

M

13566/1/2

A SZENT ISTVÁN AKADÉMIA

MENNYISÉGTAN-, TERMÉSZETTUDOMÁNYI OSZTÁLYÁNAK FELOLVASÁSAI

SZERKESZTI SZARVASY IMRE OSZTÁLYTITKÁR

1. kötet. _____ 2. szám.

A GÖRBÉK ABSZOLUT ELMÉLETE

SUTÁK JÓZSEF

RENDES TAGTÓL.

Dr. IVÁNYI RÉKA

Felolvasta 1916. évi október hó 20-án.

BUDAPEST

STEPHANEUM NYOMDA R. T.

1918.

1880

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

ASTOR LENOX TILDEN FOUNDATION

500 N. 5TH ST. NEW YORK

1880

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY

A SZENT ISTVÁN AKADÉMIA

MENNYISÉGTAN-, TERMÉSZETTUDOMÁNYI OSZTÁLYÁNAK FELOLVASÁSAI

1. kötet. SZERKESZTI SZARVASY IMRE OSZTÁLYTITKÁR 2. szám.

A GÖRBÉK ABSZOLUT ELMÉLETE

SUTÁK JÓZSEF

RENDES TAGTÓL.

DR. IVÁNYI DEKA

Felolvasta 1916. évi október hó 20-án.

BUDAPEST

STEPHANEUM NYOMDA R. T.

1918.



M 13.566/1/2
Országos Széchényi Könyvtár

Leltári szám:

V/100-12.264/1964



Kiadja a Szent István Akadémia.

ELŐSZÓ.

Az 1. fejezetben a *Frenet-Serret*-féle formulák vektorelméleti levezetését s alakját mutatom be.

A 2. fejezetben a fundamentális trieder, valamint a normális görbület, geodetikus görbület és geodetikus torzió definíciója után megállapítottam a görbéknek az orientációtól független három alaptételét, miért is elméletünket joggal nevezhetjük a görbék abszolút elméletének. Az I. alaptétel három egyenletből áll s tartalmánál fogva a *fundamentális trieder megváltozási tételének* nevezzük. Ettől független a III. alaptétel, melyet a *normális változás projekció tételének* nevezünk. A második alaptörvény, mely a *felület érintősíkjá s a görbe simuló síkja között levő szögnek ω -nak megváltozási törvényét* mutatja be s amely eddig is ismeretes volt, már nem független az első alaptételtől, mindazonáltal fontos alkalmazásainál fogva az alaptételek közé soroztam.

Az I. és III. alaptételekből — úgyszólván — számítás nélkül nyert fontos tételek elvezettek a felület *közép- és totális görbületének* egy új definíciójához. Az organikus görbékre való alkalmazásból (3. §.) meg kitűnt, hogy általános tételeink, mint igen speciális eseteket tartalmazzák mindazokat a tételeket, melyeket eddig megállapítottak.

A 4. fejezetben az érintkezés problémáját oldottam meg, melynek az aszimtotikus görbékre való alkalmazása elvezetett a *Bonnet* és *Beltrami*-féle tételekhez. Ugyancsak itt állapítottam meg a *kontingencia-változás tételét* is.

A felületek metszési problémájára vonatkozó 5. fejezetre csak azt jegyzem meg, hogy az általános elméletnek egyik igen egyszerű példajaként adódik ki a *Dupin*-féle tétel.

A 6. fejezet az existencia-problema megoldásán kívül a görbe definíciójához szükséges feltételek megállapítását tárgyalja. Az egy pontra vonatkozó relativ helyzet alapján történő defini-

cióval még a következő fejezet is foglalkozik. A mozgással történő definícióval a 8. s két görbe relativ helyzetéből származó definícióval pedig a 9. fejezet foglalkozik.

A bemutattam számos alkalmazás körül kiemelem a 7. §. 4., a 8. §. 1. és 2. feladatait.

A vektorokat felül vízszintes vonással ellátott kis betűkkel jelöltem, így: \bar{a} , \bar{b} . Két vektor skaláris illetőleg vektoriális szorzatának jelölésére a Gibbs-féle $\bar{a} \cdot \bar{b}$ illetőleg $\bar{a} \times \bar{b}$ szimbolumot használtam.

1. A Frenet-Serret-féle formulák.

Ha P valamely görbe egyik pontja és s ugyanennek a görbének egy tetszőleges fix pontjától P -ig számított ívhosszúsága, akkor P pont függvénye s -nek, mit így jelölünk:

$$P = P(s).$$

Ha már most $P(s + ds) - P(s)$ elemi vektort dP -vel jelöljük, akkor

$$|dP| = ds,$$

ennélfogva a

$$\frac{dP}{ds} = P_s = \bar{e}_s$$

egyenlettel definiált \bar{e}_s *egységvektor*, melyet a görbe $P(s)$ pontjához tartozó érintőjének nevezünk.

Mivel az egységvektor mindig merőleges differenciálhányadosára, azért, ha a $\frac{d\bar{e}_s}{ds}$ -sel egyirányú egységvektort \bar{n}_s -sel jelöljük, akkor \bar{n}_s merőleges \bar{e}_s -re. \bar{n}_s -et *főnormálisnak*, az $\bar{e}_s \times \bar{n}_s = \bar{b}_s$ -t *binormálisnak* s az

$$\bar{n}_s \cdot \frac{d\bar{e}_s}{ds} = \frac{1}{\rho_s}$$

egyenlettel definiált pozitív skaláris mennyiséget a görbe $P(s)$ pontjához tartozó *görbületnek* nevezzük. A $\frac{d\bar{e}_s}{ds}$ -re mondottakat a következő egyenletrendszer foglalja össze:

$$(\bar{e}_s, \bar{n}_s, \bar{b}_s), \frac{d}{ds} = (0, \frac{1}{\rho_s}, 0). \dots\dots\dots 1.$$

Ha az $\bar{e}_s \cdot \bar{b}_s = 0$ egyenletet az 1. harmadik egyenletének számontartásával s szerint differenciáljuk, akkor az

$$\bar{e}_s \cdot \frac{d\bar{b}_s}{ds} = 0$$

egyenlethez jutunk; ha még megfontoljuk, hogy $\frac{db_s}{ds}$ merőleges \bar{b}_s -re is, akkor evidens, hogy

$$\frac{db_s}{ds} \parallel \bar{n}_s.$$

Az

$$\bar{n}_s \cdot \frac{db_s}{ds} = \frac{1}{\tau_s}$$

egyenlettel definiált skaláris mennyiséget a görbe $P(s)$ pontjához tartozó *torzió*nak nevezzük. A $\frac{db_s}{ds}$ vektorra történt megállapításokat a következő egyenletrendszer foglalja össze:

$$(\bar{e}_s, \bar{n}_s, \bar{b}_s) \cdot \frac{d\bar{b}_s}{ds} = (0, \frac{1}{\tau_s}, 0) \dots\dots\dots 2.$$

Ha az

$$\bar{e}_s \cdot \bar{n}_s = 0, \bar{b}_s \cdot \bar{n}_s = 0$$

egyenleteket az 1. és 2. egyenletrendszerek második egyenleteinek figyelembe vételével differenciáljuk, akkor a következő egyenletekhez jutunk:

$$\bar{e}_s \cdot \frac{d\bar{n}_s}{ds} + \frac{1}{\rho_s} = 0, \bar{b}_s \cdot \frac{d\bar{n}_s}{ds} + \frac{1}{\tau_s} = 0;$$

s mivel $\frac{d\bar{n}_s}{ds}$ ezenkívül merőleges \bar{n}_s -re, azért rá nézve érvényes a következő egyenletrendszer:

$$(\bar{e}_s, \bar{n}_s, \bar{b}_s) \cdot \frac{d\bar{n}_s}{ds} = \left(-\frac{1}{\rho_s}, 0, -\frac{1}{\tau_s}\right) \dots\dots\dots 3.$$

Az 1., 2. és 3. alatt levő egyenletrendszereket a következőbe foglalhatjuk össze:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{e}_s}{ds} &= \frac{1}{\rho_s} \bar{n}_s \\ \frac{d\bar{n}_s}{ds} &= -\frac{1}{\rho_s} \bar{e}_s - \frac{1}{\tau_s} \bar{b}_s \\ \frac{d\bar{b}_s}{ds} &= \frac{1}{\tau_s} \bar{n}_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots A.$$

ezek a *Frenet-Serret*-féle formulák.¹

¹ *Frenet*, These, Toulouse 1847. Journ. de math. t. XVII. p. 437. 1852.
Serret, Journ. de math. t. XVI. p. 193. 1851.

2. A görbék fundamentalis egyenletei.

Ha \bar{v}_s az \bar{e}_s -re állandóan merőleges egységvektor, melynek merőlegességi helyzete a görbe mentén tetszőleges, de meghatározott törvény szerint változik, akkor az $\bar{e}_s, \bar{v}_s \times \bar{e}_s, \bar{v}_s$ jobbra forgó derékszögű rendszert a görbe fundamentalis triéderének nevezzük.

A görbe normalgörbületét, $\frac{1}{\rho_{vs}}$ -t, geodetikus görbületét, $\frac{1}{\rho_{gs}}$ -t és geodetikus torzióját, $\frac{1}{\tau_{gs}}$ -t a következő egyenletekkel definiáljuk:

$$\bar{v}_s \cdot \frac{d\bar{e}_s}{ds} = -\bar{e}_s \cdot \frac{d\bar{v}_s}{ds} = \frac{1}{\rho_{vs}} \dots \dots \dots 4.$$

$$(-\bar{e}_s, -\bar{v}_s) \cdot \frac{d(\bar{v}_s \times \bar{e}_s)}{ds} = \left(\frac{d\bar{e}_s}{ds}, \frac{d\bar{v}_s}{ds} \right) \cdot \bar{v}_s \times \bar{e}_s = \left(\frac{1}{\rho_{gs}}, \frac{1}{\tau_{gs}} \right) \dots \dots 5.$$

Mivel ezeknek a definícióknak a révén $\frac{d\bar{e}_s}{ds}, \frac{d(\bar{v}_s \times \bar{e}_s)}{ds}, \frac{d\bar{v}_s}{ds}$ vektoroknak a fundamentalis triéder vektoraival alkotott skaláris szorzataik ismeretessékké lettek, azért

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{e}_s}{ds} &= \frac{1}{\rho_{gs}} \bar{v}_s \times \bar{e}_s + \frac{1}{\rho_{vs}} \bar{v}_s \\ \frac{d(\bar{v}_s \times \bar{e}_s)}{ds} &= -\frac{1}{\rho_{gs}} \bar{e}_s - \frac{1}{\tau_{gs}} \bar{v}_s \\ \frac{d\bar{v}_s}{ds} &= -\frac{1}{\rho_{vs}} \bar{e}_s + \frac{1}{\tau_{gs}} \bar{v}_s \times \bar{e}_s \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{I.}$$

Ha a $(\bar{v}_s \times \bar{e}_s, \bar{n}_s)$ szöget irányával együtt ω_s -nek nevezzük, akkor

$$\begin{aligned} (\bar{v}_s \times \bar{e}_s) \cdot \bar{n}_s &= \cos \omega_s, & (\bar{v}_s \times \bar{e}_s) \cdot \bar{b}_s &= -\sin \omega_s, \\ \bar{v}_s \cdot \bar{n}_s &= \sin \omega_s, & \bar{v}_s \cdot \bar{b}_s &= \cos \omega_s. \end{aligned}$$

Következésképpen:

$$\begin{aligned} \bar{v}_s &= (\bar{n}_s \cdot \bar{v}_s) \bar{n}_s + (\bar{b}_s \cdot \bar{v}_s) \bar{b}_s = \sin \omega_s \bar{n}_s + \cos \omega_s \bar{b}_s, \\ \bar{v}_s \times \bar{e}_s &= \bar{n}_s \cdot (\bar{v}_s \times \bar{e}_s) \bar{n}_s + \bar{b}_s \cdot (\bar{v}_s \times \bar{e}_s) \bar{b}_s = \cos \omega_s \bar{n}_s - \sin \omega_s \bar{b}_s. \end{aligned}$$

Ezen egyenletek elsejét, tekintettel a Frenet-Serret-féle formulákra s szerint differenciálva a következő relációhoz jutunk:

$$\frac{d\bar{v}_s}{ds} = \left(\frac{d\omega_s}{ds} + \frac{1}{\tau_s} \right) \bar{v}_s \times \bar{e}_s - \frac{\sin \omega_s}{\rho_s} \bar{e}_s.$$

Ámde a 4. alapján

$$\frac{1}{\rho_{vs}} = \bar{v}_s \cdot \frac{d\bar{e}_s}{ds} = \frac{\sin \omega_s}{\rho_s},$$

következőleg:

$$\frac{d\bar{v}_s}{ds} = \left(\frac{d\omega_s}{ds} + \frac{1}{\tau_s} \right) \bar{v}_s \times \bar{e}_s - \frac{1}{\rho_{vs}} \bar{e}_s.$$

Ha ezt az egyenletet az I. harmadikával összehasonlítjuk, akkor a következőhöz jutunk:

$$\frac{1}{\tau_{gs}} = \frac{d\omega_s}{ds} + \frac{1}{\tau_s} \dots \dots \dots \text{II.}$$

Ezt a tételt görbületi görbékre először *Lancret* mondotta ki 1802-ben;¹ geometriailag először *Liouville*,² majd később *Bonnet*,³ analitikailag pedig először *Brioschi*⁴ bizonyítja be; a *Brioschi* közölte *Bertrand*-féle formula azonban lényegileg az általános esetet is magában foglalja; ugyanez mondható e helyen közölt *Brioschi*-féle formuláról is.

Ha görbénk valamely

$$P = P(u, v)$$

felület görbéje, akkor u és v s megfelelő függvényei, tehát

$$\bar{e}_s = P_u \frac{du}{ds} + P_v \frac{dv}{ds} \dots \dots \dots 6.$$

A felület $P(u, v)$ pontjához tartozó normális

$$\bar{v} = \frac{P_u \times P_v}{|P_u \times P_v|} \dots \dots \dots 7.$$

A felület egy pontján átmenő görbék tanulmányozása alkalomával \bar{v}_s normálisul mindig a \bar{v} normálisat választjuk.

Ha a $P(u, v)$ ponton átmenő egy másik tetszőleges görbe ivét σ -val jelöljük, akkor erre a görbére nézve is u, v σ -nak a görbe természetének megfelelő függvényei, ennél fogva \bar{e}_s σ szerint

¹ *Lancret*, Memoire sur les lignes a double courbure. 1802.

² *Liouville*, Journ. de math. t. 11. p. 345. 1846.

³ *Bonnet*, Journ. de l'Ecole Polytech. 32. cah. t. XIX. p. 17. 1848.

⁴ *Brioschi*, Annali di Scienze Mat. e Fis. t. V. p. 232. 1854. Opere Mat. t. I. p. 120.

is differenciálható s ezt a differenciálhányadost a következő egyenlet szemlélteti:

$$\frac{d\bar{e}_s}{d\sigma} = P_{uu} \frac{du}{ds} \frac{du}{d\sigma} + P_{uv} \left(\frac{du}{ds} \frac{dv}{d\sigma} + \frac{du}{d\sigma} \frac{dv}{ds} \right) + P_{vv} \frac{dv}{ds} \frac{dv}{d\sigma} + \\ + P_u \frac{d^2u}{d\sigma ds} + P_v \frac{d^2v}{d\sigma ds} \dots\dots\dots 8.$$

Ha már most $\frac{d\bar{e}_\sigma}{ds}$ -t hasonló szellemben képezzük, akkor evidenssé válik, hogy

$$\frac{d\bar{e}_s}{d\sigma} \cdot \bar{v} = \frac{d\bar{e}_\sigma}{ds} \bar{v} \dots\dots\dots 9.$$

Ezek után könnyű belátni, hogy az

$$\bar{e}_s \cdot \bar{v} = 0, \bar{e}_\sigma \cdot \bar{v} = 0$$

egyenleteknek σ , illetőleg s szerint vett differenciálhányadosai a 9. alatt levő reláció alapján a következő egyenlethez vezetnek:

$$\bar{e}_s \cdot \frac{d\bar{v}}{d\sigma} = \bar{e}_\sigma \cdot \frac{d\bar{v}}{ds} \dots\dots\dots \text{III.}$$

A I., II. és III. alatt levő relációkat a görbék *fundamentális egyenleteinek* nevezzük.

Ha a III.-ban kijelölt műveleteket az I. harmadik egyenlete alapján végrehajtjuk, akkor annak a következő explicit alakjához jutunk:

$$\left(\frac{1}{\rho_{vs}} - \frac{1}{\rho_{v\sigma}} \right) \bar{e}_s \cdot \bar{e}_\sigma - \left(\frac{1}{\tau_{gs}} + \frac{1}{\tau_{g\sigma}} \right) (\bar{e}_s \times \bar{e}_\sigma) \cdot \bar{v} = 0 \dots\dots \text{III}'$$

Ha \bar{e}_{s1} , \bar{e}_{s2} , \bar{v} jobbra forgó derékszögű rendszert alkotnak, akkor bármely \bar{e} vektorra nézve:

$$\bar{e} = (\bar{e} \cdot \bar{e}_{s1}) \bar{e}_{s1} + (\bar{e} \cdot \bar{e}_{s2}) \bar{e}_{s2} + (\bar{e} \cdot \bar{v}) \bar{v}.$$

Ha ebbe az egyenletbe \bar{e} helyett a baloldalon $\frac{d\bar{v}}{ds}$ -t írunk, a jobboldalt pedig ezen szubsztitúció után a III.-nak megfelelően átalakítjuk, akkor a következő relációhoz jutunk:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \left(\frac{d\bar{v}}{ds_1} \cdot \bar{e}_s \right) \bar{e}_{s1} + \left(\frac{d\bar{v}}{ds_2} \cdot \bar{e}_s \right) \bar{e}_{s2},$$

ebből pedig az I. harmadik egyenlete alapján:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \left(-\frac{\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s}{\rho_{vs1}} + \frac{\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s}{\tau_{gs1}} \right) \bar{e}_{s1} + \left(-\frac{\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s}{\rho_{vs2}} - \frac{\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s}{\tau_{gs2}} \right) \bar{e}_{s2} \dots\dots \text{IV.}$$

Mivel a III'. alapján

azért
$$\frac{1}{\tau_{gs1}} + \frac{1}{\tau_{gs2}} = 0 \dots\dots\dots 10.$$

$$\frac{d\bar{v}}{ds} \cdot \bar{e}_\sigma = - \frac{(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_\sigma)}{\rho_{vs1}} + \frac{(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_\sigma) + (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_\sigma)}{\tau_{gs1}} - \frac{(\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_\sigma)}{\rho_{vs2}} \dots\dots\dots \text{IV}'$$

Ebből pedig, ha $\bar{e}_s = \bar{e}_\sigma$, akkor

$$\frac{1}{\rho_{vs}} = \frac{(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s)^2}{\rho_{vs1}} - \frac{2(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)}{\tau_{gs1}} + \frac{(\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)^2}{\rho_{vs2}} \dots\dots\dots \text{V.}$$

ha pedig $\bar{e}_\sigma = \bar{v} \times \bar{e}_s$, akkor

$$\frac{1}{\tau_{gs}} = \left(\frac{1}{\rho_{vs1}} - \frac{1}{\rho_{vs2}} \right) (\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s) + \frac{(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s)^2 - (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)^2}{\tau_{gs1}} \dots\dots \text{VI.}$$

Az V. alapján

$$\frac{1}{\rho_{vs}} - \frac{1}{\rho_{vs1}} = - \left(\frac{1}{\rho_{vs1}} - \frac{1}{\rho_{vs2}} \right) (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)^2 - \frac{2(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)}{\tau_{gs1}}, \dots\dots \text{VII.}$$

$$\frac{1}{\rho_{vs}} - \frac{1}{\rho_{vs2}} = \left(\frac{1}{\rho_{vs1}} - \frac{1}{\rho_{vs2}} \right) (\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s)^2 - \frac{2(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s) (\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)}{\tau_{gs1}}.$$

Ha ezt a két egyenletet a VI-ra való tekintettel összeszorozzuk, akkor a következő relációhoz jutunk:

$$\left(\frac{1}{\rho_{vs}} - \frac{1}{\rho_{vs1}} \right) \left(\frac{1}{\rho_{vs}} - \frac{1}{\rho_{vs2}} \right) + \frac{1}{\tau_{gs}^2} - \frac{1}{\tau_{gs1}^2} = 0 \dots\dots \text{VIII.}$$

A 10. alapján evidens, hogy ha \bar{e}_{sm} az \bar{e}_s -re merőleges irány, akkor a VIII-nak az $\frac{1}{\rho_{vsm}}$ is eleget tesz, következésképpen:

$$\frac{1}{\rho_{vs}} + \frac{1}{\rho_{vsm}} = \frac{1}{\rho_{vs1}} + \frac{1}{\rho_{vs2}} = H \dots\dots\dots \text{IX.}$$

$$\frac{1}{\rho_{vs}} \frac{1}{\rho_{vsm}} - \frac{1}{\tau_{gs}^2} = \frac{1}{\rho_{vs1}} \frac{1}{\rho_{vs2}} - \frac{1}{\tau_{gs1}^2} = K \dots\dots\dots \text{X.}$$

Az egymásra merőleges görbék orientációjától független H és K mennyiségeket a felület $P(u, v)$ pontjához tartozó közép-, illetőleg *tatális görbületnek* nevezzük. Ezeknek a mennyiségeknek a bevezetésével a VIII. a következő alakba írható:

$$-\frac{1}{\rho_{vs}^3} - H \frac{1}{\rho_{vs}} + K + \frac{1}{\tau_{gs}^2} = 0 \dots\dots\dots \text{XI.}$$

Ha egy másik tetszőleges irányú (σ) görbére is felírjuk az analog egyenletet, akkor K és H meghatározására még egy egyenletet nyerünk, melyekből aztán

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\rho_{vs}} - \frac{1}{\rho_{v\sigma}}\right) K &= \left(\frac{1}{\rho_{vs}^2} + \frac{1}{\tau_{gs}^2}\right) \frac{1}{\rho_{v\sigma}} - \left(\frac{1}{\rho_{v\sigma}^2} + \frac{1}{\tau_{g\sigma}^2}\right) \frac{1}{\rho_{vs}} \\ \left(\frac{1}{\rho_{vs}} - \frac{1}{\rho_{v\sigma}}\right) H &= \frac{1}{\rho_{vs}^2} + \frac{1}{\tau_{gs}^2} - \frac{1}{\rho_{v\sigma}^2} - \frac{1}{\tau_{g\sigma}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{XII.}$$

3. A felületek organikus görbéi.

A felület aszimtotikus, görbületi és geodetikus görbéi alatt oly felületi görbéknek értünk, melyeknek egyenletei rendre:

$$\frac{1}{\rho_{vs}} = 0, \frac{1}{\tau_{gs}} = 0, \frac{1}{\rho_{gs}} = 0.$$

Ha az egyszerűség kedvéért u -t tekintjük függetlenül változó paraméternek, akkor a 4. és 5. alatt levő definíciónk alapján evidens, hogy az első két egyenlet $\frac{dv}{du}$ -ban másodfokú, tehát azok mindegyike elsőrendű másodfokú, a harmadik pedig $\frac{d^2v}{du^2}$ -ban elsőfokú, tehát az másodrendű, elsőfokú differenciálegyenlet, ennél fogva:

A felület minden pontján két aszimtotikus — két görbületi — s minden felületi irányban egy geodetikus görbe megy át.

Az egy ponton átmenő aszimtotikus és görbületi görbék irányait az V. és VI. egyenletek alapján a következő egyenletek határozzák meg:

$$\frac{(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s)^2}{\rho_{vs1}} - \frac{2(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s)(\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)}{\tau_{gs1}} + \frac{(\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)^2}{\rho_{vs2}} = 0 \dots\dots\dots \text{V}'$$

$$\frac{(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s)^2}{\tau_{gs1}} + \left(\frac{1}{\rho_{vs1}} - \frac{1}{\rho_{vs2}}\right)(\bar{e}_{s1} \cdot \bar{e}_s)(\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s) - \frac{(\bar{e}_{s2} \cdot \bar{e}_s)^2}{\tau_{gs1}} = 0 \dots\dots \text{VI}'$$

A V'-ből evidens, hogy az aszimtotikus görbék reálisak, összeesők vagy képzetesek, aszerint, amint

$$K \stackrel{<}{=} 0.$$

A VI' alapján pedig a $4K - H^2 < 0$ feltétel következtében a görbületi vonalak mindig reálisak.

Mivel $4K - H^2$ csak akkor lehet null, ha

$$\frac{1}{\rho_{vs}} = \frac{1}{\rho_{gs2}}, \quad \frac{1}{\tau_{gs1}} = 0,$$

azért a VI.' értelmében ebben az esetben a $P(u, v)$ ponton átmenő minden felületi görbe görbületi görbe, a felület ily pontjait *gömbi* pontoknak nevezzük.

Ha az aszimtotikus görbék alkotta szöget α -val, a görbületi görbék hajlásszögét pedig γ -val jelöljük, akkor az V.' és VI.' alapján:

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 \frac{\sqrt{-K}}{H}, \dots\dots\dots 11.$$

$$\gamma = \pm \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots 12.$$

Organikus görbéinkre a definíció, valamint az I. és II. tételeink alapján érvényesek a következő relációk:

Az aszimtotikus görbékre nézve:

$$\frac{1}{\rho_s} \bar{n}_s = \frac{1}{\rho_{gs}} \bar{v} \times \bar{e}_s, \dots\dots\dots 13.$$

$$\omega_s = 0, \pi; \quad \frac{1}{\tau_{gs}} = \frac{1}{\tau_s} \dots\dots\dots 14.$$

A görbületi vonalakra nézve:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = -\frac{1}{\rho_{vs}} \bar{e}_s, \dots\dots\dots 15.$$

ez a *Rodrigues*-féle tétel¹ és

$$\frac{d\omega_s}{ds} = -\frac{1}{\tau_s} \dots\dots\dots 16.$$

A geodetikus görbékre nézve pedig:

$$\frac{1}{\rho_s} \bar{n}_s = \frac{1}{\rho_{vs}} \bar{v} \dots\dots\dots 17.$$

$$\omega_s = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{\tau_{gs}} = \frac{1}{\tau_s} \dots\dots\dots 18.$$

A képleteinkből nyilvánvaló következmények felsorolását mellőzzük. Csak azt említjük még meg, hogy $\frac{1}{\tau_{gs}} = 0$ esetre az V.-ből *Euler*,² a VI.-ból *Bertrand—Enneper*,³ a VIII.-ból pedig

¹ *Rodrigues*, Correspondence sur l'Ecole Polytechnique 3. no. 2. p. 163. 1815.

² *Euler*, Mem. de l'Acad. de Berlin t. XVI. 1760.

³ *Bertrand*, Journ. de math. t. IX. p. 140. 1844. *Traité de calcul différential* p. 681. 1864. *Enneper*, Zeitschr. f. Math. 9. p. 100. 1869.

Brioschi—Enneper¹ tétele adódik ki. Az $\frac{1}{\rho_{vs}} = 0$ esetre pedig a

XI. Enneper tételévé lesz,² a IX. pedig egy ismert tétellé.³

A felület oly egy pontján átmenő $(s), (\sigma)$ görbéit, melyekre nézve

$$e_s \cdot \frac{d\bar{v}}{d\sigma} = 0,$$

konjugált görbéknek nevezzük.

A IV.'-ből evidens, hogy a konjugált görbepárok involúcióban vannak, mely involúciónak kettős elemei — V. szerint — épen azon ponton átmenő aszimtotikus vonalak, az egymásra merőleges konjugált párt pedig épen e ponton átmenő görbületi vonalak alkotják. (VI. formula.)

Az I. harmadika és III. alapján a konjugált görbék alap-egyenletei:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{e}_s \cdot \bar{e}_\sigma}{\rho_{vs}} - \frac{(\bar{e}_s \times \bar{e}_\sigma) \cdot \bar{v}}{\tau_{gs}} &= 0 \\ \frac{\bar{e}_s \cdot \bar{e}_\sigma}{\rho_{v\sigma}} + \frac{(\bar{e}_s \times \bar{e}_\sigma) \cdot \bar{v}}{\tau_{g\sigma}} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 19.$$

melyekből könnyen leszarmaztatható az $(\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma) = 0, \frac{\pi}{2}$ esetekre is

érvényes

$$\frac{1}{\rho_{vs}} \frac{1}{\tau_{g\sigma}} + \frac{1}{\rho_{v\sigma}} \frac{1}{\tau_{gs}} = 0 \dots\dots\dots 20.$$

formula

1. Pl. Ha a felület sík, akkor $v = \text{konst.}$; $\omega_s = 0, \pi$. Következőleg az I. harmadik és első egyenlete, valamint a II. alapján

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_{vs}} &= \frac{1}{\tau_{gs}} = 0, \\ \frac{1}{\rho_s} \bar{n}_s &= \frac{1}{\rho_{gs}} \bar{v} \times \bar{e}_s, \\ \frac{1}{\tau_{gs}} &= \frac{1}{\tau_s} = 0, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 21.$$

azaz: Minden síkgörbe saját síkjában aszimtotikus és görbületi görbe.

A sík egyenesei a sík egyedüli geodetikus görbéi.

Minden síkgörbe torziója null.

¹ Brioschi, Annali di Scienze Matematiche e Fisiche t. v. p. 232. 1854. Opere Matematiche t. I. p. 120. Enneper, Zeitschr. f. Math. 9. p. 100. 1864.

² Enneper, Ueber assymptotische Linien. Göttinger Nachr. 1870. p. 499.

³ Encyclopädie d. Math. Wiss. B. III. 3 Heft. 1. p. 176.

2. Pl. Ha a *felület gömb*, melynek centruma C és sugara r , akkor

$$(P-C)^2 = r^2, \quad (P-C) \cdot \bar{e}_s = 0. \quad \dots \quad 22.$$

Ha tehát

$$\bar{v} = \frac{P-C}{r},$$

akkor

$$\frac{d\bar{v}}{ds} = \frac{\bar{e}_s}{r},$$

ennélfogva az I. harmadika alapján

$$\frac{1}{\rho_{vs}} = -\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{\tau_{gs}} = 0, \quad \dots \quad 23.$$

tehát minden gömbi görbe saját gömbjén görbületi görbe.

A 17., 18. és 23. értelmében a gömb legnagyobb gömbkörei a gömb egyedüli geodetikus görbéi.

3. Pl. Ha a felület henger, melynek alkotói az \bar{a} egységvektorral párhuzamosak, akkor \bar{a} irányának alkalmas megválasztásával és $(\bar{a}, \bar{e}_s) = \alpha$ alkalmazásával

$$\bar{a} \cdot \bar{e}_s = \cos \alpha, \quad \bar{a} \cdot \bar{v} = 0, \quad (\bar{a} \times \bar{e}_s) \cdot \bar{v} = \sin \alpha.$$

Ha ezen egyenletek két elsejét az I-re való tekintettel s szerint differenciáljuk, akkor a következő relációkhoz jutunk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{1}{\rho_{gs}}, \\ \frac{\cos \alpha}{\rho_{vs}} + \frac{\sin \alpha}{\tau_{gs}} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \quad 24.$$

Tehát a henger egyedüli geodetikus vonalai a rajtalevő cilindrikus csavarvonalak; ezekre nézve tehát a 17. és 18. számoltatásával

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \text{konst.} \\ \frac{\cos \alpha}{\rho_s} (\bar{n}_s \cdot \bar{v}) + \frac{\sin \alpha}{\tau_s} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \quad 25.$$

4. Ha a felület C csúcsú kúp és $(P-C)^2 = r^2$, akkor

$$(P-C) \cdot \bar{e}_s = r \frac{dr}{ds};$$

továbbá \bar{v} irányának alkalmas megválasztásával

$$\frac{P-C}{r} \cdot \bar{e}_s = \cos \alpha, \quad (P-C) \cdot \bar{v} = 0, \quad \left(\frac{P-C}{r} \times \bar{e}_s \right) \cdot \bar{v} = \sin \alpha.$$

Ezen egyenletek két elsejének s szerint vett differenciálhányadosai I. alapján a következő relációkhoz vezetnek:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_{gs}} &= \frac{\sin \alpha}{r} + \frac{da}{ds}, \\ \frac{\cos \alpha}{\rho_{vs}} + \frac{\sin \alpha}{\tau_{gs}} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 26.$$

Amiből látható, hogy a *kúp konikus csavarvonalai* ($\alpha = \text{konst}$) a kúpon *nem geodetikus vonalak*.

A konikus csavarvonalra nézve:

$$\alpha = \text{konst}, \quad r = s \cos \alpha$$

$$x = (P - C) \cdot \bar{e}_s = s \cos^2 \alpha.$$

Ha ezt az egyenletet tekintettel a *Frenet—Serret*-féle formulákra háromszor differenciáljuk, akkor még a következő egyenleteket nyerjük:

$$y = (P - C) \cdot \bar{n}_s = -\rho_s \sin^2 \alpha,$$

$$z = (P - C) \cdot \bar{b}_s = \rho'_s \tau_s \sin^2 \alpha - s \cdot \frac{\tau_s}{\rho_s} \cos^2 \alpha,$$

$$\frac{dz}{ds} = -\frac{\rho_s}{\tau_s} \sin^2 \alpha;$$

tehát

$$P - C = x \bar{e}_s + y \bar{n}_s + z \bar{b}_s.$$

Ha a konikus csavar görbe oly cilindrikus csavargörbe is egyszersmind, mely az \bar{a} -val párhuzamos alkotójú, \bar{v}_0 normálisú hengeren van és $\bar{a} \cdot \bar{e}_s = \cos \alpha_0$, akkor a 25. alapján

$$\frac{\rho_s}{\tau_s} = -(\bar{n}_s \cdot \bar{v}_0) \operatorname{ctg} \alpha_0,$$

tehát az imént levezetett egyenleteink két utolsója alapján

$$z = s \sin^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha_0 (\bar{n}_s \cdot \bar{v}_0)$$

$$(P - C) \cdot \bar{a} = x \cos \alpha_0 + z (\bar{n}_s \cdot \bar{v}_0) \sin \alpha_0 = s \cos \alpha_0,$$

honnan

$$\frac{P - C}{r} \cdot \bar{a} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha},$$

ami azt mondja ki, hogy kúpunk \bar{a} tengelyű körkúp.

4. Érintkező görbék.

Ha a

$$\frac{dP}{ds} = \bar{e}_s = P_u u' + P_v v'$$

egyenletet s szerint még kétszer differenciáljuk, akkor a nyert egyenletekből könnyű meggyőződni, hogy

$$\frac{d^2 \bar{e}_s}{ds^2} \cdot \bar{v} + 3 \frac{d \bar{e}_s}{ds} \cdot \frac{d \bar{v}}{ds} = \Omega_s(u', v').$$

$\frac{1}{\rho_{vs}}$ definíciója alapján tehát

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho_{vs}} \right) = -2 \frac{1}{\rho_{gs} \tau_{gs}} + \Omega_s(u', v').$$

Érintkező görbékre nézve az érintkezés pontjában mind-azok a mennyiségek, melyek csak u', v' -től függenek egyenlők, tehát (s) és (σ) érintkező görbékre nézve az érintkezés pontjában

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho_{vs}} = \frac{1}{\rho_{v\sigma}}, \quad \frac{1}{\tau_{gs}} = \frac{1}{\tau_{g\sigma}}, \quad \Omega_s = \Omega_\sigma; \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho_{vs}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\rho_{v\sigma}} \right) + 2 \frac{1}{\tau_{gs}} \left(\frac{1}{\rho_{gs}} - \frac{1}{\rho_{g\sigma}} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \dots \text{XIII.}$$

Pl. Ha (s) asszimtotikus görbe, akkor a 13. szerint

$$\frac{1}{\tau_{gs}} = \frac{1}{\tau_{g\sigma}} = \frac{1}{\tau_s}; \quad \frac{d\omega_s}{ds} = 0,$$

tehát

$$\frac{d\omega_\sigma}{d\sigma} = \frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_\sigma},$$

továbbá:

$$\frac{1}{\rho_{vs}} = \frac{1}{\rho_{v\sigma}} = \frac{\sin \omega_s}{\rho_s} = \frac{\sin \omega_\sigma}{\rho_\sigma} = 0;$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\rho_{vs}} \right) = 0, \quad \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\rho_{v\sigma}} \right) = \frac{\cos \omega_\sigma}{\rho_\sigma} \cdot \frac{d\omega_\sigma}{d\sigma} = \frac{1}{\rho_{g\sigma}} \left(\frac{1}{\tau_s} - \frac{1}{\tau_\sigma} \right),$$

ennélfogva:

$$\frac{2}{\tau_s \rho_{gs}} - \frac{3}{\tau_s \rho_{g\sigma}} + \frac{1}{\tau_\sigma \rho_{g\sigma}} = 0, \dots \dots \dots 27.$$

ez a *Bonnet*-féle tétel,¹ mely $\frac{1}{\tau_\sigma} = 0$ esetben a *Beltrami*-féle tételt adja.²

A XI. differenciálása, valamint a XIII. formulák segítségével könnyű megállapítani a következő érintkezési feltételt is.

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\tau_{gs}} \right) - \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{1}{\tau_{g\sigma}} \right) - \left(\frac{2}{\rho_{vs}} - H \right) \left(\frac{1}{\rho_{gs}} - \frac{1}{\rho_{g\sigma}} \right) = 0 \dots \text{XIV.}$$

Az (s) és (σ) érintkező görhék érintkezési pontjában

$$ds = d\sigma, \quad \bar{e}_s = \bar{e}_\sigma, \quad \bar{e}_s \times \bar{e}_\sigma = 0.$$

¹ *Bonnet*, Nouv. Ann. de Math. 2. serie. t. IV. p. 267. 1865.

² *Beltrami*, Nouv. Ann. de Math. 2. serie t. IV. 1865. p. 158—267.
Opere Mat. I. I. p. 259.

A ds végpontjában a görbéinkhez vont érintők alkotta szöget a *kontigencia szögének* nevezzük.

Ha $\left(\bar{e}_\sigma + \frac{d\bar{e}_\sigma}{d\sigma} d\sigma\right) \times \left(\bar{e}_s + \frac{d\bar{e}_s}{ds} ds\right)$ vektor iránya megegyezik \bar{v} irányával s ha a kontigencia szögét $d\varepsilon$ -nal jelöljük, akkor,

$$d\varepsilon = \left\{ \left(\bar{e}_\sigma + \frac{d\bar{e}_\sigma}{d\sigma} d\sigma\right) \times \left(\bar{e}_s + \frac{d\bar{e}_s}{ds} ds\right) \right\} \cdot \bar{v},$$

honnan

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \left(\frac{d\bar{e}_\sigma}{d\sigma} \times \bar{e}_\sigma + \bar{e}_s \times \frac{d\bar{e}_s}{ds} \right) \cdot \bar{v},$$

azaz

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\rho_{\sigma s}} - \frac{1}{\rho_{gs}} \dots \dots \dots \text{XV.}$$

Ha (σ) geodetikus vonal, akkor

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\rho_{gs}},$$

mely tétel alapján a geodetikus görbület definíciója a síkgörbék görbületére vonatkozó definíciónak természetes általánosításaként jelenik meg.

5. A felületek metszése.

Ha $P(s)$ két $P_1(u, v)$ és $P_2(u, v)$ felület metszési görbéje s a két felület hajlásszögét $\omega_{1s} - \omega_{2s}$ -t θ -nak nevezzük, akkor a II. szerint

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\tau_{1gs}} - \frac{1}{\tau_{2gs}} \dots \dots \dots \text{XVI.}$$

Tehát egymást állandó szög alatt metsző két felület metszési görbéje mentén a görbe geodetikus torziója mindkét felületre nézve ugyanaz. Ez a Bonnet-féle tétel.¹

Az előbbi fejezet 1. és 2. feladata értelmében:

Ha egy felületet valamely sík vagy gömb konstans szög alatt metsz, akkor a metszési görbe a felület görbületi vonala.

Ennek a tételnek a síkra vonatkozó része Joachimsthal-tól ered.²

Ha az I.-nek a két felületre vonatkozó első egyenleteit egymásból kivonjuk, akkor a következő relációhoz jutunk:

$$\frac{1}{\rho_{1gs}} \bar{v}_1 \times e_s - \frac{1}{\rho_{2gs}} \bar{v}_2 \times e_s + \frac{1}{\rho_{1vs}} \bar{v}_1 - \frac{1}{\rho_{2vs}} \bar{v}_2 = 0. \dots \dots \text{XVII.}$$

¹ Bonnet, Joun. de l'Ecole Polytechnique, Cahier 32. t. XIX. p. 17. 1848.

² Joachimsthal, Journ. f. Math. t. XXX. p. 347—350. 1846.

melynek segítségével a geodetikus görbületek kifejezhetők a normális görbületekkel s viszont.

Pl. Ha három felület P_1 , P_2 és P_3 orthogonálisan metszi egymást s ha i, j, k az 1, 2, 3 számok egy tetszőleges permutációja és P_i, P_j felületek metszés görbéjének a két felületre vonatkozó közös geodetikus görbületét $\frac{1}{\tau_{gsk}}$ -val jelöljük, akkor a III.' alapján

$$\frac{1}{\tau_{gsi}} + \frac{1}{\tau_{gsk}} = 0$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$\frac{1}{\tau_{gsi}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

azaz: a metszési görbék a rajtuk átmenő felületek mindegyikére nézve görbületi vonalak. Ez a Dupin-féle tétel.¹

6. A görbék definíciója.

Az $s = s_0$ -hoz tetszőlegesen választott \bar{e}_{s_0} , $\bar{v}_{s_0} \times \bar{e}_{s_0}$, \bar{v}_{s_0} egymásra kölcsönösen merőleges egységvektorokat kezdő vektorokul választva az I. egyértelműleg meghatározza \bar{e}_s , $\bar{v}_s \times \bar{e}_s$, \bar{v}_s -et. Ugyanis, ha az I. megoldásait rendre \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} -vel jelöljük, akkor könnyű meggyőződni, hogy $\bar{b} \times \bar{c}$, $\bar{c} \times \bar{a}$, $\bar{a} \times \bar{b}$ szintén megoldások. De mivel egy kezdő értékrendszerhez csak egy megoldás tartozik, azért

$$\bar{b} \times \bar{c}, \bar{c} \times \bar{a}, \bar{a} \times \bar{b} = \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$$

tehát \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} jobbra forgó derékszögű egységrendszert alkotnak, ennél fogva jelölésükre jogosult az \bar{e}_s , $\bar{v}_s \times \bar{e}_s$, \bar{v}_s jelölés.

Ha már most a tér tetszőleges P_0 pontját rendeljük a görbe $s = s_0$ ívéhez, akkor

$$P = P_0 + \int_{s_0}^s \bar{e}_s ds.$$

Ha tehát $\frac{1}{\rho_{vs}}$, $\frac{1}{\rho_{gs}}$, $\frac{1}{\tau_{gs}}$ mint s függvényei adottak, akkor orientációjától függetlenül tehát abszolút meghatározható az a görbe, melynek (s) pontjában a görbületeknek s a torzióknak az értékét éppen a fönntebb adott függvények határozzák meg.

Ennél fogva 3 föltétel elégséges a görbe meghatározásához.

¹ Dupin, Developpements de géometrie 1813.

A mondottak alapján görbénket a következő alakú egyenlettel képviselhetjük:

$$P = P_0 + x(s - s_0)\bar{e}_{s_0} + y(s - s_0)\bar{v}_{s_0} \times \bar{e}_{s_0} + z(s - s_0)v_{s_0}.$$

Ha s -t s_0 -al felcseréljük, akkor

$$P_0 = P + x(s_0 - s)\bar{e}_s + y(s_0 - s)\bar{v}_s \times \bar{e}_s + z(s_0 - s)\bar{v}_s.$$

Ha már most C a tér egy tetszőlegesen adott pontja, akkor

$$C - P_0 = x_0\bar{e}_s + y_0\bar{v}_s \times \bar{e}_s + z_0\bar{v}_s.$$

Ezt a vektort az utóbbi egyenlet mindkét oldalához hozzáadva s az $x_0 + x(s_0 - s)$, $y_0 + y(s_0 - s)$, $z_0 + z(s_0 - s)$ függvényeket röviden x , y , z -vel jelölve

$$C = P + x\bar{e}_s + y\bar{v}_s \times \bar{e}_s + z\bar{v}_s \dots \dots \dots \text{XVIII.}$$

x, y, z jelentését különben a következő egyenletrendszer szemlélteti:

$$x, y, z = (\bar{e}_s, \bar{v}_s \times \bar{e}_s, \bar{v}_s) \cdot (C - P);$$

következőleg az I.-re való tekintettel differenciálva

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -1 + \frac{y}{\rho_{gs}} + \frac{z}{\rho_{vs}}, \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{x}{\rho_{gs}} - \frac{z}{\tau_{gs}}, \\ \frac{dz}{ds} &= -\frac{x}{\rho_{vs}} + \frac{y}{\tau_{gs}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{XIX.}$$

Mely egyenletrendszert a $(C - P)^2 = r^2$ alkalmazásával még a következővel egészíthetjük ki:

$$r \frac{dr}{ds} = -x. \dots \dots \dots 28.$$

Ha a görbének valamely C ponthoz való relációja adott, akkor a XIX. alapján a görbületek s a torzió is meghatározható. Akkor is a XIX.-et használjuk a görbe meghatározásához, ha a definícióban vegyes feltételek fordulnak elő.

1. Pl. A síkgörbékre nézve:

$$\frac{1}{\rho_{vs}} = \frac{1}{\tau_{gs}} = 0,$$

tehát a síkgörbéket egy föltétel meghatározza.

2. Pl. A gömbi görbékre nézve:

$$\frac{1}{\rho_{vs}} = -\frac{1}{r}, \frac{1}{\tau_{gs}} = 0,$$

tehát a gömbi görbéket egy föltétel szintén meghatározza.

3. Pl. A $P(s)$ görbéhez tartozó $P(s) + u \bar{e}_s$ felületre nézve:

$$\left(\bar{v}, \bar{v} \times \bar{e}_s, \frac{1}{\rho_{vs}}, \frac{1}{\rho_{gs}}, \frac{1}{\tau_{gs}} \right) = \left(\bar{b}_s, n_s, 0, \frac{1}{\rho_s}, \frac{1}{\tau_s} \right),$$

tehát az I. egyenletei a *Frenet-Serret*-féle formulákba mennek át s így a görbét meghatározzák a

$$\rho_s = \rho_s(s), \tau_s = \tau_s(s)$$

egyenletek, melyeket a görbe természetes egyenleteinek szokás nevezni. Ha egy görbe lép csak fel a tárgyalásban, akkor ρ_s és τ_s helyett egyszerűen ρ -t és τ -t írunk. Ebben az esetben aztán, ha a többi mennyiség mellől is elhagyjuk az s indexet:

$$C = P + x \bar{e} + y \bar{n} + z \bar{b}, \dots \dots \dots \text{XVIII.}'$$

$$(x, y, z) = (\bar{e}, \bar{n}, \bar{b}) \cdot (C - P).$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -1 + \frac{y}{\rho}, \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{x}{\rho} - \frac{z}{\tau}, \\ \frac{dz}{ds} &= \frac{y}{\tau}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{XIX.}'$$

4. Pl. A $P(s)$ görbéhez tartozó másik $P(s) + v \bar{b}$ felületre nézve:

$$\left(\bar{v}, \bar{v} \times \bar{e}_s, \frac{1}{\rho_{vs}}, \frac{1}{\rho_{gs}}, \frac{1}{\tau_s} \right) = \left(-\bar{n}, \bar{b}, -\frac{1}{\rho}, 0, \frac{1}{\tau} \right),$$

tehát alakilag ismét a 3. pl. egyenleteihez jutunk.

5. Pl. A görbéhez tartozó harmadik $P(s) + v \bar{n}$ felület ismét a 3. pl. relációihoz vezet.

6. Pl. Ha $P(s)$ gömbi görbe és C a gömb centruma, akkor $x = 0$, tehát a XIX.' alapján

$$y = \rho, z = -\tau \rho'; \quad (\tau \rho')' + \frac{\rho}{\tau} = 0,$$

ami harmoniában van a 2. példa eredményével.

7. Pl. Ha $P(s)$ konikus csavarvonal s C a kúp csúcsa, akkor $x = rc$, a 28. és a XIX.' alapján tehát

$$\begin{aligned} x &= -c^2 s, y = (1 - c^2) \rho, z = \frac{c^2 \tau s}{\rho} - (1 - c^2) \rho' \tau; \\ \left[\frac{c^2 \tau s}{\rho} - (1 - c^2) \rho' \tau \right]' - (1 - c^2) \frac{\rho}{\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Ennélfogva a konikus csavarvonal meghatározásához csak egy föltételre van szükségünk.

7. Alkalmazás a síkgörbékre.

A síkgörbékre vonatkozó *Frenet-Serret*-féle formulák:

$$\frac{d\bar{e}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \bar{e} \dots \dots \dots A.'$$

Ha $C-t$ a görbe síkjában választjuk, akkor $z=0$, tehát a XVIII.' és XIX.' formulák a síkgörbékre nézve:

$$C = P + x\bar{e} + y\bar{n}. \dots \dots \dots \text{XVIII.}''$$

$$(x, y) = (\bar{e}, \bar{n}) \cdot (C - P).$$

$$\frac{dx}{ds} = -1 + \frac{y}{\rho}, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\rho} \dots \dots \dots \text{XIX.}''$$

$$r \cdot \frac{dr}{ds} = -x. \dots \dots \dots 28.'$$

Ha a sík több pontjára vonatkozólag kell kutatást végezni, akkor ezeket a pontokat C_1, \dots, C_i -el jelöljük, a C_i -re vonatkozó x, y, r mennyiségeket pedig rendre x_i, y_i, r_i -vel.

1. Pl. C_1 és C_2 pontokra nézve görbénket definiálja a következő egyenlet:

$$r_1 + r_2 = 2a \dots \dots \dots (a)$$

Ha ezt az egyenletet a 28.'-re való tekintettel differenciáljuk s szerint, akkor a következő relációhoz jutunk:

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} = 0 \dots \dots \dots \alpha)$$

Mivel általában

$$\frac{C_1 - P}{r_1} \neq -\frac{C_2 - P}{r_2},$$

azért a XVIII.'' alapján

$$\frac{y_1}{r_1} - \frac{y_2}{r_2} = 0 \dots \dots \dots \beta)$$

Ha már most a

$$(C_1 - C_2)^2 = 4c^2$$

egyenletet kivonjuk az (a) négyzetéből, akkor az $a^2 - c^2 = b^2$ alkalmazásával tekintettel $\alpha)$ és $\beta)$ -ra

$$r_1 r_2 \left(\frac{y_1}{r_1} \right)^2 = b^2 \dots \dots \dots \gamma)$$

$\beta)$ -nak s szerint vett differenciálhányadosa pedig a XIX.'', $\alpha)$ és $\beta)$ figyelembe vételével a következő relációhoz vezet:

$$r_1 r_2 = a\rho \frac{y_1}{r_1} \dots \dots \dots \delta)$$

$\gamma)$ és $\delta)$ -ból

$$r_1 r_2 = (ab\rho)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{y_1}{r_1} = \frac{b}{(ab\rho)^{\frac{1}{3}}}. \quad \dots \dots \dots \epsilon)$$

Ha ezen egyenletek elsejébe r_2 értékét az (a) egyenletből behelyettesítjük, akkor csekély átalakítással a következő relációt nyerjük:

$$r_1 - a = \sqrt{a^2 - (ab\rho)^{\frac{2}{3}}}. \quad \dots \dots \dots \eta)$$

Mivel

$$\frac{x_1}{r_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2}, \quad r_1' = -\frac{x_1}{r_1},$$

azért, ha az $\epsilon)$ és $\eta)$ egyenletek alapján $\frac{x_1}{r_1}$ értékét kétféleképen meghatározzuk s a nyert értékeket egyenlővé tesszük, akkor az

$$s = \frac{ab}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{[a^2 - (ab\rho)^{\frac{2}{3}}] [(ab\rho)^{\frac{2}{3}} - b^2]}} \quad \dots \dots \dots \text{XX.}$$

egyenlethez jutunk, mely görbénk természetes egyenlete.

Ha pedig C_1 és C_2 pontokra vonatkozólag görbénket az

$$r_1 - r_2 = 2a \quad \dots \dots \dots (b)$$

egyenlet definiálja, akkor az előbbivel azonos gondolatmenet oly eredményhez vezet, melyet a XX-ből úgy nyerünk, hogy abban b helyett ib -t írunk.

Ha pedig görbénket C pontra vonatkozólag az

$$r + (C - P) \cdot \bar{c} = p \quad \dots \dots \dots (c)$$

egyenlet definiálja, hol \bar{c} konstans egység vektor s p adott szám, akkor ezen egyenletünknek a 28'-re való tekintettel s szerint vett differenciálhányadosa s annak megfontolása, hogy

$$\frac{P - C}{r} \equiv -\bar{c}$$

a következő egyenletekhez vezetnek:

$$\frac{x}{r} = -\bar{e} \cdot \bar{c}, \quad \frac{y}{r} = \bar{n} \cdot \bar{c}, \quad \dots \dots \dots \vartheta)$$

mely egyenletek elsejének a XIX"-re való tekintettel s szerint vett differenciálhányadosa a

$$2r = \rho (\bar{n} \cdot \bar{c}) \quad \dots \dots \dots i)$$

relációhoz vezet. A XVIII." alapján

$$(P - C) \cdot \bar{c} = (\bar{e} \cdot \bar{c}) x + (\bar{n} \cdot \bar{c}) y,$$

mely egyenlet a (c) i) és 3) alapján tartalmazza a következőket:

$$\bar{n} \cdot \bar{c} = \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \bar{e} \cdot \bar{c} = \left(\frac{p}{\rho}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}.$$

Az i)-nek s szerint vett differenciálhányadosa az

$$1 = \frac{\rho' \bar{n} \cdot \bar{c}}{3 \bar{e} \cdot \bar{c}}$$

relációhoz vezet, honnan

$$s = \frac{1}{3} \int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}}, \dots\dots\dots \text{XX}'$$

mely görbéknek — a parabolának természetes egyenlete.

2. Pl. Görbénket definiálja a következő egyenlet:

$$x = \varphi(s)$$

honnan a XIX." első egyenlete alapján

$$y = (1 + \varphi')\rho,$$

ha ezt az egyenletet a XIX." második egyenletével megszorozzuk s aztán integrálunk, akkor

$$y^2 = c - 2 \int \varphi(1 + \varphi') ds$$

egyenlethez jutunk, melynek az előbbivel való összevetése elvezet görbéknek

$$\rho^2 = \frac{c - 2 \int \varphi(1 + \varphi') ds}{(1 + \varphi')^2} \dots\dots\dots \text{XXI.}$$

természetes egyenletéhez.

3. Pl. Görbénket definiálja a következő egyenlet:

$$r^2 = \varphi(\rho).$$

Ebből a 28.' és a XIX." második egyenlete alapján:

$$x = -\frac{1}{2} \varphi' \rho', \quad y' = \frac{1}{2} \frac{\varphi' \rho'}{\rho},$$

tehát

$$y = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi' d\rho}{\rho}.$$

Ennélfogva görbénk természetes egyenlete

$$s = -\frac{1}{2} \int \frac{\varphi' d\rho}{\sqrt{r^2 - y^2}} \dots\dots\dots \text{XXII.}$$

4. Pl. Ha görbénket az

$$r^2 = y \varphi(\rho) + a^2$$

egyenlet definiálja, akkor ennek s szerint vett differenciálhányadosa a 28.' és XIX." alapján a következő relációhoz vezet:

$$\left(\frac{\varphi}{\rho} - 2\right) x = \varphi' \rho' y,$$

tehát a XIX." második alakján

$$ly = lc + \int \frac{\varphi' d\rho}{2\rho - \varphi} = lc + \psi, \quad y = ce^\psi.$$

Az előbbi egyenlet alapján tehát görbénk természetes egyenlete:

$$s = \int \frac{y \varphi' d\rho}{\left(\frac{\varphi}{\rho} - 2\right) x}, \dots\dots\dots \text{XXIII.}$$

hol x a definíció alapján ρ -nak ismert függvénye.

Görbénk speciális esetei:

- a) $\varphi = \lambda\rho$, $a \neq 0$; Cesaro-féle görbe.¹
- b) $\varphi = \lambda\rho$, $a = 0$; sinus spirális.²
- c) $\varphi = -\rho$, $a \neq 0$; kúpszelet.
- d) $\varphi = \rho$, $a \neq 0$, $c \neq 1$; cikloidális görbék.
- e) $\varphi = \lambda\rho$, $a = \infty$, $\frac{a^2}{c^2} = \lambda^2$; Ribaucour-féle görbe.³
- f) $\varphi = \rho$, $a \neq 0$, $c = 1$; a kör evolútája.
- g) $\varphi = \rho$, $a = 0$, $c \neq 1$; logaritmikus spirális⁴.

8. A görbék származtatása mozgással.

Ha $P(s)$ és $Q(\sigma)$ görbe pontjai a

$$\sigma = \sigma(s)$$

reláció alapján kölcsönös s egyértelmű vonatkozásban vannak s ha $P(s)$ görbe a vele merev rendszert alkotó C ponttal úgy mozog, hogy $P(s)$ pontja $Q(\sigma)$ homolog pontjaival rendre feddésbe kerüljenek s $P(s)$ fundamentalis triedere állandóan összeessék $Q(\sigma)$ feddésbe kerülő pontjának fundamentalis triederével, akkor

¹ Cesaro, Vorlesungen über natürliche Geometrie 1901. p. 54—62. Nouv. Ann. III. ser. t. 13. 1894.

² Loria, Specielle algebraische und transcendente Ebene Curven 1902, p. 395—400.

³ Loria, u. o. p. 522—526.

⁴ Loria, u. o. 448.

C pont is egy görbét ír le, melynek, ha azt a pontját, mely megfelel C azon helyzetének, midőn az s és σ pontok összeesnek, R -nek nevezünk, akkor a XVIII. alapján

$$R = Q(\sigma) + x_s \bar{e}_\sigma + y_s (\bar{v} \times \bar{e}_\sigma) + z_s \bar{v}_\sigma \dots \dots \text{XXIV.}$$

hol, x_s, y_s, z_s -re érvényesek a XIX. alatt levő formulák, melyeket a mozgás invariánsul hagy.

A $\sigma = s$ esetben a XXIV. a *ruletták* általános egyenletévé lesz.

A XXIV-et az I-re való tekintettel σ szerint differenciálva a következő egyenletet nyerjük:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\sigma} = \bar{e}_\sigma + \left[\frac{dx_s}{ds} \bar{e}_\sigma + \frac{dy_s}{ds} (\bar{v}_\sigma \times \bar{e}_\sigma) + \frac{dz_s}{ds} \bar{v}_\sigma \right] \frac{ds}{d\sigma} \\ - \left(\frac{y}{\rho_{g\sigma}} + \frac{z}{\rho_{v\sigma}} \right) \bar{e}_\sigma + \left(\frac{x}{\rho_{g\sigma}} + \frac{z}{\tau_{g\sigma}} \right) \bar{v}_\sigma \times \bar{e}_\sigma + \left(\frac{x}{\rho_{v\sigma}} - \frac{y}{\tau_{g\sigma}} \right) \bar{v}_\sigma. \end{aligned}$$

Ha ennek az egyenletnek mindkét oldalát skalárisan $R - Q$ -val szorozzuk, akkor a 28.-ra való tekintettel a következő relációhoz jutunk:

$$\frac{dR}{d\sigma} \cdot (R - Q) = \left(1 - \frac{ds}{d\sigma} \right) x.$$

Amiből világos, hogy a jeleztük mozgással leszármaztatott görbék közül egyedül a *rulettákat* illeti meg a

$$\frac{dR}{d\sigma} \cdot (R - Q) = 0$$

egyenlettel kifejezett különben ismeretes szabály.

1. Pl. Ha C egy ρ_s sugarú kör centruma, akkor, ha a körre nézve az $\bar{e}_s, \bar{n}_s, b_s$ trieder választjuk fundamentalis triederül

$$C = P + \rho_s \bar{n}_s;$$

következőleg a jellemeztük mozgással a C pont leírta görbe egyenlete

$$R = Q + \rho_s (\bar{v}_\sigma \times \bar{e}_\sigma).$$

2. Pl. Ha pedig C a kör egy fix pontja, akkor

$$C = P - \rho_s \sin \frac{s}{\rho_s} \bar{e}_s + \rho_s \left(1 - \cos \frac{s}{\rho_s} \right) \bar{n}_s,$$

tehát

$$R = Q - \rho_s \sin \frac{s}{\rho_s} \bar{e}_\sigma + \rho_s \left(1 - \cos \frac{s}{\rho_s} \right) \bar{v}_\sigma \times \bar{e}_\sigma.$$

9. A görbék általánosabb jellegű definíciója.

Ha $P(s)$ és $Q(\sigma)$ görbék relativ helyzete ismeretes, akkor a homolog pontokat összekötő

$$Q - P = x \bar{e}_s + y \bar{v}_s \times \bar{e}_s + z \bar{v}_s$$

vektor is adottnak tekinthető. Ha tehát görbéink egyike Q adott, akkor P -re vonatkozó relativ helyzetének teljes ismerete a fölirt egyenlet alapján meghatározza P -t.

1. Pl $P(s)$ síkgörbének a síkjában levő $Q = Q_0 + \sigma \bar{e}$ egyeneshez való relativ helyzetét szemléltesse a következő egyenlet:

$$Q_0 + \sigma \bar{e}_\sigma = P + \lambda \rho^n \bar{n}_s \dots \dots \dots 29.$$

Ha ezt az egyenletet σ szerint kétszer differenciáljuk s a nyert egyenletben \bar{e}_s és \bar{n}_s együttthatóit zérussá tesszük, akkor $\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2$ és $\frac{d^2s}{d\sigma^2}$ -ben két homogén lineáris egyenletet nyerünk, melyeknek szimultán fennállása megköveteli, hogy a rendszer determinansa nulla legyen; az így nyert egyenlet aztán a következő alakba írható:

$$\left(\frac{n \lambda \rho^{n-1} \rho'}{1 - \lambda \rho^{n-1}}\right)' + \frac{\lambda n \rho^{n-1} \rho'}{1 - \lambda \rho^{n-1}} \cdot \left[l (1 - \lambda \rho^{n-1})^{-\frac{n}{n-1}} \right]' + \frac{1}{\rho} = 0,$$

$$n \neq 1, \dots \dots \dots B)$$

mely az

$$U = \frac{n \lambda \rho^{n-1} \rho'}{1 - \lambda \rho^{n-1}},$$

$$V = (1 - \lambda \rho^{n-1})^{-\frac{n}{n-1}}$$

alkalmazásával

$$U(l U V)' + \frac{1}{\rho} = 0$$

alakba írható. Ha már most megfontoljuk, hogy

$$U V = \rho V',$$

akkor

$$\frac{\rho V'}{V} (l \rho V')' + \frac{1}{\rho} = 0$$

vagy

$$(\rho V')' + \frac{V}{\rho} = 0.$$

Ha ezt az egyenletet $\rho V'$ -sel sorozzuk s aztán integrálunk, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$(\rho V')^2 + V^2 = c$$

vagy

$$U^2 = c V^{-2} - 1,$$

honnan görbénk természetes egyenlete:

$$s = \int \frac{n \lambda \rho^{n-1} d\rho}{(1 - \lambda \rho^{n-1}) \sqrt{c \rho^{n-2} - 1}} \dots\dots\dots 30.$$

Speciális esetek:

a) Ha $n = \frac{1}{3}$, akkor görbénk kúpszelet.

b) Ha $n = -1$ és $\frac{\lambda}{c-1} = a$, akkor

$$\rho^2 = \lambda + \frac{a}{\cos^2 \frac{s}{\sqrt{\lambda}}}$$

c) $n = 1$ esetben determinans egyenletünk már nem írható a B) alakba, hanem a következőkbe:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} \rho'' + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} \rho'^2 + \frac{1}{\rho} = 0,$$

melynek más alakja

$$\frac{\lambda \rho'}{1-\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \left(\frac{\lambda \rho'}{1-\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \right)' + \rho^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \left(\rho^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \right)' = 0,$$

honnan

$$\left(\frac{\lambda \rho'}{1-\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \right)^2 + \rho^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}} = C,$$

ebből pedig

$$s = \frac{\lambda}{1-\lambda} \int \frac{d\rho}{\sqrt{C \rho^{\frac{2\lambda}{1-\lambda}} - 1}}$$

ez a Ribaucour-féle görbe természetes egyenlete, mely a $\lambda = -\frac{1}{2}$ esetre parabola, $\lambda = \frac{1}{2}$ esetre ciklois, $\lambda = -1$ -re katénaria.

2. Pl. Ha $P(s)$ síkgörbének a síkjában levő $Q_0 + \sigma \bar{e}_\sigma$ egyeneshez való relatív helyzete:

$$Q_0 + \sigma \bar{e}_\sigma = P + a \bar{e}_s + b \bar{n}_s,$$

akkor az előbbi feladat megoldási módszere a következő egyenlethez vezet:

$$a \rho \rho' = (\rho - b)^2 + a^2,$$

honnan

$$s = l \sqrt{(\rho - b)^2 + a^2} + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{\rho - b}{a} + C.$$

Ha $b = 0$ és $s = 0$ helyen $\rho = 0$, akkor

$$\rho^2 = a^2 (e^{\frac{2s}{a}} - 1),$$

ez a traktrix természetes egyenlete.

3. Pl. $P(s)$ és $Q(\sigma)$ homolog pontjaiban legyen

$$\bar{v}_s \times \bar{e}_s = \bar{v}_\sigma \times \bar{e}_\sigma. \quad \dots\dots\dots 31.$$

Ha ezt az egyenletet balról \bar{e}_s -, jobbról pedig \bar{v}_s -sel szorozzuk vektoriálisan, akkor

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_s &= (\bar{e}_s \cdot \bar{e}_\sigma) \bar{v}_\sigma - (\bar{e}_s \cdot \bar{v}_\sigma) \bar{e}_\sigma, \\ \bar{e}_s &= (\bar{v}_s \cdot \bar{v}_\sigma) \bar{e}_\sigma - (\bar{v}_s \cdot \bar{e}_\sigma) \bar{v}_\sigma. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots 32.$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_s \cdot \bar{e}_\sigma &= -\bar{e}_s \cdot \bar{v}_\sigma, \\ \bar{e}_s \cdot \bar{e}_\sigma &= \bar{v}_s \cdot \bar{v}_\sigma. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots 33.$$

Görbéink relativ helyzetét tehát a következő egyenletek szemléltetik:

$$\left. \begin{aligned} P(s) &= Q(\sigma) + x(\bar{v}_\sigma \times \bar{e}_\sigma), \\ Q(\sigma) &= P(s) - x(\bar{v}_s \times \bar{e}_s). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots 34.$$

Ha az I-re való tekintettel első egyenletünket σ -, a másodikat meg s szerint differenciáljuk s aztán az így nyert egyenleteket rendre $\bar{v}_\sigma \times \bar{e}_\sigma$, $\bar{v}_s \times \bar{e}_s$ -sel szorozzuk skalárisan, akkor nyerjük, hogy

$$x = c,$$

ezt is figyelembe véve jeleztük differenciálhányadosaink:

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{d\sigma} \bar{e}_s &= \bar{e}_\sigma - \frac{c}{\rho_{g\sigma}} \bar{e}_\sigma - \frac{c}{\tau_{g\sigma}} \bar{v}_\sigma, \\ \frac{d\sigma}{ds} \bar{e}_\sigma &= \bar{e}_s + \frac{c}{\rho_{gs}} \bar{e}_s + \frac{c}{\tau_{gs}} \bar{v}_s. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots 35.$$

Ha egyenleteink elsejét \bar{e}_σ -, a másodikat \bar{e}_s -, aztán az elsejét \bar{v}_σ -, a másodikat \bar{v}_s - s végül az elsejét \bar{v}_s -, a másodikat \bar{v}_σ -val szorozzuk skalárisan, akkor a következő három egyenletpárhoz jutunk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{d\sigma} \bar{e}_s \cdot \bar{e}_\sigma &= 1 - \frac{c}{\rho_{g\sigma}}, \\ \frac{d\sigma}{ds} \bar{e}_s \cdot \bar{e}_\sigma &= 1 + \frac{c}{\rho_{gs}}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots 36.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{d\sigma} \bar{e}_\sigma \cdot \bar{v}_s &= \frac{c}{\tau_{g\sigma}}, \\ \frac{d\sigma}{ds} \bar{e}_\sigma \cdot \bar{v}_s &= \frac{c}{\tau_{gs}}. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots 37.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{v}_s}{\rho_{g\sigma}} + \frac{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{e}_s}{\tau_{g\sigma}} &= \frac{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{v}_s}{c}, \\ -\frac{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{v}_s}{\rho_{gs}} + \frac{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{e}_s}{\tau_{gs}} &= \frac{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{v}_s}{c} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 38.$$

A 36. és 37.-ből

$$\left. \begin{aligned} (\bar{e}_s \cdot \bar{e}_\sigma)^2 &= \left(1 - \frac{c}{\rho_{g\sigma}}\right) \left(1 + \frac{c}{\rho_{gs}}\right), \\ (\bar{e}_\sigma \cdot \bar{v}_s)^2 &= \frac{c^2}{\tau_{gs} \tau_{g\sigma}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 39.$$

Ez egyenletek összege és a 36. s 37. szimultán fennállása a következő relációkhoz vezet:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{c^2}{\tau_{gs} \tau_{g\sigma}} + \left(1 - \frac{c}{\rho_{g\sigma}}\right) \left(1 + \frac{c}{\rho_{gs}}\right), \\ \left(1 - \frac{c}{\rho_{g\sigma}}\right) \frac{1}{\tau_{gs}} &= \left(1 + \frac{c}{\rho_{gs}}\right) \frac{1}{\tau_{g\sigma}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 40.$$

A

$$\bar{v}_\sigma \cdot \bar{e}_s, \bar{e}_\sigma \cdot \bar{e}_s = \cos \alpha, \sin \alpha$$

alkalmazásával 32. egyenleteink ily alakban jelennek meg:

$$\begin{aligned} \bar{v}_s &= \sin \alpha \bar{v}_\sigma - \cos \alpha \bar{e}_\sigma \\ \bar{e}_s &= \sin \alpha \bar{e}_\sigma + \cos \alpha \bar{v}_\sigma. \end{aligned}$$

Ha ezen egyenletek elsejét az I.-re s a jelen fejezet eredményeire való tekintettel s szerint differenciáljuk, akkor a következő egyenlethez jutunk;

$$\frac{d\bar{v}_s}{ds} = \left(\frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{\rho_{v\sigma}} \frac{d\sigma}{ds} \right) \bar{e}_s + \frac{1}{\tau_{gs}} \bar{v}_s \times \bar{e}_s,$$

melynek az I. harmadik egyenletével való összevetéséből következik, hogy

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho_{v\sigma}} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{1}{\rho_{vs}} \dots\dots\dots 41.$$

A $\bar{v}_s \times \bar{e}_s = \bar{v}_\sigma \times \bar{e}_\sigma = \bar{n}_s = \bar{n}_\sigma$ esetekben görbékünk *Bertrand-féle*¹ görbéké válnak.

4. Pl. Görbénket a $Q_0 + \rho \bar{e}_\sigma$ egyenesre vonatkozólag definiálja a következő egyenlet:

$$Q_0 + \rho \bar{e}_\sigma = P + \frac{c}{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{n}_s} \bar{n}_s. \quad \left(\frac{1}{\tau_s} = 0 \right).$$

¹ *Bertrand*, Liouville's Journal t. XV. p. 332. 1850.

Ennek s szerint vett differenciálhányadosa:

$$\frac{d\sigma}{ds} \bar{e}_\sigma = \left(1 - \frac{1}{\rho} \frac{c}{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{n}_s}\right) \bar{e}_s + \frac{c}{\rho} \frac{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{e}_s}{(\bar{e}_\sigma \cdot \bar{n}_s)^2} \bar{n}_s,$$

ebből

$$\frac{d\sigma}{ds} = \bar{e}_\sigma \cdot \bar{e}_s, \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\rho} \frac{c}{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{n}_s}\right)^2 + \frac{c^2 (\bar{e}_\sigma \cdot \bar{e}_s)^2}{\rho^2 (\bar{e}_\sigma \cdot \bar{n}_s)^4},$$

honnan

$$\frac{c}{\rho} = (\bar{e}_\sigma \cdot \bar{n}_s)^3,$$

melynek s szerint vett differenciálhányadosa a következő relációhoz vezet:

$$\rho' = 3 \sqrt{\left(\frac{\rho}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - 1},$$

mely a parabola természetes egyenlete.

5. Pl. A

$$Q_0 + \sigma \bar{e}_\sigma = P + \frac{c}{\bar{e}_\sigma \cdot \bar{e}_s} \bar{e}_s \quad \left(\frac{1}{\tau_s} = 0\right)$$

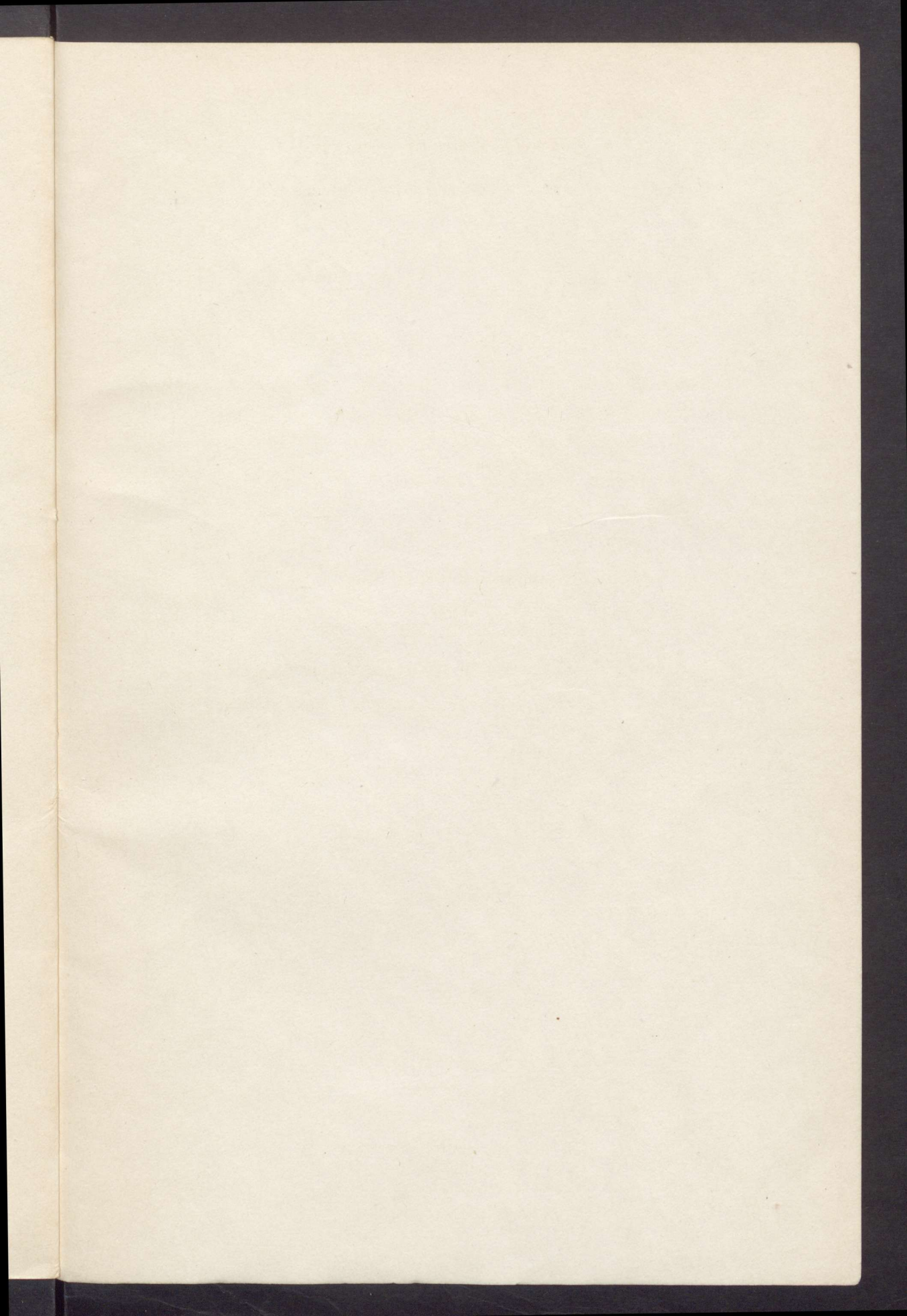
egyenletből azonos eljárással nyerjük, hogy

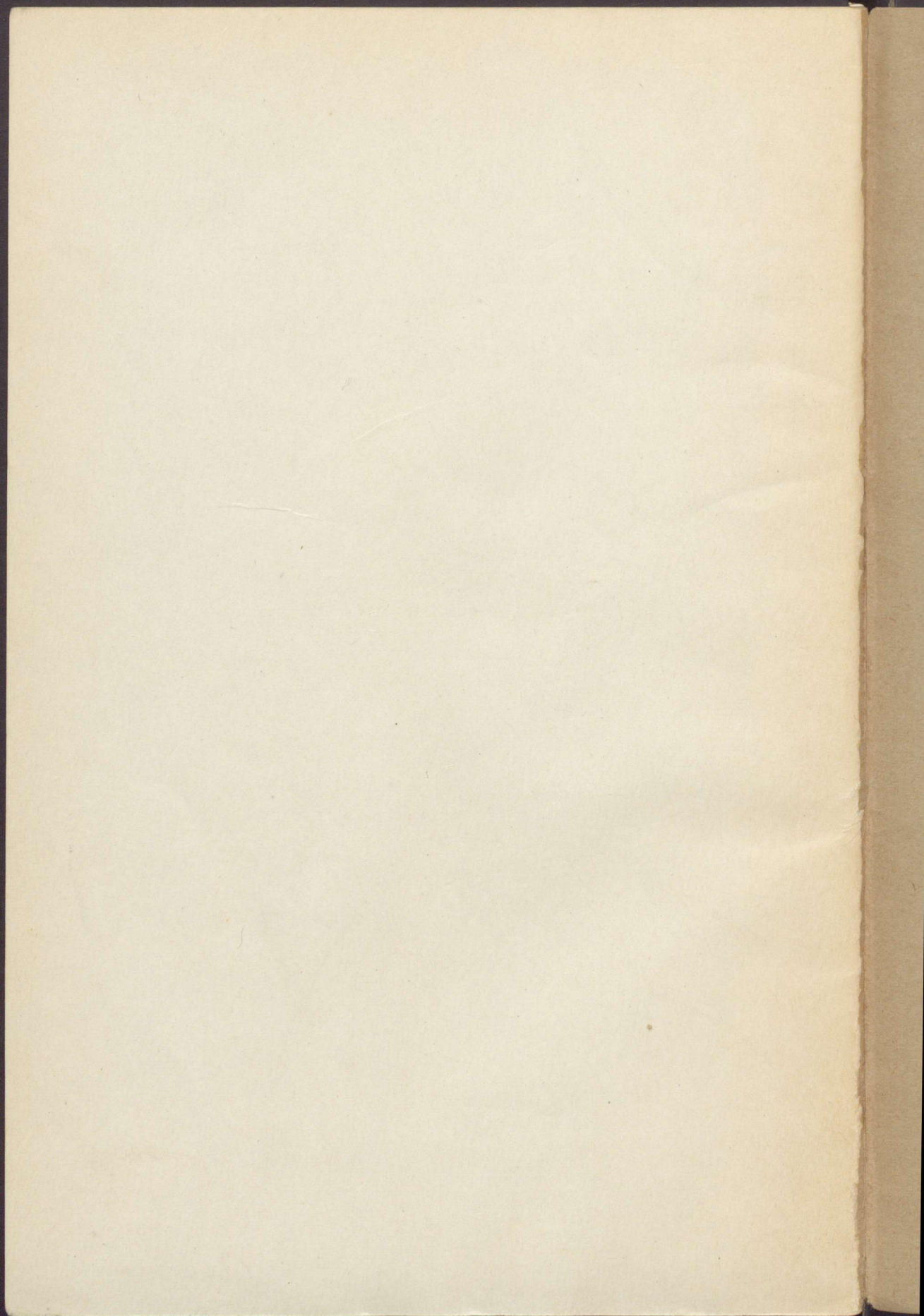
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{c} \frac{tg(\bar{e}_s, \bar{e}_\sigma)}{(1 + tg^2 \bar{e}_s, \bar{e}_\sigma)^{\frac{3}{2}}}.$$

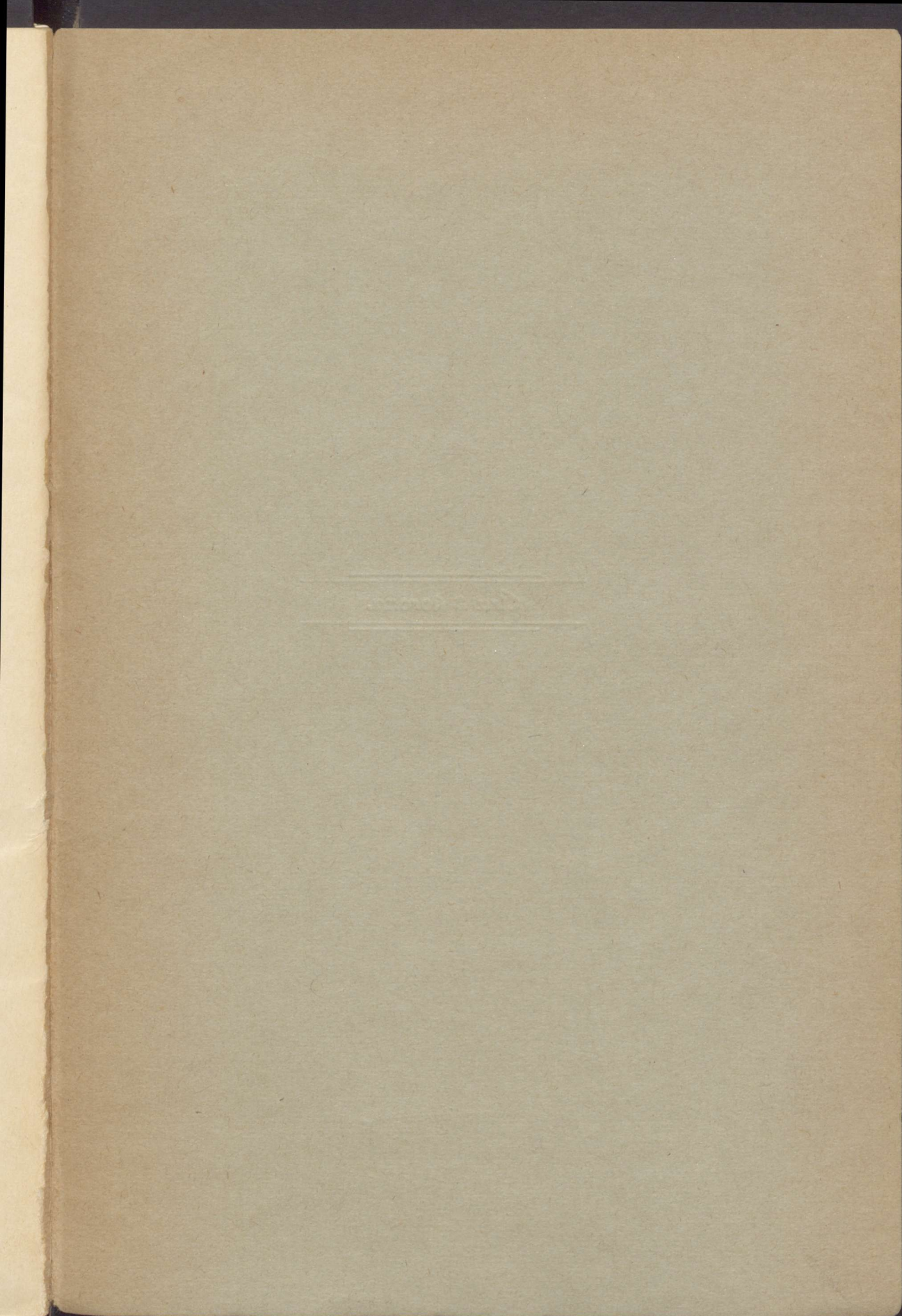
Egyenesünket x tengelyül Q_0 -ban a rá merőleges egyenest y tengelyül választva, $y' = tg(e_s, e_\sigma)$, tehát $\frac{1}{\rho}$ fentebbi alakjából evidens, hogy $y'' = \frac{1}{c} y'$, azaz:

$$y = a e^{\frac{x}{c}} + b.$$









Čra 2 korona.
