{11} = a_{22} = 0$$

feltételekhez még hozzá vesszük azt, hogy a_{11} -nek két átlói aldeterminánsa pl.

$$A_{33}A_{44} - A_{34}^2, \quad A_{22}A_{44} - A_{24}^2$$

és a_{22} -nek egy átlói aldeterminánsa

$$A_{11}A_{44} - A_{14}^2$$

eltűnik, akkor könnyű kimutatni, hogy minden második alde-termináns szintén eltűnik; *ennélfogva az egy kettős ponttá degeneráló másodosztályú felület meghatározására három feltétel szükséges.*

15. A felületek osztályozása alkotóik szerint.

Ha a másodosztályú felület egyenletét a kanonikus alakba átvivő transzformációnak determinánsát γ -nak nevezzük, a transzformált alak determinánsát pedig μ -nek, akkor miként ismeretes

$$\mu = \gamma^2 \alpha.$$

Tehát a felület egyenletének determinánsa bármily tetraéder-koordináta-rendszerben ugyanolyan előjelű.

Ezek után könnyű lesz megállapítani a kritériumokat arra nézve: vajjon a másodosztályú felületnek vannak-e reális alkotói?

Legyen ugyanis a másodosztályú felület egyenletének kanonikus alakja

$$\mu_1 u_1^2 + \mu_2 u_2^2 + \mu_3 u_3^2 + \mu_4 u_4^2 = 0.$$

Ha a v és w síkokhoz y és z pólusok tartoznak, akkor

$$\rho y_i = \mu_i v_i,$$

$$\rho z_i = \mu_i w_i,$$

ennélfogva:

$$\rho (y_i z_k - y_k z_i) = \mu_i \mu_k (v_i w_k - v_k w_i),$$

Ha tehát (v, w) , q egyenes polárisát p' -nak nevezzük, akkor

$$\rho p'_{ik} = \mu_i \mu_k q_{ik}.$$

Minthogy a felület alkotói önmaguknak polárisai, azért, ha q vonal a felületen van, akkor konjugáltjának koordinátáit szintén $p_{ik} = q_{kl}$ számok jellemzik, tehát

$$\nu q_{12} = \mu_3 \mu_4 q_{34}, \quad \nu q_{23} = \mu_1 \mu_4 q_{14},$$

$$\nu q_{13} = \mu_2 \mu_4 q_{24}, \quad \nu q_{24} = \mu_1 \mu_3 q_{13},$$

$$\nu q_{14} = \mu_2 \mu_3 q_{23}, \quad \nu q_{34} = \mu_1 \mu_2 q_{12}.$$

Honnan következik, hogy

$$\nu^2 = \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 = \mu;$$

ν reális, ha μ pozitív, azaz:

Az el nem enyésző determinánsú másodosztályú felületeket két csoportba osztjuk, ú. m. reális alkotójú és képzetes alkotójú felü-

letekre, a szerint, a mint determinánsuk pozitív vagy negatív. A felületnek tehát

van reális alkotója, ha $a > 0$;

nincs reális alkotója, ha $a < 0$.

16. A másodosztályú felületek osztályozása.

A másodosztályú görbék fajának meghatározására szolgáló kritériumok megállapítását részint, mivel feladatunk körén kívül esik, részint, mivel a dualitás elvénél fogva a végeredmények ugyis igen könnyen beláthatók, mellőzöm, s csak a kritériumokat mutatom be.

Legyen egyenletük:

$$A_1 u_1^2 + 2A_{12} u_1 u_2 + A_{22} u_2^2 + 2A_{13} u_1 u_3 + 2A_{23} u_2 u_3 + A_{33} u_3^2 = 0$$

és a sík végtelen távol levő egyenesének egyenlete

$$x_3 = 0.$$

Jelöljük az

$$a = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad (A_{ik} = A_{ki})$$

determináns A_{ik} eleméhez tartozó determinánst a_{ik} -val; ezen az alapon a kritériumokat a következő táblázatba állíthatjuk össze:

I. $a \geq 0$.

1. $aA_{33} > 0$.
 - a) $a_{11} > 0$ Képzetes ellipszis.
 - b) $a_{11} < 0$ Valós ellipszis.
2. $aA_{33} < 0$ Hiperbola.
3. $aA_{33} = 0$ Parabola.

II. $a = 0$.

1. a átlói alldeterminánsai között van pozitív.
Két képzetes pont.
2. a átlói alldeterminánsai között van negatív.
Két valós pont.
3. a átlói alldeterminánsai eltűnnek. Egy kétszeres pont.

Lássuk ezek után a másodosztályú felületek fajának meghatározására vonatkozó kritériumokat. Az eddig használt jelöléseket most is megtartjuk; az

$$F \equiv \sum \sum A_{ik} u_i u_k \\ (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

felületnek a végtelen távol fekvő síkkal való metszési görbéjének egyenlete a 9. §. fejtegetései szerint:

$$\left. \begin{aligned} (A_{11}A_{44} - A_{14}^2) u_1^2 + 2(A_{44}A_{12} - A_{14}A_{24}) u_1 u_2 + (A_{22}A_{44} - A_{24}^2) u_2^2 \\ + 2(A_{44}A_{13} - A_{14}A_{34}) u_1 u_3 + 2(A_{44}A_{23} - A_{24}A_{34}) u_2 u_3 + \\ + (A_{33}A_{44} - A_{34}^2) u_3^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18''')$$

Ennek a kúpszeletnek determinánsa:

$$aA_{44}^2,$$

átlói aldeterminánsai pedig:

$$\text{Legyen először} \quad a_{11}A_{44}, \quad a_{22}A_{44}, \quad a_{33}A_{44}. \\ a \leq 0,$$

azaz: felületünk valóságos másodosztályú felület, melynek végtelen távol fekvő kúpszeletére nézve a következő kritériumokat írhatjuk fel.

$$\text{I. } A_{44} \leq 0.$$

- | | | |
|----|---|--|
| 1. | $a(A_{33}A_{44} - A_{34}^2) > 0, a_{11}A_{44} > 0.$ | $\left. \vphantom{\begin{aligned} 1. \\ 2. \\ 3. \end{aligned}} \right\} \text{Képzetes kúpszelet.}$ |
| 2. | $a(A_{33}A_{44} - A_{34}^2) > 0, a_{11}A_{44} < 0.$ | |
| 3. | $a(A_{33}A_{44} - A_{34}^2) \leq 0.$ | |

$\left. \vphantom{\begin{aligned} 1. \\ 2. \\ 3. \end{aligned}} \right\} \text{Valós kúpszelet.}$

$$\text{II. } A_{44} = 0.$$

A kúpszelet átlói aldeterminánsai is nullok.

Egy kétszeres pont.

Azokat a másodosztályú felületeket, melyeknek végtelen távolban fekvő kúpszeletük képzetes, *ellipszoidoknak*, a melyeké valós, azokat *hiperbolidoknak* s a melyeknek végtelen távol fekvő kúpszeletük egy kettős ponttá degenerál, azokat *parabolidoknak* nevezzük.

Ha $a > 0$ és a felületnek nincs végtelen távol fekvő pontja, akkor a felület képzetes; mert ha nem volna az, akkor reális alkotói lennének, a mi végtelen távolfekvő pontokat involválna.

Ha pedig $a < 0$, akkor a felület reális, habár a végtelen távolban pontjai nincsenek; ugyanis

$$F(0001) = A_{44},$$

$$F(a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}) = a_{11}a,$$

tehát

$$F(0001) F(a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}) = a_{11}A_{44}a,$$

mivel

$$a < 0, \quad a_{11}A_{44} > 0,$$

azért $F(0001)$ és $F(a_{11}a_{12}a_{13}a_{14})$ ellenkező előjelűek, azaz : a felület valós.

A hyperboloidokat és paraboloidokat is alkotóik reális, vagy képzetes volta szerint két csoportba osztjuk, ú. m. egyköpenyű és kétköpenyű hiperboloidokra; hiperbolikus és elliptikus paraboloidokra.

Ha a elenyészik, akkor a $(18''')$ alatt levő egyenlet annak a két pontnak az egyenlete, melyeket a végtelen távolban levő sík a kúpszelethől kimetsz, mivel a $(18''')$ determinánsa zérus, azért átlói aldeterminánsai egyenlő előjelűek; tehát ebben az esetben a következő kritériumokat írhatjuk fel:

1. $a_{11}A_{44} > 0.$ *Két képzetes pont.*
2. $a_{11}A_{44} < 0.$ *Két valós pont.*
3. $A_{44} = 0.$ *Egy kétszeres pont.*

Az első esetben a felület ellipszissé, a másodikban hiperbolává, a harmadikban parabolává degenerál. Ugyanezekre a kritériumokra jutottunk volna akkor is, ha a kúpszeletnek a 12. §-ban megállapított egyenletét vettük volna kutatásunk alapjául. Hátra van még annak az esetnek az eldöntése, hogy

$$a_{11}A_{44} > 0$$

esetben a kúpszelet mikor reális; erre nézve a fejezet elején közölt, a kúpszeletekre vonatkozó kritériumoknak a 12. §. (23) alatt levő egyenletre való alkalmazásával azonnal látható, hogy helyesek a következő kritériumok:

$$a_{11}A_{44} > 0$$

$$A_{33}A_{44} - A_{34}^2 > 0. \quad \text{Képzetes ellipszis.}$$

$$A_{33}A_{44} - A_{34}^2 < 0. \quad \text{Valós ellipszis.}$$

Azokra az esetekre, midőn a felület két ponttá, vagy egy kétszeres ponttá degenerál, már a 12. §-ban megállapítottuk a kritériumokat. Ezek után a másodosztályú felületek fajtát meghatározó kritériumokat a következő táblázatban állíthatjuk össze:

I. $a \leq 0$.A) $A_{44} \leq 0$.

$$1. a(A_{33}A_{44} - A_{34}^2) > 0, a_{11}A_{44} > 0.$$

$$a) a > 0. \quad \text{Képzetes ellipszoid.}$$

$$b) a < 0. \quad \text{Valós ellipszoid.}$$

$$2. a(A_{33}A_{44} - A_{34}^2) > 0, a_{11}A_{44} < 0, \text{ vagy}$$

$$a(A_{33}A_{44} - A_{34}^2) \leq 0.$$

$$a) a > 0. \quad \text{Egyköpenyű hiperboloid.}$$

$$b) a < 0. \quad \text{Kétköpenyű hiperboloid.}$$

B) $A_{44} = 0$.

$$1. a > 0. \quad \text{Hiperbolikus paraboloid.}$$

$$2. a < 0, \quad \text{Elliptikus paraboloid.}$$

II. $a = 0$.

A) Az átlói aldeteminánsok között van zérustól különböző, legyen $a_{11} \geq 0$.

$$1. a_{11}A_{44} > 0.$$

$$a) A_{33}A_{44} - A_{34}^2 > 0. \quad \text{Képzetes ellipszis}$$

$$b) A_{33}A_{44} - A_{34}^2 < 0. \quad \text{Valós ellipszis.}$$

$$2. a_{11}A_{44} < 0. \quad \text{Hiperbola.}$$

$$3. A_{44} = 0. \quad \text{Parabola.}$$

B) Az első átlói aldeteminánsok mind elenyésznek.

1. A második átlói aldeteminánsok között van pozitív
Két képzetes pont.

2. A második átlói aldeteminánsok között van negatív.
Két valós pont.

3. A második átlói aldeteminánsok mind elenyésznek.
Egy kétszeres pont.

17. A másodosztályú felületek viszonya a képzetes gömbkörhöz.

Azt a felületet, melynek minden érintő síkja egy s ugyanazon ponttól egyenlő távolságra r van, gömbnek nevezzük, ha x_1, x_2, x_3 -nak nevezzük a centrum derékszögű pontkoordinátáit, u_1, u_2, u_3 -nak a gömb valamely érintő síkjának koordinátáit, akkor

$$r^2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - (x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + 1)^2.$$

Ha koordinátarendszerünk origóját a gömb centrumába helyezzük és $-\frac{1}{r^2}$ helyett röviden μ -et írunk, akkor a gömb egyenlete homogén koordinátákban a következő alakban jelenik meg:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \mu u_4^2 = 0,$$

ennek a végtelen távolban levő kúpszelete:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0,$$

mely nem más mint a képzetes kör egyenlete homogén koordinátákban, s mivel ez a gömbre vonatkozik, azért *képzetes gömbkörnek nevezzük*. A képzetes kör egyenlete független a gömb egyenletében előforduló konstanstól, tehát *minden gömb átmegy a képzetes gömbkörön*.

Minden sík körben metszi a gömböt, a képzetes gömbkört pedig két képzetes körpontban, melyek a metszési kör képzetes körpontjai lesznek; minthogy minden kör átmegy síkjának képzetes körpontjain, *azért minden olyan felület, mely átmegy a képzetes gömbkörön: gömbfelület*; mert a gömb síkmetszetei, miként már az elemi mértanból ismeretes, körök.

Mielőtt a képzetes gömbkörnek a másodosztályú felületekhez való fontos viszonyát tanulmányoznánk, néhány igen fontos tétel megállapítására van szükségünk.

A sík mértanból ismeretes, hogy két egyenes egymásra merőleges, ha harmonikus párok arra a szögpontjukon keresztülmenő két egyenesre nézve, melyek a szög síkjának képzetes körpontjain mennek át, más szóval:

Két egyenes egymásra merőleges, ha végtelen távolban levő pontjai síkjuk képzetes körpontjaira nézve harmonikus pontpárok.

Ennek a térben a következő tétel felel meg:

Két egyenes egymásra merőleges, ha végtelen távolban levő pontjaik a képzetes gömbkörre nézve konjugált pontok.

Egy egyenes a síkra merőleges, ha az a talppontján keresztülmenő, a síkban fekvő egyenesek mindegyikére merőleges, tehát ezeknek végtelen távol fekvő pontjai a síkra merőleges egyenes végtelen távol fekvő pontjával a képzetes gömbkörre nézve konjugált pontok; következőleg:

Valamely egyenes a síkra merőleges, ha az egyenes végtelen távolban fekvő pontja a képzetes gömbkörre nézve pólusa a sík végtelen távolfekvő egyenesének.

Ebből a tételből még következik, hogy:

Két sík egymásra merőleges, ha végtelen távolfekvő egyenesaik a képzetes gömbkörre nézve konjugált polárisok.

Ezek után már áttérhetünk a képzetes gömbkörnek és a másodosztályú felületeknek egymáshoz való relációjának tanulmányozására.

Ismeretes, hogy a polártetraéder bármely szögpontjának polársíkja a tetraédernek evvel a szögponttal szemközt fekvő síkja; ebből következik, hogy a tetraéder bármely síkja a felületről oly kúpszeletet metsz ki, melyre nézve az ebben a síkban levő három polártetraéder-él polárháromszöget alkot. Az egymásra nézve konjugált három átmérő végtelen távolban levő pontjai tehát a felület végtelen távolban fekvő kúpszeletére nézve polárháromszögnek a szögpontjait képezik, ha ez a polárháromszög a felület végtelen távolfekvő kúpszeletének és a képzetes gömbkörnek közös polárháromszöge, akkor az egymásra nézve konjugált három átmérő egymásra merőleges; mert bármelyiknek végtelenben levő pontja a képzetes gömbkörre nézve pólusa a másik kettő meghatározta sík végtelenben levő egyenesének; azaz: a másik két átmérő végtelenben levő pontjain átmenő egyenesnek.

Evvel a másodosztályú felület három egymásra merőleges konjugált átmérőjének meghatározási problémáját visszavezettük két kúpszeletnek, t. i. a felület végtelenben levő kúpszeletének és a képzetes gömbkör, közös polárháromszögének meghatározására.

A felületek transzformációját később ezen az alapon tárgyaljuk.

Ha két kúpszelet érinti egymást, akkor közös polárháromszögük határozatlan. A jelen esetben az egyik kúpszelet mindig képzetes, tehát az érintés is csak képzetes pontokban történhetik; mivel pedig a kúpszeleteket képviselő egyenletek együtthatói reálisak, azért az érintésnek konjugált imaginér pontokban azaz: szétválasztott pontokban kell történni. Ebben az esetben a két kúpszelet közös polárháromszöge minden oly háromszög, melynek egyik szögpontja az érintési húr pólusa, a másik kettő pedig harmonikus párja az érintési pontoknak; ebből következik, hogy az egymásra nézve konjugált három merőleges átmérő közül csak az egyik határozott, az, mely az érintési húr pólusán megy át, a másik kettő pedig határozatlan, mivel pedig síkjuk a felületet oly kúpszeletben metszi, mely a két képzetes körponton is átmegy, azért ez a metszési idom kör. Az ilyen felületeket forgási felületeknek nevezzük.

A forgási felületeknek tehát az a jellemző sajátosságuk, hogy végtelen távolban fekvő kúpszeletük a képzetes gömbkört két pontban érinti; az érintési húr pólusán átmenő átmérőt forgási tengelynek nevezzük; az erre merőleges síkok köröket metszenek ki a felületből; ugyanis a forgási tengelyre merőleges síkok mind átmennek az érintési húron, a két érintési pont a síkok kimetszette kúpszeletek pontjai, de ezek képzetes körpontok, tehát a metszési kúpszeletek körök.

A forgási felületekre vonatkozó kritériumokat később, majd a felületek transzformációjánál állapítjuk meg.

A gömb keresztül megy a képzetes gömbkörön, tehát bármely három egymásra nézve konjugált oly átmérője, melyeknek végtelen távolban fekvő pontjai a gömbkörre nézve polárháromszöget alkotnak, egymásra merőleges, tehát a gömb egymásra merőleges konjugált átmérőinek tripélje teljesen határozatlan.

18. A másodosztályú felületek körmetszetei.

Ha a másodosztályú felület végtelenben levő kúpszelete a képzetes gömbkört nem érinti, vagy avval nem esik össze, ak-

kor négy pontban metszi, ezeken a pontokon keresztül mennek a kúpszelet közös húrjai; és azok a síkok, melyek ezeken a húrokon keresztül mennek, oly kúpszeleteket metszenek ki a felületből, melyek a képzetes körpontokon átmennek, *tehát azok körök, ennél fogva: hat párhuzamos síkrendszer létezik, melyek köröket metszenek ki a másodosztályú felületből.*

A paraboloidoknak végtelenben fekvő kúpszelete egy kettős ponttá degenerál, azért ezekre a felületekre külön vizsgálódást kell eszközölnünk. Ha a paraboloidok egyenletét pontkoordinátákban fejezzük ki, akkor végtelen távolban fekvő kúpszeletükre nézve

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

egyenletet találjuk, melynek determinánsa

$$A_{44}a^2 = 0.$$

Atlói aldeteminánsai pedig a 4. §. IV. relációja alapján

$$a(A_{ii}A_{kk} - A_{ik}^2) \leq 0,$$

tehát a paraboloidnak a végtelenben két reális, vagy képzetes egyenese van, a szerint amint $a > 0$, vagy $a < 0$.

A paraboloidoknál tehát a három pár húr közül egy pár összeesik végtelen távolban levő alkotóival, az ezeken átmenő síkok egyeneseket metszenek ki a felületből, *tehát a paraboloidokon csak négyféle körmetszetrendszer van.*

Azonban a felület végtelen távolban fekvő kúpszelete és a képzetes gömbkör metszéspontjai konjugált képzetes pontok, tehát a három pár húr közül csak egy pár valós, *ennél fogva az ellipszoidokon és hiperboloidokon kétféle körmetszetrendszer van.*

Az elliptikus paraboloidok végtelen távolban levő egyenesei képzetesek, tehát a két reális húr azokkal nem eshetik össze, következésképp az elliptikus paraboloidokon szintén van két körmetszetrendszer.

A hyperbolikus paraboloidok végtelenben levő alkotói reálisak, tehát ezekkel esik össze a két reális húr, *ennél fogva a hyperbolikus paraboloidnak nincsenek körmetszetei.*

Az általános polár elméletnek abból a tételéből, mely szerint: az egy egyenesen átmenő síkok pólusai szintén egyenes

vonalat írnak le, mely az adottnak polarisa, következik, hogy az egy s ugyanazon körrendszert kimetsző párhuzamos síkok pólusai leírta egyenes konjugált polárisa annak a húrnak, melyen a párhuzamos síkok átmennek. A konjugált poláris két pontban szeli át a felületet, az ezekhez tartozó polársíkok, érintő síkok, tehát ezekben a pontokban a kör ponttá zsugorodik össze, miért is ezeket a pontokat a felület körpontjainak nevezzük.

A felület körmetszeteinek meghatározása ismeretes, azért csak egy példát mutatok be.

Pl. Az ellipszoidnak végtelen távolban levő kúpszelete képzetes, azért ennek egyenlete, ha az ellipszoidnak egyik polár-tetraéderére vonatkoztatott egyenletét vesszük alapul:

$$a^2u^2 + b^2u_2^2 + c^2u_3^2 = 0;$$

pont koordinátákban:

$$a) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0;$$

a képzetes gömbkör egyenlete pontkoordinátákban:

$$\beta) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

x_1, x_2, x_3 alatt derékszögű koordinátákat értünk, ha polár-tetraéderünk egyik síkja a végtelen távolban van s ebben a síkban fekvő szögpontjai a képzetes gömbkörre nézve polár-háromszöget alkotnak.

Az $a)$ és $\beta)$ kúpszeletek özös húrjait, analitikailag

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x_2^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)x_3^2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)x_3^2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)x_1^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)x_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

egyenletek képviselik. Ha

$$a > b > c,$$

akkor csak

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x_1^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)x_3^2 = 0$$

egyenlet képvisel reális alkotókat, tehát a két körrendszert.

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x_1 \pm \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}x_3 + p = 0$$

két párhuzamos síkrendszer metszi ki, ezeknek a síkoknak koordinátái:

$$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{ap}, 0, \pm \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{cp}, 1 \right),$$

tehát az

$$a^2u_1^2 + b^2u_2^2 + c^2u_3^2 - u_4^2 = 0$$

felületre vonatkoztatott pólusok koordinátái:

$$\left(\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{p}, 0, \pm \frac{c\sqrt{b^2-c^2}}{p}, -1 \right);$$

ezek eleget tesznek az

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - x_4^2 = 0$$

egyenletnek, ha a pólus bele esik polársíkjába, erre nézve tehát a feltétel a következő egyenlet:

$$a^2 - c^2 - p^2 = 0,$$

mely meghatározza p azon értékeit, melyek mellett a kör-rendszereket kimetsző síkok érintő síkok lesznek, tehát pólusaik érintési pontok, jelen esetben pedig körpontok; ezeknek koordinátái tehát, a szerint a mint

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x_1 + \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}x_3 + p = 0,$$

vagy

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c}x_1 - \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}x_3 + p = 0$$

síkok kimetszette körrendszerhez tartoznak

$$\pm a \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, -1,$$

vagy

$$\pm a \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, \mp c \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}, -1.$$

19. Két másodosztályú felület egymásra való vonatkozása.

I. Két másodosztályú felületnek egyszeresen végtelen sok közös érintő síkja van, melyek szintén egy felületet burkolnak be *s ezt lefejthető felületnek nevezzük; osztálysámát meghatározza azon alkotók száma, melyek a tér tetszőleges síkjával összeesnek; ebből következik, hogy két másodosztályú felülethez tartozó lefejthető felület negyedosztályú.* Ugyanis a tér tetszőleges síkja egy-egy kúpszeletben metszi a két másodosztályú felületet, ezeknek a kúpszeleteknek négy közös érintőjük van, melyek az értelmezés szerint a lefejthető felület alkotói.

Legyen adva

$$F \equiv \sum \sum A_{ik} u_i u_k, \quad \Phi \equiv \sum \sum B_{ik} u_i u_k$$

két másodosztályú felület, akkor

$$F + \mu \Phi = 0 \quad (1)$$

felületek összességét, melyet úgy nyerünk, hogy μ számára minden lehető valós értéket helyettesítünk, *felületsornak* nevezük. Minthogy a felület minden elemének érintő síkjai között megvannak az alapul szolgáló két felület közös érintő síkjai is, azért azt mondjuk, hogy *a felületsor minden tagja egy s ugyanazon negyedosztályú lefejthető felületbe írt felület.*

A felületsor elemei között különösen fontosak azok, melyek kúpszeletté degenerálnak, ezeket meghatározzák μ -nek azon értékei, melyek eleget tesznek

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} A_{11} + \mu B_{11} & A_{12} + \mu B_{12} & A_{13} + \mu B_{13} & A_{14} + \mu B_{14} \\ A_{21} + \mu B_{21} & A_{22} + \mu B_{22} & A_{23} + \mu B_{23} & A_{24} + \mu B_{24} \\ A_{31} + \mu B_{31} & A_{32} + \mu B_{32} & A_{33} + \mu B_{33} & A_{34} + \mu B_{34} \\ A_{41} + \mu B_{41} & A_{42} + \mu B_{42} & A_{43} + \mu B_{43} & A_{44} + \mu B_{44} \end{vmatrix} = 0$$

egyenletnek. Ugyanerre az egyenletre jutunk akkor is, ha azt akarjuk meghatározni, hogy mily feltételeknek kell teljesülni arra nézve, hogy $u^{(i)}$ sík pólusa az egész felületsorra nézve ugyanaz legyen. Nevezük ugyanis $u^{(i)}$ pólusát az $F=0$ felületre nézve $x_{(i)}$ -nek, a $\Phi=0$ felületre nézve pedig $y^{(i)}$ -nek, akkor

$$\rho x_r^{(i)} = \sum_{s=1}^4 A_{rs} u_s^{(i)},$$

$$\rho y_r^{(i)} = \sum_{s=1}^4 B_{rs} u_s^{(i)}.$$

A két pólus összeesik, ha

$$x_r^{(i)} + \mu y_r^{(i)} = 0,$$

mely föltétel

$$\Delta(\mu) = 0$$

egyenlethez vezet. Nevezzük ennek az egyenletnek gyökeit $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ -nek, a μ_i -hez tartozó kúpszelet síkját $u^{(i)}$ -nek, akkor az eddig elért eredmények után beláthatjuk a következő egyenletrendszer helyességét:

$$\sum_{s=1}^4 (A_{rs} + \mu_i B_{rs}) u_s^{(i)} = 0.$$

(r=1, 2, 3, 4)

Ha ezeket az egyenleteket rendre $u_r^{(i)}$ -vel szorozzuk s az eredményeket összeadjuk

$$\sum_r \sum_s A_{rs} u_s^{(i)} u_r^{(j)} + \mu_i \sum_r \sum_s B_{rs} u_s^{(i)} u_r^{(j)} = 0$$

egyenlethez jutunk, hasonlóképen találjuk, hogy

$$\sum_r \sum_s A_{rs} u_s^{(i)} u_r^{(j)} + \mu_j \sum_r \sum_s B_{rs} u_s^{(i)} u_r^{(j)} = 0.$$

Mivel általában föltételezzük, hogy

$$\mu_i \neq \mu_j$$

azért

$$\sum_r \sum_s A_{rs} u_s^{(i)} u_r^{(j)} = 0,$$

$$\sum_r \sum_s B_{rs} u_s^{(i)} u_r^{(j)} = 0;$$

azaz: $u^{(i)}, u^{(j)}$ síkok a két alapfelületre, tehát az egész felületsorra nézve is, konjugáltak. Ennélfogva az egyik kúpszelet síkjának pólusa benne van a többi három síkjának mindegyikében; azaz:

A felületsorhoz tartozó kúpszeletek síkjai a felületsorra nézve polártetraédert alkotnak.

Transzformáljuk az $F=0$ és $\Phi=0$ egyenleteket erre a polártetraéderre vonatkozólag.

A pontkoordináták transzformációjára a következő egyenletek szolgálnak :

$$X_i = \sum_{s=1}^4 u_s^{(i)} x_s. \quad (2)$$

A síkkordináták transzformálására szolgálókat pedig következőképpen találjuk: legyen valamely síknak egyenlete az új- és régi koordináta rendszerben rendre :

$$\sum_{i=1}^4 U_i X_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^4 u_i x_i = 0.$$

Helyettesítsük be az előbbi egyenletbe X_i -nek (2) alatt levő értékeit; ez a művelet

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^4 u_s^{(i)} U_i x_s = 0$$

egyenlethez vezet, melynek az előbbivel való összehasonlításából

$$\rho u_s = \sum_{i=1}^4 u_s^{(i)} U_i \quad (2')$$

(s=1, 2, 3, 4)

egyenletrendszerhez jutunk, mely a síkkordináták transzformálására szolgál. A transzformáció elvégzése után, miként ismeretes $F=0$ és $\Phi=0$ következő alakban jelennek meg:

$$F \equiv a_1 U_1^2 + a_2 U_2^2 + a_3 U_3^2 + a_4 U_4^2,$$

$$\Phi \equiv \beta_1 U_1^2 + \beta_2 U_2^2 + \beta_3 U_3^2 + \beta_4 U_4^2.$$

Ámde a (2') alatt definiált koordináta-transzformáció nem egészen határozott; mert a kúpszeletek síkjainak koordinátái csak, mint viszonzyszámok, ismeretesek, azért a (2') egyenletrendszerben minden vertikális sor együtthatóit megszorozhatjuk egy tetszőleges, de egy s ugyanazon vertikális sorra nézve ugyanazon tényezővel. Ha ezeket a tényezőket úgy választjuk meg, hogy valamennyi β egyenlő legyen az egységgel, akkor két alapfelületünk egyenlete a következő alakot veszi fel:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv a_1 U_1^2 + a_2 U_2^2 + a_3 U_3^2 + a_4 U_4^2, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ezekhez az egyenletekhez elvezető transformáció formuláknak adjuk a következő alakot:

$$u_s = \beta_{s1} U_1 + \beta_{s2} U_2 + \beta_{s3} U_3 + \beta_{s4} U_4, \quad (2')$$

pontkoordinátákban pedig:

$$X_s = \beta_{1s} x_1 + \beta_{2s} x_2 + \beta_{3s} x_3 + \beta_{4s} x_4. \quad (2'')$$

A transzformáció eszközlése után tehát

$$F + \mu \Phi \equiv (a_1 + \mu) U_1^2 + (a_2 + \mu) U_2^2 + (a_3 + \mu) U_3^2 + (a_4 + \mu) U_4^2. \quad (3')$$

Ebben a felületsorban levő kúpszeleteket megkapjuk, ha μ helyébe $-a_1, -a_2, -a_3, -a_4$ értékeket helyettesítünk, ennél fogva

$$\mu_1 = -a_1, \mu_2 = -a_2, \mu_3 = -a_3, \mu_4 = -a_4. \quad (4)$$

Jelöljük $F + \mu \Phi$ -nek a ségi koordináta rendszerre vonatkozó determinánsát $\Delta(\mu)$ -vel, akkor az egyenletek tanából ismeretes tételnél fogva:

$$\Delta(\mu) \equiv B(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)(\mu - \mu_4),$$

hol

$$B = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix}.$$

Ha pedig az új koordináta-rendszerben $F + \mu \Phi$ determinánsát $\Delta_0(\mu)$ -vel jelöljük, akkor a (3') és (4) alatt levő relációk alapján:

$$\Delta_0(\mu) \equiv \begin{vmatrix} -\mu_1 + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 + \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3 + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_4 + \mu \end{vmatrix}.$$

A transzformáció determinánsa legyen R , akkor

$$\Delta_0(\mu) = R^2 \Delta(\mu), \quad (6)$$

hol

$$R = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{vmatrix}.$$

Mivel az (5) alapján

$$\begin{aligned} \Delta_0(\mu) &\equiv (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)(\mu - \mu_4) \\ &= \frac{1}{B} \Delta(\mu), \end{aligned}$$

azért

$$R^2 = \frac{1}{B}. \quad (7)$$

Ha Δ -nak első aldeterminánsait Δ_{ik} -val jelöljük, akkor $F + \mu \Phi = 0$ felületnek a régi koordináta-rendszerre vonatkoztatott egyenlete pontkoordinátákban:

$$\varphi(\mu) \equiv \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k; \quad (8)$$

az új koordináta-rendszerre vonatkoztatott egyenlete pedig pontkoordinátákban:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mu) &\equiv (\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)(\mu - \mu_4) X_1^2 + (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_3)(\mu - \mu_4) X_2^2 \\ &\quad - (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_4) X_3^2 + (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3) X_4^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Mindenek előtt kimutatjuk, hogy

$$\varphi_0(\mu) = R^2 \varphi(\mu). \quad (10)$$

Ha a rövidség kedvéért $A_{ik} + \mu B_{ik}$ helyett röviden a_{ik} -t írunk, akkor

$$\begin{aligned} \varphi(\mu) R &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & \beta_{42} & 0 \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} & \beta_{43} & 0 \\ \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{34} & \beta_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & x_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & x_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & x_3 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & x_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

hol

$$c_{ik} = a_{i1} \beta_{1k} + a_{i2} \beta_{2k} + a_{i3} \beta_{3k} + a_{i4} \beta_{4k}.$$

$$\varphi(\mu)R^2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & x_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & x_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & x_3 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & x_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & 0 \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & X_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & X_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 \end{vmatrix},$$

hol

$$a_{ik} = c_{1i} \beta_{1k} + c_{2i} \beta_{2k} + c_{3i} \beta_{3k} + c_{4i} \beta_{4k}.$$

Más részről különös tekintettel a (2'')-ra

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k a_{ik} u_i u_k &= \sum_i u_i \sum_k a_{ik} u_k = \sum_i u_i \sum_k \sum_s a_{ik} \beta_{ks} U_s = \\ &= \sum_k a_{ik} \beta_{ks} \sum_i \sum_s u_i U_s = \sum_i \sum_s c_{is} u_i U_s \\ &= \sum_s U_s \sum_i c_{is} u_i = \sum_s U_s \sum_i \sum_k c_{is} \beta_{ik} U_k \\ &= \sum_i c_{is} \beta_{ik} \sum_s \sum_k U_s U_k = \sum_s \sum_k a_{sk} U_s U_k, \end{aligned}$$

ebből következik, hogy

$$\varphi_0(\mu) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & X_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & X_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & X_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & X_4 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 0 \end{vmatrix},$$

tehát

$$R^2 \varphi(\mu) = \varphi_0(\mu).$$

Ha μ helyébe rendre $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ -t helyettesítünk, akkor tekintettel (7), (8) és (9) alatt levő egyenletekre, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= (\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \mu_3) (\mu_1 - \mu_4) X_1^2 B, \\ \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= (\mu_2 - \mu_1) (\mu_2 - \mu_3) (\mu_2 - \mu_4) X_2^2 B, \\ \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_3) x_i x_k &= (\mu_3 - \mu_1) (\mu_3 - \mu_2) (\mu_3 - \mu_4) X_3^2 B, \\ \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_4) x_i x_k &= (\mu_4 - \mu_1) (\mu_4 - \mu_2) (\mu_4 - \mu_3) X_4^2 B. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Ha X -ek értékeit a (2'') alatt levő egyenletekből behelyettesítjük, akkor az $x_i x_k$ együttthatóinak összehasonlítása folytán a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left. \begin{aligned} B(\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \mu_3) (\mu_1 - \mu_4) \beta_{i1} \beta_{k1} &= \Delta_{ik}(\mu_1), \\ B(\mu_2 - \mu_1) (\mu_2 - \mu_3) (\mu_2 - \mu_4) \beta_{i2} \beta_{k2} &= \Delta_{ik}(\mu_2), \\ B(\mu_3 - \mu_1) (\mu_3 - \mu_2) (\mu_3 - \mu_4) \beta_{i3} \beta_{k3} &= \Delta_{ik}(\mu_3), \\ B(\mu_4 - \mu_1) (\mu_4 - \mu_2) (\mu_4 - \mu_3) \beta_{i4} \beta_{k4} &= \Delta_{ik}(\mu_4). \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

Honnan

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ii} &= \pm \sqrt{\frac{\Delta_{ii}(\mu_i)}{B(\mu_i - \mu_r) (\mu_i - \mu_s) (\mu_i - \mu_t)}}, \\ \beta_{ki} &= \frac{\Delta_{ik}(\mu_i)}{B(\mu_i - \mu_r) (\mu_i - \mu_s) (\mu_i - \mu_t) \beta_{ii}}, \\ &= \pm \frac{\Delta_{ik}(\mu_i)}{\sqrt{\Delta_{ii}(\mu_i) B(\mu_i - \mu_r) (\mu_i - \mu_s) (\mu_i - \mu_t)}}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ha $\Delta_{ii}(\mu_i)$ i -nek minden lehetséges értéke mellett zérus, akkor valamennyi $\Delta_{ik}(\mu_i) = 0$; ami csak úgy lehetséges, ha μ_i többszörös gyök; ugyanis ebben az esetben:

$$\left(\frac{\partial \Delta(\mu)}{\partial \mu} \right)_{\mu=\mu_i} = \sum \sum B_{ik} \Delta_{ik}(\mu_i) = 0.$$

A többszörös gyökök létezését egy időre tárgyalásunkból kizárjuk, tehát ez az eset nem fordulhat elő. Ha azonban mégis valamelyik $\Delta_{ii}(\mu_i)$ zérus, akkor β_{ki} meghatározására a következő egyenlet szolgál:

$$\beta_{ki}^2 = \frac{\Delta_{kk}(\mu_i)}{B(\mu_i - \mu_r) (\mu_i - \mu_s) (\mu_i - \mu_t)}.$$

Formuláink hasznavehetetlenekké válnak, ha

$$B=0,$$

akkor egyszerűen $F + \mu \Phi$ helyett $\Phi + \nu F$ -t írunk, hol

$$\nu = \frac{1}{\mu},$$

és az előbbi eljárást alkalmazzuk. Ha azonban $F=0$ determinánsa is zérus, akkor mind a két felület kúpszeletté degener-

rál, tehát ugyanolyan feladattal állunk szemben két kúpszeletre nézve, mint állottunk két másodosztályú felületre nézve; ebben az esetben

$$F + \mu\Phi = 0$$

felületsorban μ -nek zérus és végtelen értékeihez kúpszeletek tartoznak, μ -nek másik két értékét pedig

$$\Delta(\mu) = 0$$

egyenlet határozza meg, melyeket ha μ_1 és μ_2 -nek nevezünk és az $F=0$ kúpszelet síkját $X_1=0$, a $\Phi=0$ kúpszelet síkját pedig $X_4=0$ síkul választjuk, akkor a két kúpszelet egyenlete a közös polár tetraéderre vonatkoztatva

$$\begin{aligned} F &\equiv a_1 U_2^2 + a_2 U_3^2 + a_3 U_4^2, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 \end{aligned}$$

alakban jelenik meg, hol a_3 tetszőleges, mert a négy határozatlan parameter közül csak háromnak az értékét kell megállapítani, hogy Φ együtthatóinak mindegyike az egységgel legyen egyenlő. Az előbb közölt módszerhez teljesen analóg módon találjuk, hogy

$$\mu_1 = -a_1, \quad \mu_2 = -a_2,$$

A transzformáció együtthatóinak meghatározása szintén teljesen azonos módon történik.

II. $\Delta(\mu) = 0$ egyenletnek két gyöke egymással egyenlő; azaz:

$$\mu_3 = \mu_4;$$

és Δ_{ik} nem mind null.

A 11. §. (21) képlete alapján:

$$\rho_3 u_i^{(3)} u_k^{(3)} = \Delta_{ik}(\mu_3),$$

tehát

$$\rho_3 \Phi(u^{(3)}) = \sum \sum B_{ik} \Delta_{ik}(\mu_3) = \Delta'(\mu_3) = 0,$$

ámde

$$F + \mu_3 \Phi = 0$$

egyenletnél fogva $F(\mu^{(3)})$ szintén eltűnik, ennél fogva $u^{(3)}$ közös érintő sík; azaz: a kétszeres kúpszelet síkja a felületsor közös érintő síkja; mivel pedig pólusa a felület-szeletsor minden tag-

jára nézve ugyanaz s összeesik az érintési ponttal, azért a felületek a kettős kúpszelet síkjának a felületsorra vonatkoztatott pólusában érintkeznek.

Ha az érintési pontot $U_3=0$ pontul választjuk, az érintő síkot pedig $(0, 0, 0, 1)$ síkul, akkor az alapfelületek egyenletei

$$\begin{aligned} F &\equiv 2aU_3U_4 + F_2(U_1, U_2, U_3), \\ \Phi &\equiv 2\beta U_3U_4 + \Phi_2(U_1, U_2, U_3) \end{aligned}$$

alakban jelennek meg, mert $(0, 0, 0, 1)$ sík pólusa csakugyan

$$U_3=0.$$

A kétszeres kúpszelet egyenlete:

$$\beta F - a\Phi \equiv \beta F_2 - a\Phi_2 = 0.$$

A 2. §. (4) alatt levő képlete alapján könnyű meggyőződni, hogy az $U_4=0$ pontból az $F=0$ és $\Phi=0$ felületekhez húzott érintőkúpok képe az $X_4=0$ síkon rendre: $F_2=0$ és $\Phi_2=0$ kúpszelet. Ha tehát az $U_4=0$ pontot úgy választjuk meg, hogy abból az $F=0$ és $\Phi=0$ felületekhez vont érintősíknak az $X_4=0$ síkkal való metszésvonalai oly kúpszeleteket burkoljanak be, melyek közös polár háromszögének egyik szögpontja $U_3=0$ pont legyen, akkor ennek a polár háromszögnek három szögpontja és az $U_4=0$ pont oly tetraédert határoznak meg, melyben mint koordináta-tetraéderben F és Φ következő analitikai alakban jelennek meg:

$$\begin{aligned} F &\equiv 2aU_3U_4 + a_1U_1^2 + a_2U_2^2 + a_3U_3^2, \\ \Phi &\equiv 2\beta U_3U_4 + \beta_1U_1^2 + \beta_2U_2^2 + \beta_3U_3^2. \end{aligned}$$

Ha U_4 helyett $U_4 + \nu U_3$ -t helyettesítünk és ν -t úgy választjuk meg, hogy legyen

$$2\beta\nu + \beta_3 = 0,$$

akkor Φ a következő alakot veszi fel:

$$\Phi = 2\beta' U_3U_4 + \beta_1U_1^2 + \beta_2U_2^2;$$

tehát U_4 pont most Φ -re nézve a $(0, 0, 1, 0)$ sík érintési pontja. Négy konstans pl. β' , β_1 , β_2 , a_3 -t a négy határozatlan paraméter alapján válaszszuk egységül; $F=0$ és $\Phi=0$ kanonikus alakjai tehát:

$$\begin{aligned} F &\equiv a_1 U_1^2 + a_2 U_2^2 + U_3^2 + 2a_3 U_3 U_4, \\ \phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + 2U_3 U_4. \end{aligned} \quad (13)$$

Honnan

$$F + \mu \phi \equiv (a_1 + \mu) U_1^2 + (a_2 + \mu) U_2^2 + U_3^2 + 2(a_3 + \mu) U_3 U_4 = 0,$$

tehát

$$\mu_1 = -a_1, \quad \mu_2 = -a_2, \quad \mu_3 = -a_3$$

$$\Delta_0(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)^2.$$

Ennélfogva

$$\Delta(\mu) \equiv B(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)^2,$$

és

$$R^2 \Delta(\mu) = \Delta_0(\mu)$$

egyenletek alapján:

$$R^2 B = -1. \quad (14)$$

A (10) következtében pedig:

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k &= -(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)^2 X_1^2 - (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_3)^2 X_2^2 \\ &+ (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) X_4^2 - 2(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3) X_3 X_4. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Honnan, ha μ helyébe rendre $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \infty$ értékeket helyettesítünk, a következő egyenlet-rendszerhez jutunk:

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Delta_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)^2 X_1^2, \\ R^2 \Delta_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= -(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)^2 X_2^2, \\ R^2 \Delta_{ik}(\mu_3) x_i x_k &= (\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2) X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma b_{ik} x_i x_k &= -X_1^2 - X_2^2 - 2X_3 X_4, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

hol b_{ik} B első aldeterminánsait jelöli; ennek az egyenlet-rendszernek a megoldása tökéletesen úgy történik mint a (11) alatt levőnek a megoldása.

Az érintkezés feltételét még következőképen is megállapíthatjuk:

$$\Delta(\mu) = 0$$

egyenletnek van kétszeres gyöke, ha

$$\frac{d\Delta(\mu)}{d\mu} = \Delta'(\mu) = 0.$$

$\Delta(\mu)$ -t írjuk a következő alakba:

$$\Delta(\mu) = a + 4\mu a_1 + 6\mu^2 \gamma + 4\mu^3 \beta_1 + \mu^4 \beta,$$

hol B helyett a szimmetria kedvéért β -t irtunk, különben μ együttthatói az F és Φ együttthatóinak igen könnyen meghatározható függvényei. $\Delta(\mu) = 0$ egyenletnek tehát van kétszeres gyöke, ha egyidejűleg:

$$\begin{aligned} a_1 + 3\gamma\mu + 3\beta_1\mu^2 + \beta\mu^3 &= 0, \\ a + 3a_1\mu + 3\gamma\mu^2 + \beta_1\mu^3 &= 0; \end{aligned}$$

μ eliminálásának eredménye a következő

$$\begin{vmatrix} a & 3a_1 & 3\gamma & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 3a_1 & 3\gamma & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 3a_1 & 3\gamma & \beta_1 \\ a_1 & 3\gamma & 3\beta_1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 3\gamma & 3\beta_1 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 3\gamma & 3\beta_1 & \beta \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

eltűnő determinánshoz vezet, mely az érintkezés feltétele.

Láttuk, hogy a felületsort $U_3 = 0$ pontban $(0, 0, 0, 1)$ sík érinti és az érintési síkban levő kettős kúpszelet egyenlete

$$\beta F_2 - a\Phi_2 = 0,$$

az $U_3 = 0$ pontból a kúpszelethez húzott érintők a lefejthető felületnek alkotói, mivel pedig ezek az egyenesek a $(0, 0, 0, 1)$ síkban is benne vannak, azért kimondhatjuk a tételt: *hogy a felületsor közös érintési pontú érintő síkja a lefejthető felületet abban a két egyenesben érinti, melyek a közös érintési pontból a kettős kúpszelethez vont érintőknek felelnek meg.*

Ezek az érintők nem eshetnek össze, mert különben $\Delta(\mu) = 0$ -nak háromszoros gyöke lenne, a mi föltevésünkkel ellenkezik. Ennek bebizonyítását következőképen eszközöljük: legyen

$$\begin{aligned} F_2 &\equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ik} U_i U_k, \\ \Phi_2 &\equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \beta_{ik} U_i U_k. \end{aligned}$$

Az $U_3 = 0$ pontból a kettős kúpszelethez vont érintők érintési pontjainak egyenlete tehát

$$(\beta a_{11} - a\beta_{11}) U_1^2 + 2(\beta a_{12} - a\beta_{12}) U_1 U_2 + (\beta a_{22} - a\beta_{22}) U_2^2 = 0.$$

A két érintő összeesik, ha ennek az egyenletnek a diszkriminánsa zérus, azaz:

$$(\beta a_{22} - a_{22}^2)(\beta a_{11} - a_{11}^2) - (\beta a_{12} - a_{12}^2)^2 = 0.$$

Más részről

$$R^2 \Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} + \mu \beta_{11} + a_{12} + \mu \beta_{12} & a_{13} + \mu \beta_{13} & 0 \\ a_{21} + \mu \beta_{21} & a_{22} + \mu \beta_{22} & a_{23} + \mu \beta_{23} \\ a_{31} + \mu \beta_{31} & a_{32} + \mu \beta_{32} & a_{33} + \mu \beta_{33} \\ 0 & 0 & a + \mu \beta \end{vmatrix} \\ = -(a + \mu \beta)^2 [(a_{11} + \mu \beta_{11})(a_{22} + \mu \beta_{22}) - (a_{12} + \mu \beta_{12})^2].$$

Mivel $\mu = -\frac{a}{\beta}$ csak kétszeres gyöke a $\Delta(\mu) = 0$ egyenletnek, azért a fentebb fölirt diszkrimináns nem lehet zérus, minthogy ekkor, miként az utóbbi egyenletünk mutatja, $-\frac{a}{\beta}$ háromszoros gyök lenne.

III. μ_2 háromszoros gyök, μ_1 pedig egyszeres gyök és $\Delta_{ik}(\mu_2)$ nem mind null.

A háromszoros kúpszelet síkja a lefejtető felületet egy egyenesben (II.) érinti és a felületsor tagjai a háromszoros kúpszelet síkjának pólusában érintkeznek; az érintkezésnek ezt a különös faját stacionér érintkezésnek nevezzük.

Legyen a háromszoros kúpszelet síkja koordináta-rendszerünk $(0, 0, 0, 1)$ síkja, az érintési pont pedig $U_2 = 0$; a jelen esetben a felületsor mindkét kúpszelete átmegy ezen a ponton. A háromszoros kúpszeletnek ehhez a ponthoz tartozó érintője az az egyenes, melyben a lefejtető felületet a háromszoros kúpszelet síkja érinti, ebben az egyenesben válaszszuk az $U_1 = 0$ pontot úgy, hogy abból a háromszoros kúpszelethez vont másik érintőnek érintési pontja összeessék avval a ponttal, melyben az egyszeres és a háromszoros kúpszelet síkjának metszésvonala a háromszoros kúpszeletet az $U_2 = 0$ ponton kívül metszi; ezt a pontot pedig válaszszuk koordináta-rendszerünk $U_3 = 0$ pontjául, ennél fogva:

$$F + \mu_2 \Phi \equiv aU_1^2 + 2aU_2U_3;$$

az egyszeres kúpszelet síkjának koordinátái pedig $(1, 0, 0, 0)$; s minthogy (U_2, U_3) egyenes a kúpszeletet érinti, azért

$$F + \mu_1 \Phi \equiv 2\beta U_2 U_4 + b_2 U_2^2 + b_3 U_3^2 + 2b_4 U_2 U_3,$$

mert az $(1, 0, 0, 0)$ síkban (U_2, U_3, U_4) koordináta háromszögre vonatkoztatott $(0, 0, 1)$ egyenesnek pólusa

$$U_2 = 0.$$

Ha U_4 helyett $U_4 + \lambda U_2$ -t helyettesítünk, és λ -t úgy választjuk meg, hogy legyen

$$2\beta\lambda + b_2 = 0,$$

akkor

$$F + \mu_1 \Phi \equiv 2\beta U_2 U_4 + b_3 U_3^2 + 2b_4 U_2 U_3.$$

$$(\mu_1 - \mu_2) F \equiv a\mu_1 U_1^2 + 2(a\mu_1 - b_4\mu_2) U_2 U_3 - b_3\mu_2 U_3^2 - 2\beta\mu_2 U_2 U_4.$$

$$(\mu_1 - \mu_2) \Phi \equiv -aU_1^2 + 2(b_4 - a) U_2 U_3 + b_3 U_3^2 + 2\beta U_2 U_4.$$

Ha U_i -t megfelelő tényezővel úgy változtatjuk, hogy legyen

$$-a = a\mu_1 - b_4\mu_2 = b_3 = \beta = \mu_1 - \mu_2,$$

akkor

$$F \equiv -\mu_1 U_1^2 - \mu_2 (U_3^2 + 2U_2 U_4) + 2U_2 U_3,$$

$$\Phi \equiv U_1^2 + 2 \frac{b_4 - a}{\mu_1 - \mu_2} U_2 U_3 + U_3^2 + 2U_2 U_4.$$

Amde a koordináta-rendszert mindig megválaszthatjuk úgy, hogy legyen $a=1$, ekkor

$$a\mu_1 - b_4\mu_2 = \mu_1 - \mu_2$$

egyenlet teljesül, ha

$$a = b_4 = 1,$$

következően F és Φ kanonikus alakjai:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\mu_1 U_1^2 - \mu_2 (U_3^2 + 2U_2 U_4) + 2U_2 U_3, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_3^2 + 2U_2 U_4. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$F + \mu \Phi \equiv (\mu - \mu_1) U_1^2 + (\mu - \mu_2) (U_3^2 + 2U_2 U_4) + 2U_2 U_3.$$

Tehát

$$\Delta(\mu) = B(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)^3,$$

$$R^2 \Delta(\mu) = \Delta_0(\mu),$$

$$\Delta_0(\mu) = \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_2 \\ 0 & 1 & \mu - \mu_2 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)^3$$

relációknál fogva:

$$R^2 B = 1.$$

Továbbá:

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k &= -(\mu - \mu_2)^3 X_1^2 - (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)^2 X_3^2 \\ &\quad - (\mu - \mu_1) X_4^2 - 2(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)^2 X_2 X_4 \\ &\quad - 2(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) X_3 X_4. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

A transzformáció együtthatóinak meghatározására szolgáló egyenletek tehát:

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -(\mu_1 - \mu_2)^3 X_1^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= (\mu_1 - \mu_2) X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= -X_4 - 2(\mu_2 - \mu_1) X_3 X_4, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta''_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= -2(\mu_2 - \mu_1)(X_3 + 2X_2 X_4) - 4X_3 X_4. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

IV. Két kétszeres gyök μ_1 és μ_2 fordul elő és Δ_{ik} egyik mellett sem mind null.

A két kétszeres kúpszelet síkjainak pólusaiban az összes felületek egymást érintik, az érintő síkok a kúpszeletek síkjai. Ha tehát az egyik kúpszeletet röviden a -nak, a másikat b -nek, síkjaikat rendre A és B -nek nevezzük; érintési pontjaikat pedig $U_1 = 0$ és $U_3 = 0$ egyenletekkel képviseljük, akkor kimondott tételünk alapján (A, B) egyenes mindkét kúpszeletet érinti és pedig az a -t $U_3 = 0$, a b -t pedig $U_1 = 0$ pontban; másrészt (A, B) egyenes a felületsor érintője, de mivel kimutattuk, hogy két helyen is érint, azért a felületsoron van, de ekkor az (A, B) egyenesen átmenő minden sík érintő síkja a felületsornak, ennél fogva a lefejthető felület egy oly síkcsomóra, melynek tengelye a kétszeres kúpszeletek síkjainak metszészvonala, és egy harmadosztályú lefejthető felületre oszlik, ez utóbbit a síkcsomó tengelye $U_1 = 0$ és $U_3 = 0$ pontokban dőfi át.

A koordináta-tetraédert mindig megválaszthatjuk úgy, hogy legyen

$$\Phi \equiv 2U_1 U_2 + 2U_3 U_4.$$

Az $F + \mu_1 \Phi = 0$ kúpszelet síkja legyen a tetraéder $(0, 1, 0, 0)$ síkja az $F + \mu_2 \Phi = 0$ kúpszeleté pedig a $(0, 0, 0, 1)$ sík.

Az első kúpszelet egyenlete tehát, mivel (U_3, U_1) érintője

$$F + \mu_1 \Phi \equiv a_1 U_1^2 + 2a_{13} U_1 U_3 + a_3 U_3^2 + 2a_{34} U_3 U_4,$$

ennél fogva

$$\begin{aligned}
 F &\equiv a_1 U_1^2 + 2a_{13} U_1 U_3 + a_3 U_3^2 - 2\mu_1 U_1 U_2 + 2(a_{34} - \mu_1) U_3 U_4, \\
 F + \mu_2 \phi &\equiv a_1 U_1^2 + 2a_{13} U_1 U_3 + a_3 U_3^2 + 2(\mu_2 - \mu_1) U_1 U_2 + \\
 &\quad + 2(a_{34} + \mu_2 - \mu_1) U_3 U_4,
 \end{aligned}$$

mivel ebben az egyenletben U_4 nem fordulhat elő, azért

$$a_{34} = \mu_1 - \mu_2.$$

A két érintő sík meghatározásánál fellépő két határozatlan paramétert megválaszthatjuk mindig úgy, hogy legyen

$$a_1 = a_3 = 1.$$

Ha azután U_4 helyett $U_4 + \nu U_1$ -et és U_2 helyett $U_2 - \nu U_3$ -t írunk, ezáltal ϕ alakja nem változik és ha ν -t úgy választjuk meg, hogy legyen

$$a_{13} + \nu(\mu_1 - \mu_2) = 0,$$

akkor az alapfelületek egyenletének kanonikus alakjai:

$$\left. \begin{aligned}
 F &\equiv -2\mu_1 U_1 U_2 - 2\mu_2 U_3 U_4 + U_1^2 + U_3^2, \\
 \phi &\equiv 2 U_1 U_2 + 2 U_3 U_4.
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

A transzformáció véghezvitelére szolgáló egyenletek:

$$R^2(\mu) = \begin{vmatrix} 1 & \mu - \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_2 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_2 & 0 \end{vmatrix} = (\mu - \mu_1)^2 (\mu - \mu_2)^2,$$

$$R^2 B = 1.$$

$$\left. \begin{aligned}
 R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k &= -(\mu_2 - \mu)^2 X_2^2 - (\mu_1 - \mu)^2 X_4^2 \\
 &\quad - 2(\mu_1 - \mu)(\mu_2 - \mu)^2 X_1 X_2 \\
 &\quad - 2(\mu_2 - \mu)(\mu_1 - \mu)^2 X_3 X_4;
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -(\mu_2 - \mu_1)^2 X_2^2, \\
 R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -2(\mu_1 - \mu_2) X_2^2 + 2(\mu_2 - \mu_1)^2 X_1 X_2, \\
 R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= -(\mu_1 - \mu_2)^2 X_4^2, \\
 R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= -2(\mu_2 - \mu_1) X_4^2 + 2(\mu_1 - \mu_2)^2 X_3 X_4.
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

V. μ_1 négyszeres gyök és $\Delta_{ik}(\mu_1)$ nem mind null.

Ez az eset a III. ama különös esetének felel meg, midőn az egyszeres kúpszelet összeesik a háromszoros kúpszelettel, tehát

a felületsor tagjai egy pontban érintkeznek; a közös érintősík, a négyszeres kúpszelet síkja, a lefejthető felületet egy egyenesben érinti; ámde ez az egyenes, ha jelen esetünket a IV. limeseként fogjuk fel, nem más, mint a két végtelen közel eső érintési ponton átmenő érintő, tehát a felületsoron is rajta van; ennél fogva a lefejthető felület egy harmadosztályú lefejthető felületté és egy oly síkcsomóvá degenerál, melynek tengelye rajta van a lefejthető felületen.

Legyen $U_1=0$ a közös érintési pont; (U_1, U_2) a közös alkotó és $(0, 0, 0, 1)$ az érintősík, mely a $\phi=0$ felületet az (U_1, U_2) alkotón kívül még egy másik alkotóban is metszi, melynek a kúpszelettel való metszéspontját vegyük koordináta-rendszerünk $U_3=0$ pontjául; az $U_2=0$ pontot pedig a felületsor közös alkotóján válaszszuk meg úgy, hogy (U_2, U_3) a kúpszelet érintője legyen, tehát U_1 és U_2 -t egy alkalmas konstanssal megszorozhatjuk mindig úgy, hogy legyen

$$F + \mu_1 \phi \equiv 2U_1U_3 + U_2^2.$$

Ha a koordináta-tetraéder $U_4=0$ pontjául azt a pontot választjuk, melyben az (U_2, U_3) egyenesen átmenő sík a $\phi=0$ felületet érinti, akkor U_4 -t mindig megszorozhatjuk egy alkalmas konstanssal úgy, hogy legyen

$$\phi \equiv 2U_1U_4 + 2U_2U_3,$$

ennél fogva az alapfelületek kanonikus egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -2\mu_1(U_1U_4 + U_2U_3) + U_2^2 + 2U_1U_3, \\ \phi &\equiv 2U_1U_4 + 2U_2U_3. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

A transzformáció eszközlésére szolgáló formulák pedig:

$$R^2 J(\mu) \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_1 \\ 0 & 1 & \mu - \mu_1 & 0 \\ 1 & \mu - \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\mu - \mu_1)^4,$$

$$R^2 B = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k &= -X_4^2 - (\mu - \mu_1)^2 X_3^2 + 2(\mu - \mu_1)^3 X_1 X_4 \\ &\quad + 2(\mu - \mu_1)^3 X_2 X_3 + 2(\mu - \mu_1)^2 X_2 X_4 \\ &\quad + 2(\mu - \mu_1) X_3 X_4; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Delta_{ik} (\mu_1) x_i x_k &= -X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Delta'_{ik} (\mu_1) x_i x_k &= 2X_3 X_4, \\ R^2 \Sigma \Delta''_{ik} (\mu_1) x_i x_k &= -2X_3^2 + 4X_2 X_4, \\ R^2 \Sigma \Delta'''_{ik} (\mu_1) x_i x_k &= 12(X_1 X_4 + X_2 X_3) = R^2 6 \Sigma B_{ik} x_i x_k. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

VI. μ_3 kétszeres gyök és $\Delta_{ik}(\mu_3)=0$. Ekkor

$$F + \mu_3 \Phi = 0$$

két ponttá degenerál, s mivel az $F=0$ és $\Phi=0$ közös érintő síkjai mind átmennek ezen pontpár valamelyikén, azért a *lefejthető felület két kúppá degenerál, melyeknek csúcsa összeesik a felületsorban előforduló kétszeres pontpárral*; a felületsorban levő két

$$F + \mu_1 \Phi = 0, \quad F + \mu_2 \Phi = 0$$

kúpszeleten szintén át kell menni a lefejthető felületnek, tehát *ezek a két kúp metszésvonalát képezik. A kúpszeletek, — mint-hogy egy s ugyanazon kúpfelületen rajta vannak, — síkjaik metszésvonalában két helyen találkoznak, ezekben a találkozási pontokban a felületek egymást érintik s az érintő síkok a két kúp közös érintő síkjai lesznek.* A II. szerint ugyanis a kétszeres kúpszelet síkjának pólusában a felületek egymást érintik; ámde a jelen esetben a kétszeres kúpszelet pontpárrá degenerál, ennél fogva a közös érintő sík határozatlan; de megfontolva azt, hogy a két kúpszelet találkozási pontjainak polársíkjai a kúpszeletek találkozási pontjaihoz tartozó közös érintő-síkokkal összeesnek, azért ezek a síkok a felületsort egy s ugyanazon pontban érintik, mert a felületsorra vonatkoztatott pólusaikon átmennek, ezek pedig összeesnek a kúpszeletek találkozási pontjaival.

Azon tételeknél fogva: hogy valamely sík pólusa a kúpszeletre nézve a kúpszelet síkjába; a pontpárra nézve pedig a pontpárt összekötő egyenes azon pontjával esik össze, mely a pontpárra nézve harmonikus párja annak a pontnak, melyben a sík a pontpár összekötő egyenesét metszi; és hogy a jelen esetben a két kúpszelet síkjának pólusa a felületsor minden elemére ugyanaz, megállapítottunk tekinthetjük a következő tételt: *A két kúpszelet síkja a pontpár összekötő egyenesét a pontpárra nézve harmonikus pontpárban metszi.*

Válaszszuk a kúpszeletek síkjait koordináta-rendszerünk $(1, 0, 0, 0)$ és $(0, 1, 0, 0)$ síkjaiul; a két kúp közös érintősík-jához két tetszőleges harmonikus síkpárt pedig $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ síkokul, akkor azok az egész felületsorra nézve konjugáltak, mert a két kúp közös érintő síkja a felületek érintkezési pontjaihoz tartozó érintő-síkok.

Az ily módon kiválasztott négy sík a felületsorra nézve polár-tetraédert alkot. A jelen esetben tehát a közös polár-tetraéder nem lehetetlen, hanem határozatlan. A felületek analitikai alakja ebben a polár-tetraéderben, mint koordináta-tetraéderben, következőképen jelenik meg:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\mu_1 U_1^2 - \mu_2 U_2^2 - \mu_3 (U_3^2 + U_4^2), \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

A transzformáció-formulák pedig:

$$R^2 \Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \mu_4 \end{vmatrix} = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)^2, \\ R^2 B = 1;$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k &= (\mu - \mu_3)^2 [(\mu - \mu_2) X_1^2 + (\mu - \mu_1) X_2^2] \\ &+ (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\mu - \mu_3)(X_3^2 + X_4^2); \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)^2 X_1^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= (\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_3)^2 X_2^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\mu_3) x_i x_k &= (\mu_3 - \mu_1)(\mu_3 - \mu_2)[X_3^2 + X_4^2]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Ez a három egyenlet elégséges, mert az X_3 és X_4 síkok egyikét az X_1 és X_2 síkok pólusait összekötő egyenesen keresztül tetszőlegesen választhatjuk, míg a másiknak harmonikus párjának kell lenni a két érintő síkra nézve.

VII. μ_2 háromszoros gyök, μ_1 egyszeres gyök és $\Delta_{ik}(\mu_2) = 0$.

Ez az eset a harmadikból úgy jön létre, hogy az ott háromszorosan számított kúpszelet két ponttá degenerál, tehát a lefejthető felület két kúpból áll, melyeknek csúcsai a háromszorosan számított pontpárral esnek össze; és mivel a felületek még stacionér érintkeznek, azaz: a lefejthető felületet az

érintkezési ponthoz tartozó érintő sík egy kétszeres egyenesben érinti, azért a kúpok a háromszoros pontpárt összekötő egyenesben érintkeznek, ezen az egyenesen van az érintési pont $U_3=0$, melynek, ha a pontpárra vonatkozó konjugáltját koordináta-tetraéderünk $U_1=0$ pontjával választjuk, akkor

$$F + \mu_2 \Phi = aU_1^2 + bU_3^2.$$

Ha a stacionér érintő síkot $(0, 0, 0, 1)$, az $F + \mu_1 \Phi = 0$ kúpszelet síkját pedig $(1, 0, 0, 0)$ síkú választjuk, és mivel a kúpszelet szintén átmegy az $U_3 = 0$ ponton és a stacionér érintő sík ebben a pontban érinti, azért az (X_1, X_4) egyenes a kúpszeletet érinti; ha ebben az egyenesben vesszük fel koordináta-tetraéderünk $U_2=0$ pontját és az $U_4=0$ pontul a kúpszelet síkjának egy tetszőleges pontját választjuk, akkor

$$F + \mu_1 \Phi = a_2 U_2^2 + 2a_{23} U_2 U_3 + a_3 U_3^2 + 2a_{34} U_3 U_4.$$

Következőleg:

$$(\mu_1 - \mu_2) F = a\mu_1 U_1^2 - a_2 \mu_2 U_2^2 - 2a_{23} \mu_2 U_2 U_3 + (\mu_1 b - \mu_2 a_3) U_3^2 - 2a_{34} \mu_2 U_3 U_4,$$

$$(\mu_2 - \mu_1) \Phi = aU_1^2 - a_2 U_2^2 - 2a_{23} U_2 U_3 + (b - a_3) U_3^2 - 2a_{34} U_3 U_4.$$

Mivel mindig szabad b és a_3 -t az egységgel tenni egyenlővé, azért, ha ezt tesszük és azonkívül U_4 helyett $U_4 + \lambda U_2$ -t írunk úgy, hogy legyen

$$a_{23} + a_{34} \lambda = 0;$$

s végül U_1, U_2 és U_4 -t alkalmas konstanssal úgy szorozzuk meg, hogy legyen

$$a = -a_2 = -a_{34} = \mu_2 - \mu_1;$$

akkor az alapfelületek egyenleteit következő alakba írhatjuk:

$$\left. \begin{aligned} F &= -\mu_1 U_1^2 - \mu_2 (U_2^2 + 2U_3 U_4) + U_3^2, \\ \Phi &= U_1^2 + U_2^2 + 2U_3 U_4. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

A transzformáció meghatározására szolgáló egyenletek:

$$R^2 A(\mu) = \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_2 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_2 & 0 \end{vmatrix} = -(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)^2,$$

$$R^2 B = -1;$$

$$R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k = -(\mu - \mu_2)^3 X_1^2 - (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)^2 X_2^2 + (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) X_4^2 - 2(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)^2 X_3 X_4. \quad (30)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -(\mu_1 - \mu_2)^2 X_1^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -(\mu_2 - \mu_1) X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta''_{ik}(\mu_2) x_i x_k &= -2(\mu_2 - \mu_1)(X_2^2 + 2X_3 X_4). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Ez a három egyenlet a transzformáció meghatározására azon határozatlanságnál fogva, mely abban nyilvánul, hogy koordinátatetraéderünk egyik szögpontját a kúpszelet síkjában, a másikat pedig a kúpszelet síkjának és a stacionér érintő sík metszéspontjában tetszőlegesen választhatjuk, elégséges. Tehát háromszorosan végtelen sok olyan transzformáció van, mely a (29) alatt levő kanonikus alakokhoz elvezet.

VIII. μ_1 és μ_3 kétszeres gyökök és $\Delta_{ik}(\mu_1) = 0$.

Az egyik kúpszelet két ponttá, a lefejthető felület tehát két kúppá degenerál; de mivel a IV. szerint egy síkcsomó is kiválik, azért a jelen esetben még egy síkcsomónak kell kiválni. *A lefejthető felület tehát két síkcsomóvá és egy kúppá degenerál, a kúp csúcsa és a síkcsomók tengelyeinek a találkozási pontja összeesik a felületsor pontpárjával.* Minthogy a lefejthető felület síkjai a felületsor minden tagját érintik, azért a síkcsomók tengelyei rajta vannak a felületsoron és az $F + \mu_3 \Phi = 0$ kúpszeletet érintik, tehát ennek síkja a felületsort a síkcsomók tengelyeinek találkozási pontjában érinti.

Legyenek $U_3 = 0$ és $U_4 = 0$ a pontpárt összekötő egyenes egyenletei és U_3 a síkcsomók tengelyeinek találkozási pontja, tehát

$$F + \mu_1 \Phi = U_3 (\beta_3 U_3 + 2\beta_4 U_4).$$

Ha az $F + \mu_3 \Phi = 0$ kúpszelet síkjában az U_1 és U_2 pontokat úgy választjuk meg, hogy azok U_3 -al a kúpszeletre nézve polárháromszöget alkossanak, akkor

$$F + \mu_3 \Phi = a_1 U_1^2 + a_2 U_2^2 + a_3 U_3^2;$$

ennélfogva

$$(\mu_1 - \mu_3) F = \mu_1 a_1 U_1^2 + \mu_1 a_2 U_2^2 + (\mu_1 a_3 - \mu_3 \beta_3) U_3^2 - 2\mu_3 \beta_4 U_3 U_4,$$

$$(\mu_1 - \mu_3) \Phi = -a_1 U_1^2 - a_2 U_2^2 - (a_3 - \beta_3) U_3^2 + \beta_4 U_3 U_4.$$

Megválaszthatjuk előre a koordináta-szögpontokat úgy, hogy legyen

$$\alpha_3 - \beta_3 = 0;$$

azután, ha $\alpha_3 U_3 = \beta_3 U_3$ helyett U_3 -t írunk és U_1 , U_2 , U_4 -t alkalmas tényezővel megszorozzuk úgy, hogy legyen

$$-a_1 = -a_2 = \beta_4 = \mu_1 - \mu_3,$$

akkor

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\mu_1 (U_1^2 + U_2^2) - 2\mu_3 U_3 U_4 + U_3^2, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + 2U_3 U_4. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

A transzformáció meghatározására szolgáló formulák:

$$R^2 \Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_3 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_3 & 0 \end{vmatrix} = -(\mu - \mu_1)^2 (\mu - \mu_3)^2,$$

$$R^2 B = -1;$$

$$R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k = -(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_3) [(\mu - \mu_3)(X_1^2 + X_2^2) + 2(\mu - \mu_1)X_3 X_4] + (\mu - \mu_1)^2 X_4^2; \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\mu_3) x_i x_k &= (\mu_3 - \mu_1)^2 X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\mu_3) x_i x_k &= -2(\mu_3 - \mu_1)^2 X_3 X_4 + 2(\mu_3 - \mu_1) X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -(\mu_1 - \mu_3)^2 (X_1^2 + X_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Három egyenlet a transzformáció egyenleteinek meghatározására elég; mert a jelen esetben ismét tetszőlegesség lép fel; ugyanis $U_4=0$ a pontpár tengelyén, $U_1=0$ pedig $U_3=0$ -nak a kúpszeletre vonatkoztatott polárisán tetszőlegesen választható.

IX. μ_1 és μ_3 kétszeres gyökök és $\Delta_{ik}(\mu_1) = \Delta_{ik}(\mu_2) = 0$.

Ebben az esetben mind a két kétszeres kúpszelet pontpárrá degenerál s minthogy a lefejtető felület minden síkja a két pontpár egy-egy pontján egyidejűleg átmegy, azért a lefejtető felület négy síkcsomóvá degenerál, melyeknek tengelyei rajta vannak a felületsoron s egy négyszöget alkotnak. A felületsor általános egyenlete tehát:

$$F + \mu \Phi \equiv a U_1 U_2 + b U_3 U_4.$$

Legyen

$$F + \mu_1 \Phi \equiv a_3 U_3^2 + a_4 U_4^2,$$

$$F + \mu_3 \Phi \equiv a_1 U_1^2 + a_2 U_2^2,$$

honnan

$$(\mu_1 - \mu_3) F \equiv \mu_1 (a_1 U_1^2 + a_2 U_2^2) - \mu_3 (a_3 U_3^2 + a_4 U_4^2),$$

$$(\mu_1 - \mu_3) \Phi \equiv -a_1 U_1^2 - a_2 U_2^2 + a_3 U_3^2 + a_4 U_4^2.$$

A konstans szorzók alkalmas megválasztásával tehát

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\mu_1 (U_1^2 + U_2^2) - \mu_3 (U_3^2 + U_4^2), \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

A transzformációt eszközölő formulák:

$$R^2 A(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \mu_3 \end{vmatrix} = (\mu - \mu_1)^2 (\mu - \mu_3)^2,$$

$$R^2 B = 1;$$

$$R^2 \Sigma \Sigma A_{ik}(\mu) x_i x_k = (\mu - \mu_1) (\mu - \mu_3) \left[(\mu - \mu_3) (X_1^2 + X_2^2) + \right. \\ \left. (\mu - \mu_1) (X_3^2 + X_4^2); \right] \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma A'_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= (\mu_1 - \mu_3)^2 (X_1^2 + X_2^2), \\ R^2 \Sigma \Sigma A_{ik}(\mu_3) x_i x_k &= (\mu_3 - \mu_1)^2 (X_3^2 + X_4^2). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

E két egyenlet elégséges a transzformáció együtthatóinak meghatározására ama tetszőlegességnél fogva, mely szerint: koordináta-tetraéderünk szögpontjai közül kettőt a pontpárokat összekötő egyeneseken tetszés szerint választhatunk meg.

X. μ_1 négyszeres gyök $\Delta_{ik}(\mu_1) = 0$; de $\Delta'_{ik}(\mu)$ és a második al-determinánsok nem mind nullok.

A felületsorban előfordul egy négyszeres pontpár, ezeknek a lefejtető felületben megfelel két kúp; de az egyik a VIII. szerint két síksomóvá degenerál, melyeknek tengelyei a pontpár egyikében találkoznak; és mivel a VII. szerint a lefejtető felületet alkotó két kúp egy egyenesben érintkezik, azért a jelen esetben, hogy ez az érintkezés létrejöjjön, a két síksomó tengelyeinek a kúp valamelyik érintősíkjába kell esni; mert a két síksomó egyidejűleg csak ekkor érintheti a kúpot.

Legyen $U_2=0$ a tengelyek találkozási pontjának, $U_3=0$ a kúp csúcsának egyenlete, tehát

$$F + \mu_1 \Phi \equiv 2U_2U_3.$$

Minthogy $U_2=0$ pontban a felületek érintkeznek, azért ha érintő sík a $(0, 0, 0, 1)$ síkot választjuk, akkor

$$\begin{aligned} \Phi \equiv & \beta_{11}U_1^2 + 2\beta_{12}U_1U_2 + \beta_{22}U_2^2 + 2\beta_{13}U_1U_3 + 2\beta_{23}U_2U_3 + \beta_{33}U_3^2 \\ & + 2\beta_{24}U_2U_4 = 0. \end{aligned}$$

Ha az $U_1=0$ pontot a $(0, 0, 0, 1)$ síkban úgy választjuk meg, hogy (U_1, U_2) egyenes (U_2, U_3) -nak harmonikus párja legyen a síksomó két tengelyére nézve, akkor a $(0, 0, 1, 0)$ és $(1, 0, 0, 0)$ síkok a $\Phi=0$ felületre nézve konjugáltak, a mi csak úgy lehetséges, ha $\beta_{13}=0$. Ha Φ -hez az (U_1, U_2) egyenesen vont érintő-síkot $(0, 1, 0, 0)$ sík választjuk és $U_4=0$ pontul az érintési pontot vesszük, akkor

$$\beta_{22}=0, \quad \beta_{12}=\beta_{23}=0.$$

Következőleg:

$$\begin{aligned} F &\equiv -\mu_1(U_1^2 + U_3^2 + 2U_2U_4) + 2U_2U_3, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_3^2 + 2U_2U_4. \end{aligned} \quad (38)$$

Mivel az (U_1, U_2) egyenesen, az U_1 pont határozatlan, azért ez a transzformáció határozatlan; az eszközlésére szolgáló formulák:

$$\begin{aligned} R^2A(\mu) &\equiv \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_1 \\ 0 & 1 & \mu - \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(\mu - \mu_1)^4, \\ R^2B &= -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2\Sigma\Delta_{ik}(\mu) x_i x_k &= -(\mu - \mu_1)^3 (X_1^2 + X_3^2 + 2X_2X_4) \\ &\quad - 2(\mu - \mu_1)^2 X_3X_4 - (\mu - \mu_1) X_4^2; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} R^2\Sigma\Delta'_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -X_4^2, \\ R^2\Sigma\Delta''_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -4X_3X_4, \\ R^2\Sigma\Delta'''_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -6(X_1^2 + X_3^2 + 2X_2X_4). \end{aligned} \quad (40)$$

XI. μ_1 négyszeres gyök, $\Delta_{ik}(\mu_1)=0$, $\Delta'_{ik}(\mu_1)=0$; azonban a második aldeterminánsok nem mind tűnnek el.

A IX. szerint a lefejthető felület négy síkcsomóba degenerál; de mivel a X. szerint a felületsorban levő pontpár egyikéhez tartozó lefejthető felület a másikéhoz tartozót érinti, a mi a jelen esetben csak úgy lehetséges, ha az egyik pár síkcsomóból az egyik a másik pár egyikével oly kettős síkcsomóvá egyesül, melynek tengelyét a pontpárt összekötő egyenes képezi, azért a lefejthető felület egy kétszeres síkcsomóvá és két egyszeres síkcsomóvá degenerál; az utóbbinak tengelyei az előbbi tengelyét a felületsorhoz tartozó pontpárban metszik. Mivel a síkcsomók tengelyei rajta vannak a felületsoron is, azért az egyszeres síkcsomók tengelyei, minthogy a felületsor egy és ugyanazon alkotóját metszik, ugyanolyan fajú alkotók, tehát nem metszik egymást. A kétszeres síkcsomó tengelyében a felületek érintkeznek, mert ez az egyenes úgy fogható fel (IX), mint a felület-sornak két egymáshoz végtelen közel eső közös alkotója.

A pontpárt összekötő egyenes két, a pontpárhoz harmonikus pontjának egyenlete legyen $U_1=0$ és $U_3=0$, tehát

$$F + \mu_1 \Phi \equiv aU_1^2 + \beta U_3^2.$$

Ha pedig $U_2=0$ és $U_4=0$ pontokat úgy választjuk meg, hogy (U_1, U_4) és (U_2, U_3) a $\Phi=0$ felület alkotói legyenek, és ha (U_2, U_4) a felületnek az (U_1, U_3) -t nem metsző alkotója, akkor

$$\Phi \equiv 2aU_1U_2 + 2bU_3U_4$$

ennélfogva:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -2\mu_1(U_1U_2 + U_3U_4) + U_1^2 + U_3^2, \\ \Phi &\equiv 2U_1U_2 + 2U_3U_4. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

A tetszőlegesség a következőkben nyilvánul: $U_1=0$ pontul a pontpárt összekötő egyenes bármely pontját választhatjuk; $U_3=0$ evvel már meg van határozva. $U_2=0$ az $U_3=0$ pontból kiinduló másik alkotó bármely pontja lehet; az $U_2=0$ ponton átmenő, az (U_2, U_3) -tól különböző fajú alkotónak az a pontja lesz $U_4=0$ pont, melyet az $U_1=0$ ponton átmenő (U_1, U_3) -tól különböző fajú alkotó belőle kimetsz, a metszés létrejön, mert (U_1, U_4) és (U_2, U_4) nem egyenlő fajú alkotók.

A transzformáció eszközlésére szolgáló formulák:

$$R^2\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} 1 & \mu-\mu_1 & 0 & 0 \\ \mu-\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu-\mu_1 \\ 0 & 0 & \mu-\mu_1 & 0 \end{vmatrix} = (\mu_1-\mu_1)^4,$$

$$R^2B=1;$$

$$R^2\Sigma\Sigma\Delta_{ik}(\mu)x_ix_k=-(\mu_1-\mu)^3(2X_1X_2+2X_3X_4)-(\mu_1-\mu)^2(X_2^2+X_4^2); \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2\Sigma\Sigma\Delta''_{ik}(\mu_1)x_ix_k &= -2(X_2^2+X_4^2), \\ R^2\Sigma\Sigma\Delta'''_{ik}(\mu_1)x_ix_k &= 12(X_1X_2+X_3X_4). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

XII. μ_1 egyszeres gyök; μ_2 háromszoros gyök és $\Delta(\mu_2)$ -nek első és második aldeteminánsai mind eltűnnek.

A felületsorban van egy kúpszelet és egy háromszoros kettős pont. A VII. két kúpja tehát egygyé húzódik össze, ennél fogva a kúpszeleten határozatlan lesz az a pont, melyben a felületek érintkeznek, tehát a felületsor tagjai a felületsorhoz tartozó kúpszeletben érintkeznek.

Legyen a háromszoros kettős pont egyenlete $U_1=0$, akkor, ha U_2, U_3, U_4 a kúpszelet síkjában a kúpszeletre nézve polárháromszöget alkotnak, könnyű meggyőződni, hogy F és Φ kanonikus alakjai:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\mu_1 U_1^2 - \mu_2 (U_2^2 + U_3^2 + U_4^2), \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2; \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

tehát:

$$R^2\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu-\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu-\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu-\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu-\mu_2 \end{vmatrix} = (\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)^3,$$

$$R^2B=1;$$

$$R^2\Sigma\Sigma\Delta_{ik}(\mu)x_ix_k=(\mu-\mu_2)^3X_1^2+(\mu-\mu_2)^2(\mu-\mu_1)(X_2^2+X_3^2+X_4^2); \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2\Sigma\Sigma\Delta_{ik}(\mu_1)x_ix_k &= (\mu_1-\mu_2)^3X_1^2, \\ R^2\Sigma\Sigma\Delta''_{ik}(\mu_2)x_ix_k &= 2(\mu_2-\mu_1)(X_2^2+X_3^2+X_4^2). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

A transzformáczió nál fellépő tetszőlegességet az eset egyszerűsége folytán könnyű belátni.

XIII. μ_1 négyszeres gyök és $\Delta(\mu_1)$ első és második aldeterminánsai és eltűnnek.

A felületsorban van egy négyszeres kettős pont. A XI. szerint most a másik pár síkcsomó is egyesül, tehát a lefejlhető felület egy pár kétszeres síkcsomóvá degenerál, melynek tengelyeiben a felületek egymást érintik; és a tengelyek síkja a közös érintő sík; a tengelyek találkozási pontja pedig a négyszeres kettős pont, melynek egyenlete legyen $U_3^2=0$. Ha $U_1=0$ és $U_2=0$ pontok a síkcsomó tengelyeihez harmonikus egyenesekben vannak, s ha az (U_1, U_2) egyenesen átmenő valamely sík a $\Phi=0$ felületet $U_4=0$ pontban érinti, akkor a X-ben közölt módszerrel találjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\mu_1 (U_1^2 + U_2^2 + 2U_3U_4) + U_3^2, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + 2U_3U_4. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$R^2\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_1 & 0 \end{vmatrix} = -(\mu - \mu_1)^4,$$

$$R^2B = -1.$$

$$R^2\Sigma\Sigma_{ik}(\mu) x_i x_k = -(\mu - \mu_1)^3 (X_1^2 + X_2^2 + 2X_3X_4) + (\mu - \mu_1)^2 X_4^2; \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2\Sigma\Sigma'_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= 2X_4^2, \\ R^2\Sigma\Sigma''_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -6(X_1^2 + X_2^2 + 2X_3X_4). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Evvel két másodosztályú felületnek egymáshoz való helyzetének tanulmányozását arra az esetre, midőn a felületek determinánsai nem tűnnek el tökéletesen kimerítettük. Hogy a letárgyalt tizenhárom esetnél több nem lehetséges, az részint geometriailag következik abból, hogy ha valamelyik esetben a transzformációt nem hajthatjuk végre, akkor a többi eset valamelyike lép fel, részint pedig algebrailag, miként SYLVESTER és WEIERSTRASS kimutatták.

20. Degenerált másodosztályú felületek egymásra való vonatkozása.

Ha mindkét másodosztályú felület kúpszeletté degenerál, akkor az előbbi fejezetben kifejtett módszert, mintként az első esetben láttuk módosítanunk kell. A jelen fejezetben csak azokra az esetekre terjeszkedem ki, midőn a két kúpszelet nincs egy síkban; mert különben síkmértani problémával állnánk szemben.

Az I. esetben megfelelőjét már az előbbi fejezetben láttuk.

A II. esetben a kúpszeleteknek van egy közös pontjukhoz tartozó érintősíkjuk, tehát a kúpszeletek egymást egy pontban metszik. A metszéspont egyenlete legyen $U_3=0$, a kúpszeleteknek ehhez a ponthoz tartozó érintőiben vegyük fel az $U_1=0$ és $U_2=0$ pontokat; az $U_4=0$ pontot pedig a két kúpszelet metszés-vonalában. Ha tehát az $F=0$ síkja $(0, 1, 0, 0)$, a $\phi=0$ -é pedig $(1, 0, 0, 0)$, akkor

$$\begin{aligned} F &\equiv aU_3U_4 + a_1U_1^2 + 2a_{13}U_1U_3 + a_3U_3^2, \\ \phi &\equiv bU_3U_4 + \beta_1U_2^2 + 2\beta_{23}U_2U_3 + \beta_3U_3^2. \end{aligned}$$

Az (U_1, U_3) vonalon az $U_1=0$, az (U_2, U_3) vonalon az $U_2=0$ pontot megválaszthatjuk úgy, hogy legyen

$$a_{13} = \beta_{23} = 0,$$

végül, ha az $U_4=0$ pontot az (U_3, U_4) vonalon úgy választjuk meg, hogy legyen

$$\beta_3 = 0,$$

akkor $\phi=0$ kúpszeletnek nem csak (U_2, U_3) , hanem (U_2, U_4) is érintője. A kúpszeletek kanonikus analitikai alakjai tehát:

$$\begin{cases} F \equiv -\mu_1 U_3 U_4 + U_1^2 + U_3^2, \\ \phi \equiv U_3 U_4 + U_2^2. \end{cases} \quad (1)$$

A felületsor kúpszelete pedig

$$F + \mu_1 \phi \equiv U_1^2 + \mu_1 U_2^2 + U_3^2.$$

A transzformáció meghatározására szolgáló egyenletek:

$$R^2 A(\mu) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mu - \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_1 & 0 \end{vmatrix} = -\mu(\mu - \mu_1)^2,$$

$$4\beta_1 R^2 = -1.$$

$$R^2 \Sigma \Sigma A_{ik}(\mu) x_i x_k = -(\mu - \mu_1)^2 (\mu X_1^2 + X_2^2) + \mu X_4^2 - 2\mu(\mu - \mu_1) X_3 X_4; \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma A_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= \mu_1 X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma A'_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -2\mu_1 X_3 X_4 + X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma A''_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -2(\mu_1 X_1^2 + X_2^2) - 4X_3 X_4, \\ R^2 \Sigma \Sigma a_{ik} x_i x_k &= -\mu_1 X_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hol a_{ik} a -nak A_{ik} eleméhez tartozó aldeterminánsa.

Ha pedig a kúpszeletek az $U_3=0$ pontban érintkeznek, akkor a közös érintőn vegyünk fel egy tetszőleges pontot és azt azután válaszszuk koordinátatetraéderünk $U_4=0$ pontjául, honnan az $F=0$ kúpszelethez menő másik érintő érintési pontját $U_1=0$, a $\Phi=0$ kúpszelethez menő másik érintő érintési pontját $U_2=0$ pontul választván, a kúpszeletek analitikai alakjainak kanonikus formái számára a következő kifejezéseket találjuk:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv 2U_3 U_1 - \mu_1 U_4^2, \\ \Phi &\equiv 2U_3 U_2 + U_4^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Mivel

$$R^2 A(\mu) \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 1 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \mu_1 \end{vmatrix} = 0,$$

azért a jelen esetben

$$F + \mu\Phi = 0$$

felületsor minden tagja kúpszelet; ez az eset már nincs meg az általános esetek között.

Ha tehát $A(\mu) = 0$ μ -től függetlenül eltűnik, akkor a kanonikus alakra való transzformációt úgy eszközöljük, hogy meghatározzuk mindenek előtt a már ismeretes módon a két kúpszelet síkját, azután az érintkezési pontot és végül a két kúpszelet

szelet sík metszésvonalának tetszőleges pontjából a kúpszeletekhez húzott érintők érintési pontjait és ezzel feladatunkat megoldottuk.

Ha a kúpszeletek két pontban $U_3=0$ és $U_4=0$ találkoznak és ezekben a pontokban az $F=0$ kúpszelethez vont érintők találkozási pontja $U_1=0$; a $\Phi=0$ kúpszelethez vont érintők találkozási pontja $U_2=0$, akkor a kúpszeletek kanonikus alakjai következőképpen jelennek meg:

$$\begin{aligned} F &\equiv -\mu_1 U_3 U_4 + U_1^2, \\ \Phi &\equiv U_3 U_4 + U_2^2, \end{aligned} \quad (4)$$

tehát

$$R^2 \Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \mu_1 \\ 0 & 0 & \mu - \mu_1 & 0 \end{vmatrix} = -\mu(\mu - \mu_1)^2,$$

$$R^2 \Sigma \Delta_{ik}(\mu) x_i x_k = -(\mu - \mu_1)^2 (\mu X_1^2 + X_2^2) - 2\mu(\mu - \mu_1) X_3 X_4; \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Delta'_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -2\mu_1 X_3 X_4, \\ R^2 \Sigma \Delta''_{ik}(\mu_1) x_i x_k &= -2(\mu_1 X_1^2 + X_2^2) - 4X_3 X_4, \\ R^2 \Sigma \Delta_{ik} x_i x_k &= -\mu_1^2 X_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ha egy kúpszeletnek három pontja benne van egy síkban, akkor az egész kúpszelet maga is ahhoz a síkhoz tartozik, azért két különböző síkú kúpszeletnek vagy nincsenek közös pontjai, vagy van egy, vagy pedig kettő, ezek az utóbbiak lehetnek összeesők is. Ezeket az eseteket mind tárgyaltuk, tehát a különböző síkú kúpszeletekre vonatkozó problémákat megoldottuk.

Ha az egyik kúpszelet pontpárra degenerál, akkor válaszszuk a pontpár egyik pontját koordináta-tetraéderünk egyik szögpontjául $U_1=0$; a pontpáron átmenő egyenesnek a kúpszelet síkjával való metszéspontját $U_2=0$ pontul, az $U_3=0$ és $U_4=0$ pontokat a kúpszelet síkjában válaszszuk úgy, hogy $U_2=0$ ponttal a kúpszeletre nézve polárháromszöget alkossanak; ennél fogva:

$$\begin{aligned} F &\equiv aU_2^2 + U_3^2 + U_4^2, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + 2U_1 U_2. \end{aligned}$$

Ha a pontpár egyik pontja összeesik az $U_2 = 0$ ponttal, akkor

$$\begin{aligned} F &\equiv U_2^2 + U_3^2 + U_4^2, \\ \phi &\equiv 2U_1U_2. \end{aligned}$$

Ha pedig $U_2 = 0$ rajta van a kúpszeleten, akkor

$$\begin{aligned} F &\equiv 2U_2U_3 + U_4^2, \\ \phi &\equiv 2U_1U_2. \end{aligned}$$

Ha az egyik kúpszelet egy a másik kúpszeleten kívül fekvő ponttá zsugorodik össze, akkor

$$\begin{aligned} F &\equiv U_2^2 + U_3^2 + U_4^2, \\ \phi &\equiv U_1^2. \end{aligned}$$

Végül megtörténhetik, hogy mindkét kúpszelet pontpárrá degenerál, akkor azokat koordináta-tetraéderünk szögpontjaiul választván, eljutunk a kanonikus alakokhoz.

Hasonló szellemben történik a tárgyalás abban az esetben is, midőn a két másodosztályú felület közül csak az egyik degenerál kúpszeletté, azonban ezen esetek közül csak azokat tárgyalom, melyek elvezetnek hennünket a másodosztályú felületek egyenleteinek a főátmérőkre, azaz: az általánosan szokásban levő koordináta-rendszerre vonatkoztatott alakjaihoz, s egyúttal alkalmat adnak a forgási felületekre vonatkozó kritériumok megállapítására is.

21. A másodosztályú felületek transzformációja a képzetes gömbkörre nézve.

I. A 7. §. szerint a másodosztályú felület centrumának koordinátái

$$\rho x_i = A_{4i}$$

tehát a felület centruma a végesben van, ha A_{44} nem zérus, azaz: az ellipszoidok és hiperboloidok centruma a végesben van, tehát három főátmérőjüknek találkozási pontja szintén a végesben (centrumban) van. Mint láttuk a felület egyenletét három egymásra merőleges konjugált átmérőjére vonatkozó koordináta-rendszerre transzformálni annyit tesz, mint a felület és a

képzetes gömbkör közös polártetraéderét választani koordináta-rendszerül és erre transzformálni; azaz:

$$\Phi \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad \text{és} \quad F \equiv \Sigma \Sigma A_{ik} u_i u_k$$

egyenleteket

$$\left. \begin{aligned} \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + U_3^2, \\ F &\equiv -\frac{U_1^2}{\nu_1} - \frac{U_2^2}{\nu_2} - \frac{U_3^2}{\nu_3} + U_4^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

alakba transzformálni. Jelölésünkben alkalmazkodtunk a 19-ik fejezet I. pontjának végén tett megjegyzéshez, midőn μ helyett $\frac{1}{\nu}$ -t kellett bevezetni. U_4^2 együttthatóját az egységgel tettük egyenlővé; mert a transzformációnál fellépő négy határozatlan parameter azt megengedi. ν értékeit meghatározzák a

$$\Phi + \nu F = 0$$

egyenlet determinánsának gyökei:

$$\Delta(\nu) \equiv \begin{vmatrix} \nu A_{11} + 1 & \nu A_{12} & \nu A_{13} & \nu A_{14} \\ \nu A_{21} & \nu A_{22} + 1 & \nu A_{23} & \nu A_{24} \\ \nu A_{31} & \nu A_{32} & \nu A_{33} + 1 & \nu A_{34} \\ \nu A_{41} & \nu A_{42} & \nu A_{43} & \nu A_{44} + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Kifejtett alakban:

$$\Delta(\nu) \equiv a\nu^4 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\nu^3 + [A_{44}(A_{11} + A_{22} + A_{33}) - A_{14}^2 - A_{24}^2 - A_{34}^2]\nu^2 + A_{44}\nu = 0,$$

tehát

$$\frac{1}{a} A_{44} = -\nu_1 \nu_2 \nu_3.$$

Ezenkívül

$$\begin{aligned} \Delta_0(\nu) &\equiv \begin{vmatrix} -\frac{\nu}{\nu_1} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{\nu_2} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{\nu_3} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{vmatrix} \\ &= -\nu \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_3} - 1 \right), \end{aligned}$$

tehát

$$R^2 \Delta(\nu) = \Delta_0(\nu)$$

egyenlet alapján:

$$R^2 a = -\frac{1}{\nu_1 \nu_2 \nu_3} = +\frac{a}{A_{44}}; \quad (2)$$

$$R^2 A_{44} = +1.$$

A transzformációra szolgáló formulák.

$$R^2 \Sigma \Delta_{ik}(\nu) x_i x_k = \nu \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_3} - 1 \right) X_1^2 + \nu \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_3} - 1 \right) X_2^2 \\ + \nu \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right) X_3^2 - \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_3} - 1 \right) X_4^2 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Delta_{ik}(\nu_1) x_i x_k &= \nu_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} - 1 \right) \left(\frac{\nu_1}{\nu_3} - 1 \right) X_1^2, \\ R^2 \Sigma \Delta_{ik}(\nu_2) x_i x_k &= \nu_2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu_2}{\nu_3} - 1 \right) X_2^2, \\ R^2 \Sigma \Delta_{ik}(\nu_3) x_i x_k &= \nu_3 \left(\frac{\nu_3}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu_3}{\nu_2} - 1 \right) X_3^2, \\ R^2 \Sigma \Delta_{ik}(0) x_i x_k &= R^2 x_4^2 = X_4^2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Honnan, tekintettel a (2) és a 19. §. (2'') alatt levő egyenleteire:

$$\left. \begin{aligned} a \nu_1^2 (\nu_1 - \nu_2) (\nu_1 - \nu_3) \beta_{i1} \beta_{k1} &= -\Delta_{ik}(\nu_1), \\ a \nu_2^2 (\nu_2 - \nu_3) (\nu_2 - \nu_1) \beta_{i2} \beta_{k2} &= -\Delta_{ik}(\nu_2), \\ a \nu_3 (\nu_3 - \nu_1) (\nu_3 - \nu_2) \beta_{i3} \beta_{k3} &= -\Delta_{ik}(\nu_3), \\ \beta_{ik} \beta_{k4} &= 0, i, k \leq 4 \\ R^2 &= \beta_{44}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Tehát

$$\begin{aligned} u_1 &= \beta_{11} U_1 + \beta_{12} U_2 + \beta_{13} U_3, \\ u_2 &= \beta_{21} U_1 + \beta_{22} U_2 + \beta_{23} U_3, \\ u_3 &= \beta_{31} U_1 + \beta_{32} U_2 + \beta_{33} U_3, \\ u_4 &= \beta_{41} U_1 + \beta_{42} U_2 + \beta_{43} U_3 + \beta_{44} U_4. \end{aligned}$$

Mínthogy a koordinátákat szabad egy tetszőleges tényezővel végig szorozni, azért β_{44} helyett az egységet is tehetjük, különben ez nem szükséges. Az (5) utolsó egyenlete alapján:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & 0 \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{vmatrix}^2 = \beta_{44}^2,$$

tehát

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}^2 = 1$$

Mivel az új koordináta rendszerben az $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ síkok egymásra merőlegesek, azért

$$\beta_{11} \beta_{12} + \beta_{21} \beta_{22} + \beta_{31} \beta_{32} = 0.$$

Könnyű azt is kimutatni, hogy

$$\beta_{11}^2 + \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 = 1;$$

az (5) egyenletek elseje alapján ugyanis:

$$\begin{aligned} a\nu_1^2(\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 - \nu_3)(\beta_{11}^2 + \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2) &= -[A_{11}(\nu_1) + A_{22}(\nu_2) + A_{33}(\nu_3)] \\ &= (a_{11} + a_{22} + a_{33})\nu_1^3 - 2[A_{44}(A_{11} + A_{22} + A_{33}) - A_{14}^2 - A_{24}^2 - A_{34}^2]\nu_1^2 - 3A_{44}\nu_1 \\ &= a(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)\nu_1^3 - 2a(\nu_1\nu_2 + \nu_1\nu_3 + \nu_2\nu_3)\nu_1^2 + 3a\nu_1^2\nu_2\nu_3 \\ &= a\nu_1^2(\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 - \nu_3), \end{aligned}$$

evvel a fentebb fölirt egyenlet helyességét kimutattuk, azaz: *a transzformáció, melyet eszközölünk, orthogonális transzformáció.*

II. Ha $A_{44}=0$, akkor a felületek centruma a végtelenben van; tehát *a paraboloidok centruma a végtelenben van.* Az imént megállapított transzformációt tehát a jelen esetben nem használhatjuk, azért a következővel helyettesíthetjük.

Képzeld, hogy egy paraboloid sor a végtelenben érintkezik, akkor, miként a 19. §. II. pontjában kimutattuk, a felületsorhoz tartozik egy, a felületek érintkezési pontjához tartozó érintő síkban elhelyezett kúpszelet is. Hogy a végtelenben egy pontban csakis a paraboloidok érintkezhetnek, az következik abból: hogy a végtelen távol fekvő sík csakis a paraboloidokat érinti minden más felületet képzetes, vagy valós kúpszeletben metsz. Ha tehát a 19. §. II. pontjában alkalmazott transzformáció keresztülvitelénél egyik alapfelületül a paraboloid végtelenben fekvő érintő síkján levő képzetes gömbkört választjuk, akkor az

$$F \equiv \Sigma \Sigma A_{ik} u_i u_k, \quad \Phi \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

egyenleteknek az idézett II. pontban alkalmazott koordináta-transzformáció véghezvitelénél az ott talált (13) alatt levő egyenleteknek, minthogy most

$$a_3=0, \quad a_2=-\frac{1}{\nu_1}, \quad a_1=-\frac{1}{\nu_2}$$

és az együtthatókat szabad az egyik egyenletből a másikba áttenni,

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\frac{U_1^2}{\nu_1} - \frac{U_2^2}{\nu_2} + U_3 U_4, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

egyenletek felelnek meg, hol $U_3=0$, a *paraboloid végtelenben levő pontja*, a mi nem más mint a $(0, 0, 0, 1)$ sík érintési pontja, az $U_4=0$ pedig az $F=0$ felületen a $(0, 0, 1, 0)$ sík érintési pontja. Az $U_4=0$ pontot a paraboloid csúcsának, az (U_4, U_3) egyenest, mely a paraboloid csúcsát a végtelenben levő pontjával köti össze, a *paraboloid tengelyének* nevezzük.

Az $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ és a $(0, 0, 1, 0)$ síkok, miként az $F=0$ és $\Phi=0$ egyenletekből látható, konjugáltak úgy az $F=0$ felületre, mint a képzetes gömbkörre nézve, tehát a 16. §-ban kimutatott tételnek fogva egymásra merőlegesek.

Minthogy az $(1, 0, 0, 0)$ és $(0, 1, 0, 0)$ síkok metszészvonala nem más, mint a tengely, a $(0, 0, 1, 0)$ pedig a paraboloid csúcsához vont érintő sík, azért a paraboloid csúcsához tartozó érintő sík a paraboloid tengelyére merőlegesen áll.

Minthogy a $(0, 0, 0, 1)$ síkon a három konjugált sík meghatározta háromszög a képzetes gömbkörre nézve polárháromszöget alkot, azért az $(1, 0, 0, 0)$ és $(0, 1, 0, 0)$ síkoknak a $(0, 0, 0, 1)$ síkkal való metszés vonalai (U_3, U_2) (U_3, U_1) az $U_3=0$ pontból a képzetes gömbkörhöz vont érintőkre nézve harmonikus párt képeznek, tehát felezik a paraboloid végtelen távol fekvő pontjából a képzetes gömbkörhöz menő érintők alkotta szögeket.

Miután koordináta-rendszerünkről teljes képet nyertünk, átterhetünk a transzformáció formuláinak megállapítására; a

$$\nu F + \Phi = 0, \quad A_{44} = 0$$

egyenletekből következik, hogy jelen esetben a ν -k meghatározására a következő egyenlet szolgál:

$$\Delta(\nu) \equiv \nu^2 \begin{vmatrix} \nu A_{11} + 1 & \nu A_{12} & \nu A_{13} & \nu A_{14} \\ \nu A_{21} & \nu A_{22} + 1 & \nu A_{23} & \nu A_{24} \\ \nu A_{31} & \nu A_{32} & \nu A_{33} + 1 & \nu A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a\nu^4 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\nu^3 - (A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2)\nu^2 = 0.$$

$$R^2 \Delta(\nu) \equiv \begin{vmatrix} 1 - \frac{\nu}{\nu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\nu}{\nu_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \nu \\ 0 & 0 & \nu & 0 \end{vmatrix} = -\nu^2 \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right),$$

tehát

$$\left. \begin{aligned} R^2 a &= -\frac{1}{\nu_1 \nu_2} = + \frac{a}{A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2}, \\ R^2 (A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\nu) x_i x_k &= \nu^2 \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right) X_1^2 + \nu^2 \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) X_2^2 + \\ &+ \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right) X_4^2 - 2\nu \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right) X_3 X_4. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\nu_1) x_i x_k &= \nu_1^2 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} - 1 \right) X_1^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\nu_2) x_i x_k &= \nu_2^2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} - 1 \right) X_2^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(0) x_i x_k &= R^2 x_4^2 = X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(0) x_i x_k &= -\left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \right) X_4^2 - 2X_3 X_4. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Honnan

$$\left. \begin{aligned} a\nu_1^3 (\nu_1 - \nu_2) \beta_{i1} \beta_{k1} &= -\Delta_{ik}(\nu_1), \\ a\nu_2^3 (\nu_2 - \nu_1) \beta_{i2} \beta_{k2} &= -\Delta_{ik}(\nu_2), \\ \beta_{i4} \beta_{k4} &= 0 \quad (i, k \leq 4), \\ R^2 &= \beta_{44}^2, \\ 2\beta_{i3} &= -\beta_{44} \Delta'_{i4}(0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Tehát

$$\begin{aligned} u_1 &= \beta_{11} U_1 + \beta_{12} U_2 + \beta_{13} U_3, \\ u_2 &= \beta_{21} U_1 + \beta_{22} U_2 + \beta_{23} U_3, \\ u_3 &= \beta_{31} U_1 + \beta_{32} U_2 + \beta_{33} U_3, \\ u_4 &= \beta_{41} U_1 + \beta_{42} U_2 + \beta_{43} U_3 + \beta_{44} U_4. \end{aligned}$$

A (10) alatt levő egyenletek negyedikéből következik, hogy

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix}^2 = 1.$$

Miként az I. pontban, úgy itt is könnyű kimutatni, hogy

$$\begin{aligned} \beta_{11}\beta_{12} + \beta_{21}\beta_{22} + \beta_{31}\beta_{32} &= 0, \\ \beta_{11}^2 + \beta_{21}^2 + \beta_{31}^2 &= 1; \end{aligned}$$

tehát a *transzformáció orthogonális*.

III. Ha az I. pontban előforduló

$$\Delta(\nu) = 0$$

egyenletnek két gyöke ν_2 és ν_3 egymással egyenlők és $\Delta_{ik}(\nu_2) = 0$, akkor, miként a 19. §. VI. pontjában láttuk a felületsor tagjai egymást két pontban érintik, ha a felületsorban benne van a képzetes gömbkör is, akkor a felületsor tagjai forgási felületek; a VI.-ban alkalmazott transzformáció eszközlése után tehát

$$F \equiv \sum \sum A_{ik} u_i u_k, \quad \Phi \equiv u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

egyenletek a következő alakban jelennek meg:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\frac{U_1^2}{\nu_1} - \frac{U_2^2}{\nu_2} - \frac{U_3^2}{\nu_2} + U_4^2, \\ \Phi &\equiv U_1^2 + U_2^2 + U_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

A transzformáció elvégzésére szolgáló formulák:

$$R^2 \Delta(\nu) \equiv -\nu \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right)^2,$$

$$R^2 A_{44} = 1.$$

$$\begin{aligned} R^2 \sum \sum \Delta_{ik}(\nu) x_i x_k &= \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right)^2 \left[\nu X_1^2 - \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) X_4^2 \right] + \\ &+ \nu \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) \left(\frac{\nu}{\nu_2} - 1 \right) (X_2^2 + X_3^2); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\nu_1) x_i x_k &= \nu_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} - 1 \right)^2 X_1^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(0) x_i x_k &= R^2 x_4^2 = X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\nu_2) x_i x_k &= \nu_2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} - 1 \right) (X_2^2 + X_3^2). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ez a három egyenlet a transzformáció eszközlésére azon tetszőlegességnél fogva, mely a koordináta-rendszer megválasztásában nyilvánul (l. 19. §. VI.), elégséges.

IV. Ha a II. pontban előforduló

$$\Delta(\nu) = 0$$

egyenletnek ν_1 és ν_2 gyöke egymással egyenlő és $\Delta_{ik}(0) = 0$, akkor miként a 19. §. VIII. pontja alatt láttuk, a lefejtető felület két síkesomóvá és egy kúppá degenerál, a síkesomók tengelyei rajta vannak a felületsoron és érintik a felületsorhoz tartozó kúpszeletet, mely ha a képzetes gömbkörrel összeesik, akkor a felületsor tagjai forgási paraboloidok; a VIII.-ban bemutatott transzformáció végrehajtása után tehát:

$$\left. \begin{aligned} F &\equiv -\frac{U_1^2}{\nu_1} - \frac{U_2^2}{\nu_1} + U_3 U_4, \\ \Phi &\equiv +\frac{U_1^2}{\nu_1} + \frac{U_2^2}{\nu_1} + U_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

A transzformálásra szolgáló formulák:

$$\left. \begin{aligned} R^2 (A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2) &= 1 \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(\nu) x_i x_k &= \nu^2 \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right) (X_1^2 + X_2^2) + \\ &+ \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right)^2 (X_4^2 - 2\nu X_3 X_3) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(\nu_1) x_i x_k &= \nu_1^2 (X_1^2 + X_2^2), \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta_{ik}(0) x_i x_k &= R^2 x_4^2 = X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma \Delta'_{ik}(0) x_i x_k &= -\frac{2}{\nu_1} X_4^2 - 2X_3 X_4 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

V. Ha a

$$\Delta(\nu) = 0$$

egyenletnek ν_1, ν_2, ν_3 gyökei egyenlők és $\Delta_{ik}(\nu_1)$ második al-determinánsai is eltűnnek, akkor a 19. §. XII. pontja szerint a

felületsor tagjai a felületsorhoz tartozó kúpszeletben érintkeznek, ha ez a kúpszelet a képzetes gömbkör, akkor a felületek mindegyike gömb és a XII.-ben eszközölt transzformáció végéhez vitele után:

$$\left. \begin{aligned} F &= -\frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}{\nu_1} + U_4, \\ \phi &= U_1^2 + U_2^2 + U_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} R^2 J(\nu) &= -\nu \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right)^3; \\ R^2 \Sigma \Sigma J_{ik}(\nu) x_i x_k &= \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right)^2 (X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) - \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1 \right)^3 X_4^2. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} R^2 \Sigma \Sigma J_{ik}(0) x_i x_k &= R^2 x_4^2 = X_4^2, \\ R^2 \Sigma \Sigma J_{ik}''(\nu_1) x_i x_k &= 2\nu_1 X_1^2 + X_2^2 + X_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

22. A másodosztályú forgási felületek kritériumainak megállapítása.

Eltekintve most attól, hogy A_{44} egyenlő-e zérussal, vagy nem, kimutatjuk, hogy

$$F = \Sigma \Sigma A_{ik} u_i u_k = 0$$

felület forgási felület, ha

$$\Delta(\nu) = \begin{vmatrix} A_{11}\nu+1 & A_{12}\nu & A_{13}\nu & 1A_{14}\nu \\ A_{21}\nu & A_{22}\nu+1 & A_{23}\nu & A_{24}\nu \\ A_{31}\nu & A_{32}\nu & A_{33}\nu+1 & A_{34}\nu \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

egyenletnek van kétszeres gyöke; ha pedig háromszoros gyöke van, akkor a felület gömb.

$\Delta(\nu)=0$ egyenletnek kétszeres gyöke van, ha

$$\Delta'(\nu) = 3\Delta(\nu) - (J_{11} + J_{22} + J_{33} + J_{44}) = 0$$

Mint hogy $\Delta(\nu)$ szimmetrikus determináns, azért eltűnésénél J_{ii} -k egyenlő előjelűek, tehát

$$J_{11} = J_{22} = J_{33} = J_{44} = 0 \quad (2)$$

azaz: az összes első aldeterminánsok eltűnnek, tehát a felület csakugyan forgási felület.

$\Delta(\nu)=0$ egyenletnek háromszoros gyöke van, ha

$$\Delta''(\nu) = 3\Delta'(\nu) - \sum_{i=1}^3 (2\Delta_{ii} - \Delta_{ii1} - \Delta_{ii2} - \Delta_{ii3}) - (3\Delta_{44} - \Delta_{441} - \Delta_{442} - \Delta_{443}),$$

hol Δ_{iiss} Δ_{ii} -nek az s -ik átlói eleméhez tartozó aldeterminánsa; a (2)-nél fogva ezek egyenlő előjelűek, tehát

$$\Delta_{iiss} = 0 \quad (3)$$

azaz: $\Delta(\nu)$ második aldeterminánsai is eltűnnek, tehát a felület gömb.

A (2) egyenletrendszer helyettesítsük

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$$

egyenletrendszerrel, mely ν -ben első fokú; a (3)-t pedig

$$\Delta_{1111} = \Delta_{1122} = \Delta_{2222} = 0,$$

és

$$\Delta_{1112} = \Delta_{2212} = \Delta_{3312} = 0$$

egyenletrendszerrel, az utóbbinak ν -vel osztottja ν -ben zérus-fokú.

Részletes alakban:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{12} &= \nu a_{12} + \begin{vmatrix} A_{21} & A_{24} \\ A_{41} & A_{44} \end{vmatrix} = \nu a_{12} + \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \\ \Delta_{13} &= \nu a_{13} - \begin{vmatrix} A_{31} & A_{34} \\ A_{41} & A_{44} \end{vmatrix} = \nu a_{13} - \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \\ \Delta_{23} &= \nu a_{23} + \begin{vmatrix} A_{32} & A_{34} \\ A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} = \nu a_{23} + \frac{1}{a} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1112} &= \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0, & \Delta_{1111} &= \nu \frac{1}{a} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + A_{44} = 0, \\ \Delta_{2212} &= \begin{vmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} = 0, & \Delta_{1122} &= \nu \frac{1}{a} (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + A_{44} = 0, \\ \Delta_{3312} &= \begin{vmatrix} A_{12} & A_{14} \\ A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} = 0, & \Delta_{2222} &= \nu \frac{1}{a} (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + A_{44} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ennek a két egyenletrendszernek egyidejű fennállása

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

és

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}$$

feltételekhez vezet.

A felület tehát gömb, ha

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= a_{13} = a_{23} = 0 \\ a_{11} &= a_{22} = a_{33} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ha pedig csak a (4) alatt levő egyenletrendszer teljesül, akkor

$$\nu = \frac{a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}}{aa_{12}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{aa_{13}} = \frac{a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11}}{aa_{23}}.$$

A forgási felületek kriteriuma tehát:

$$\frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}} - a_{33} = \frac{a_{23}a_{12}}{a_{13}} - a_{22} = \frac{a_{21}a_{13}}{a_{23}} - a_{11}. \quad (7)$$

Ha az a_{12} , a_{23} , a_{31} közül egyik elenyészik, akkor még egynek el kell enyésznie, hogy a (4) alatt levő egyenletek teljesüljenek; legyen

$$a_{12} = a_{13} = 0,$$

akkor

$$\nu = -\frac{a_{11}}{a},$$

ha ezt az értéket a fentebbi feltétel mellett

$$\Delta_{11} = \nu^2 a_{11} + \nu(a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \frac{1}{a} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \frac{1}{a^2} = 0$$

egyenletbe behelyettesítjük

$$(a_{11} - a_{33})(a_{11} - a_{22}) - a_{23}^2 = 0$$

relációhoz jutunk, ha pedig $\Delta_{22} = \Delta_{33} = 0$ egyenletekbe helyettesítjük, akkor azonosan zérust kapunk; *ennélfogva általánosan: ha*

$$a_{hi} = a_{hk} = 0,$$

akkor a forgásfelületek kriteriuma

$$(a_{hh} - a_{ii})(a_{hh} - a_{kk}) - a_{ik}^2 = 0. \quad (7')$$

Ha pedig

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0,$$

akkor

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a_{11}} \Delta_{11} &= \nu^2 + \frac{1}{a} \nu(a_{33} + a_{22}) + \frac{1}{a^2} a_{33}a_{22} = 0, \\ \frac{1}{a_{22}} \Delta_{22} &= \nu^2 + \frac{1}{a} \nu(a_{11} + a_{33}) + \frac{1}{a^2} a_{11}a_{33} = 0, \\ \frac{1}{a_{33}} \Delta_{33} &= \nu^2 + \frac{1}{a} \nu(a_{22} + a_{11}) + \frac{1}{a^2} a_{22}a_{11} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

egyenletek alapján a forgási felületek kriteriuma:

$$\nu = a_{ii} = a_{kk} \geq a_{hh}. \quad (7')$$

Mind a három a_{ii} nem lehet egymással egyenlő, mert ekkor az (5) alatt levő egyenletek is fennállnának.

Hogy a megállapított kriteriumok nemcsak szükségesek, hanem elégségesek is, az már a 14. §-ban közlöttekéből is kitűnik, de különben is

$$\Delta_{11} = a_{11} \frac{\Delta_{12}\Delta_{13}}{a_{12}a_{13}} + \frac{1}{a} (a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}) \quad \text{s i. t.}$$

képletek helyessége azt mondja, hogy Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} -mal együtt Δ_{11} , Δ_{22} , Δ_{33} is eltűnnek, de ekkor

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \Delta_{14} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \Delta_{24} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} & \Delta_{34} \\ \Delta_{41} & \Delta_{42} & \Delta_{43} & \Delta_{44} \end{vmatrix} = \Delta^3$$

egyenlet értelmében Δ is null, ennek következtében Δ_{44} is az.

23. A forgási felületeket meghatározó feltételek száma.

Az előbbi fejezetben láttuk, hogy az

$$F = \sum \sum A_{ik} u_i u_k$$

forgási felület, ha együtthatói között a (7) alatt levő két feltétel teljesül, tehát a forgási felületek meghatározásához 7 feltétel szükséges: kettő meghatározza tengelyét, öt pedig a tengelyen keresztül menő tetszőleges síkban elhelyezett kúpszeletet.

Az $F=0$ felület gömb, ha együtthatói között az előbbi fejezet (6) alatt levő 5 relációja teljesül, tehát a gömb meghatározásához 4 feltétel szükséges.

24. A képzetes gömbkörre vonatkozó felületsorok.

A 21. §-ban láttuk, hogy a képzetes gömbkörre vonatkozó felületsorok

$$F + \mu\Phi = (\mu_1 + \mu) u_1^2 + (\mu_2 + \mu) u_2^2 + (\mu_3 + \mu) u_3^2 - u_4^2 = 0, \quad (1)$$

vagy

$$F + \mu\Phi = (\mu_1 + \mu) u_1^2 + (\mu_2 + \mu) u_2^2 + \mu u_3^2 - 2u_3 u_4 = 0 \quad (2)$$

analitikai alakban jelennek meg.

Az első felületsorban a képzetes gömbkörön kívül három, a másodikban két kúpszelet fordul elő, ezeket a kúpszeleteket a felületsor fokális görbéinek nevezzük, a felületsor tagjait pedig konfokális felületeknek.

Az első felületsorban az ellipszoidok és hiperboloidok a másodikban pedig csakis a paraboloidok fordulnak elő, azért az első felületsort csak konfokális felületsornak, a másodikat pedig konfokális paraboloidsornak nevezzük.

Az (1) és (2) egyenletek pontkoordinátákban következőképpen jelennek meg:

$$\frac{x_1^2}{\mu_1 + \mu} + \frac{x_2^2}{\mu_2 + \mu} + \frac{x_3^2}{\mu_3 + \mu} - x_4^2 = 0, \quad (1')$$

$$\frac{x_1^2}{\mu_1 + \mu} + \frac{x_2^2}{\mu_2 + \mu} - \mu x_4^2 - x_3 x_4 = 0. \quad (2')$$

Az első sorhoz tartozó fokális görbék egyenletei.

$$\left. \begin{aligned} (\mu_2 - \mu_1) u_2^2 + (\mu_3 - \mu_1) u_3^2 - u_4^2 &= 0, \\ (\mu_1 - \mu_2) u_1^2 + (\mu_3 - \mu_2) u_3^2 - u_4^2 &= 0, \\ (\mu_1 - \mu_3) u_1^2 + (\mu_2 - \mu_3) u_2^2 - u_4^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Az általánosság megszorítása nélkül lehet

$$\mu_1 > \mu_2 > \mu_3;$$

ebben az esetben az első egyenlet képzetes kúpszeletet, a második hiperbolát, a harmadik ellipszist képvisel, tehát a konfokális felületek között csak két reális fokális görbe van, az egyiket fokális ellipszisnek, a másikat fokális hiperbolának nevezzük.

A konfokális paraboloidokhoz tartozó kúpszeletek egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} (\mu_2 - \mu_1) u_2^2 + \mu_1 u_3^2 - 2u_3 u_4 &= 0, \\ (\mu_1 - \mu_2) u_1^2 + \mu_2 u_3^2 - 2u_3 u_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

tehát a konfokális paraboloidoknak szintén két fokális görbékük van, mindkettő parabola.

Az (1') és (2') egyenlet μ -re nézve harmadfokúak s könnyű kimutatni, hogy minden gyökük reális, tehát *a tér minden pontján mindkét konfokális felületsorból három megy keresztül.*

Könnyű azt is kimutatni, hogy *a tér valamely pontján átmenő egy s ugyanazon konfokális felületsorhoz tartozó három felület egymásra merőleges.*

A bizonyítást csak a konfokális paraboloidokra nézve mutatom be, miután a konfokális ellipszoidok- és hiperboloidokra nézve ilyen bizonyítással nem ritkán találkozunk. A térnek valamely x_0, y_0, z_0 pontjához tartozó μ parameter értékek legyenek $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; ennél fogva az ezen a ponton átmenő három konfokális paraboloid egyenletei derékszögű pontkoordinátákban:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\mu_1 + \lambda_1} + \frac{y^2}{\mu_2 + \lambda_1} - 2z - \lambda_1 &= 0, \\ \frac{x^2}{\mu_1 + \lambda_2} + \frac{y^2}{\mu_2 + \lambda_2} - 2z - \lambda_2 &= 0, \\ \frac{x^2}{\mu_1 + \lambda_3} + \frac{y^2}{\mu_2 + \lambda_3} - 2z - \lambda_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Kimutatjuk, hogy ezek közül bármelyik kettő az x_0, y_0, z_0 pontban egymásra merőleges, az első kettőnek ehhez a ponthoz tartozó érintősíkjaiknak egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_0 x}{\mu_1 + \lambda_1} + \frac{y_0 y}{\mu_2 + \lambda_1} - z - \lambda_1 &= 0, \\ \frac{x_0 x}{\mu_1 + \lambda_2} + \frac{y_0 y}{\mu_2 + \lambda_2} - z - \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Ez a két sík egymásra merőleges, ha

$$\frac{x_0^2}{(\mu_1 + \lambda_1)(\mu_1 + \lambda_2)} + \frac{y_0^2}{(\mu_2 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_2)} + 1 = 0$$

főltétel teljesül, ez pedig nem más, mint az (5) alatt levő első két egyenlet különbségének $\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ -szereése, tehát a (6) alatt levő síkok egymásra merőlegesek, a mi bebizonyítandó volt.

Azonban megfordítva is minden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ értékrendszerhez tartozik a tér egy pontja, melynek koordinátáit következőképen határozzuk meg: Ha $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ az (1') levő egyenletben μ gyökei, akkor

$$f(\mu) = \left(\frac{x^2}{\mu_1 + \mu} + \frac{y^2}{\mu_2 + \mu} + \frac{z^2}{\mu_3 + \mu} - 1 \right) (\mu_1 + \mu) (\mu_2 + \mu) (\mu_3 + \mu) =$$

$$= -(\mu - \lambda_1) (\mu - \lambda_2) (\mu - \lambda_3),$$

$$\frac{x^2}{\mu_1 + \mu} + \frac{y^2}{\mu_2 + \mu} + \frac{z^2}{\mu_3 + \mu} - 1 = -\frac{(\mu - \lambda_1) (\mu - \lambda_2) (\mu - \lambda_3)}{(\mu_1 + \mu) (\mu_2 + \mu) (\mu_3 + \mu)}.$$

Ha ennek az egyenletnek mindkét oldalát rendre $\mu_1 + \mu$, $\mu_2 + \mu$, $\mu_3 + \mu$ -vel szorozzuk s azután μ helyébe megfelelően $-\mu_1$, $-\mu_2$, $-\mu_3$ -t teszünk, akkor a következő egyenletekhez jutunk:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda_1 + \mu_1) (\lambda_2 + \mu_1) (\lambda_3 + \mu_1)}{(\mu_1 - \mu_2) (\mu_1 - \mu_3)}, \\ y^2 &= \frac{(\lambda_1 + \mu_2) (\lambda_2 + \mu_2) (\lambda_3 + \mu_2)}{(\mu_2 - \mu_1) (\mu_2 - \mu_3)}, \\ z^2 &= \frac{(\lambda_1 + \mu_3) (\lambda_2 + \mu_3) (\lambda_3 + \mu_3)}{(\mu_3 - \mu_1) (\mu_3 - \mu_2)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

x , y , z helyett tehát a λ -akat is vehetjük a tér pontjainak meghatározására és ezeket, mint az (1') egyenletben μ gyökeit, *elliptikus*, mint a (2') egyenletben μ gyökeit, *parabolikus* koordinátáknak nevezzük.

Hasonló eljárással megállapíthatjuk a parabolikus és derékszögű koordináták között levő összefüggést is, de mivel z értékét ezen módon nehéz meghatározni, azért más módszert követünk, ugyanis az (5) alatt levő egyenletrendszer a determinánsok segítségével megoldjuk; az eredmény:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= -\frac{(\lambda_1 + \mu_1) (\lambda_2 + \mu_1) (\lambda_3 + \mu_1)}{\mu_1 - \mu_2}, \\ y^2 &= -\frac{(\lambda_1 + \mu_2) (\lambda_2 + \mu_2) (\lambda_3 + \mu_2)}{\mu_2 - \mu_1}, \\ 2z &= \mu_1 + \mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Az x_0 , y_0 , z_0 pontból az (1) felületsorhoz vont érintőkúp egyenlete a 8. §. fejtegetései szerint:

$$\begin{vmatrix} \mu_1 + \mu & 0 & 0 & 0 & x_0 & x \\ 0 & \mu_2 + \mu & 0 & 0 & y_0 & y \\ 0 & 0 & \mu_3 + \mu & 0 & z_0 & z \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 & 0 & 0 \\ x & y & z & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

ez az egyenlet μ -re nézve másodfokú, tehát következő alakba írható:

$$\Phi(\mu) = P + \mu Q + \mu^2 R^2.$$

Ha az x_0, y_0, z_0 ponthoz tartozó három konfokális felület meghatározói l, m, n , s mivel ezekre nézve az érintő kúp ket-tős síkká degenerál, azért ha ezeket, mint új derékszögű koor-dinátarendszerünk síkjait ξ, η, ζ -val jelöljük, akkor

$$\Phi(l) = \rho_1 \xi^2,$$

$$\Phi(m) = \rho_2 \eta^2,$$

$$\Phi(n) = \rho_3 \zeta^2.$$

Mivel ρ -k x, y, z minden érték-rendszere mellett állandók, azért meghatározásukat is a változók bármily érték-rendszere mellett lehet eszközölni; eszközöljük $x=0, y=0, z=0$ mellett, ekkor

$$\begin{aligned} \Phi(l)_{x,y,z=0} &= -(\mu_1+l)(\mu_2+l)(\mu_3+l) \left(\frac{x_0^2}{\mu_1+l} + \frac{y_0^2}{\mu_2+l} + \frac{z_0^2}{\mu_3+l} \right) \\ &= -(\mu_1+l)(\mu_2+l)(\mu_3+l) \end{aligned}$$

ξ pedig a változó koordináták $(0, 0, 0)$ érték-rendszere mellett nem más, mint a $\xi=0$ síknak az eredeti koordináta-rendszer kezdőpontjától való távolsága, tehát

$$\left(\frac{1}{\xi^2} \right)_{x,y,z=0} = \frac{x_0^2}{(\mu_1+l)^2} + \frac{y_0^2}{(\mu_2+l)^2} + \frac{z_0^2}{(\mu_3+l)^2}.$$

Tekintettel a (7) alatt levő egyenletekre s a részlettörtekre bontás törvényeire:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\xi^2} \right)_{x,y,z=0} &= \frac{(\mu_1+m)(\mu_1+n)}{(\mu_1+l)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} + \frac{(\mu_2+m)(\mu_2+n)}{(\mu_2+l)(\mu_2-\mu_1)(\mu_2-\mu_3)} \\ &+ \frac{(\mu_3+m)(\mu_3+n)}{(\mu_3+l)(\mu_3-\mu_1)(\mu_3-\mu_2)} = \frac{(l-m)(l-n)}{(\mu_1+l)(\mu_2+l)(\mu_3+l)}; \end{aligned}$$

tehát

$$\rho_1 = -(l-m)(l-n);$$

hasonlóképen találjuk, hogy

$$\rho_2 = -(m-n)(m-l),$$

$$\rho_3 = -(n-l)(n-m).$$

Ha tehát

$$\begin{aligned}\rho_1 \xi^2 &= P + lQ + l^2 R, \\ \rho_2 \eta^2 &= P + mQ + m^2 R, \\ \rho_3 \zeta^2 &= P + nQ + n^2 R, \\ \Phi &= P + \mu Q + \mu^2 R,\end{aligned}$$

egyenlet-rendszerből P, Q, R -t kiküszöböljük

$$\begin{vmatrix} 1 & l & l^2 & \rho_1 & \xi^2 \\ 1 & m & m^2 & \rho_2 & \eta^2 \\ 1 & n & n^2 & \rho_3 & \zeta^2 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \Phi & \end{vmatrix} = 0$$

egyenlethez jutunk, honnan

$$\Phi = \xi^2 (m - \mu) (n - \mu) + \eta^2 (l - \mu) (n - \mu) + \zeta^2 (l - \mu) (m - \mu).$$

Az x_0, y_0, z_0 pontból tehát a felületsor (μ) tagjához menő érintő kúp egyenlete:

$$\frac{\xi^2}{l - \mu} + \frac{\eta^2}{m - \mu} + \frac{\zeta^2}{n - \mu} = 0. \quad (9)$$

Határozzuk meg, mely pontokból lehet a felületsorhoz forgási érintő kúpot húzni.

Láttuk, hogy l, m, n

$$f(\mu) = \left(\frac{x_0^2}{\mu_1 + \mu} + \frac{y_0^2}{\mu_2 + \mu} + \frac{z_0^2}{\mu_3 + \mu} - 1 \right) (\mu_1 + \mu) (\mu_2 + \mu) (\mu_3 + \mu) = 0$$

egyenletnek gyökei, mivel $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$ föltételnél fogva

$$\begin{aligned}f(\infty) &< 0, \\ f(-\mu_3) &> 0, \\ f(-\mu_2) &< 0, \\ f(-\mu_1) &> 0,\end{aligned}$$

azért

$$\infty > l > -\mu_3 > m > -\mu_2 > n > -\mu_1,$$

tehát $f(\mu)=0$ -nak kettős gyöke vagy úgy lehet, hogy

$$\left. \begin{aligned}l &= m = -\mu_3, \\ m &= n = -\mu_2.\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Már pedig ha $f(\mu)=0$ egyenletnek kétszeres gyökei vannak, akkor a (9) egyenlet forgási kúpot képvisel, tehát a (9) az l ,

m, n -nek csakis a (10) alatt levő értékei mellett lehet forgási kúpnak az egyenlete; más részről tudjuk azt is, miként az (1) egyenletből is kiolvasható, hogy μ -nek a (10) alatt levő értékei mellett az x_0, z_0, y_0 ponthoz tartozó megfelelő konfokális felület konfokális görbévé degenerál. Tehát a konfokális görbe azoknak a pontoknak mértani helye, melyekből a felületsorhoz forgási érintő kúpokat lehet vonni. Pl. az

$$l=m=-\mu_3$$

érték-rendszerhez tartozó konfokális kúpszelet egyenletei pontkoordinátákban

$$\frac{x_0^2}{\mu_1 - \mu_3} + \frac{y_0^2}{\mu_2 - \mu_3} - 1 = 0, \quad z_0 = 0;$$

az x_0, y_0, z_0 ponthoz tartozó forgási kúp egyenlete pedig

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{\mu_3 + \mu} + \frac{\zeta^2}{\mu - n} = 0.$$

Főntebb közölt transzformáczióink ebben az esetben elveszti jelentőségét, mert $l=m$ esetben $\xi=\eta$, tehát ξ és η síkokul bármilyen két egymásra és $\zeta=0$ síkra is merőleges síkot választhatunk. A $\zeta=0$ sík nem más, mint az (n) felülethez az $(x_0, y_0, 0)$ pontban vont érintő sík, tehát

$$\frac{xx_0}{\mu_1 + n} + \frac{yy_0}{\mu_2 + n} - 1 = 0.$$

Minthogy $x_0, y_0, 0$ pontban érvényes a következő két egyenlet:

$$\frac{x_0^2}{\mu_1 + n} + \frac{y_0^2}{\mu_2 + n} - 1 = 0,$$

$$\frac{x_0^2}{\mu_1 - \mu_3} + \frac{y_0^2}{\mu_2 - \mu_3} - 1 = 0,$$

azért különbségük is eltűnő kifejezést ad, azaz:

$$\frac{x_0^2}{(\mu_1 + n)(\mu_1 - \mu_3)} + \frac{y_0^2}{(\mu_2 + n)(\mu_2 - \mu_3)} = 0;$$

ez pedig azt mondja ki, hogy $\zeta=0$ sík merőleges a fokális görbe $(x_0, y_0, 0)$ pontjához vont érintőre, tehát a forgási kúp

tengelye összeesik a fokális görbének a kúp csúcspontjával összeeső pontjához tartozó érintőjével; ennél fogva az érintő forgási kúpok tengelyei nem párhuzamosak egymással, tehát egy párhuzamos síkrendszerre nem is állhatnak egyidejűleg merőlegesen, azaz: a felületeket nem érinthetik a párhuzamos körrendszerekben.

Csak egy van az érintő forgási kúpok között, mely a párhuzamos körrendszer egyik tagjában — a körpontban — érint, ez az a kétszeres sikká degenerált érintő kúp, mely a fokális görbe azon pontjához tartozik, melyben ez a felületet átdöfi; mert hogy a fokális görbe a felületet a körpontokban döfi át, arról könnyű meggyőződni, ugyanis ha kiszámítjuk a metszési pont koordinátáit, akkor azt találjuk, hogy azok megegyeznek a körpontoknak már megállapított koordinátaival. A fokális görbék tehát a felületsort merőlegesen (mert az egy ponton átmenő konfokális felületek egymásra merőlegesek) a körpontokban metszik.

25. A felületsorok tagjainak egymással való metszésvonalai.

Vizsgálódásunkat csak arra a két felületsorra terjesztjük ki, melyek egyike, ha az egyik alapfelület a képzetes gömbkör, konfokális felületsorrá, a másika pedig konfokális paraboloid sorrá válik. Ezt a két felületsort képviselő analitikai alakok a következők:

$$F + \mu \Phi \equiv (\mu_1 + \mu) \mu_1^2 + (\mu_2 + \mu) u_2^2 + (\mu_3 + \mu) u_3^2 + (\mu_4 + \mu) u_4^2 = 0, \quad (1)$$

$$F + \mu \Phi \equiv (\mu_1 + \mu) u_1^2 + (\mu_2 + \mu) u_2^2 - u_3^2 + 2(\mu_3 + \mu) u_3 u_4 = 0 \quad (2)$$

Kimutatjuk a következő tételt: A felületsorok tagjai az általánosított görbületi vonalakban metszik egymást. Ennek a tételnek különös esete a következő: A konfokális felületek a görbületi vonalakban metszik egymást.

Mielőtt tételünk hebizonyítását bemutatnám, előbb felületsorainknak egyenleteit pont-koordinátákban írom fel, ezek:

$$\frac{x_1^2}{\mu_1 + \mu} + \frac{x_2^2}{\mu_2 + \mu} + \frac{x_3^2}{\mu_3 + \mu} + \frac{x_4^2}{\mu_4 + \mu} = 0, \quad (1')$$

$$\frac{x_1^2}{\mu_1 + \mu} + \frac{x_2^2}{\mu_2 + \mu} + \frac{x_4^2}{(\mu_3 + \mu)^2} + \frac{2x_3 x_4}{\mu_3 + \mu} = 0. \quad (2')$$

$F=0$ alapfelület egyenletét pont-koordinátákban jelöljük $f=0$ -al, ennek a felületnek általánosított görbületi vonalai alatt értjük azokat a felületi vonalakat, melyeknek bármely két szomszédos pontja az ezen pontokhoz tartozó felületi érintő síkoknak a $\Phi=0$ tetszőleges másodosztályú felületre vonatkoztatott pólusai-val egy síkban van.

Ha $\Phi=0$ a képzetes gömbkört képviseli, akkor az általánosított görbületi vonalak közös séges görbületi vonalakká válnak. Ugyanis valamely síknak a képzetes gömbkörre vonatkoztatott pólusát a sík bármely pontjával összekötő egyenes merőleges a síkra; mert végtelen távolban fekvő pontja a sík végtelen távolban fekvő egyenesének, a képzetes gömbkörre nézve pólusa. Tehát a jelzett különös esetben a görbe két szomszédos pontjához tartozó felületi normálisok metszik egymást, a mi azt jelenti, hogy a két szomszédos pont a felület görbületi vonalain van.

Ezek után állapítsuk meg az általánosított görbületi vonalak analitikai alakját. A rövidség kedvéért legyen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i.$$

Az x ponthoz tartozó érintő sík pontjainak koordinátáit jelöljük X_1, X_2, X_3, X_4 -el. Ennélfogva az x ponthoz tartozó érintő sík egyenlete:

$$f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + f_4 X_4 = 0; \quad (3)$$

a szomszédos pont érintő síkjának egyenlete pedig:

$$df_1 X_1 + df_2 X_2 + df_3 X_3 + df_4 X_4 = 0. \quad (4)$$

Ha $\Phi=0$ felületül másik alap felületünket választjuk, akkor ennek a két síknak erre a felületre vonatkoztatott pólusainak koordinátái:

$$\begin{aligned} \rho y_i &= f_i, \\ \rho z_i &= df_i; \end{aligned}$$

ezek a pontok x és $x+dx$ pontokkal egy síkban vannak, ha

a koordinátáikból alkotott determináns zérus. Tehát az $f=0$ felületen az általánosított görbületi vonalak differenciál-egyenlete:

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ df_1 & df_2 & df_3 & df_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Ha x és $x+dx$ rajta van a felületsor egyik tagján, pl. $\mu=\lambda_1$ -en, akkor erre a felületre nézve:

$$f_i = \frac{2x_i}{\mu_i + \lambda_1}, \quad df_i = \frac{2dx_i}{\mu_i + \lambda_1},$$

tehát

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{\mu_1 + \lambda_1} & \frac{x_2}{\mu_2 + \lambda_1} & \frac{x_3}{\mu_3 + \lambda_1} & \frac{x_4}{\mu_4 + \lambda_1} \\ \frac{dx_1}{\mu_1 + \lambda_1} & \frac{dx_2}{\mu_2 + \lambda_1} & \frac{dx_3}{\mu_3 + \lambda_1} & \frac{dx_4}{\mu_4 + \lambda_1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (5')$$

Ha x rajta van a felületsor λ_1 és λ_2 tagjainak metszésvonalán, akkor

$$\begin{aligned} \sum \frac{x_i^2}{\mu_i + \lambda_1} &= 0, & \sum \frac{x_i^2}{\mu_i + \lambda_2} &= 0; \\ \sum \frac{x_i dx_i}{\mu_i + \lambda_1} &= 0, & \sum \frac{x_i dx_i}{\mu_i + \lambda_2} &= 0; \\ \sum \frac{x_i^2}{(\mu_i + \lambda_1)(\mu_i + \lambda_2)} &= 0, & \sum \frac{x_i dx_i}{(\mu_i + \lambda_1)(\mu_i + \lambda_2)} &= 0 \end{aligned}$$

relációk következtében, ha (5') determinánsunk i -ik oszlopát megszorozzuk $\frac{x_i}{\mu_i + \lambda_i}$ -vel s azután az összes így nyert oszlopokat valamelyikhez hozzáadjuk, akkor ebben az oszlopban valamennyi elem zérus lesz, tehát determinánsunk eltűnik. Különböztetve azt is könnyű kimutatni, hogy ha a (5) az alapfelületünkre $f=0$ -ra nézve zérus, akkor a felületsor bármely tagjára nézve is az, azaz: az $f=0$ felület általánosított görbületi görbéit a felületsor tagjai metszik ki a felületből. A (4) egyenlet $f=0$ -ra nézve a következő alakot veszi fel:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{vmatrix} = 0,$$

Ha ennek a determinánsnak i -ik oszlopát megszorozzuk μ_i -vel, azután az első sor μ -szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz, a második sor μ -szeresét pedig a negyedik sorhoz s végül az i -ik oszlopot $\mu_i + \mu$ -vel osztjuk, akkor

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \mu_1 + \mu & \mu_2 + \mu & \mu_3 + \mu & \mu_4 + \mu \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ \mu_1 + \mu & \mu_2 + \mu & \mu_3 + \mu & \mu_4 + \mu \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{vmatrix} = 0$$

eredményre jutunk; a mi bebizonyítandó volt.

Ha a (5) alatt levő egyenletet a (2') alatt levő felületsorra alkalmazzuk, akkor

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \mu_1 + \mu & \mu_2 + \mu & \mu_3 + \mu & (\mu_3 + \mu)^2 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ \mu_1 + \mu & \mu_2 + \mu & \mu_3 + \mu & (\mu_3 + \mu)^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlethez jutunk. Könnyű kimutatni, hogy ebből az egyenlethez μ eltávolítható. Ugyanis a harmadik oszlop $\mu_3 + \mu$ -szere-
séből vonjuk ki a negyedik oszlopot, azután az első, második
és negyedik oszlopot szorozzuk rendre $\mu_1 + \mu$, $\mu_2 + \mu$, $\mu_3 + \mu$ -vel,
azután vonjuk ki az első sor μ -szeresét a harmadik sorból, a
második sor μ -szeresét a negyedik sorból, végül a negyedik
oszlopot osszuk μ_3 -al, azután adjuk hozzá a harmadik osz-
lophoz és az első, második, harmadik oszlopokat rendre
összuk μ_1 , μ_2 , μ_3 -al; a végeredmény:

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{dx_1} & \frac{x_2}{dx_2} & \frac{x_3}{dx_3} & + & \frac{x_4}{dx_4} \\ \frac{\mu_1}{dx_1} & \frac{\mu_2}{dx_2} & \frac{\mu_3}{dx_3} & + & \frac{\mu_3^2}{dx_4} \\ \frac{\mu_1}{dx_1} & \frac{\mu_2}{dx_2} & \frac{\mu_3}{dx_3} & + & \frac{\mu_3^2}{dx_4} \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & & dx_4 \end{vmatrix} = 0,$$

a mi behizonyítandó volt. Általános tehát a tétel, hogy a felületsor alapfelületéből a felületsor többi tagjai általánosított görbületi vonalakat metszenek ki. Mivel pedig a felületsor bármelyik két elemét vehetjük alapfelületül, azért a §. elején kimondott tétel szintén érvényes.

Azonban tételünk akkor is érvényes, ha az alapfelületeknek egymáshoz való helyzete a 13 eset akármelyikével egyezik meg. A bizonyítás hasonló szellemben történik.

26. A felületcsomók tagjainak lefejthető felületei.

A feladat, melyet ebben a §.-ban meg kell oldani, nem más, mint az előbbi fejezetben tárgyaltaknak a duálja. Felületcsomót alkotnak azok a másodrendű felületek, melyek egy s ugyanazon vonalban metszik egymást. Kutatásainkat csak a 19. §. III. és IV. esetének megfelelőjére terjesztjük ki; a felületcsomók egyenletei tehát pont-koordinátákban:

$$f + \lambda \varphi \equiv (\lambda_1 + \lambda) x_1^2 + (\lambda_2 + \lambda) (x_3^2 + 2x_2 x_4) + 2x_2 x_3 = 0, \quad (1)$$

$$f + \lambda \varphi \equiv -x_1^2 - x_3^2 + 2(\lambda_1 + \lambda) x_1 x_2 + 2(\lambda_2 + \lambda) x_3 x_4 = 0; \quad (2)$$

sík-koordinátákban pedig:

$$\frac{u_1^2}{\lambda_1 + \lambda} + \frac{u_4^2}{(\lambda_2 + \lambda)^3} + \frac{2u_3 u_4}{(\lambda_2 + \lambda)^2} + \frac{u_3 + 2u_2 u_4}{\lambda_2 + \lambda} = 0, \quad (1')$$

$$\frac{u_2^2}{(\lambda_1 + \lambda)^2} + \frac{u_4^2}{(\lambda_2 + \lambda)^2} + \frac{2u_1 u_2}{\lambda_1 + \lambda} + \frac{2u_3 u_4}{\lambda_2 + \lambda} = 0. \quad (2')$$

Az előbbi fejezet fejtegetéseinek megfelelőleg, ha $f=0$ egyenletet sík-koordinátákban $F=0$ egyenlet képviseli, akkor $F=0$ másodosztályú felület általánosított görbületi felületének azt a lefejthető felületet nevezem, melynek két szomszédos síkja az ezen síkoknak az $F=0$ felülettel való érintési pontjainak a $\varphi=0$ felületre vonatkoztatott polár-síkjaival egy pontban találkozik.

Kimutatjuk a következő tételt: *A felületcsomó bármely két tagjának lefejthető felülete általánosított görbületi felület.*

Legyen megint

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = F_i,$$

akkor az u és az $u + du$ síkokhoz tartozó érintési pontok egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} F_1 U_1 + F_2 U_2 + F_3 U_3 + F_4 U_4 &= 0, \\ dF_1 U_1 + dF_2 U_2 + dF_3 U_3 + dF_4 U_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ezeknek a pontoknak a

$$\varphi \equiv x_1^2 + x_3^2 + 2x_2 x_4 = 0$$

felületre vonatkoztatott polársíkjaik koordinátái rendre:

$$\begin{aligned} \rho v_1 &= F_1, & \rho v_2 &= F_4, & \rho v_3 &= F_3, & \rho v_4 &= F_2; \\ \rho w_1 &= dF_1, & \rho w_3 &= dF_4, & \rho w_4 &= dF_3, & \rho w_2 &= dF_2. \end{aligned}$$

Ezek a síkok az u és $u + du$ síkokkal egy pontban találkoznak, ha a koordinátáikból alkotott determináns eltűnik, tehát az $F=0$ másodosztályú felület általánosított görbületi felületének differenciál-egyenlete:

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_4 & F_3 & F_2 \\ dF_1 & dF_4 & dF_3 & dF_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ du_1 & du_2 & du_3 & du_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Ha $F=0$ helyett az (1) felületcsomó akármelyik tagját vesszük, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_1 &= \frac{u_1}{\lambda_1 + \lambda}, & \frac{1}{2} F_2 &= \frac{u_4}{\lambda_2 + \lambda}, & \frac{1}{2} F_3 &= \frac{u_3}{\lambda_2 + \lambda} + \frac{u_4}{(\lambda_2 + \lambda)^2}, \\ \frac{1}{2} F_4 &= \frac{u_2}{\lambda_2 + \lambda} + \frac{u_3}{(\lambda_2 + \lambda)^2} + \frac{u_4}{(\lambda_2 + \lambda)^3}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{vmatrix} \frac{u_1}{\lambda_1 + \lambda} & \frac{u_2}{\lambda_2 + \lambda} + \frac{u_3}{(\lambda_2 + \lambda)^2} + \frac{u_4}{(\lambda_2 + \lambda)^3} & \frac{u_3}{\lambda_2 + \lambda} + \frac{u_4}{(\lambda_2 + \lambda)^2} & \frac{u_4}{\lambda_2 + \lambda} \\ \frac{du_1}{\lambda_2 + \lambda} & \frac{du_2}{\lambda_2 + \lambda} + \frac{du_3}{(\lambda_2 + \lambda)^2} + \frac{du_4}{(\lambda_2 + \lambda)^3} & \frac{du_3}{\lambda_2 + \lambda} + \frac{du_4}{(\lambda_2 + \lambda)^2} & \frac{du_4}{\lambda_2 + \lambda} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ du_1 & du_2 & du_3 & du_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (4')$$

Ki lehet mutatni, hogy ez a determináns λ -tól függetlenül tűnik el, ha az alappelületre vonatkozó determináns zérus. Szorozzuk meg ugyanis determinánsunk első oszlopát $\lambda_1 + \lambda$ -val; a másodikat $\lambda_2 + \lambda$ -val s vonjuk azután ki belőle a harmadik oszlopot, melyet azután szorozzunk meg $\lambda_2 + \lambda$ -val s vonjuk ki belőle a negyedik oszlopot és ezt szorozzunk meg azután $\lambda_2 + \lambda$ -val. Az első sor λ -szorosát a harmadik- és a második sor λ -szorosát pedig a negyedik sorból vonjuk ki; azután a negyedik oszlopot oszszuk meg λ_2 -vel s az új oszlopot adjuk a harmadik oszlophoz; a harmadik oszlopot oszszuk meg λ_2 -vel s az új oszlopot adjuk a második oszlophoz; végül a második és első oszlopot oszszuk rendre: λ_2 -, λ_1 -el; a végeredmény:

$$\begin{vmatrix} \frac{u_1}{\lambda_1} & \frac{u_2}{\lambda_2} & + \frac{u_3}{\lambda_2^2} & + \frac{u_4}{\lambda_2^3} & \frac{u_3}{\lambda_2} & + \frac{u_4}{\lambda_2^2} & \frac{u_4}{\lambda_2} \\ \frac{du_1}{\lambda_1} & \frac{du_2}{\lambda_2} & + \frac{du_3}{\lambda_2^2} & + \frac{du_4}{\lambda_2^3} & \frac{du_3}{\lambda_2} & + \frac{du_4}{\lambda_2^2} & \frac{du_4}{\lambda_2} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ du_1 & du_2 & du_3 & du_4 \end{vmatrix} = 0.$$

A mi bebizonyítandó volt, tehát az alappelület görbületi felületei azok a le ejthető felületek, melyeket a felületcsomó tagjai az alappelülettel képeznek; mivel alappelületül a felületcsomó akármelyik tagját választhatjuk, azért a fejezet elején kimondott tételünk helyes.

A (2) felületcsomóra nézve:

$$\varphi \equiv 2x_1 x_2 + 2x_3 x_4,$$

tehát

$$\begin{aligned} \rho v_1 &= F_2, & \rho v_2 &= F_1, & \rho v_3 &= F_4, & \rho v_4 &= F_3; \\ \rho w_1 &= dF_2, & \rho w_2 &= dF_1, & \rho w_3 &= dF_4, & \rho w_4 &= dF_3, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} F_2 & F_1 & F_4 & F_3 \\ dF_2 & dF_1 & dF_4 & dF_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ du_1 & du_2 & du_3 & du_4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{u_1}{\lambda_1 + \lambda} & + \frac{u_2}{(\lambda_1 + \lambda)^2} & \frac{u_2}{\lambda_1 + \lambda} & \frac{u_3}{\lambda_2 + \lambda} & + \frac{u_4}{(\lambda_2 + \lambda)^2} & \frac{u_4}{\lambda_2 + \lambda} \\ \frac{du_1}{\lambda_1 + \lambda} & + \frac{du_2}{(\lambda_1 + \lambda)^2} & \frac{du_2}{\lambda_2 + \lambda} & \frac{du_3}{\lambda_2 + \lambda} & + \frac{du_4}{(\lambda_2 + \lambda)^2} & \frac{du_4}{\lambda_2 + \lambda} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ du_1 & du_2 & du_2 & du_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Erről a determinánsról a már többször alkalmazott módszerrel könnyű kimutatni, hogy λ minden értéke mellett eltűnik, ha

$$\begin{vmatrix} \frac{u_1}{\lambda_1} + \frac{u_2}{\lambda_1^2} & \frac{u_2}{\lambda_1} & \frac{u_3}{\lambda_2} + \frac{u_4}{\lambda_2^2} & \frac{u_4}{\lambda_2} \\ \frac{du_1}{\lambda_1} + \frac{du_2}{\lambda_1^2} & \frac{du_2}{\lambda_1} & \frac{du_3}{\lambda_2} + \frac{du_4}{\lambda_2^2} & \frac{du_4}{\lambda_2} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ du_1 & du_2 & du_3 & du_4 \end{vmatrix} = 0.$$

27. A másodosztályú felületek viszonya a lineáris komplexushoz.

Láttuk, hogy

$$F \equiv \sum \sum A_{ik} u_i u_k = 0 \\ A_{ik} = A_{ki}$$

másodosztályú felület a tér minden u síkjához, mint polársíkhhoz mellé rendel egy pontot, mint pólust; koordinátaik között levő viszonyról beszámol a

$$\rho x_i = \sum_{s=1}^4 A_{is} u_s \quad (1) \\ A_{is} = A_{si}$$

egyenlet. A tér pontjainak és síkjainak illetően egymásra való vonatkozását *polár-rokonságnak* nevezzük. Ha az $A_{ik} = A_{ki}$ feltétel nem teljesül, akkor az (1) egyenlet általánosabb *reciprok*, vagy *duál-rokonságot* képvisel. Ebben az általános esetben is az

$$\begin{cases} F \equiv \sum \sum A_{ik} u_i v_k = \rho \sum x_k v_k = 0, \\ \Phi \equiv \sum \sum B_{ik} u_i v_k = \sigma \sum z_k v_k = 0 \end{cases} \quad (2)$$

egyenletekkel összekapcsolt síkokat *konjugált síkoknak* nevezzük, tehát az u sík mellé rendelt pont benne van u konjugált síkjában.

Az

$$F + \mu \Phi = 0$$

egyenletek számára meghatározhatunk egy olyan kiváló tetraédert, melyre mint koordináta-tetraéderre, vonatkoztatva rokonságunkat, igen egyszerű analitikai relációkhoz jutunk. Ehhez

a nevezetes tetraéderhez a következő problema megoldásával jutunk: *Meghatározandók azok a síkok, melyeknek mind az $F=0$, mind a $\Phi=0$ rokonságban ugyanaz a pont felel meg, tehát a melyekre nézve:*

$$\sum_{s=1}^4 A_{is} u_s = -\mu \sum_{s=1}^4 B_{is} u_s \quad (3)$$

($i=1, 2, 3, 4$)

relációk teljesülnek; ezeknek egyidejű fennállása

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} A_{11} + \mu B_{11} & A_{12} + \mu B_{12} & A_{13} + \mu B_{13} & A_{14} + \mu B_{14} \\ A_{21} + \mu B_{21} & A_{22} + \mu B_{22} & A_{23} + \mu B_{23} & A_{24} + \mu B_{24} \\ A_{31} + \mu B_{31} & A_{32} + \mu B_{32} & A_{33} + \mu B_{33} & A_{34} + \mu B_{34} \\ A_{41} + \mu B_{41} & A_{42} + \mu B_{42} & A_{43} + \mu B_{43} & A_{44} + \mu B_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (3')$$

determináns eltűnését vonja maga után. Tehát négy olyan sík van, melyek mindegyikének mind a két rokonságban egy s ugyanazon pont felel meg. A transzformációt arra az esetre, midőn $F=0$ és $\Phi=0$ mindketten polár-rokonságot képviselnek, már a 19. §-ban végrehajtottuk. Ha pedig

$$A_{ik} = -A_{ki}, \quad B_{ik} = -B_{ik},$$

akkor $F=0$ és $\Phi=0$ két *null-rendszert*, azaz: *két lineáris komplexust* képviselnek; ha pedig

$$A_{ik} = A_{ki}, \quad B_{ik} = -B_{ik},$$

akkor $F=0$ polár-rokonságot képvisel, tehát vannak benne olyan síkok, melyek pólusaikon átmennek; ezek a síkok egy másodosztályú felületet burkolnak be s érintési pontjaik maguk a pólusok; $\Phi=0$ pedig *null-rendszert* azaz: *lineáris komplexust* képvisel, tehát *minden síkja átmegy a hozzá rendelt ponton*. A transzformációt ebben az utóbbi esetben hajtjuk csak végre, minthogy az előbbi eset szorosan a lineáris komplexusok tanába tartozik.

Minthogy $\Phi=0$ lineáris komplexust képvisel, azért a

$$\Delta(\mu) = 0$$

egyenlet meghatározta síkok az

$$F \equiv \sum \sum A_{ik} u_i u_k = 0$$

felület érintő síkjai, a hozzájuk tartozó pontok pedig az érintési pontok.

Jelöljük a $\Delta(\mu)=0$ egyenlet μ_s gyökéhez tartozó síkot $u^{(s)}$ -el, a hozzá tartozó pontot pedig $x^{(s)}$ -el, tehát

$$x_i^{(s)} = \sum_{k=1}^4 A_{ik} u_k^{(s)} = -\mu_s \sum B_{ik} u_k^{(s)};$$

Következőleg:

$$\begin{aligned} \mu_s \sum u_i^{(s)} x_i^{(r)} &= -\mu_s \mu_r \sum \sum B_{ik} u_i^{(s)} u_k^{(r)} = \mu_s \mu_r \sum \sum B_{ki} u_i^{(s)} u_k^{(r)} \\ &= -\mu_r \sum x_k^{(s)} u_k^{(r)}; \\ \mu_s \sum u_i^{(s)} x_i^{(r)} &= \mu_s \sum \sum A_{ik} u_i^{(s)} u_k^{(r)} = \mu_s \sum \sum A_{ki} u_i^{(s)} u_k^{(r)} \\ &= \mu_s \sum x_k^{(s)} u_k^{(r)}, \end{aligned}$$

Honnan

$$\begin{aligned} &(\mu_r + \mu_s) \sum x_k^{(s)} u_k^{(r)} = 0; \\ \text{tehát vagy} & \quad \mu_r + \mu_s = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

vagy

$$\sum x_k^{(s)} u_k^{(r)} = 0.$$

Mivel

$$\Phi = 0$$

egyenlet determinánsa $B_{ik} = -B_{ki}$ feltételnél fogva PFAFF-féle determináns, azért ennek tulajdonságainál fogva

$$\Delta(\mu) = \Delta(-\mu),$$

tehát

$$\mu_1 = -\mu_2, \quad \mu_3 = -\mu_4.$$

A (4) alatt levő egyenletekből következik, hogy:

1. $\mu^{(1)}$ -hez tartozó pont benne van az $u^{(3)}$ és $u^{(4)}$ síkban

$\mu^{(2)}$	«	«	«
$\mu^{(3)}$	«	$u^{(1)}$ és $u^{(2)}$	«
$u^{(4)}$	«	«	«

Azaz: A négy sík oly tetraédert alkot, melynek négy éle ú. m. $(u^{(1)}, u^{(3)})$, $(u^{(1)}, u^{(4)})$, $(u^{(2)}, u^{(3)})$, $(u^{(2)}, u^{(4)})$ egyidejűleg a másodosztályú felülethez is és a lineáris komplexhez is hozzátartozik, a másik két éle pedig $(u^{(1)}, u^{(2)})$, $(u^{(3)}, u^{(4)})$ úgy a felületre, mint a lineáris komplexusra nézve két konjugált polárist alkot.

Erre a koordináta-rendszerre vonatkoztatva a lineáris komplexus

$$\phi \equiv \sum B_{ik} (u_i v_k - v_i u_k) = \sum B_{ik} q_{ik}$$

$$\phi \equiv \alpha Q_{14} + \beta Q_{23}$$

alakban jelenik meg; az

$$F \equiv \sum \sum A_{ik} u_i u_k$$

pedig

$$F \equiv 2a U_1 U_4 + 2b U_2 U_3$$

alakban.

Minthogy abszolút értékre nézve két különböző gyök fordul elő, tehát két határozatlan parameter lép fel, ezeket megválaszthatjuk úgy, hogy legyen $\alpha = \beta = 1$. Ennélfogva a (3) alapján a kanonikus alakok:

$$F = 2\mu_1 U_1 U_4 + 2\mu_2 U_2 U_3, \quad \phi = Q_{14} + Q_{23}. \quad (5)$$

A transzformáció együtthatóinak meghatározása a 19. §-ban közölt módszerrel történik.

A (4) alatt bemutatott kanonikus alakok természetesen csak arra az esetre érvényesek, midőn $\Delta(\mu) = 0$ egyenletnek nincsenek többszörös gyökei. Minthogy ezeknek a különös eseteknek a tárgyalása nem tartozik kitűzött feladatomhoz, azért azokat elhagyom.

28. A másodosztályú felületek önmagukba való transzformációja.

Az

$$F = \sum \sum A_{ik} u_i u_k \quad (1)$$

másodosztályú felületet önmagába transzformálni annyit tesz, mint megállapítani egy olyan

$$U_i = c_{i1} u_1 + c_{i2} u_2 + c_{i3} u_3 + c_{i4} u_4 \quad (2)$$

transzformációt, melyre nézve

$$\sum \sum A_{ik} u_i u_k = \sum \sum A_{ik} U_i U_k. \quad (3)$$

Ha v és w az u és U síkokra nézve harmonikus párok, tehát az $F=0$ felületre nézve konjugáltak, akkor

$$u_i = \nu v_i + \mu w_i, \quad U_i = \nu v_i - \mu w_i. \quad (4)$$

Ezekből az egyenletekből a (2) alatt levőket következőképen

származtatjuk le. A v sík helyett vezessük be számításainkba pólusát, mi a következő

$$v_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 \quad (5)$$

reláció segítségével történik, hol a_{ik} -k az (1) egyenlet determinánsának első aldeterminánsai. Minthogy v és w konjugált síkok, azért w -nek át kell menni az x ponton, ezt analitikailag a *nullrendszerrel* fejezzük ki, tehát

$$w_i = \beta_{i1}x_1 + \beta_{i2}x_2 + \beta_{i3}x_3 + \beta_{i4}x_4, \quad (6)$$

$$(\beta_{ik} = -\beta_{ki})$$

mert, miként ismeretes, az ily módon összekapcsolt pontok és síkok egymáson átmennek. Ha az (5) és (6) alatt levő u és w értékeket a (4) egyenletekbe behelyettesítjük, akkor azok a következő alakot veszik fel:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \nu \sum a_{ik} x_k + \mu \sum \beta_{ik} x_k, \\ U_i &= \nu \sum a_{ik} x_k - \mu \sum \beta_{ik} x_k. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ha ezekből az egyenletekből x -t kiküszöböljük, u és U között olyan relációkhoz jutunk, melyekből könnyen megállapíthatjuk a (2) alatt levő transzformáció együtthatóit.

Jelöljük ugyanis a

$$\nu a_{ik} + \mu \beta_{ik}$$

mennyiségekből alkotott determinánst $\Delta(\nu, \mu)$ -vel, aldeterminánsait pedig $\Delta_{ik}(\nu, \mu)$ -vel, akkor

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\nu, \mu) x_i &= \sum_{k=1}^4 \Delta_{ki}(\nu, \mu) u_k, \\ \Delta(\nu, -\mu) x_i &= \sum_{k=1}^4 \Delta_{ki}(\nu, -\mu) U_k, \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

innen:

$$\begin{aligned} \Delta(\nu, \mu) \sum_i a_{li} x_i &= \sum_i \sum_k \Delta_{ki}(\nu, \mu) a_{li} u_k, \\ \Delta(\nu, -\mu) \sum_i a_{li} x_i &= \sum_i \sum_k \Delta_{ki}(\nu, -\mu) a_{li} U_k; \end{aligned}$$

másrészt a (7) egyenletek összeadásából következik, hogy

$$u_i + U_i = 2\nu \sum a_{ik} x_k,$$

ennélfogva két utolsó egyenletünk alapján

$$\left. \begin{aligned} \Delta(\nu, \mu) U_l &= 2\nu \sum_i \sum_k \Delta_{ki}(\nu, \mu) a_{li} u_k - \Delta(\nu, \mu) u_l, \\ \Delta(\nu, -\mu) u_l &= 2\nu \sum_i \sum_k \Delta_{ki}(\nu, -\mu) a_{li} U_k - \Delta(\nu, -\mu) U_l, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

tehát

$$\left. \begin{aligned} c_{lk} &= \frac{2\nu \sum_i \Delta_{ki}(\nu, \mu) a_{li}}{\Delta(\nu, \mu)}, \quad (k \leq l), \\ c_{ll} &= \frac{2\nu \sum_i \Delta_{li}(\nu, \mu) a_{li} - \Delta(\nu, \mu)}{\Delta(\nu, \mu)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Azon harmonikus viszonynál fogva, mely v , w és u , U síkok között van, a megállapított transzformáció csakugyan a felület minden pontját ismét a felület valamelyik pontjába transzformálja. Erről különben direkt számítással is meggyőződhetünk. Ugyanis

$$\begin{aligned} \Delta(\nu, \mu) \sum_l A_{lm} U_l &= 2\nu \sum_l \sum_k \sum_i \Delta_{ki}(\nu, \mu) a_{li} A_{lm} u_k - \Delta(\nu, \mu) \sum_l A_{lm} u_l \\ &= 2\nu a \sum_k \Delta_{km}(\nu, \mu) u_k - \Delta(\nu, \mu) \sum_l A_{lm} u_l, \end{aligned}$$

tehát

$$\sum_l A_{lm} U_l = 2\nu a x_m - \sum_l A_{lm} u_l,$$

honnan

$$\left. \begin{aligned} 2\nu a \sum_m x_m u_m &= \sum \sum A_{lm} u_l u_m + \sum \sum A_{lm} U_l u_m, \\ 2\nu a \sum_m x_m U_m &= \sum \sum A_{lm} U_l U_m + \sum \sum A_{lm} U_m u_l. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ámde $\beta_{ik} = -\beta_{ki}$ következtében

$$\Delta(\nu, \mu) = \Delta(\nu, -\mu), \quad \Delta_{ik}(\nu, \mu) = \Delta_{ki}(\nu, -\mu);$$

a (7') alapján pedig

$$\begin{aligned} \Delta(\nu, \mu) \sum_i x_i U_i &= \sum \sum \Delta_{ki}(\nu, \mu) u_k U_i, \\ \Delta(\nu, -\mu) \sum_i x_i u_i &= \sum \sum \Delta_{ki}(\nu, -\mu) u_i U_k, \end{aligned}$$

tehát

$$\sum x_m u_m = \sum x_m U_m,$$

ennélfogva a (10) következtében:

$$\sum \sum A_{lm} u_l u_m = \sum \sum A_{lm} U_l U_m,$$

a mi bebizonyítandó volt.

Ki lehet azt is mutatni, hogy a szubstituczió determinánsa

$$C = \Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} c_{44} = 1. \quad (11)$$

Szorozzuk meg ugyanis C -t, miután már a c -ék értékeit behelyettesítettük $\Delta^4(\nu, \mu)$ -el, azután az így nyert determinánst a determinánsok szorzási törvénye szerint szorozzuk meg $\Delta(\nu, \mu)$ -vel s miután a szorzatot

$$2\nu \sum_i \sum_k \Delta_{ki}(\nu, \mu) a_{li} (\nu a_{km} + \mu \varphi_{km}) = 2\nu a_{lm} \Delta(\nu, \mu)$$

relációra való tekintettel ismét el lehet osztani $\Delta^4(\nu, \mu)$ -el, azért a műveletek végrehajtásának az eredménye:

$$\Delta(\nu, \mu) C = \Delta(\nu, \mu);$$

a mi a (12)-el azonos reláció.

Az (5) alatt levő egyenletrendszer determinánsa zérustól különböző; mert különben a másodosztályú felület kúpszeletté degenerál. Azonban az (5) alatt levő egyenletrendszert helyettesíthetjük olyannal is, melynek determinánsa zérus; ez aztán azt jelenti, hogy ν segédsíkokul csak olyanokat választhatunk, melyeknek koordinátái egy s ugyanazon relációnak eleget tesznek, tehát *a melyek egy ponton mennek át*. Ezeket a síkokat úgy képzelhetjük, mint a tér x pontjainak polársíkjait, az y pontból a másodosztályú felülethez vont érintő kúpra nézve; mert ezek valamennyien a kúp csúcsán mennek át; *tehát az y ponton átmenő bármely ν síknak a felületre vonatkoztatott polusa benne van az (x, y) egyenesben*.

Az y pontból a másodosztályú felülethez vont érintő kúp egyenlete:

$$\varphi \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & y_1 & x_3 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & y_2 & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & y_3 & x_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & y_4 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

tehát a tér egy tetszőleges x pontjának erre a kúpra vonatkoztatott polársíkjának koordinátái:

$$v_i = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

A w síkok a felületre nézve ν -nek konjugáltjai s mivel ez utóbbiak valamennyien átmennek egy s ugyanazon (y) ponton,

azért a w síkok is átmennek y konjugált pontján (z)-én. A felületre nézve tehát y pont polársíkja átmegy z -én és az y -on átmenő összes síkoknak konjugált síkjai keresztül mennek z -én.

A v síkhoz tehát hozzátartozhatnak mindazok a w síkok, melyek z ponton és v -nek a felületre vonatkoztatott pólusán mennek keresztül; mivel pedig v pólusa benne van (x, y) egyenesben, tehát (x, y, z) sík átmegy v pólusán és a z ponton; ámde y polársíkja (ω) szintén átmegy z -én és v pólusán, tehát a v síkhoz hozzátartozhatik minden olyan ω sík, mely átmegy $[(x, y, z), \omega]$ egyenesen. Ennélfogva:

$$w_i = \omega_i + \sigma(xyz)_i,$$

és

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{1}{2} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu(xyz)_i + \rho \omega_i, \\ U_i &= \frac{1}{2} \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \mu(xyz)_i - \rho \omega_i. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ha ezekből az egyenletekből x -t és ω -t kiküszöböljük, eljutunk a kívánt transzformáció-formulákhoz.

A kiküszöbölést következőképen eszközöljük: Vegyünk fel az (y, z) egyenesnek a felületre vonatkoztatott polárisában két pontot t' és t'' -t; minthogy ω sík átmegy (x, y) polárisán, azért

$$\Sigma t_i \omega_i = 0, \quad \Sigma t'_i \omega_i = 0.$$

A (12) relációk alapján tehát

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_i$$

jelölés alkalmazásával:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma u_i t'_i &= \nu \Sigma \varphi_i t'_i + \mu(xyz t'), \\ \Sigma U_i t'_i &= \nu \Sigma \varphi_i t'_i - \mu(xyz t'). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Hasonló két egyenletünk van t'' -ra nézve is. Ha t' a felületre nézve x -nek konjugáltja, akkor x benne van az (y, z) egyenesben, azaz:

$$(xyz t') = 0.$$

Ámde ha x és t' a felületre nézve konjugáltak, akkor a jelen körülmények között az y pontból a felülethez vont érintő kúpra nézve is azok, tehát

$$\Sigma \varphi_i t'_i = 0,$$

azaz:

$$\varphi' = \frac{(xyz t')}{\Sigma \varphi_i t'_i}, \quad \varphi'' = \frac{(xyz t'')}{\Sigma \varphi_i t''_i}$$

kifejezések x -től függetlenek. Különös tekintettel ezekre az értékekre, a 13. egyenletek a következőkhöz vezetnek:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma u_i t'_i &= \frac{\nu + \mu \varphi'}{\nu - \mu \varphi'} \Sigma U_i t'_i, \\ \Sigma u_i t''_i &= \frac{\nu + \mu \varphi''}{\nu - \mu \varphi''} \Sigma U_i t''_i. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ezekhez járul még a (12)-ből eredő következő kettő:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma u_i y_i &= -\Sigma U_i y_i, \\ \Sigma u_i z_i &= \Sigma U_i z_i. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Ezeknek s a (14) alatt levő egyenleteknek u és U szerint vett megoldásai adják a kívánt transzformáció-formulákat. Kimutatjuk még, hogy a transzformáció determinánsa -1 .

Ismeretes, hogy ha a

$$\Sigma a_{ik} x_i = \Sigma b_{ik} \xi_i \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

egyenletrendszer megoldása:

$$\xi_i = \Sigma c_{ik} x_k,$$

akkor

$$C = \frac{A}{B},$$

hol A , B , C rendre az a -, b -, c -ékből alkotott determinánsokat jelölik. Ha tehát a jelen esetben a szubstitució determinánsát C -vel jelöljük, akkor

$$C = - \frac{\nu + \mu \varphi'}{\nu - \mu \varphi'} \cdot \frac{\nu + \mu \varphi''}{\nu - \mu \varphi''}.$$

Mint hogy φ' és φ'' függetlenek x -től, azért képletükben x helyett bármit írhatunk, ha tehát φ' -ban x helyébe t'' -t, φ'' -ben pedig t' írunk, akkor azt találjuk, hogy

$$\varphi' = -\varphi'',$$

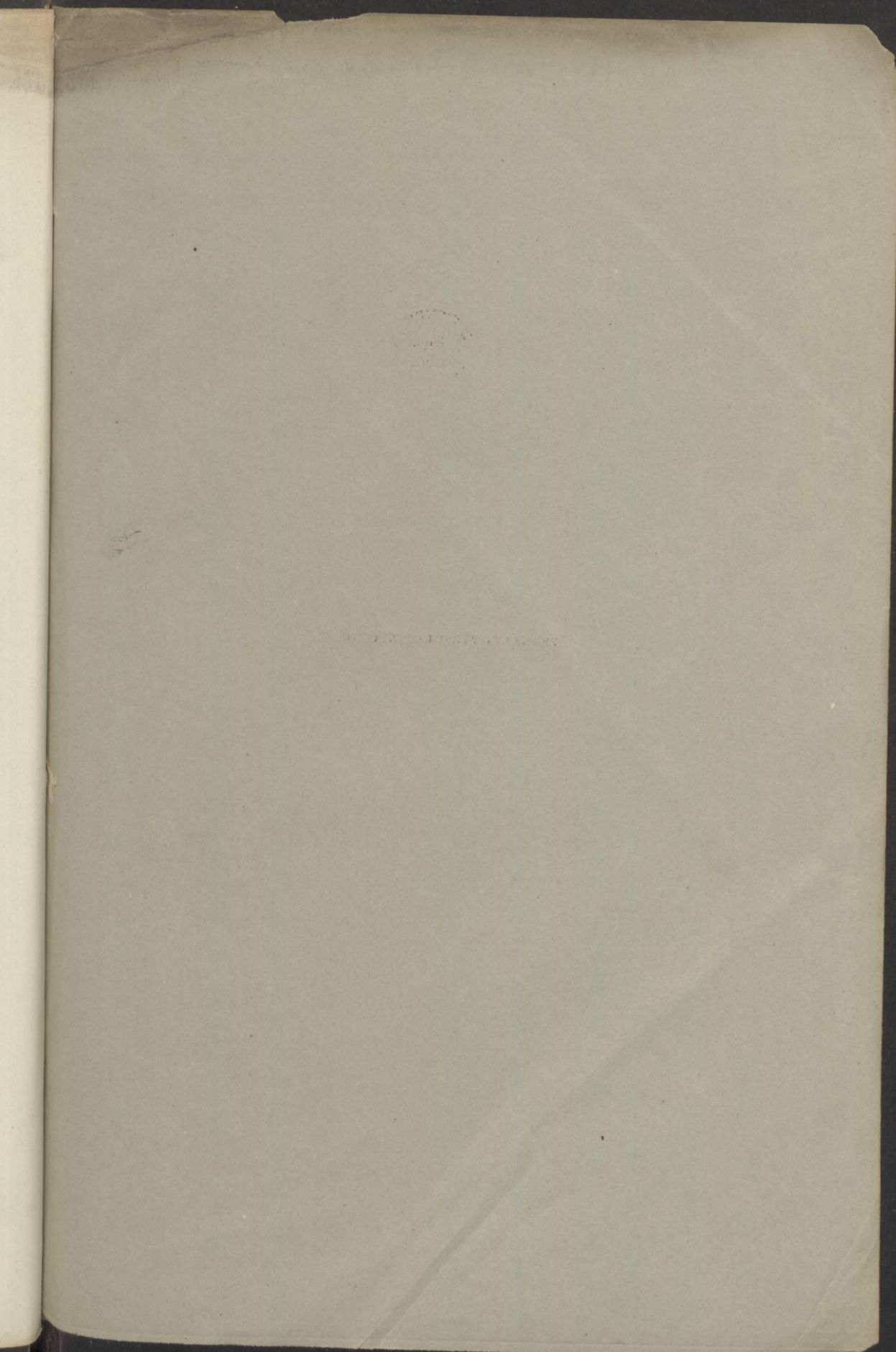
tehát

$$C = -1.$$

Minthogy két egymásután eszközölt transzformáció mindig helyettesíthető egy olyannal, melynek determinánsa az eredeti két transzformáció determinánsának szorzatával egyenlő, azért a jelen esetben két egymásután eszközölt transzformációt helyettesíthetünk egy olyannal, melynek determinánsa $+1$, tehát egy olyan transzformációval, melyet fejezetünk elején állapítottunk meg. Az olyan transzformáció-csoportot, melyben két egymásután végrehajtott transzformáció nem helyettesíthető egy abba a csoportba tartozó transzformációval, nemfolytonos transzformáció-csoportnak nevezzük.

Tehát az imént megállapított transzformáció-csoport nemfolytonos, ellenben az először megállapított csoport folytonos.





FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

