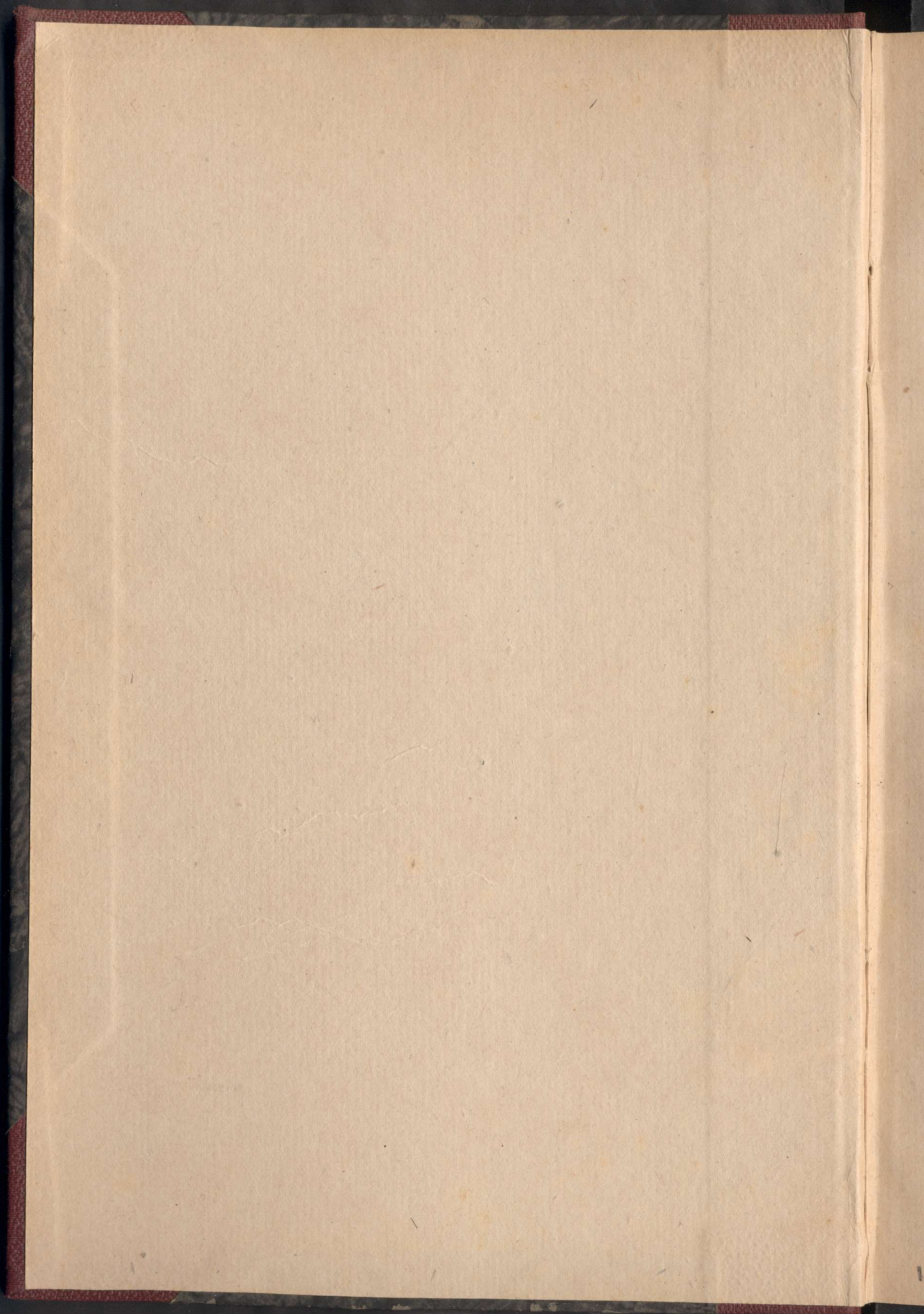
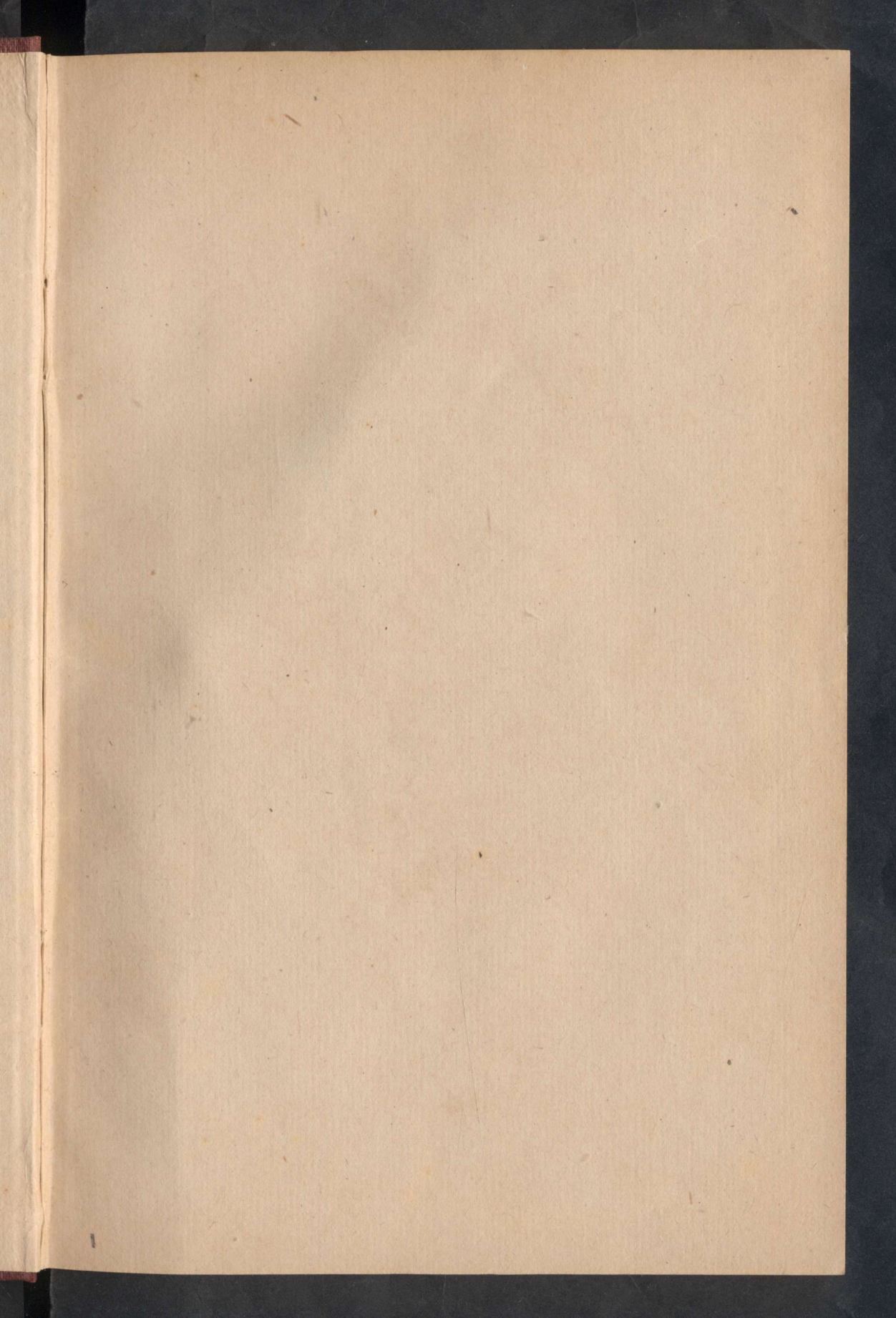


M
200.077 OSZK
.....

cial

cs





A DIFFERENCZIÁL- ÉS INTEGRÁLSZÁMITÁS ELMÉLETE

IRTA

Dr. SUTÁK JÓZSEF

NY. R. TANÁR A BUDAPESTI PÁZMÁNY PÉTER TUDOM. EGYETEMEN

MÁSODIK JAVITOTT KIADÁS

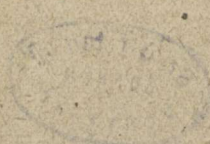


BUDAPEST

EGGENBERGER-FÉLE KÖNYVKERESKEDÉS

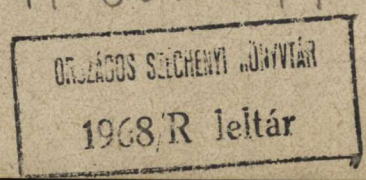
RÉNYI KÁROLY

1922



Pallas részvénytársaság nyomdája Budapesten.

M 200.077



BEVEZETÉS.

A differenciál- és integrálszámítás törvényeinek szigorú megállapítása végett előbb az egy- s többváltozós függvények fogalmát magyarázom meg s a határértékekkel való számolás ismertetése után néhány — a későbbi kutatásainkban nagy szerepet játszó — határértéket határozok meg.

Ily előzmények után egész könnyűséggel s szigorúsággal állapíthatom meg az egy- s többváltozós egyszerű, összetett és inverz függvényekre vonatkozó differenciálási szabályokat s ezek érvényességének határait.

A differenciálhányados geometriai jelentésének szigorúbb megállapítása szükségessé tette, hogy az egy- s többágú folytonos görbék fogalmát bevezessem.

A differenciálhányados mechanikai jelentésének tárgyalása alkalmával bebizonyítottam, hogy a differenciálhányadosoknak, mint sebességeknek a felfogása bizonyos, körülmények között a sebesség fogalmának általánosításával egyenlő értelmű.

Alkalmazásul bemutatom az egy- s többváltozós racionális egész függvények sorbafejtését s ezzel kapcsolatban megállapítom azokat a kriteriumokat, melyek alapján eldönthető, hogy valamely quadratikus alak definit-e, vagy nem?

Erre a complex változók függvényeinek a definíciója, a CAUCHY elnevezte monogen s színetikus függvények alap tulajdonságainak ismertetése, az algebra alaptételének kimutatása, részlettörtekre bontás és az elemi transzcendens függvények legfontosabb tulajdonságainak a kimutatása következik.

A függvények sorbafejtése előtt a végtelen sorokra s szorzatokra vonatkozó legfontosabb konvergenciakriteriumokat tárgyalom, erre azután levezetem a véges és végtelen TAYLOR-féle sort. Ezek az előzmények, aztán lehetségessé teszik az elemi transzczendens függvények szigorú sorbafejtését. Majd a hatványsoralakban adott függvényekre térek át s azok folytathatóságának kimutatása után eljutunk a WEIERSTRASS definiálta analitikai függvények fogalmához. Erre a $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $l \sin x$, $l \cos x$, $\sec x$ sorbafejtése következik; a magasabb rendű differenciálhányadosok tárgyalása alkalomával definiált *tangens együtthatók*. BERNOULLI- és EULER-féle számok lehetségessé tették, hogy az imént említettem soroknak leggyakrabban előforduló alakjaival megismerkedjünk. Végül a komplexváltozós elemi transzczendens függvények sorbafejtését mutatom be.

Ezután a differenciálszámításnak alkalmazását mutatom be a látszólag határozatlan alakok meghatározására és a maximum- s minimumszámítás problémájára. A quadratikuss alakokra vonatkozó fejtegetéseink felhasználásával az utóbb említett problémának a szokásosnál elegánsabb megoldását adjuk. Az összetett függvények maximumának vagy minimumának meghatározását a problema legáltalánosabb fogalmazásában mutatom be.

A differenciálszámításnak az említettem keretben történt tárgyalás után áttértem az integrálszámításra.

Az integrált mint összeget definálom; a létezésének kimutatására bemutatott módszer nemcsak hogy az eddigieknél szigorúbb bizonyítást nyújt, hanem a kétszeres és többszörös integrálok létezésének kimutatására való könnyed alkalmazhatósága is előnyt biztosít neki a többi módszerek felett.

Az integrál alaptulajdonságainak megállapítása után a határozatlan integrálszámítás módszereit ismertetem. A racionális függvények integrációja minden nehézség nélkül elvégezhető legalább elméletileg. Az algebrai integrálok közül a binomiális integrálok tárgyalásában behozott szimmetria lehetőségessé tette azt, hogy a redukziós formulák számát kibővítsük s így a redukciónál használt eljárást teljesen

megvilágítsuk. A hiperelliptikus integrálok osztályozása után az elliptikus integrálok kanonikus alakjait állapítom meg, a bevezettem 2 transzformáció (276. l.) a tárgyalást meg lehetőségen áttekinthetővé teszi.

A transzcendens függvények integrációjára vonatkozó fejtegetéseinkben az $\int \sin^m x \cos^m x dx$ alakú integrálok meghatározására vonatkozólag ugyanazok állanak, mint a miket föntebb a binomiális integrálokról mondtunk.

Néhány határozott integrál meghatározása után áttértem a végtelen sorok integrálására s példaként meghatároztam a teljes első- és másodfajú elliptikus integrált, erre az integrál számítást alkalmaztam sorbafejtésre s újból megállapítottam a TAYLOR-féle sort.

Az általánosított határozott integrálok alaptulajdonságainak megállapítása után azokat az integrálokat tárgyalom, melyek úgy klasszikus voltuknál fogva érdekesek, mint alkalmazhatóságuknál fogva fontosak. Ilyenek a DIRICHLET-EULER- és FRESNEL-féle integrálok. A második középérték tétel után az általánosított DIRICHLET-féle és a FOURIER-féle kettős integrálok, majd a FOURIER-féle sorok tárgyalása következik.

Ezek után a szinektikus függvények integráljait definiálom s alaptulajdonságaikat állapítom meg, a RIEMANN és CAUCHY-féle integrál tételek megállapítása után a szinektikus függvények sorbafejtését tárgyalom a CAUCHY- és LAURENT-féle sorbafejtési tételek megállapítása után rámutattam arra a kapcsolatra, mely a CAUCHY és a MÉRAY-WEIERSTRASS-féle függvényelméletet összefüzi.

Legvégül a fizikai kutatásokban nagy szerepet játszó vonalos, felületi és térfogati integrálok legfontosabb tulajdonságait állapítom meg.

Erre az integrálszámításnak egyik klasszikus alkalmazásával, az e és π számok transzcendens voltának behizonyításával foglalkozom s evvel együtt a kör négyszögesítési problémájára vonatkozó kutatások mibenlétét, a probléma régi és új felfogását s az új felfogás szerinti megoldását ismertetem.

Legvégül azon sok munkálat közül, melyeket ennek a munkának a megírásánál felhasználtam, mint legkiválóbbakat, a következőket emlitem meg

L. Kronecker: Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale.

Angelo Genocchi: Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung.

J. Thomae: Elementare Theorie der analytischen Functionen.

M. C. Jordan: Cours D'analyse.

É. Picard: Traité D'analyse.

Torsyth: Theory of Fonctions.

Cajori: History of Mathematics.

Budapest, 1899 szept. 15.

Suták J.

ELŐSZÓ A MÁSODIK KIADÁSHOZ.

A folytonosság fogalmának felépítésére vonatkozó munkálatok szorosabb értelemben *Archimedessel* kezdődnek. ki a problema tisztázására vonatkozó kutatásokat a következő postulatum kimondásával nyitja meg:

Ha AB és CD két oly szegmentum, melyekre nézve:

$$AB \leq CD,$$

akkor mindig van oly egész szám n , melyre nézve¹⁾

$$nAB > CD.$$

Habár ez a postulatum elégséges arra, hogy minden szegmentumot egy adott szegmentumra nézve számmal jellemezhesünk,²⁾ de még sem elégséges annak a kimutatására, hogy adott szegmentumra nézve minden számhoz mellé rendelhető egy szegmentum. Ezt a hézagot tölti be a *Cantor-féle* postulatum,³⁾ mely szerint:

Ha OP_1, OP_2, \dots a szegmentumoknak monoton növekvő-, OP'_1, OP'_2, \dots pedig a szegmentumoknak oly monoton csökkenő végtelen sorra, melyekre nézve $P_1 P'_1, P_2 P'_2, \dots$ szegmentumok limese nulla, akkor van egy oly OP szegmentum, mely kisebb mindegyik OP_n -nél és nagyobb mindegyik OP'_n -nél.

Az *Archimedes* és *Cantor-féle* postulatumokat együttesen tartalmazza a következő *Weierstrass-féle* postulatum,⁴⁾ mely szerint:

¹⁾ Ezt a postulatumot *O. Stolz* nevezte el *Archimedes-féle* postulatumnak, jóllehet már előtte is alkalmazták. Ber. naturw. mediz. Ver. Innsbruck Bd. 12. 1881/2 p. 75. Math. Ann. Bd. 22. 1883. p. 504. Encycl. Seien. Math. t. III. v. 1. fasc. 1. p. 35. 1911.

²⁾ *Hölder*, Ber. Ges. Leipzig Bd. 53. 1901 math. p. 1.

³⁾ *Cantor*, Math. Ann. Bd. 5. 1872. p. 128.

⁴⁾ *Weierstrass*, Berlini egyet. Előad.

Ha P_1, P_2, \dots az AB szegmentumnak egy tetszőleges végtelen ponthalmazá, akkor van AB -nek oly P -pontja, melyet belső pontként tartalmazó szegmentumok mindegyikében van pontsorunknak eleme.

Evvel a postulátummal equivalens a Dedekind-féle,⁵⁾ melyet az alkalmazhatósága elé gördülő akadályok eleinte kiszorítottak a kutatások területéről, mignem Cesaro⁶⁾ kezdeményezésére világossá vált, hogy a jeleztük nehézségek korántsem legyőzhetetlenek. Ez a szellem nyilván meg Vallée Poussin-nál is.⁷⁾

Miután a nehézségeket sikerült teljesen legyőzni, azért a számfogalom kiépítését a klasszicitás teljes szépségében a Dedekind-féle postulátum alapján végeztem el. Ezen az alapon aztán az I. kiadás megfelelő része a végtelen sorok elmélete, a zárt intervallumban folytonos s differenciálható függvények új megvilágításban jelennek meg. A nyomdai nehézségek azonban a munka többi részében csak a legszükségesebb s legszerényebb változtatásokat engedték meg.

Budapest, 1921 október 24.

Suták J.

⁵⁾ Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872. 3. Aufl. 1905 (Braunschweig.)

⁶⁾ Cesaro, Corso di Analisi algebraica Torino 1894.

⁷⁾ Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitesimale t. I. 2. ed. 1909. 3. ed. 1914.

TARTALOMJEGYZÉK.

Bevezetés	Lap
Előszó	III
Lényegesebb sajtóhibák	VII
	XVI

I. RÉSZ: DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS.

I. Az irracionális szám és függvény fogalma.

1. Racionális számok	3
2. A számfogalom kibővítésének szükségessége	4
3. Az irracionális számfogalom megalkotása	5
4. Az irracionális számok megközelítése racionális számokkal	7
5. Nagysági viszonyok	8
6. Intervallum	9
7. Valós számhalmaz folytonossága	10
8. Az összeg definíciója	10
9. Ellenkező előjelű számok	11
10. A szorzat definíciója	12
11. Egy szám reciprokja	13
12. A hányados fogalma	14
13. Hatvány	14
14. A limes fogalma	15
15. A limes fogalmának alkalmazása a hatványra	18
16. A logaritmus fogalma	20
17. A reális számhalmaz néhány tulajdonsága	21
18. Limes-módszer	23
19. Határpontok	26
20. Limes superior és limes inferior	26
21. A limes létezésének szükséges és elégséges kriteriuma	28
22. Cauchy limes-tételei	32
23. Alkalmazás a pozitív tagú sorokra	37
24. A függvény fogalma	45
25. A limes függvény fogalma	47
26. Zárt intervallumban folytonos függvények	49

	Lap
27. Az összetett függvény fogalma...	52
28. A függvény osztályozása	53
29. A függvény folytonosságának megszakadása valamely pontban	56
30. A függvény ábrázolása	57

II. Egyváltozós függvények differenciálhányadosa.

31. A differenciálhányados fogalma *	59
32. Folytonos, de nem differenciálható függvények	60
33. A differenciálhányados folytonosságának megvizsgálása	62
34. A differenciálhányados geometriai jelentése	63
35. A differenciálhányados mechanikai jelentése	65
36. Függvény függvényének a differenciálhányadosa	67
37. A konstans differenciálhányadosa	68
38. Függvények összegének differenciálhányadosa	68
39. A szorzat differenciálhányadosa	69
40. A hányados differenciálhányadosa	70
41. A hatvány differenciálhányadosa	71
42. A hatványfüggvény differenciálhányadosa	72
43. A logaritmusfüggvény differenciálhányadosa	73
44. A trigonometriai függvények differenciálhányadosa	74
45. Inversz függvények differenciálhányadosa	76
46. A ciklotetrikus függvények differenciálhányadosa	77
47. A differenciálhányados tulajdonságai	78

III. Többváltozós függvények differenciálása.

48. A parciális differenciálhányados definíciója	84
49. Parciális és totális differenciále	85
50. Implícit függvények differenciálhányadosa	88
51. Összetett függvények differenciálhányadosa	90
52. Összetett függvények totális differenciáléja	93
53. Függvénydeterminánsok	93

IV. Magasabbrendű differenciálhányadosok.

54. A magasabbrendű differenciálhányadosok definíciója	98
55. Néhány elemibb függvény magasabbrendű differenciál- hányadosai	98
56. A szorzat magasabbrendű differenciálhányadosai	100
57. A hányados magasabbrendű differenciálhányadosai	103
58. Magasabbrendű differenciálhányadosok rekurzív kiszámítása	105

	Lap
59. Kétváltozós függvények magasabbrendű differenciálhányadosai	109
60. Magasabbrendű totális differenciálék	111
61. Többváltozós függvények magasabbrendű differenciálhányadosai és differenciálái	112
62. Összetett és implicit függvények magasabbrendű differenciálhányadosai	113
63. HESSE-féle determináns	116

V. A változók transzformációja.

64. A független változók transzformációja	118
65. A JAKOBI és HESSE-féle determinánsok lineáris transzformációja	122
66. Az összes változók transzformációja	124

VI. A raczionális egész függvények sorbafejtése.

67. Az egyváltozós raczionális egész függvények sorbafejtése	128
68. Kétváltozós raczionális egész függvények sorbafejtése	130
69. Az n -változós raczionális egész függvények sorbafejtése	132
70. Alkalmazás a quadratikuss alakokra	136

VII. Komplex változók függvénye.

71. Komplex változók	142
72. Szinektikus függvények	145
73. Monogen függvények összege, szorzata és hányadosa	147
74. Az algebra alaptétele	148
75. Következtetések az algebra alaptételéből	151
76. Raczionális egész függvények legnagyobb közös osztója	153
77. Raczionális törtfüggvények	155
78. Az exponenciális és logaritmus függvény általánosítása	164
79. A hatvány fogalmának általánosítása	168
80. A trigonometriai függvények általánosítása	169
81. A ciklometrikus függvények általánosítása	174

VIII. Végtelen sorok és szorzatok.

82. A végtelen sorok definíciója	179
83. A konvergencia szükséges feltételei	180
84. A végtelen szorzatokról általában	184
85. Pozitív és negatív tagokból álló végtelen szorzatok	185

	Lap
86. Komplex tagokból álló végtelen szorzatok	190
87. Hatványsorok konvergenciája	192
88. TAYLOR és MACLAURIN sora	195
89. Az exponenciális függvény sorbafejtése	198
90. $\sin x$ és $\cos x$ sorbafejtése	199
91. NEWTON binomialis tételének általánosítása	200
92. $l(1+x)$ sorbafejtése	202
93. $\text{Arctg } x$ sorbafejtése	204
94. $\text{Arc sin } x$ sorbafejtése	207
95. $\sin(r \text{ arc sin } x)$ sorbafejtése	208
96. $\sin x$ és $\cos x$, mint végtelen szorzatok	210
97. Végtelen soralakban adott függvények általános tulajdonságai	212
98. Végtelen soralakban adott függvények folytatásai	218
99. $\text{Tg } x$ és $x \text{ ctg } x$ sorbafejtése	223
100. $\sec x$ sorbafejtése	226
101. $l \sin x$ és $l \cos x$ sorbafejtése	227
102. Az általánosított elemi transzcendens függvények sorbafejtése	228
103. Többváltozós függvények sorbafejtése	229
104. Homogen alakokra vonatkozó EULER-féle tétel	230

IX. A Taylor-féle sor alkalmazása határértékek meghatározására.

105. A $\frac{0}{0}$ alakok meghatározása	232
106. A $\frac{\infty}{\infty}$ alakok meghatározása	234
107. A $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 alakok meghatározása	235

X. A maximum és minimum elmélete.

108. Egyváltozós függvények maximuma és minimuma	238
109. Implicit függvények maximuma és minimuma	242
110. Kétváltozós függvények maximuma s minimuma	244
111. Többváltozós függvények maximuma és minimuma	248
112. Összetett függvények maximuma és minimuma	249

II. RÉSZ: INTEGRÁLSZÁMÍTÁS.

XI. A határozott integrálok alaptulajdonságai.

113. A határozott integrál értelmezése	256
114. Az integrál elemi tulajdonságai	258
115. A határozott integrál transzformációja	260

116. Differenciálás az integrál jele alatt	Lap 262
117. Az integrálfüggvény differenciálhányadosa	263
118. Valós változójú komplex függvények integrálása	265

XII. A határozatlan integrálok meghatározásának általános módszerei.

119. A priori ismeretes határozatlan integrálok	266
120. A dekompozíció módszere	268
121. A szubsztitúció módszere	268
122. Az integrál jele alatti differenciálás módszere	270
123. A parciális integrálás módszere	270

XIII. A raczionális függvények integrációja.

124. Az alaptípusok integrálása	271
125. A raczionális függvények rekurzív módon való integrálása	272

XIV. Az algebrai függvények integrálása.

126. Az algebrai integrálok osztályozása	274
127. Az algebrai integrálok meghatározása szubsztitúcióval	274
128. Binomiális integrálok	277
129. A hiperelliptikus integrálok osztályozása	279
130. Az elliptikus integrálok kanonikus alakjai	284

XV. A transzcendens függvények integrálása.

131. Algebrai integrálokká transzformálható transzcendens integrálok	291
132. $\int \sin^m x \cos^n x dx = I_{mn}$	295
133. A parciális integráció alkalmazása	296
134. Alkalmazások	297

XVI. Határozott integrálok.

135. Néhány fontosabb határozott integrál kiszámítása	299
136. Hatványsorok integrálása	301
137. A teljes első- és másodfajú elliptikus integrálok meghatározása	302
138. Sorbafejtés integrálszámítással	304
139. A TAYLOR-féle sor levezetése integrálszámítással; BERNOULLI-féle sor	304

XVII. Többszörös integrálok.

	Lap
140. A kettős integrálok definíciója	306
141. A kétszeres integrálok meghatározása	309
142. A kétszeres integrálok alaptulajdonságai	310
143. Kétszeres integrálok származtatása egyszeres integrálok össze- szorzásával	313
144. A kétszeres integrálok transzformációja	314
145. Háromszoros integrálok	316
146. A háromszoros integrálok transzformációja	317
147. n -szeres integrálok	318

XVIII. Az integrálszámítás geometriai alkalmazásai.

148. Területszámítás	319
149. Kőbtartalom-számítás	322
150. A görbék rektifikációja	324
151. A görbék érintőinek egyenletei	329
152. Az érintősík egyenlete	331
153. A felületek komplanációja	333

XIX. Az integrál fogalmának általánosítása.

154. Végtelen nagy határokkal bíró integrálok	336
155. Szinguláris helyekkel bíró függvény integrálja	339
156. Az általános integrálok alaptulajdonságai	341
157. A DIRICHET-féle integrál	346
158. Az elsőfajú EULER-féle integrál	347
159. A másodfajú EULER-féle integrál	350
160. FRESNEL-féle integrálok	353

XX. Fourier-féle sorok s integrálok.

161. Segédtetelek	356
162. Második középértéktétel	358
163. A második középértéktétel alkalmazása; a DIRICHLET-féle álta- lánosított s a FOURIER-féle kettős integrálok	361
164. FOURIER-féle sorok	364
165. A FOURIER-féle sorok néhány alkalmazása	370

XXI. A komplexváltozós függvények integrációja.

166. Az integrál definíciója	372
167. RIEMANN tétele	374

	Lap
168. A CAUCHY-féle integráltétel	375
169. A szinektikus függvények sorbaejtése értelmezési tartományuk valamely helye körül írható körben. CAUCHY tétele	378
170. A függvények sorbafejtése körgyűrűben. LAURENT-féle tétel	380
171. A CAUCHY- és MÉRAY-WEIERSTRASS-féle függvényelmélet összeegyeztetése	382
172. CAUCHY-féle integrál	383
173. Az algebra alaptétele	384

XXII. Vonalos, felületi s térfogati integrálok.

174. STOKES tétele	385
175. A felületi és térfogati integrál között lévő összefüggés	386
176. GREEN-féle tétel	387
177. A GREEN-féle tétel alkalmazása, GAUSS-féle formulák	389

XXIII. Az integrálszámítás alkalmazása a kör négy-szögesítése problémájának megoldására.

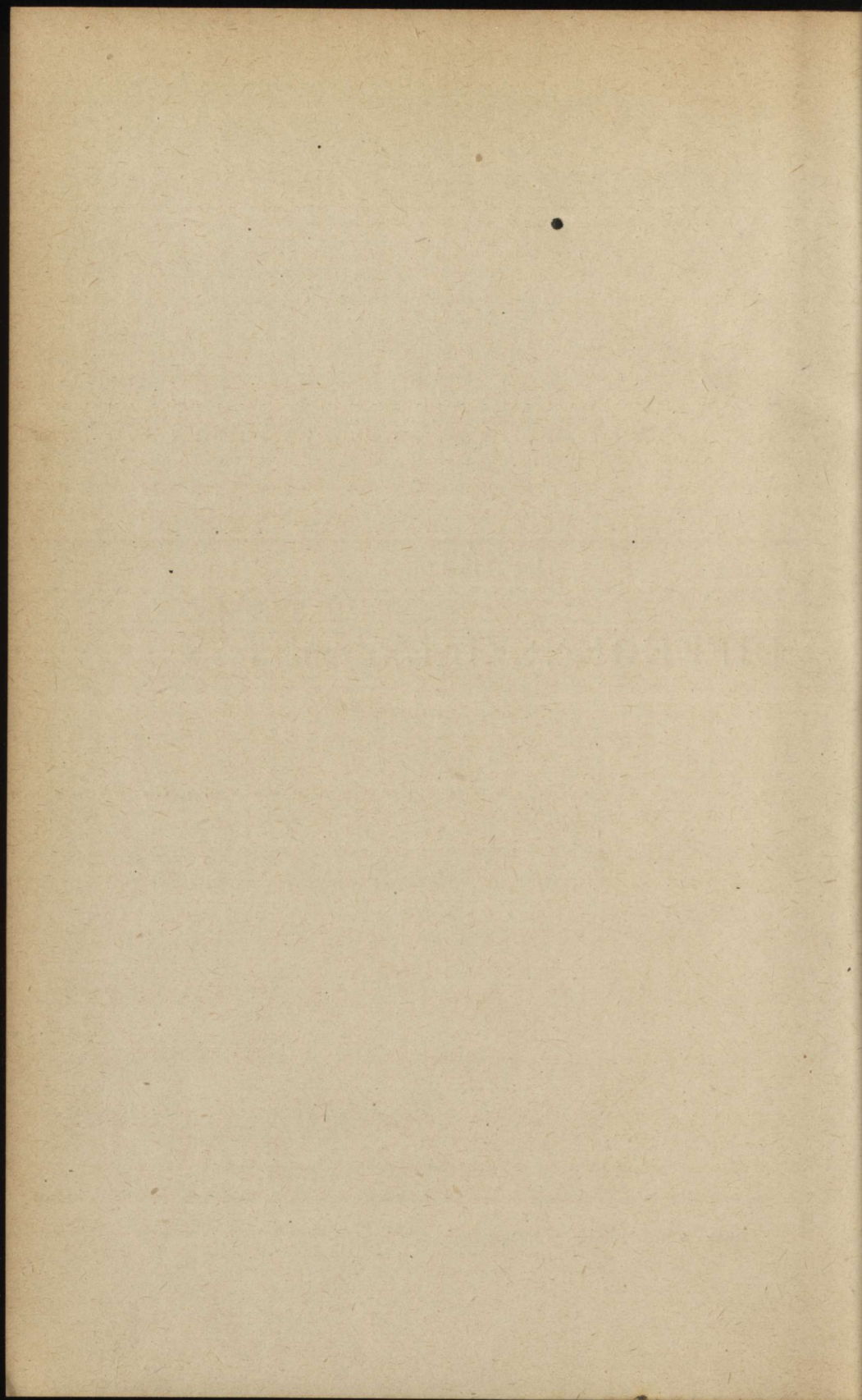
178. Az e szám transzcendens voltának bebizonyítása	394
179. π transzcendens voltának bebizonyítása	396
180. A kör négy-szögesítése	398

Lényegesebb sajtóhibák.

- 108 oldal 10. sor y (n) helyesen: y (n-i).
- 145 « 17. sor monodom helyesen monodrom.
- 160 oldalt technikai hiba folytán kétszer nyomták.
- 176 oldal 4. sor $u' = \frac{1}{i}$ stb.
- 184 « 12. sor Minthogy a következőkben stb. fejezet helyesen így:
Mivel a 20. § fejtegetései a soroknak abszolút konvergencia kritériumait állapítják meg, azért vizsgálódásainkat a pozitív tagokból álló sorokra nem terjesztjük ki.
- 192 « 11. sor hatványsorunk konvergens helyesen: hatványsorunk feltétlenül konvergens.
- 193 « 2. sor kört kell tekinteni. után: A hatványsorok konvergencia körének meghatározása további tételeket a 20. § fejtegetései szolgáltatnak.
- 196 « 6. sor. helyesen: Ámde általánosított középérték tételünk értelmében, ha $R(x)$ és $\varphi(x)$ az (a, x) zárt intervallumban folytonos és differenciálható függvények és $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$ akkor a Cauchy-féle tétel értelmében (§ N.)
- 197 « alulról 5. sor helyesen így: ez a maradéktag Schlömilch-féle alakja melyből, ha $p = 1$, akkor stb.

I. RÉSZ.

DIFFERENCZIÁLSZÁMITÁS.



I. AZ IRRACZIONÁLIS SZÁM ÉS FÜGGVÉNY FOGALMA.

1. Racionális számok.

Az egész és törtszámok halmazát racionális *számhalmaznak* nevezzük s R -rel jelöljük.

Ha a és b R két különböző eleme és $a - b$ pozitív, akkor azt mondjuk, hogy a nagyobb mint b , mely ténytet szimbolikusan így jelöljük:

$$a > b.$$

Ha pedig $a - b$ negatív, akkor azt mondjuk, hogy a kisebb mint b ; ezt a ténytet pedig szimbolikusan így jelöljük:

$$a < b.$$

Ha már most a racionális számokat a nagyság elve szerint úgy rendezzük, hogy a sorozatban soha se álljon nagyobb szám kisebb előtt, akkor világos, hogy a fentebbi definícióink alapján bármely két racionális számról el tudjuk dönteni, hogy melyik áll a másik előtt. Ezen az alapon:

I. A racionális számok halmazát nagyság szerint rendezett halmaznak nevezzük.

Ha a és b R két oly különböző eleme, melyekre nézve $a < b$, akkor mindig van R -ben oly c elem, melyre nézve:

$$a < c < b.$$

Ilyen pl. $a < c = \frac{a+b}{2}$, mert hiszen

$$a - c = \frac{a-b}{2} < 0, \quad b - c = \frac{b-a}{2} > 0.$$

Ezen az alapon, azt mondjuk, hogy:

II. A racionális számok mindenütt sűrű halmazt alkotnak.

Ha a és b R -nek két oly eleme, melyekre nézve $a < b$, akkor mindig van oly egész szám: n , melyre nézve:

$$na > b,$$

Ugyanis, ha

$$a = \frac{p}{q}$$

és n -et qb -nél nagyobbak választjuk, akkor

$$na > aqb,$$

de $aq = p \geq 1$, tehát $aqb \geq b$, ennél fogva:

$$na > b.$$

A raczionális számok most kimutatott tulajdonsága alapján azt mondjuk, hogy:

III. A raczionális számok halmaza *Archimedes-féle rendszert* alkot.

2. A számfogalom kibővítésének szükségessége.

A raczionális számfogalom azonban sok probléma megoldására elégtelennek bizonyul. Így pl.

$$x^2 = 2$$

az R -ben nem oldható meg, mert ha volna oly $x = \frac{p}{q}$ raczionális szám, hol p és q viszonylagos törzsszámok, mely egyenletünk gyökét képeznék, akkor erre nézve teljesülni kellene a következő egyenletnek:

$$p^2 = 2q^2.$$

De ebből még az következne, hogy p páros, mondjuk $2n$ alakú szám, ámde ekkor a

$$2n^2 = q^2$$

alapján q -nak is páros számnak kellene lenni és így feltevésünkkel ellentétben p és q -nak volna az egységtől különböző osztója.

Ennek és sok más problémának a megoldhatósága tehát nyilvánvalóvá teszi a számfogalom továbbépítésének szükségességét.

3. Az irraczionális számfogalom megalkotása.

Azt a műveletet, mellyel R -t két oly A és B halmazra osztjuk, melyek elsejének bármely eleme kisebb a második minden eleménél, *Dedekind-féle metszés*-nek nevezzük; A és B -t *Dedekind-féle szeleteknek* —, és pedig A -t *alsó*-, B -t pedig *felső* szeletnek mondjuk.

A *Dedekind-féle metszés* létesítette A és B szeletekre nézve mindig bekövetkezik a következő három eshetőség valamelyike:

1. A -ban van legnagyobb szám: α , de B -ben nincs legkisebb. Ekkor A minden α -tól különböző eleme kisebb, mint α és B minden eleme nagyobb, mint α . Ilyenkor azt mondjuk, hogy a *Dedekind-féle metszés* R -ből *kimetszi* az α elemet, vagy pedig, hogy *átmegy* az α elemen; tehát ezt az elemet a *Dedekind-féle metszés* R -ből *kiválasztja* — más szóval — *definiálja*, mely tény jelölésére a következő szimbolumot használjuk:

$$\alpha = (A, B).$$

2. B -ben van legkisebb szám: β , de A -ban nincs legnagyobb. Ekkor β kisebb B minden tőle különböző eleménél, de nagyobb A minden eleménél. Ilyenkor is azt mondjuk, hogy a *Dedekind-féle metszés* R -t β -ban találja, vagy azon átmegy, azt R -ből kiválasztja, szóval azt definiálja, mely tény jelölésére szintén a

$$\beta = (A, B)$$

szimbolumot használjuk.

Az az eset, melyben A -nak volna legnagyobb eleme: α , B -nek meg legkisebb eleme: β , nem léphet fel, mert hiszen ekkor azok a α számok, melyekre nézve:

$$\alpha < \alpha < \beta,$$

sem A , sem B -ben nem lépnének fel s így a *Dedekind-féle metszés* nem osztaná R -t két részre, csak kiválasztana R -ből két halmazt.

3. Sem A -ban nincs legnagyobb, sem B -ben nincs legkisebb szám, ekkor azt mondjuk, hogy a *Dedekind-féle*

metszés R egy elemét sem találja. Az ily metszetek mindegyikéhez *szintén mellé rendelünk egy, de csakis egy oly x elemet, melyet A minden eleménél nagyobboknak és B minden eleménél kisebbnek mondunk.* Ennélfogva minden ily x elem, R -hez csatolva, a nagyságszerinti elrendezésben egy meghatározott helyet nyer. Az ilyen *Dedekind-féle szeletek*hez mellérendelt s a jeleztük tulajdonsággal felruházott elemeket irracionális számoknak nevezzük s jelölésükre azt a Dedekind-féle metszésből származó szeletpárt használjuk, mely fogalmuk tartalmának megállapítására az impulzust megadta. Így tehát a fentebbi x irracionális számot a következő szimbolummal jelöljük:

$$x = (A, B).$$

Ennélfogva: az (A, B) szimbolum *raczionális, vagy irracionális számot jelöl, aszerint, amint a megfelelő Dedekind-féle metszés R valamelyik számán átmegy, vagy nem.*

Olyan metszetet, mely R egyik tagján sem megy át könnyű konstruálni.* Így ha R azon a számait, melyekre nézve $a^2 < 2$, az A , a többieket pedig a B halmazba sorozzuk, akkor világos, hogy A bármely eleme kisebb B minden eleménél. Valamint azt is könnyű belátni, hogy A -nak nincs legnagyobb eleme. Ugyanis bármily nagy eleme legyen is a A -nak, mindig meg tudunk oly pozitív h -t határozni, melyre nézve $a + h$ szintén eleme A -nak.

Ugyanis föltevésünk értelmében

$$a^2 < 2.$$

Ha már most a következő

$$(a + h)^2 < 2, \quad 1.$$

azaz:

$$h(h + 2a) < 2 - a^2$$

egyenlőtlenség is teljesül, akkor világos, hogy minden az egységnél kisebb oly h -ra, melyekre nézve még a

* A következőkben R alatt mindig csak a pozitív raczionális számok halmazát fogjuk érteni.

$$h < \frac{2-a^2}{1+2a}$$

egyenlőtlenség is teljesül, az 1. föltétlenül teljesül.

Hasonlóképen könnyű belátni, hogy B -nek nincs legkisebb eleme. Mert, ha b bármily kis eleme is B -nek, azaz:

$$b^2 > 2,$$

mindig van oly pozitív h , melyre nézve:

$$(b-h)^2 > 2, \quad 2.$$

azaz:

$$h(2b-h) < b^2 - 2.$$

Világos, hogy minden oly b -nél kisebb h -kra, melyekre nézve még a

$$h < \frac{b^2 - 2}{2b}$$

egyenlőtlenség is teljesül, a 2. föltétlenül teljesül. Ennélfogva a konstruáltuk metszet R egyik számán sem megy át, tehát a vele definiált (A, B) szám A minden eleménél nagyobb és B minden eleménél kisebb.

4. Az irraczionális számok megközelítése raczionális számokkal.

Legyen adva az

$$\alpha = (A, B)$$

irraczionális szám és a_0 az A egy tetszőleges eleme, ε pedig egy tetszőleges kicsiny raczionális szám; akkor az 1. § III. tétele értelmében az $a_0, a_0 + \varepsilon, a_0 + 2\varepsilon, \dots$ sorozatban van oly $a_0 + (n-1)\varepsilon = a$ tag, mely még A -ba tartozik, de az $a_0 + n\varepsilon = b$ már a B -nek tagja. a és b tehát oly raczionális számok, melyekre nézve:

$$a < \alpha < b; \quad b - a = \varepsilon.$$

a és b raczionális számokat rendre α alsó s felső köze-lítő értékeinek, a $b - a = \varepsilon$ számot pedig a közelítés pontos-ságának nevezzük.

5. Nagysági viszonyok.

A definíció alapján minden irracionális számnak helye a racionális számsorban adott. Ennélfogva csak két irracionális számra nézve kell a nagysági viszonyokat értelmezni. Evégből legyen adva a következő két irracionális szám:

$$\alpha_1 = (A_1, B_1), \alpha_2 = (A_2, B_2).$$

Ha A_1 minden eleme megvan A_2 -ben s viszont, tehát

$$A_1 = A_2, B_1 = B_2,$$

akkor azt mondjuk, hogy a két irracionális szám egyenlő.

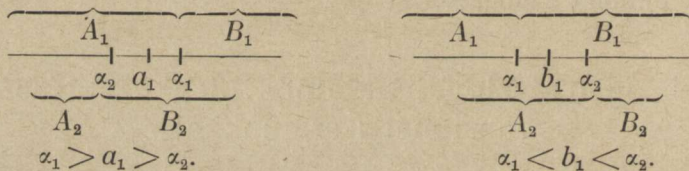
Ha pedig A_1 -nek van oly eleme a_1 , mely B_2 -nek is tagja, akkor azt mondjuk, hogy

$$\alpha_1 > \alpha_2.$$

Ha pedig B_1 -nek van oly b_1 eleme, mely A_2 -nek is tagja, akkor azt mondjuk, hogy

$$\alpha_1 < \alpha_2.$$

Szemléltetés:



Ha már most $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ három irracionális szám, melyekre nézve:

$$\alpha_1 > \alpha_2, \alpha_2 > \alpha_3,$$

akkor vannak oly b_2 és a_2 racionális számok, melyekre nézve:

$$\alpha_1 > b_2 > \alpha_2; \alpha_2 > a_2 > \alpha_3.$$

Mivel α_2 definíciója értelmében $b_2 > a_2$, azért

$$\alpha_1 > a_2 > \alpha_3.$$

tehát

$$\alpha_1 > \alpha_3.$$

Következésképp az irracionális számoknak a racionális számok közé való beékelése a nagysági viszonyok jeleztük

értelmezésével semmiképen sem zavarja az 1. §-ban megállapított elrendezettséget. Ha tehát a racionális s irracionális számok halmazát *reális számhalmaznak* nevezzük, akkor kimondhatjuk a tételt, mely szerint:

A reális számhalmaz nagyság szerint rendezett halmaz.

6. Intervallum.

Azoknak a reális x számoknak a halmazát, melyekre nézve:

$$a < x < b,$$

(a, b) nyílt intervallumnak nevezzük, amelyekre nézve pedig:

$$a \leq x \leq b,$$

$[a, b]$ zárt intervallumnak —, amelyekre nézve pedig:

$$a \leq x < b,$$

vagy

$$a < x \leq b,$$

alulról zárt s felülről nyílt, illetőleg alulról nyílt s felülről zárt intervallumnak mondjuk; a és b az intervallum határai, az intervallum többi számai pedig az intervallum belső elemei.

I. Ha $a < b$, akkor az (a, b) intervallumban végtelen sok racionális szám van.

Ha a és b racionális számok, akkor tételünk az 1. § II. tétele alapján —, ha csak az egyik racionális, akkor az irracionális szám definíciója alapján —, ha pedig úgy a , mint b irracionális, akkor meg az irracionális számok egyenlőtlenségének definíciója s az irracionális számok értelmezése alapján nyilvánvaló.

II. Ha $a < b$ racionális számok és $b - a$ bármily kicsiny pozitív ε -nál kisebb, akkor az (a, b) intervallumnak egynél több belső száma nem lehet.

Mert ha volna kettő a' és b' és $\alpha < \beta$ az (a', b') két racionális száma, akkor a

$$b - a = (b - \beta) + (\alpha - a) + (\beta - \alpha)$$

egyenlőség alapján $b - a$ feltevésünkkel ellentétben nem lehetne kisebb $\beta - \alpha$ -nál.

7. A valós számhalmaz folytonossága.

I. A reális számokra alkalmazott bármily Dedekind-féle (A, B) metszet mindig átmegy egy reális számon.

A reális számhalmaznak ezt a tulajdonságát a reális számhalmaz *folytonosságának* nevezzük.

Ugyanis, ha az A és B -ben levő raczionális számok halmazát rendre A' , B' -sel jelöljük, akkor nyilvánvaló, hogy (A', B') egy a raczionális számhalmazra alkalmazott Dedekind-féle metszet; ha tehát az evvel definiált számot α -val jelöljük, azaz

$$\alpha = (A', B'),$$

akkor világos, hogy α vagy A -nak, vagy B -nek eleme. Ha már most α' oly irracionális szám, mely kisebb α -nál, akkor van oly raczionális α_1 szám, melyre nézve:

$$\alpha' < \alpha_1 < \alpha,$$

következően α_1 A' -nek, tehát A -nak is eleme, ennél fogva α' is A -hoz tartozik s így α -nál minden kisebb irracionális szám A -hoz tartozik; hasonlóképen igazolható, hogy α -nál minden nagyobb irracionális szám B -hez tartozik, következően α vagy A -nak legnagyobb, vagy B -nek legkisebb eleme; mivel aztán tételünk is nyilvánvalóvá vált.

Tételünknek az 5. § végén kimondott tétellel való egybevetéséből következik, hogy:

II. A reális számhalmaz nagyság szerint rendezett folytonos halmaz.

8. Az összeg definíciója.

Ha (A_1, B_1) és (A_2, B_2) az összes raczionális számok halmazára alkalmazott Dedekind-féle metszetek és az általuk definiált számok

$$\alpha_1 = (A_1, B_1), \alpha_2 = (A_2, B_2),$$

akkor:

Az α_1 és α_2 számok összege $\alpha_1 + \alpha_2$ alatt oly számot értünk, mely az A_1 és A_2 halmazbeli a_1 és a_2 számpárokból

alkotott $a_1 + a_2$ számok egyikénél sem kisebb, a B_1 és B_2 halmazbeli b_1 és b_2 számpárokból alkotott $b_1 + b_2$ számok egyikénél sem nagyobb.

Mivel bármily kicsiny pozitív ε -hoz az a_1, b_1 és a_2, b_2 számpárok megválaszthatók mindig úgy, hogy a

$$b_1 - a_1 < \frac{\varepsilon}{2}, b_2 - a_2 < \frac{\varepsilon}{2}$$

föltételek teljesüljenek, azért a

$$(b_1 + b_2) - (a_1 + a_2) < \varepsilon$$

egyenlőtlenségből a 6. § II. tétele alapján következik, hogy csak egy oly szám létezhetik, mely az összeg definíciójában foglalt feltételeket kielégíti. De ilyen szám létezik is. Ugyanis, ha a racionális számok közül azokat, melyek az $a_1 + a_2$ számoknál nem nagyobbak az A , a többieket pedig a B halmazba sorozzuk, akkor világos, hogy (A, B) a racionális számok halmazára alkalmazott oly Dedekind-féle metszet, melyben A tartalmazza az összes $a_1 + a_2$, B pedig az összes $b_1 + b_2$ számokat, tehát az

$$\alpha = (A, B)$$

szám az összeg definíciójában foglalt feltételeket mind kielégíti s mivel több ily szám nem lehet, azért

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2.$$

9. Ellenkező előjelű számok.

Legyen (A, B) az összes racionális számok halmazára vonatkozó Dedekind-féle metszet s az általa definiált szám α . Ha már most A', B' -sel jelöljük azokat a halmazokat, melyeket rendre B és A -ból úgy nyerünk, hogy a bennük levő számok mindegyikét ellenkező előjelűvé változtatjuk, akkor világos, hogy (A', B') szintén egy Dedekind-féle metszetet alkot; az általa definiált számot jelöljük α' -sel.

Ha a és b rendre A és B tetszőleges számai, akkor az összeg definíciója értelmében $\alpha + \alpha'$ az $a - b$ számok egyikénél sem kisebb, a $b - a$ számok egyikénél sem nagyobb;

azaz: $\alpha + \alpha'$ egyik negativ számnál sem kisebb s egyik pozitív számnál sem nagyobb, tehát

$$\alpha + \alpha' = 0;$$

az ilyen számpárokat ellenkező előjelű számpároknak nevezzük. α' jelölésére használjuk a $-\alpha$ jelet is, tehát

$$\alpha' = -\alpha$$

s így

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

10. A szorzat definíciója.

Legyen (A_1, B_1) és (A_2, B_2) a pozitív raczionális számok halmazára alkalmazott két Dedekind-féle metszet; az általuk definiált számok pedig:

$$\alpha_1 = (A_1, B_1), \alpha_2 = (A_2, B_2).$$

A α_1 és α_2 számok szorzata alatt értjük azt a számot, mely — a 8. § jelöléseit megtartva — az $a_1 a_2$ számok egyikénél sem kisebb és a $b_1 b_2$ számok egyikénél sem nagyobb.

Ha α_1 ε_1 pontosságú értékei a_1, b_1 ; α_2 -nek pedig ε_2 pontosságú értékei a_2, b_2 , akkor (4. §)

$$b_1 = a_1 + \varepsilon_1, b_2 = a_2 + \varepsilon_2.$$

Ha tehát ε_1 és ε_2 kisebbek az egységnél kisebb raczionális pozitív ε' számnál, akkor

$$b_1 b_2 < a_1 a_2 + (a_1 + a_2 + 1) \varepsilon'.$$

Ha tehát

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{a_1 + a_2 + 1},$$

akkor

$$b_1 b_2 - a_1 a_2 < \varepsilon.$$

Mivel ε minden pozitív raczionális számnál kisebb lehet, azért ha a szorzat definícióját kielégítő szám létezik, ilyen csak egy szám lehet. (6. § II. tétel.) De ilyen szám létezik is. Ugyanis, ha az $a_1 a_2$ számoknál nem nagyobb raczionális pozitív számokat az A , a többieket pedig a B halmazba

sorozzuk, akkor világos, hogy (A, B) oly *Dedekind-féle* szeletet alkot, melyben A tartalmazza az összes $a_1 a_2$, B pedig az összes $b_1 b_2$ számokat; következőleg az (A, B) metszet definiálta α szám kielégíti a szorzat definíciójában foglalt föltételeket s mivel csak egy ilyen szám van, azért a szorzat jelölésére közönségesen használt szimbolum alkalmazásával:

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2.$$

Az összeg és szorzat képzési törvényeinek megállapításával nem foglalkozunk, mivel azok megállapításainak egyszerű folyományai.

11. Egy szám recziprokja.

Legyen (A, B) egy pozitív raczionális számokra alkalmazott *Dedekind-féle* metszet; az általa definiált szám pedig α . Ha már most az A és B -ben levő számok reciprokjaiból alkotott halmazokat rendre B_1 és A_1 -gyel jelöljük, akkor világos, hogy (A_1, B_1) egy a pozitív racionális számhalmazra vonatkozó szeletet alkot; jelöljük az általa definiált számot α_1 -gyel.

Már most ha a A -nak, b pedig B -nek egy számát jelöli, akkor a szorzat definíciója értelmében $\alpha \alpha_1$ az $\frac{a}{b}$ számok egyikénél sem kisebb a $\frac{b}{a}$ számok egyikénél sem nagyobb, azaz: $\alpha \alpha_1$ az 1-nél kisebb számok egyikénél sem kisebb és az egynél nagyobb számok egyikénél sem nagyobb, tehát

$$\alpha \alpha_1 = 1.$$

Az ilyen számpárokat egymás recziprokjainak nevezzük; α_1 jelölésére szokás az $\frac{1}{\alpha}$ jelet is használni, tehát

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}$$

s így

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$

12. A hányados fogalma.

Ha β szám recziprokját β_1 -gyel jelöljük, akkor:

Az α és β számok *hányadosa alatt értjük, az $\alpha \beta_1$ szorzatot.*

A szorzás asszociativ törvényének alkalmazásával:

$$(\alpha \beta_1) \cdot \beta = \alpha (\beta_1 \beta) = \alpha,$$

tehát α és β *hányadosa oly szám, melynek β -val való szorzata α .*

13. Hatvány.

Ha (A_1, B_1) és (A_2, B_2) két a pozitív raczionális szám-halmazra vonatkozó Dedekind-féle metszet s az általuk definiált számok rendre: α_1 és α_2 , továbbá

$$\alpha_1 < \alpha_2,$$

akkor van oly raczionális szám a , melyre nézve:

$$\alpha_1 < a < \alpha_2.$$

Ha már most n pozitív egész szám, akkor a szorzat definíciója értelmében α_1^n a^n -nél kisebb, α_2^n pedig nagyobb; következésképpen:

Ha $\alpha_1 < \alpha_2$, akkor

$$\alpha_1^n < \alpha_2^n. \quad \text{I.}$$

Ha a pozitív reális számok közül azokat az a számokat, melyekre nézve $a^n < \alpha_1$ az A , a többieket pedig a B halmazba sorozzuk, akkor világos, hogy (A, B) Dedekind-féle szeletet alkot s az általa definiált számot $\alpha_1^{\frac{1}{n}}$ -nel jelöljük.

Ha már most A és B egy-egy számát rendre a és b -vel jelöljük, akkor a szorzat definíciója értelmében

$$a^n < \left(\alpha_1^{\frac{1}{n}}\right)^n < b^n.$$

Ámde A és B definíciója értelmében még

$$a^n < \alpha_1 < b^n;$$

s mivel $b^n - a^n$ minden ε -nál kisebbé tehető, tehát közöttük egy számnál több nem lehet, következésképp:

$$\left(\alpha_1^{\frac{1}{n}}\right)^n = \alpha_1, \quad \text{II.}$$

Ebből már most nyilvánvaló, hogy:

Ha $\alpha_1 < \alpha_2$, akkor

$$\alpha_1^{\frac{1}{n}} < \alpha_2^{\frac{1}{n}} \quad \text{III.}$$

mert ha $\alpha_1^{\frac{1}{n}}$ nagyobb volna, mint $\alpha_2^{\frac{1}{n}}$, akkor az I. és II. alapján $\left(\alpha_1^{\frac{1}{n}}\right)^n = \alpha_1$ is nagyobb lenne, mint α_2 .

Az I. és III-ból következik, hogy:

Ha $\alpha_1 < \alpha_2$ és r tetszőleges pozitív raczionális szám, akkor

$$\alpha_1^r < \alpha_2^r. \quad \text{IV.}$$

Ebből pedig $\alpha_1^{-r} \alpha_2^{-r}$ -rel való szorzással következik, hogy

$$\alpha_2^{-r} < \alpha_1^{-r}. \quad \text{V.}$$

1. Pl. Ha $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 1$, s r pozitív raczionális szám, akkor

$$\alpha_1^r < 1, \alpha_2^r > 1.$$

2. Pl. Ha $r_1 < r_2$ pozitív raczionális számok és $\alpha > 1$, akkor

$$\alpha^{r_2 - r_1} > 1.$$

α^{r_1} -gyel való szorzással

$$\alpha^{r_2} > \alpha^{r_1} > 1. \quad \text{VI.}$$

Ha pedig $\alpha < 1$, akkor

$$\alpha^{r_2} < \alpha^{r_1} < 1. \quad \text{VII.}$$

14. A limes fogalma.

Jelöljön n pozitív egész számot és x_n egy n -nel változó számot. Ha bármily kicsiny pozitív ε számhoz tartozik, oly N szám, melynél nagyobb minden n -re x_n -a abszolút értéke kisebb, mint ε , azaz:

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad n > N,$$

akkor a -t az x_n változó *limesének* nevezzük; mely ténytet szimbolikusan így jelöljük:

$$\lim x_n = a.$$

Ha $a = 0$, akkor x_n -et infinitezimális mennyiségnek, vagy végtelen kicsinynek nevezzük; tehát x_n infinitezimális mennyiség, ha

$$\lim x_n = 0.$$

Ha pedig minden pozitív A -hoz tartozik, oly N , melyre nézve:

$$x_n > A,$$

ha

$$n > N,$$

akkor x_n -et pozitív végtelen nagynak nevezzük; mely tényt szimbolikusan így jelöljük:

$$\lim x_n = +\infty.$$

Ha pedig minden negatív $-A$ -hoz tartozik oly N , melyre nézve:

$$x_n < -A,$$

ha

$$n > N,$$

akkor x_n -et negatív végtelen nagynak mondjuk; mely tényt szimbolikusan így jelöljük:

$$\lim x_n = -\infty.$$

1. Pl. Ha x_1, x_2, \dots folyton növekvő számsor, de minden x_n kisebb marad egy adott számnál, akkor számsorunkat korlátosan növekvő számsornak nevezzük. Minden korlátosan növekvő számsorral alkothatunk egy *Dedekind*-féle metszetet. Ugyanis, ha A halmazba sorozzuk az x_n -eknél nem nagyobb számokat, a többit pedig B -be, akkor világos, hogy a korlátosság föltevése következtében (A, B) oly valóságos *Dedekind*-féle metszet, melyben A tartalmazza az összes x_n számokat, B pedig az összes x_n -eknél nagyobb számokat. Az

$$\alpha = (A, B)$$

tehát oly szám, melyre nézve bármely $\alpha - \varepsilon$ -hoz, hol ε pozitív, tartozik oly legelső x_N , melyre nézve:

$$\alpha - \varepsilon \leq x_N;$$

tehát bármily kicsiny pozitív ε -hoz tartozik oly N , melyre nézve :

$$\alpha - \varepsilon \leq x_n, \quad n > N$$

következőleg :

$$\lim x_n = \alpha,$$

azaz: I. Minden korlátosan növekvő számsornak van limese.

Hasonlóképen: II. Minden korlátosan csökkenő számsornak van limese.

Ha a számsor nem korlátosan növekvő, hanem korlátlanul, akkor a fentebbiek alapján azt mondjuk, hogy

$$\lim x_n = +\infty,$$

ha pedig korlátlanul csökkenő, akkor

$$\lim x_n = -\infty.$$

2. Pl. Ha

$$\alpha = (A, B)$$

s $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ a pozitív számoknak oly csökkenő sora, melyre nézve :

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

és az $(\alpha - \varepsilon_i, \alpha - \varepsilon_{i+1})$ intervallum egyik racionális száma a_i ; az $(\alpha + \varepsilon_{i+1}, \alpha + \varepsilon_i)$ intervallumnak egyik racionális száma b_i , akkor nyilvánvaló, hogy az a_1, a_2, \dots oly korlátosan növekvő, b_1, b_2, \dots pedig oly korlátosan csökkenő racionális számsort alkotnak, melyekre nézve :

$$\lim a_n = \lim b_n = \alpha.$$

Az a_i és b_i megválasztásában nyilvánvaló tetszőlegesség figyelembevételével tehát:

III. Minden

$$\alpha = (A, B)$$

számhoz végtelen sokféleképen alkothatunk oly mono'on növekvő, vagy csökkenő racionális számsorokat, melyek mindegyikének a limese α .

15. A limes fogalmának alkalmazása a hatványra.

Ha d oly szám, melyre nézve:

$$1 + d > 0,$$

akkor az

$$(1 + d)^2 > 1 + 2d$$

egyenlőtlenség mindkét oldalát szabad megszorozni $1 + d$ -vel, miáltal nyerjük, hogy

$$(1 + d)^3 > 1 + 3d + 2d^2,$$

tehát

$$(1 + d)^3 > 1 + 3d.$$

Általában, ha

$$(1 + d)^{n-1} > 1 + (n-1)d,$$

akkor mindkét oldalt $1 + d$ -vel szorozva, $(n-1)d^2$ elhagyásával nyerjük, hogy

$$(1 + d)^n > 1 + nd.$$

I.

Ha már most $a > 1$, tehát

$$a = 1 + d,$$

hol d pozitív és A tetszőleges nagy pozitív szám, k pedig oly pozitív egész szám, melyre nézve:

$$k > \frac{A-1}{d},$$

akkor az I. alapján:

$$a^k > A.$$

1.

Legyen már most x_1, x_2, \dots a racionális számoknak vég nélkül növekvő sora, akkor minden k -hoz tartozik oly N , melyre nézve:

$$x_n > k,$$

ha $n > N$, következőleg (13. § VI.)

$$a^{x_n} > a^k$$

s így az 1. alapján:

$$a^{x_n} > A,$$

ha $n > N$, azaz:

Ha $a > 1$ és x_1, x_2, \dots a racionális számoknak végnélkül növekvő sora, akkor

$$\lim a^{x_n} = \infty. \quad \text{II.}$$

tehát

$$\lim a^{-x_n} = 0. \quad \text{III.}$$

A III. még ebben az alakban is fogalmazható:

Ha $a < 1$ pozitív szám s x_1, x_2, \dots a racionális számok végnélkül növekvő sora, akkor

$$\lim a^{x_n} = 0. \quad \text{IV.}$$

Ha tehát x_1, x_2, \dots a racionális számok oly korlátosan fogyó sora, melyre nézve

$$\lim \frac{1}{x_n} = +\infty, \quad \lim x_n = 0,$$

akkor bármily egynél nagyobb szám legyen is a , mindig számtalan sokféleképpen meghatározhatunk oly tetszőleges kicsiny pozitív ε számot, melyre nézve:

$$1 + \varepsilon < a.$$

A II. alapján tehát a -hoz tartozik oly N , melynél nagyobb n -re:

$$(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{x_n}} > a,$$

azaz:

$$a^{x_n} - 1 < \varepsilon.$$

tehát

$$\lim a^{x_n} = 1.$$

Mivel ily módon $\lim a^{-x_n}$ is egyenlő az egységgel, azért:

Ha x_1, x_2, \dots a racionális számoknak oly tetszőleges sora, melyre nézve:

$$\lim x_n = 0,$$

akkor minden pozitív a számra nézve:

$$\lim a^{x_n} = 1. \quad \text{V.}$$

Ezek után könnyű lesz már az irracionális kitevőjű hatványt is definiálni. Legyen ugyanis (A, B) a racionális

számokra alkalmazott Dedekind-féle szelet és az általa definiált szám legyen α ; c pedig egy az egységnél nagyobb szám.

Ha már most A egyik tetszőleges száma a , B -é pedig b , akkor c^a alatt azt a számot értjük, mely a c^a számok egyikénél sem kisebb, a c^b számok egyikénél sem nagyobb.

Mivel a

$$c^b - c^a = c^a (c^{b-a} - 1)$$

az V. értelmében minden ε -nál kisebbé tehető, azért legfeljebb csak egy oly szám lehet, mely a definícióban foglalt föltételeket kielégíti. De ilyen szám létezik is. Ugyanis, ha A' halmazba sorozzuk a c^a -knál nem nagyobb reális számokat, a többieket pedig a B' halmazba, akkor világos, hogy (A', B') olyan reális számokra vonatkozó Dedekind-féle szeletet alkot, melyben A' tartalmazza az összes c^a , B' pedig az összes c^b számokat (13. § VI.); az általa definiált szám tehát kielégíti a definícióban foglalt föltételeket és mivel csak egy ily szám van, azért

$$c^\alpha = (A', B').$$

Ha tehát a_1, a_2, \dots a monoton növekvő, b_1, b_2, \dots pedig a monoton fogyó számoknak oly sora, melyre nézve:

$$\lim a_n = \lim b_n = \alpha,$$

akkor

$$\lim c^{a_n} = \lim c^{b_n} = c^\alpha.$$

VI.

Világos, hogy ez a tétel akkor is érvényes, ha c az egységnél kisebb pozitív szám, ami különben definíciónk csekély módosításából is nyilvánvaló.

16. A logaritmus fogalma.

Ha c pozitív számra és $\beta > 1$ számra nézve a reális számokat oly módon osztjuk két halmazba, hogy A -ba sorozzuk azokat az a számokat, melyekre nézve a β^a számok nem nagyobbak c -nél, a többieket pedig B -be, akkor vilá-

gos, hogy (A, B) oly *Dedekind*-féle szeletet alkot, melyben A tartalmazza azon összes a számokat, melyekre nézve:

$$\beta^a \leq c,$$

B pedig azon összes b számokat, melyekre nézve:

$$\beta^b > c.$$

(13. § VI. 15. §) Az

$$(A, B) = \alpha$$

tehát oly szám, melyre nézve β^x egyik β^a számnál sem kisebb s egy β^b számnál sem nagyobb. De mivel $\beta^b - \beta^a$ minden ε -nál kisebbé tehető s így csak egy oly szám lehet, mely egyik β^a -nál sem kisebb s egyik β^b -nél sem nagyobb s mivel β^x -n kívül c is ily szám, azért

$$\beta^x = c.$$

Az

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^{-x} = c$$

alapján gondolatmenetünk $\beta < 1$ pozitív számokra is érvényes. Ennélfogva:

Ha β az egységtől különböző pozitív reális szám, c pedig tetszőleges pozitív reális szám, akkor mindig van egy, de csakis egy oly reális szám, α , melyre nézve:

$$\beta^\alpha = c.$$

Ezt a reális α számot c -nek β alapra vonatkoztatott logaritmusának nevezzük s így jelöljük:

$$\alpha = \log_{\beta} c.$$

17. A reális számhalmaz néhány tulajdonsága.

I. Ha $\alpha_1 < \beta_1$ és $\alpha_2 < \beta_2$ pozitív reális számok, akkor

$$\alpha_1 \alpha_2 < \beta_1 \beta_2.$$

Ugyanis, ha a_1 és a_2 rendre az (α_1, β_1) , (α_2, β_2) intervallu-

mok egy-egy belső raczionális számát jelölik, akkor a szorzat definíciója értelmében:

$$\alpha_1 \alpha_2 < a_1 a_2 < \beta_1 \beta_2.$$

Mely egyenlőtlenség tételünket is nyilvánvalóvá teszi.

Ha pedig $\alpha_2 = \beta_2 = \alpha$ s $\alpha + \varepsilon' > \alpha$ raczionális szám, akkor bármily kicsiny ε' -ra:

$$\alpha_1 \alpha < a_1 (\alpha + \varepsilon'),$$

tehát

$$\alpha_1 \alpha < a_1 \alpha.$$

Éppen így, ha $\alpha - \varepsilon < \alpha$ raczionális szám, akkor bármily kicsiny ε -ra:

$$a_1 (\alpha - \varepsilon) < \beta_1 \alpha,$$

tehát

$$a_1 \alpha < \beta_1 \alpha,$$

következőleg:

II. Ha $\alpha_1 < \beta_1$ pozitív számok s α tetszőleges pozitív szám, akkor

$$\alpha \alpha_1 < \alpha \beta_1.$$

III. Ha $\alpha < \beta$ pozitív számok, akkor mindig van oly n pozitív egész szám, melyre nézve:

$$n \alpha > \beta.$$

Ugyanis a az α -nál kisebb, b pedig a β -nél nagyobb raczionális pozitív számok, akkor van oly pozitív egész n , melyre nézve: (1. § III.)

$$n a > b.$$

Ámde a II. szerint $n a < n \alpha$, tehát

$$n \alpha > \beta,$$

azaz:

IV. A reális számok szintén *Archimedes-féle rendszert* alkotnak.

Ha $\alpha < \beta$ pozitív számok s a az (α, β) intervallumnak egy belső raczionális száma, akkor, ha pl. a nem teljes n -edik hatvány, az

$$\frac{1}{\alpha^n} < \frac{1}{a^n} < \frac{1}{\beta^n}$$

egyenlőtlenségből következik, hogy:

V. A reális számhalmaz bármily intervallumában van irraczionális szám.

18. Limes-módszer.

Azt az eljárást, mellyel az x_n és y_n számok között levő relációkat kiterjesztjük azok limeseire is, *limes-módszernek* nevezzük.

Mindenek előtt megjegyezzük, hogyha

$$\lim x_n = x,$$

akkor ez azt jelenti, hogy minden pozitív ε -hoz tartozik oly N , melynél nagyobb n -re $|x_n - x| < \varepsilon$, azaz:

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon.$$

1. Ha $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, akkor bármily kicsiny pozitív ε -hoz tartozik oly N , melynél nagyobb n -re:

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$b - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < b + \frac{\varepsilon}{2}.$$

következően:

$$a + b - \varepsilon < a_n + b_n < a + b + \varepsilon,$$

tehát

$$\lim (a_n + b_n) = a + b,$$

azaz:

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n. \quad \text{I.}$$

2. Ha $\lim a_n = a$ és $\lim b_n = b$ pozitív számok, akkor minden az egységnél kisebb pozitív ε_1 -hoz tartozik oly N , melynél nagyobb n -re:

$$a - \varepsilon_1 < a_n < a + \varepsilon_1,$$

$$b - \varepsilon_1 < b_n < b + \varepsilon_1,$$

azaz:

$$a b - (a + b + 1) \varepsilon_1 < a_n b_n < a b + (a + b + 1) \varepsilon_1.$$

Mely az

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{a+b+1}$$

feltételnek megfelelően a következő alakba írható:

$$ab - \varepsilon < a_n b_n < ab + \varepsilon,$$

következőleg:

$$\lim (a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n. \quad \text{II.}$$

3. Ha $\lim a_n = a > 0$, akkor minden pozitív ε_1 -hez tartozik oly N , melynél nagyobb n -re:

$$a - \varepsilon_1 < a_n < a + \varepsilon_1,$$

tehát

$$\frac{1}{a + \varepsilon_1} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a - \varepsilon_1}.$$

Ámde

$$\frac{1}{a + \varepsilon_1} = \frac{1}{a} - \frac{\varepsilon_1}{(a + \varepsilon_1)a},$$

$$\frac{1}{a - \varepsilon_1} = \frac{1}{a} + \frac{\varepsilon_1}{(a - \varepsilon_1)a}.$$

Azért, ha

$$\frac{\varepsilon_1}{a(a - \varepsilon_1)} < \varepsilon, \quad \varepsilon_1 < \frac{a^2 \varepsilon}{1 + a \varepsilon},$$

akkor még inkább

$$\frac{\varepsilon_1}{a(a + \varepsilon_1)} < \varepsilon,$$

következőleg:

$$\frac{1}{a} - \varepsilon < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a} + \varepsilon,$$

s így

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}. \quad \text{III.}$$

4. Ha b pozitív szám nagyobb az egységnél és $\lim a_n = a$, n pedig az ε_1 -hez tartozó N -nél nagyobb pozitív egész szám, akkor

$$a - \varepsilon_1 < a_n < a + \varepsilon_1,$$

tehát

$$b^{a-\varepsilon} < b^{a_n} < b^{a+\varepsilon}.$$

Ha már most

$$b^{\varepsilon_1} < 1 + \frac{\varepsilon}{b^a},$$

akkor

$$b^{-\varepsilon_1} > \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{b^a}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{b^a}}{1 - \frac{\varepsilon^2}{b^{2a}}} > 1 - \frac{\varepsilon}{b^a}.$$

Miért is fönnebbi egyenlőtlenségünk a következő alakot ölti:

$$b^a - \varepsilon < b^{a_n} < b^a + \varepsilon,$$

honnan:

$$\lim b^{a_n} = b^{\lim a_n}. \quad \text{IV.}$$

Következmények:

a) Legyen

$$b^{a_n} = c_n, \quad b^a = c.$$

Következőleg:

$$a_n = \log_b c_n, \quad a = \log_b c.$$

Ámde

$$\lim_b \log c_n = \lim a_n = a = \log_b c = \log \lim_b c_n,$$

következőleg:

$$\lim_b \log c_n = \log \lim_b c_n. \quad \text{V.}$$

Evidens, hogy a IV. és V. alatt levő tételek az egységnél kisebb pozitív $b < -re$ is érvényesek. A levezetésben csak a IV-ben áll be igen csekély módosulás.

$$b) \quad \lim_b \log a_n^\alpha = \lim_b \alpha \log a_n = \alpha \log \lim_b a_n,$$

tehát az V. alapján:

$$\log \lim_b a_n^\alpha = \log (\lim_b a_n)^\alpha,$$

azaz:

$$\lim_b a_n^\alpha = (\lim_b a_n)^\alpha. \quad \text{VI.}$$

$$c) \quad \lim_b \log a_n^{\alpha_n} = \lim_b (\alpha_n \log a_n) = \lim_b \alpha_n \cdot \log \lim_b a_n,$$

tehát

$$\log \lim_b a_n^{\alpha_n} = \log (\lim_b a_n)^{\lim \alpha_n},$$

azaz:

$$\lim a_n^{\alpha_n} = (\lim a_n)^{\lim \alpha_n}.$$

VII.

19. Határpontok.

Az $(a_1, a_2, \dots) = H$ számhalmazt korláatosnak mondjuk, ha elemei oly intervallum tagjai, melynek határai véges számok.

Ha H korláatos halmaz, akkor mindig van oly β szám, mely H egyik tagjánál sem kisebb s a H minden tagjánál nagyobb számok egyikénél sem nagyobb. Az ilyen β számot a *halmaz felső határának* nevezzük.

Ugyanis, ha a reális számokból oly (A, B) Dedekind-féle szeletet alkotunk, melyben A tartalmazza a H nem minden tagjánál nagyobb számokat, B pedig a többi, akkor nyilvánvaló, hogy halmazunk felső határa

$$\beta = (A, B).$$

Éppen így H halmaz *alsó határa* oly α szám, mely H egyik tagjánál sem nagyobb és H minden eleménél kisebb számok egyikénél sem kisebb.

20. Limes superior és limes inferior.

Ha a $H = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ végtelen sok reális számból álló halmazra nézve az összes reális számok halmazát oly (A, B) Dedekind-féle metszéssel szeljük, melyben B tartalmazza mindazokat a reális számokat, melyek után H -nak csak véges számú tagja van, A pedig a többi, akkor az

$$\bar{\alpha} = (A, B)$$

szám, ha az A -nak legutolsó eleme, akkor igaz, hogy utána H -nak még végtelen sok eleme van, de bármily kicsiny pozitív ε -ra, $\bar{\alpha} + \varepsilon$ már B -nek eleme, tehát utána H -nak csak véges számú eleme van.

Ha pedig $\bar{\alpha}$ B -nek legkisebb eleme, akkor igaz, hogy utána a H halmaznak csak véges számú eleme van, de bármily kicsiny pozitív ε -ra $\bar{\alpha} - \varepsilon$ már az A eleme, tehát utána H -nak már végtelen sok eleme van.

Az ilyen $\bar{\alpha}$ számot a H limes superiorjának nevezzük. Jellemző tulajdonsága, hogy bármily kicsiny pozitív ε -ra $\bar{\alpha} - \varepsilon$ után H -nak még végtelen sok —, de $\bar{\alpha} + \varepsilon$ után már csak véges számú eleme van, tehát az $(\bar{\alpha} - \varepsilon, \bar{\alpha} + \varepsilon)$ intervallumban a H halmaznak végtelen sok eleme van.

Ha pedig H -ra nézve oly Dedekind-féle metszéssel szeljük az összes reális számok halmazát, melyben A tartalmazza mindazokat a reális számokat, melyek előtt H -nak csak véges számú eleme van, B meg a többi, akkor ha az

$$\underline{\alpha} = (A, B)$$

szám az A tagja, akkor igaz, hogy előtte a H halmaznak csak véges számú tagja van, de bármely kicsiny pozitív ε -ra $\underline{\alpha} + \varepsilon$ már a B tagja, tehát előtte a H halmaznak már végtelen sok tagja van. Ha pedig $\underline{\alpha}$ a B tagja, akkor igaz, hogy előtte H -nak végtelen sok tagja van, de bármily kicsiny pozitív ε -ra $\underline{\alpha} - \varepsilon$ már az A tagja, tehát előtte H -nak már csak véges számú tagja van.

Az ilyen $\underline{\alpha}$ számot H limes inferiorjának nevezzük. Jellemző tulajdonsága, hogy $\underline{\alpha} - \varepsilon$ előtt H -nak csak véges számú —, de $\underline{\alpha} + \varepsilon$ előtt már végtelen sok tagja van; következésképpen az $(\underline{\alpha} - \varepsilon, \underline{\alpha} + \varepsilon)$ intervallumban H -nak végtelen sok tagja van.

A limes superior és inferior jelölésére a következő szimbolumokat alkalmazzuk:

$$\limsup \alpha_n = \bar{\alpha},$$

$$\liminf \alpha_n = \underline{\alpha}.$$

Ha tehát H -nak lim inferiorja és limes superiorja rendre: $\underline{\alpha}$ és $\bar{\alpha}$, akkor az $(\underline{\alpha} - \varepsilon, \bar{\alpha} + \varepsilon)$ intervallumon kívül, hol ε tetszőleges kicsiny pozitív szám, H -nak csak véges számú tagja van.

Ha H -ra nézve:

$$\bar{\alpha} = \underline{\alpha} = \alpha,$$

akkor H -t szabályos halmaznak, α -t pedig H limesének nevezzük s így jelöljük:

$$\lim \alpha_n = \alpha.$$

Ha tehát a H szabályos halmaz limese α , akkor, bármily kicsiny pozitív szám legyen is ε , az $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ intervallumon kívül a H halmaznak csak véges számú tagja van.

21. A limes létezésének szükséges és elégséges kritériuma.

Ha az $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ végtelen számsornak van limese α , akkor bármily kicsiny pozitív ε -hoz tartozó N -nél nagyobb pozitív egész n -re s minden pozitív egész k -ra:

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha_{n+k} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát

$$|\alpha_n - \alpha_{n+k}| < \varepsilon.$$

I.

De ez a föltétel a konvergenciának elégséges feltétele is. Mert ha az I minden pozitív egész k -ra teljesül, akkor az $(\alpha_n - \varepsilon, \alpha_n + \varepsilon)$ intervallumon kívül végtelen számsorunknak csak véges számú tagja van, tehát úgy a limes superior, $\bar{\alpha}$, valamint a limes inferior, $\underline{\alpha}$ ebbe az intervallumba esik, de ekkor

$$\bar{\alpha} - \underline{\alpha} < \varepsilon$$

bármily kicsiny pozitív ε -ra, tehát

$$\bar{\alpha} = \underline{\alpha} = \alpha.$$

Ezen az alapon aztán kimondhatjuk a következő, Cauchy-tól eredő tételt:

Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ végtelen számsor konvergenciájának szükséges és elégséges kritériuma, hogy bármily kicsiny pozitív ε -hoz tartozó N -nél nagyobb pozitív egész n -re s minden pozitív egész k -ra teljesüljön az

$$|\alpha_n - \alpha_{n+k}| < \varepsilon$$

feltétel.

1. Pl. Legyen adva a következő számsor:

$$e_0 = 1, e_1 = 1 + \frac{1}{1!}, e_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}, \dots, e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \dots$$

akkor

$$e_{n+k} - e_n = \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2) \dots (n+k)} \right],$$

tehát

$$e_{n+k} - e_n < \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{k-1}} \right],$$

vagy

$$e_{n+k} - e_n < \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{(n+1)^k}}{1 - \frac{1}{n+1}},$$

következően:

$$e_{n+k} - e_n < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n!}.$$

Amiből nyilvánvaló, hogy monoton növekvő sorunkra nézve bármily kicsiny pozitív ε -hoz tartozik oly N , melynél nagyobb egész n -re s minden pozitív egész k -ra:

$$e_{n+k} - e_n < \varepsilon.$$

Sorunknak tehát van limese; ha ezt e -vel jelöljük, akkor

$$\lim e_n = e,$$

mely tényt így is jelöljük:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad \text{II.}$$

s e -t a II. alatt levő végtelen sor összegének nevezzük. Azt a logaritmusrendszert pedig, melynek az alapszáma e , *természetes logaritmusrendszer*-nek nevezzük s jelölésére a következő szimbolumot használjuk:

$$\log_e a = l a.$$

e -nek egyik közelítő értéke

$$e = 2.718281828459045 \dots$$

2. Pl. Legyen adva a következő számsor:

$$\varepsilon_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \\ n = 1, 2, \dots$$

Mivel

$$\varepsilon_{n+k} = 1 + \binom{n+k}{1} \frac{1}{n+k} + \dots + \binom{n+k}{n+k} \cdot \frac{1}{(n+k)^{n+k}}$$

és

$$\binom{n+k}{r} \frac{1}{(n+k)^r} < \frac{1}{r!},$$

hol r $n+k$ -nál nem nagyobb pozitív egész szám, azért

$$\varepsilon_{n+k} < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{(n+k)!},$$

azaz:

$$\varepsilon_{n+k} < e_{n+k} < e.$$

Tehát a monoton növekvő (22. § 3. pl.) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ végtelen számsornak van limese, mely nem lehet e -nél nagyobb.

Másrészről

$$\varepsilon_{n+k} > 1 + \binom{n+k}{1} \frac{1}{n+k} + \dots + \binom{n+k}{n} \frac{1}{(n+k)^n}$$

és

$$\binom{n+k}{r} \frac{1}{(n+k)^r} = \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{n+k}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n+k}\right), \\ r = 1, 2, \dots, n,$$

tehát minden pozitív egész n -re:

$$\lim \varepsilon_{n+k} > 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

azaz:

$$\lim \varepsilon_{n+k} > e_n.$$

Tehát az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ végtelen számsor limese nem lehet kisebb, mint e , de mivel nagyobb sem lehet, azért $\lim \varepsilon_n = e$, azaz:

Ha n mindig pozitív egész marad, akkor

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

III.

Ha már most x_1, x_2, \dots végnélkül növekvő számsor, akkor bármily nagy szám legyen is x_n a 14. § IV. szerint mindig van oly k egész szám, melyre nézve:

$$k < x_n < k + 1,$$

tehát

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} > \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k.$$

Ámde a 15. § II. szerint:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \left(1 + \frac{1}{k}\right) = e,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{-1} = e,$$

következően:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e. \quad \alpha.)$$

Mivel

$$\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{-x_n} = \left(1 + \frac{1}{x_n - 1}\right)^{x_n - 1} \left(1 + \frac{1}{x_n - 1}\right)$$

azért

$$\lim \left(1 - \frac{1}{x_n}\right)^{-x_n} = e, \quad \beta.)$$

Ennélfogva az $\alpha.)$ és $\beta.)$ alapján:

Ha $|x_1|, |x_2|, \dots$ a monoton növekvő számoknak oly sora, melyre nézve:

$$\lim |x_n| = \infty,$$

akkor

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e. \quad \text{IV.}$$

Ha $\frac{1}{x_n} = \varepsilon_n$, akkor tételünk ily alakot ölt:

Ha $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, \dots$ a monoton csökkenő számoknak oly sora, melyre nézve:

$$\lim |\varepsilon_n| = 0,$$

akkor

$$\lim \left(1 + \varepsilon_n\right)^{\frac{1}{\varepsilon_n}} = e. \quad \text{V.}$$

A 15. § V. alkalmazásával, ha a IV. és V. mindkét oldalának természetes logaritmusát vesszük, a következő tételeket nyerjük:

$$\lim x_n l\left(1 + \frac{1}{x_n}\right) = 1, \quad \text{VI.}$$

$$\lim |x_n| = \infty.$$

$$\lim \frac{l(1 + \varepsilon_n)}{\varepsilon_n} = 1, \quad \text{VII.}$$

$$\lim |\varepsilon_n| = 0.$$

Bármilyen az egységtől különböző pozitív szám legyen is a , mindig van oly α_n , melyre nézve:

$$1 + \varepsilon_n = a^{\alpha_n}; \quad l(1 + \varepsilon_n) = \alpha_n l a,$$

hol $\lim |\alpha_n|$ szintén nulla, következõleg a VII. alapján:

$$\lim \frac{a^{\alpha_n} - 1}{\alpha_n} = l a, \quad \text{VIII.}$$

$$\lim |\alpha_n| = 0.$$

Végül bármily nullától különböző reális szám legyen is α , mindig van olyan a_n , melyre nézve:

$$(1 + \varepsilon_n)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + a_n; \quad \frac{1}{\alpha} l(1 + \varepsilon_n) = l(1 + a_n),$$

hol $\lim |\varepsilon_n|$ -nel $\lim |a_n|$ is nulla.

következõleg a VII. alapján:

$$\lim \frac{(1 + a_n)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{a_n} = \frac{1}{\alpha} l(1 + a_n), \quad \text{IX.}$$

$$\lim |a_n| = 0.$$

22. Cauchy limes-tételei.

I. Ha v_1, v_2, \dots a számoknak monoton növekvõ oly sora, melyre nézve $\lim v_n = \infty$, akkor

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n}, \quad \text{I.}$$

fõltéve, hogy az egyenletünk jobb oldalán levõ limes létezik.

Ha a jobb oldalon levő limes értékét g -vel jelöljük, akkor a bármily kicsiny pozitív ε -hoz tartozó N -nél nagyobb pozitív egész n -re s minden pozitív egész i -re:

$$g - \varepsilon < \frac{u_{n+i} - u_{n+i-1}}{v_{n+i} - v_{n+i-1}} < g + \varepsilon,$$

tehát

$$(g - \varepsilon) \sum_{i=1}^k (v_{n+i} - v_{n+i-1}) < \sum_{i=1}^k (u_{n+i} - u_{n+i-1}) < (g + \varepsilon) \sum_{i=1}^k (v_{n+i} - v_{n+i-1}).$$

Ebből pedig:

$$g - \varepsilon < \frac{u_{n+k} - u_n}{v_{n+k} - v_n} < g + \varepsilon.$$

Ennélfogva bármily kicsiny pozitív ε -ra:

$$g - \varepsilon < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_{n+k} - u_n}{v_{n+k} - v_n} < g + \varepsilon,$$

mely egyenlőtlenség már igazolja tételünket.

II. Ha a monoton fogyó v_1, v_2, \dots számsorra nézve $\lim v_n = 0$ és $\lim u_n = 0$, akkor

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{u_n - u_{n+1}}{v_n - v_{n+1}}, \quad \text{II.}$$

fölteve, hogy az egyenletünk jobb oldalán levő limes létezik.

Ha egyenletünk jobb oldalán levő limes értékét ismét g -vel jelöljük, akkor a fönntebbi gondolatmenet alapján nyilvánvaló, hogy minden pozitív egész k -ra:

$$g - \varepsilon < \frac{u_n - u_{n+k}}{v_n - v_{n+k}} < g + \varepsilon.$$

A $\lim u_{n+k}$ és $\lim v_{n+k}$ -ra vonatkozó föltevésünk alapján tehát bármily kicsiny pozitív ε -hoz tartozó N -nél nagyobb pozitív egész n -re:

$$g - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < g + \varepsilon.$$

Evvel aztán tételünk is nyilvánvalóvá vált.

1. Pl. Ha $u_n = a_1 + \dots + a_n$, $v_n = n$ és $\lim a_n = a$, akkor az I. szerint:

$$\lim \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \lim a_n = a. \quad 1.$$

tehát

$$\lim \frac{la_1 + \dots + la_n}{n} = la, \quad 2.$$

$$\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \lim a_n = a. \quad 3.$$

Az $a_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ esetre a 3. következő lesz:

$$\lim \sqrt[n]{\alpha_n} = \lim \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}. \quad 4.$$

a) Igy ha $\alpha_n = n$, akkor

$$\lim \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = 1,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad a).$$

vagy

$$\lim_{n=\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

b) Ha $a_n = \frac{n!}{n^n}$, akkor

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e},$$

tehát

$$\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}. \quad b).$$

c) Ha pedig $\alpha_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{n^n}$, akkor

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = 2 \frac{2n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

tehát

$$\lim \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n} = \frac{4}{e},$$

vagy

$$\lim \frac{\left(\frac{1}{2n} \sqrt[2n]{2n!}\right)^2}{\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{e}. \quad c).$$

2. Pl. Legyen

$$u_n = 1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha, \quad v_n = n^{\alpha+1}, \\ \alpha + 1 > 0,$$

következően:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha}{n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - 1\right]},$$

tehát (18. § IX.)

$$\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{1}{\alpha + 1},$$

s így

$$\lim \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha + 1}.$$

3. Pl. Legyen $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $v_n = \ln n$.

Következően:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = \frac{1}{l \left(1 + \frac{1}{n}\right) + l \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

ennél fogva:

$$\lim \frac{u_{n+1} - u_n}{v_{n+1} - v_n} = 1,$$

tehát

$$\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

De ebből még korántsem következik, hogy a számláló limese egyenlő a nevező limesével. Ugyanis a 15. § I. szerint:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}},$$

honnan

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

tehát

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

s így

$$l \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}. \quad \alpha)$$

Éppen így

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Honnan $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ -nel való szorzással nyerjük, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

tehát

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > e,$$

honnan

$$l \frac{n}{n-1} > \frac{1}{n}. \quad \beta).$$

Ha tehát

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - l n,$$

$$a'_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - l(n+1),$$

akkor

$$a_n - a'_n = l \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - l \frac{n}{n-1} < 0,$$

$$a'_n - a'_{n-1} = \frac{1}{n} - l \frac{n+1}{n} > 0.$$

Az $\alpha)$ alapján pedig:

$$\sum_1^n l \frac{k+1}{k} = l(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n};$$

következőleg a_1, a_2, \dots monoton csökkenő pozitív számsor, tehát van lime; a'_1, a'_2, \dots pedig monoton növekvő számsor, melyre nézve:

$$\lim a'_n = \lim a_n.$$

A $\lim a_n$ -t nevezzük *Mascheroni-féle számnak*, vagy *Euler-féle konstansnak*; közelítő értéke:

$$\lim a_n = c = 0.5772156649015328.$$

23. Alkalmazás a pozitív tagú sorokra.

A végtelen sorok s szorzatok elméletét később mutatjuk be; a jelen esetben megelégszünk a közöltük fogalmaknak s tételeknek segítségével a pozitív tagú sorokra vonatkozólag néhány fundamentalis fogalom s tétel bemutatásával.

Ha az u_1, u_2, \dots pozitív számok és

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

továbbá,

$$\bar{s} = \limsup s_n = \underline{s} = \liminf s_n = s \neq \infty,$$

akkor a

$$\sum_1^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

pozitív tagokból álló végtelen sort konvergensnek, és s -t a sor összegének nevezzük. Ha pedig

$$s = \infty,$$

akkor a sort *divergens*-nek, ha pedig

$$\bar{s} \neq \underline{s},$$

akkor *oszcilláló*nak mondjuk.

Ha $\sum u_n$ és $\sum v_n$ pozitív tagú sorokra nézve:

$$\limsup \frac{u_n}{v_n} = H,$$

hol H véges szám, akkor bármily kicsiny pozitív szám legyen is ε , mindig van oly N , melynél nagyobb n -re:

$$u_n < (H + \varepsilon) v_n.$$

Ebben az esetben $\sum v_n$ -t $\sum u_n$ *majoransának* nevezzük. Ennélfogva $\sum u_n$ mindig konvergens, ha valamelyik majoransa is az, és ha $\sum u_n$ divergens, akkor minden majoransa is az.

Ha

$$h = \liminf \frac{u_n}{v_n} = H = \limsup \frac{u_n}{v_n}, \quad (H \neq \infty)$$

akkor minden ε -hoz tartozik oly N , melynél nagyobb n -re:

$$u_n < (H + \varepsilon) v_n,$$

$$u_n > (h - \varepsilon) v_n.$$

Ebben az esetben, ha H zérustól különböző véges szám a két sort *egyenlő rangúnak* mondjuk, tehát az egyenlő rangú sorok egyszerre konvergensek, vagy *divergensek*.

Ha $H=0$, akkor Σu_n -et *alacsonyabb rangú* sornak mondjuk. Ha Σv_n konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az alacsonyabb rangú Σu_n *jobban* konvergál, ha pedig Σv_n divergens Σu_n is az, akkor azt mondjuk, hogy Σu_n kevésbé divergál, mint Σv_n , vagy pedig Σv_n *jobban* divergál, mint Σv_n .

I. Az

$$1 + x + x^2 + \dots$$

I.

pozitív tagokból álló végtelen sorra nézve legyen

$$s_n = 1 + x + \dots + x^{n-1},$$

akkor

$$s_{n+k} - s_n = x^n \frac{1 - x^k}{1 - x},$$

következőleg, ha $x < 1$,

$$s_{n+k} - s_n < \frac{x^n}{1 - x} < \varepsilon,$$

ha

$$n > \frac{l\varepsilon(1-x)}{lx}.$$

Tehát az $1 + x + x^2 + \dots$ pozitív tagokból álló végtelen sor konvergens ha $x < 1$, az $x \geq 1$ esetben pedig sorunk divergenciája evidens.

II. Ha az I. és a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots$$

pozitív tagokból álló végtelen sorokra nézve:

$$\limsup \frac{u_n}{x_n} = H,$$

vagy, mivel

$$\limsup \sqrt[n]{H} = \liminf \sqrt[n]{H} = 1,$$

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} = x,$$

akkor $x + \varepsilon$ -nál csak véges számú nagyobb $\sqrt[n]{u_n}$ van, tehát $\sum u_n$ konvergens, ha $x < 1$; ellenben $x - \varepsilon$ -nál végtelen sok nagyobb $\sqrt[n]{u_n}$ van, tehát:

A $\sum u_n$ pozitív tagokból álló végtelen sor konvergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} < 1,$$

divergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} > 1,$$

eldöntetlen, ha

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} = 1.$$

Ezeket a kriteriumokat nevezzük *Cachy-féle konvergenzia-kriteriumoknak*.

III. Ha a $\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_1}, \dots$ sor limes superiorja \bar{g} , akkor a tetszőleges kicsiny pozitív ε -hoz tartozó N -nél nagyobb n -re:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < g + \varepsilon, \dots, \frac{u_{n+k}}{u_{n+k-1}} < \bar{g} + \varepsilon.$$

Honnan összeszorzással s gyökvonással

$$\sqrt[n+k]{u_{n+k}} < (\bar{g} + \varepsilon) \sqrt[n+k]{\frac{u_n}{(\bar{g} + \varepsilon)^n}};$$

ebből pedig nyilvánvaló, hogy

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} \leq \bar{g}. \quad 1.$$

Ha pedig az $\frac{u_1}{u_0}, \frac{u_2}{u_1}, \dots$ sor limes inferiorját g -vel jelöljük, akkor az előbbivel azonos gondolatmenet a következő tételhez vezet:

$$\liminf \sqrt[n]{u_n} \geq g. \quad 2.$$

Ha már most az 1. és 2-t egybevetjük a *Cauchy*-féle konvergencia-kritériumokkal, akkor a következő *d'Alambert*-féle konvergencia-kritériumokat nyerjük.

Ha a Σu_n pozitív tagokból álló sorra nézve:

$$\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} = \bar{g}, \quad \liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} = g,$$

akkor Σu_n divergens, ha

$$g > 1,$$

konvergens, ha

$$\bar{g} < 1,$$

eldöntetlen, ha

$$g \leq 1, \quad \bar{g} \geq 1.$$

1. Pl. Ha $\alpha_1 > \alpha_2$ két a $(0, 1)$ intervallumban levő szám és $u_{2n} = \alpha_1^{2n}$, $u_{2n+1} = \alpha_2^{2n+1}$, akkor

$$\bar{g} = \infty, \quad g = 0;$$

a sor mégis konvergens, mert

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} = \alpha_1 < 1.$$

IV. Könnyű igazolni a következő *Kummer*-tól származó konvergencia-kritériumot is:

Ha Σu_n pozitív tagokból álló sorra nézve létezik a pozitív számoknak oly a_0, a_1, a_2, \dots sora, melyre nézve:

$$\liminf \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) = g > 0,$$

akkor Σu_n konvergens, ha pedig

$$\limsup \left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \right) = \bar{g} < 0,$$

akkor Σu_n divergens, ha $\Sigma \frac{1}{a_n}$ is az.

Ugyanis az első esetben a pozitív ε -hoz tartozó N -nél nagyobb n -re:

$$a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} > (g - \varepsilon) u_{n+1}, \quad 3.$$

tehát az $a_0 u_0, a_1 u_1, a_2 u_2 \dots$ pozitív számsor csökkenő s így van lime; az

$$(a_0 u_0 - a_1 u_1) + (a_1 u_1 - a_2 u_2) + \dots + (a_{n-1} u_{n-1} - a_n u_n) = a_0 u_0 - a_n u_n > (g + \varepsilon) \sum_{i=0}^n u_i$$

egyenlőtlenség tételünk első felét igazolja. Szabad volt ugyanis az általánosság rovása nélkül feltételezni, hogy a 3. már az $n=0$ -tól érvényes.

Ha tételünkben a második feltétel teljesül, akkor azonos gondolat alapján nyilvánvalóvá válik, hogy $a_0 u_0, a_1 u_1$ pozitív számsor monoton növekvő; ha tehát számsorunk alsó határa h , akkor az

$$u_n > h \frac{1}{a_n}$$

egyenlőség alapján nyilvánvaló tételünk második részének a helyessége is.

Igy $a_n=1$ esetre a Kummer-féle kriterium a d'Alambert-félét szolgáltatja.

Az $a_n=n$ esetre pedig a következő Raabe-féle konvergencia-kriteriumot nyerjük.

$\sum u_n$ pozitív tagokból álló sor konvergens, ha

$$\liminf n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) > 1,$$

divergens, ha

$$\limsup n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) < 1.$$

Az $a_n=n \ln$ esetre pedig a következő konvergencia-kriteriumhoz jutunk:

$\sum u_n$ pozitív tagokból álló sor konvergens, ha

$$\liminf \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln > 1,$$

divergens, ha

$$\limsup \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \ln < 1.$$

V. Végül még a divergens sorok származtatására vonatkozó következő tételt mutatjuk be:

Ha a pozitív tagokból álló

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots$$

végtelen sor divergens s

$$\sigma_n = \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n},$$

akkor az

$$\frac{1}{a_1 \sigma_1} + \frac{1}{a_2 \sigma_2} + \dots$$

végtelen sor is divergens.

Ugyanis, ha

$$s_n = \frac{1}{a_1 \sigma_1} + \dots + \frac{1}{a_n \sigma_n},$$

akkor

$$s_{n+k} - s_n > \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \dots + \frac{1}{a_{n+k}} \right) \frac{1}{\sigma_{n+k}} = 1 - \frac{\sigma_n}{\sigma_{n+k}},$$

Ami már tételünket igazolja, mert hiszen, ha k -t elég nagyra választjuk $\frac{\sigma_n}{\sigma_{n+k}}$ tetszőleges kicsinnyé lesz s így nem teljesül a konvergencia szükséges kriteriuma.

Ugyancsak tételünkből következik a

$$\sum \frac{1}{a_n \sigma_n s_n} \quad 4.$$

sor divergenciája is.

Ha már most megfontoljuk, hogy (19. § I.)

$$\lim \frac{l \sigma_n}{s_n} = \lim \frac{l \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}}}{s_n - s_{n-1}} = \lim l \left(1 - \frac{1}{a_n \sigma_n} \right)^{-a_n \sigma_n} = 1, \\ \left(\sigma_{n-1} = \sigma_n - \frac{1}{a_n} \right). \quad (z)$$

akkor nyilvánvalóvá válik, hogy a 4. a

$$\sum \frac{1}{a_n \sigma_n l \sigma_n} \quad 5.$$

sorral egyenlő rangú, tehát ez is divergens.

Az 5. n első tagjának összege (α) szerint olyan rangú, mint $l s_n$, tehát mint $l l \sigma_n = l^2 \sigma_n$ s így a

$$\sum \frac{1}{a_n \sigma_n l \sigma_n l^2 \sigma_n}$$

szintén divergens. Ennélfogva:

Ha a pozitív tagokból álló

$$\sum \frac{1}{a_n}$$

sor divergens és

$$\sigma_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n},$$

akkor a

$$\sum \frac{1}{a_n \sigma_n}, \sum \frac{1}{a_n \sigma_n l \sigma_n}, \sum \frac{1}{a_n \sigma_n l \sigma_n l^2 \sigma_n}, \dots, \sum \frac{1}{a_n \sigma_n l \sigma_n \dots l^k \sigma_n}$$

sorok mind divergensek.

2. Pl. Így az

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

sor divergens, tehát divergensek a következő sorok is:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

$$\frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \dots,$$

$$\frac{1}{3!3!3} + \frac{1}{4!4!4} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

3. Pl. Ha

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{n^\alpha},$$

akkor

$$\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim n \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right] = \alpha.$$

Tekintettel tehát a 2. pl.-ra és a Raabe-féle kriteriumra:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

konvergens, ha $\alpha > 1$, divergens, ha $\alpha \leq 1$.

4. Pl. Legyen

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{n^\alpha (ln)^\beta}.$$

Megfontolva már most, hogy a 3. feladatban alkalmazott limes képlet szerint:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + \varepsilon_n \quad \lim \varepsilon_n = 0$$

és hogy a 22. § α) képlete szerint:

$$\frac{ln+1}{ln} = 1 + \frac{\theta_n}{n ln} \quad \theta_n < 1, \lim \theta_n = 1,$$

következőleg (21. §. IX.):

$$\frac{[ln+1]^\beta}{(ln)^\beta} = 1 + \frac{\theta_n \beta}{n ln} + r_n, \quad \lim r_n = 0$$

s így

$$n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \alpha + \frac{\theta_n \beta}{ln} + \varepsilon'_n \quad \lim \varepsilon'_n = 0.$$

Ha tehát $\alpha \neq 1$, akkor

$$\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \alpha,$$

s így sorunk konvergens, ha $\alpha > 1$, divergens, ha $\alpha < 1$.

Ha pedig $\alpha = 1$, akkor

$$\lim \left[n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] ln = \beta,$$

tehát $\alpha = 1$ esetben sorunk konvergens, ha $\beta > 1$ s divergens ha $\beta \leq 1$. (2. pl.) Ennélfogva:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (ln)^\beta}$$

konvergencia-kritériumai:

$$\begin{array}{ll} \alpha > 1 & \text{konvergens,} \\ \alpha = 1 \begin{cases} \beta > 1 \\ \beta \leq 1 \end{cases} & \begin{cases} \text{konvergens,} \\ \text{divergens,} \end{cases} \\ \alpha < 1 & \text{divergens.} \end{array}$$

5. Pl. Ha

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^k + \alpha n^{k-1} + \dots}{n^k + \beta n^{k-1} + \dots},$$

akkor

$$\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \alpha - \beta,$$

következőleg sorunk *konvergens*, ha $\alpha - \beta > 1$, *divergens*, ha $\alpha - \beta < 1$; ez a Gauss-féle kriterium.

6. Pl. A

$$\sum n! \left(\frac{x}{n} \right)^n$$

sorra nézve:

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e}.$$

tehát sorunk *konvergens*, ha $x < e$, *divergens*, ha $x > e$.

Az $x = e$ esetben is *divergens*, mert akkor $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ állandóan nagyobb egynél.

7. A

$$\sum \frac{n!}{(x+1) \dots (x+n)}$$

sorra nézve:

$$\lim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = x.$$

Tehát, tekintettel még a 2. feladatra, sorunk *konvergens*, ha $x > 1$, *divergens*, ha $x \leq 1$.

24. A függvény fogalma.

Ha a reális számok egy tetszőleges módon definiált A halmazának minden x eleméhez valamely eljárással mellérendelünk egy, de csakis egy számot y -t, akkor y -t x *egyértékű függvényének* nevezzük, s jelölésére a következő szimbolumot használjuk:

$$y = f(x) \quad \text{I.}$$

Az A számhalmazt $f(x)$ értelmezési —, az y számok

alkotta B számhalmazt pedig $f(x)$ értéktartományának nevezzük.

Általában, ha a reális számokból alkotott (x_1, x_2, \dots, x_n) n -est az n dimenziós tér, R_n egy pontjának nevezzük s P -vel jelöljük, és az n dimenziós tér, R_n meghatározott módon definiált P pontjai A halmazának minden eleméhez előírt módon mellérendelünk egy, de csakis egy y számot, akkor y -t a P pontok egyértékű függvényének nevezzük s szimbolikusan így jelöljük:

$$y = f(P), \quad \text{II.}$$

vagy pedig n változós függvénynek mondjuk s így jelöljük:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad \text{III.}$$

A halmazt itt is $f(P)$ értelmezési tartományának, az y számok alkotta B halmazt pedig $f(P)$ értéktartományának nevezzük. Az $n=1$ eset az I. alatt definiált függvényhez vezet.

Ha B -ben minden szám véges, akkor a függvényt *végesnek*, különben *nem végesnek* mondjuk.

Ha B felső határa H , az alsó meg, h és ezek mindegyike véges, akkor a függvényt *korlátos* —, különben *korlátlan* változásúnak mondjuk.

1. Pl. A legyen, 0 kivételével, a véges reális számok halmaza; akkor az

$$y = \frac{1}{x}$$

egyenlettel definiált függvényre nézve y véges függvény; értelmezési tartománya, B , zérus kivételével tartalmazza az összes véges reális számokat és

$$H = +\infty, h = -\infty;$$

tehát függvényünk korlátlan változása.

2. Pl. A álljon azon (x_1, x_2) pontokból, melyekre nézve x_1 és x_2 végesek és $x_1 \neq x_2$. Ekkor az

$$y = \frac{1}{x_1 - x_2}$$

függvény oly véges függvény, melyre nézve:

$$H = +\infty, h = -\infty;$$

tehát korlátlan változású; értéktartománya pedig a zérus kivételével tartalmazza az összes véges számokat.

Az n dimenziós R_n térben $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \dots, (a_n, b_n)$ nyílt intervallum alatt azon (x_1, x_2, \dots, x_n) pontok halmazát értjük, melyre nézve:

$$a_1 < x_1 < b_1; \dots; a_n < x_n < b_n.$$

Ha az intervallum oly $P(x_1, \dots, x_n)$ pontokból áll, melyekre nézve

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1; \dots; a_n \leq x_n \leq b_n,$$

akkor az intervallumot zártnak mondjuk. Két pontnak, $P(x_1, \dots, x_n)$ és $Q(y_1, \dots, y_n)$ -nak; távolsága alatt értjük a pozitív előjellel vett

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

mennyiséget.

A megjelöltük fogalmak bevezetésével könnyen ki lehet a következő fejezetekben az egy változós függvényekre megállapított tételeket n változós függvényekre is terjeszteni.

25. A limesfüggvény fogalma.

Legyen $f(x)$ értelmezési tartománya az (a, b) intervallum, tehát

$$A = (a, b). \quad 1.$$

Legyen továbbá $\delta_1, \delta_2, \dots$ a pozitív számoknak oly monoton csökkenő sora, melyre nézve

$$\lim \delta_n = 0. \quad 2.$$

Ha már most A egyik pontja x és az $(x - \delta_i, x + \delta_i)^*$ intervallumban a függvény értékészlete oly B_i halmazt

*) A jeleztük intervallum helyett az általánosabb $(x - \delta_i', x - \delta_i'')$ is vehető, $\lim \delta_i' = 0$.

alkot, melynek felső határa H_i , az alsó pedig h_i , akkor világos, hogy

$$h_i \leq f(x) \leq H_i, \quad 3.$$

és H_1, H_2, \dots egy sohasem növekvő, h_1, h_2, \dots pedig egy sohasem csökkenő számsort alkotnak; mindkettőnek van tehát lime, ha ezeket rendre $H(x)$, $h(x)$ -nek nevezzük, akkor világos, hogy

$$h(x) \leq f(x) \leq H(x). \quad I.$$

Az ily módon definiált $H(x)$ és $h(x)$ -et rendre $f(x)$ felső és alsó limesfüggvényének, a $H(x) - h(x)$ függvényt pedig $f(x)$ oszcillációs függvényének nevezzük.

$f(x)$ -et az x helyen folytonosnak mondjuk, ha ezen a helyen az oszcillációs függvény értéke nulla, azaz, ha az I. szerint:

$$h(x) = f(x) = H(x).$$

A limes fogalmából tehát nyilvánvaló, hogy ha $f(x)$ az x helyen folytonos, akkor bármily kicsiny legyen is $\frac{\varepsilon}{2}$, a H_i, h_i számpároknak csak véges számú tagja lehet az

$$\left(f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

intervallumon kívül, ami más szóval azt mondja ki, hogy minden ε -hoz tartozik oly N , melynél nagyobb n -re:

$$H_n - h_n < \varepsilon.$$

Ha tehát x' és x'' az ily n -hez tartozó $(x - \delta_n, x + \delta_n)$ intervallum két tetszőleges eleme, akkor

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

δ_n helyett δ -t mondva, kimondhatjuk a következő tételt:

Ha $f(x)$ az x helyen folytonos, akkor bármily kicsiny pozitív ε -hoz tartozik oly δ , melyre nézve az $(x - \delta, x + \delta)$ bármely két számára x' és x'' -re:

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

vagy, ha x'' helyett az x -t vesszük

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Ha az $(x - \delta_i, x - \delta_{i+1})$, vagy $(x + \delta_{i+1}, x + \delta_i)$ intervallumok valamelyikének x_i egyik eleme, akkor világos, hogy x_1, x_2, \dots oly egészen tetszőleges számsor, melyre nézve:

$$\lim x_n = x.$$

A fentebbi jelöléseinkhez ragaszkodva: x_n tagja $(x - \delta, x + \delta)$ -nak, tehát

$$|f(x) - f(x_n)| < \varepsilon.$$

azaz: Ha $f(x)$ az x helyen folytonos, akkor minden oly x_1, x_2, \dots számsorra, melyre nézve $\lim x_n = x$,

$$\lim f(x_n) = f(x).$$

26. Zárt intervallumokban folytonos függvények.

Az előbbi fejezet jelöléseit megtartva $H_i - h_i$ -t nevezzük $f(x)$ $(x - \delta_i, x + \delta_i)$ intervallumra vonatkozó *oszcillációjának*.

I. Ha az (a, b) zárt intervallumban $f(x)$ minden x helyen folytonos, akkor (a, b) felosztható oly intervallumokra, melyek mindegyikében $f(x)$ oszcillációja kisebb, mint a tetszőleges kicsiny pozitív ε .

Ugyanis ha (a, b) -t n egyenlő részre osztjuk, s az említettük felosztás nem lehetséges, akkor az n részintervallum legalább egyikében a függvény oszcillációja nagyobb mint ε . Ha egy ilyen részintervallum (a_1, b_1) s aztán erre alkalmazzuk ugyanezt az eljárást, akkor eljutunk oly (a_2, b_2) intervallumhoz, mely (a_1, b_1) -nek n -ed része és melyben a függvény oszcillációja nagyobb mint ε . Eljárásunkat tovább folytatva eljutunk az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ intervallumok oly sorához, melyre nézve:

$$\lim a_i = \lim b_i = \alpha,$$

hol α föltétlenül (a, b) eleme, mivel (a, b) zárt, s a melyek mindegyikében, tehát minden (a_i, b_i) -ben a függvény oszcillációja $H_i - h_i$ nagyobb ε -nál, ami azt mondaná ki, hogy föltevésünkkel ellentétben $f(x)$ az α helyen nem folytonos.

Következmények:

1. A zárt (a, b) intervallumban folytonos és véges $f(x)$ korlátos változású. Ugyanis, ha az $a, x_1, \dots, x_{n-1}, b$ pontok az intervallumot oly n részre osztják, melyek mindegyikében a függvény oszcillációja kisebb, mint ε , akkor ha a helyen a függvény értéke $f(a)$:

$$f(a) - \varepsilon < f(x_1) < f(a) + \varepsilon,$$

Éppen így:

$$f(x_1) - \varepsilon < f(x_2) < f(x_1) + \varepsilon,$$

tehát

$$f(a) - 2\varepsilon < f(x_2) < f(a) + 2\varepsilon.$$

Általában:

$$f(a) - i\varepsilon < f(x_i) < f(a) + i\varepsilon.$$

Ha tehát x az (x_{i-1}, x_i) intervallum eleme, akkor

$$f(x_{i-1}) - \varepsilon < f(x) < f(x_{i-1}) + \varepsilon,$$

következően:

$$f(a) - i\varepsilon < f(x) < f(a) + i\varepsilon;$$

ami már tételünket igazolja.

2. Ha $f(x)$ az (a, b) zárt intervallumban folytonos és véges, akkor minden ε -hoz tartozik, oly δ , melyre nézve, ha x' és x'' (a, b) oly két tetszőleges helye, melyekre nézve:

$$|x' - x''| < \delta,$$

akkor

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Ugyanis, ha az $\frac{\varepsilon}{2}$ -hez tartozó részintervallumok legkisebbike sem hosszabb δ -nál, akkor, ha x' és x'' -re nézve:

$$|x' - x''| < \delta,$$

az $|f(x') - f(x'')|$ mindig kisebb mint $\frac{\varepsilon}{2}$, ha x' és x'' ugyanazon intervallum tagjai s kisebb, mint ε , ha szomszédos intervallumok tagjai. Mivel több eset nem lehetséges, tehát tételünk igazolást nyert.

A függvényeknek tételünkben kifejezett tulajdonságát

egyenletes folytonosságnak nevezzük, mely fogalom bevezetésével tételünk így is fogalmazható:

2. A zárt intervallumban folytonos és véges függvény egyenletesen folytonos.

II. Ha $f(x)$ az (a, b) zárt intervallumban folytonos és véges, továbbá $f(a)$ és $f(b)$ ellenkező előjelűek, akkor az (a, b) -ben van legalább egy oly x hely, melyre nézve $f(x) = 0$; az ily helyet a függvény zérushelyének nevezzük.

Ha pl. $f(b)$ pozitív s (a, b) azon pontjainak az alsó határát, melyekben a függvény pozitív x -szel jelöljük, akkor az $(x - \delta, x + \delta)$ intervallumban bármilyen kicsiny is δ , vannak pozitív és negatív függvény értékek, tehát $h(x)$ és $H(x)$ ellentétes előjelűek. Ámde a folytonosság következtében

$$h(x) = f(x) = H(x),$$

ami csak úgy lehet, ha

$$f(x) = 0.$$

Következmény:

3. Az (a, b) zárt intervallumban folytonos és véges $f(x)$ felveszi (a, b) -ben az $[f(a), f(b)]$ számközben levő minden értéket.

Ugyanis ha c egy ilyen érték, akkor $f(a) - c$ és $f(b) - c$ ellentétes előjelűek, tehát van (a, b) -ben oly x hely, melyre nézve:

$$f(x) - c = 0.$$

III. Minden a zárt (a, b) intervallumban folytonos és véges függvény értéktartománya tartalmazza az értéktartomány felső- és alsó határát, H -t és h -t is. Ez a tétel Weierstrass-tól ered.

Ugyanis, ha az I. tétel bizonyítási módszerével konstruáljuk pl. azt az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$ intervallumsort, melyekre nézve

$$\lim a_i = \lim b_i = \alpha,$$

s a melyek mindegyikében a függvény értéktartományának felsőhatára H , akkor a függvény folytonossága következtében

$$h(\alpha) = f(\alpha) = H(\alpha) = H,$$

ami bebizonyítandó volt.

Teljesen azonos gondolatmenettel a $f(P)$ több változós függvényhez is konstruálhatjuk a felső- és alsó limesfüggvényt $H(P)$ -t és $h(P)$ -t; értelmezhetjük a folytonosságot s bizonyíthatjuk be az I. és III. tételt és a II-nak megfelelő következő tételt: *Ha $f(P)$ az $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ zárt intervallumban folytonos, véges s értelmezési tartományának két P_1 és P_2 helyén ellentétes előjelű, akkor minden a P_1 és P_2 -t összekötő s az értelmezési tartományban levő görbén van oly pont, mely a függvénynek zérus helye.*

27. Az összetett függvény fogalma.

Ha az

$$u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m = u_m(x_1, \dots, x_n) \quad 1.$$

függvények közös értelmezési tartománya A , akkor A minden pontjának megfelel az m dimenziós tér egy $Q(u_1, \dots, u_m)$ pontja; ezek a Q pontok az m dimenziós térben egy B ponthalmazt alkotnak. Ha már most az

$$y = f(u_1, \dots, u_m) \quad 2.$$

a B ponthalmazban értelmezve van, akkor azt mondjuk, hogy y az x_1, \dots, x_n változók összetett függvénye és értelmezési tartománya A .

Ha már most A $P(x_1, \dots, x_n)$ pontjában az 1. alatt levő függvények mindegyike folytonos s a B megfelelő $Q(u_1, \dots, u_m)$ pontjában az y is folytonos, akkor minden ε -hoz tartozik oly ε' és minden ε' -hez oly δ , melyekre nézve:

$$|f(u'_1, \dots, u'_m) - f(u_1, \dots, u_m)| < \varepsilon, \quad 3.$$

ha

$$|u_i(x'_1, \dots, x'_n) - u_i(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon', \quad 4.$$

$$(i=1, \dots, m)$$

ha

$$|x'_i - x_i| < \delta. \quad 5.$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

A 3. alatt levő egyenlőtlenség a következő alakba is írható:

$$\lim f(u'_1, \dots, u'_m) = f(\lim u'_1, \dots, \lim u'_m). \quad 6.$$

melynek specziális esetei a 15. §-ban megállapított limes-tételek.

Pl. Ha B két pontját összekötő s B -t át nem lépő görbe egyenletei

$$u_1 = u_1(x), \dots, u_m = u_m(x)^*)$$

s a görbe mentén y u_1, \dots, u_m -nek folytonos s véges függvénye, természetesen az $x = a, y = b$ határpontokat is beleértve, akkor $f(u_1, \dots, u_m)$ az (a, b) zárt intervallumban x folytonos s véges függvénye, miáltal az előbbi fejezet végén közölt tétel nyilvánvalóvá vált.

28. A függvények osztályozása.

Ha a_0, a_1, \dots, a_n adott reális számok s y -t, mint x függvényét az

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad 1.$$

egyenlet definiálja, akkor y -t x *racionális egész függvényének* nevezzük.

Két racionális egész függvény hányadosát *racionális törtfüggvénynek* mondjuk; általános alakjuk tehát

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}. \quad 2.$$

Ha pedig $a_0(x), \dots, a_n(x)$ x racionális egész függvényei s y -t, mint x függvényét az

$$a_0(x) y^n + a_1(x) y^{n-1} + \dots + a_n(x) = 0$$

algebrai egyenlet definiálja, akkor y -t x algebrai függvényének nevezzük és pedig n értékűnek, ha n az a legalacsonyabb fokú racionális függvényű együtthatókkal bíró algebrai egyenletnek a fokszáma, mely definíciójául szolgálhat, vagyis amelynek megoldását képezheti; így a *racionális függvények* egyértékű algebrai függvények.

*) A görbét természetesen olyannak tételezzük, hogy annak mentén $u_i(x)$ -ek x folytonos függvényei legyenek.

A nem algebrai függvényeket *transzcendens* függvényeknek nevezzük. Ilyen az

$$y = e^x$$

függvény, melyet *exponenciális függvénynek* nevezünk. Értelmezési tartománya $A = (-\infty, \infty)$ alulról zárt s felülről nyílt intervallum s értéktartománya $B = (0, \infty)$ alulról zárt s felülről nyílt intervallum. Mivel B minden y helyének is megfelel A -ban egy, de csakis egy x hely, azért x is y egyértékű függvénye, melyet az exponenciális függvény *inverz-függvényének* mondunk, *logaritmus* függvénynek nevezünk s így jelölünk:

$$x = l y,$$

vagy pedig a jelölések megváltoztatásával

$$y = l x. \quad 4.$$

Az

$$y = (\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sec x, \operatorname{csec} x) \quad 5.$$

függvényeket *trigonometriai*, vagy *genioometrikus* függvényeknek nevezzük.

A sinus függvény értelmezési tartománya $A = (-\infty, +\infty)$ nyílt tartomány, értéktartománya pedig a $B = (-1, +1)$ zárt intervallum.

Mivel A

$$\begin{aligned} x + 2k\pi, \pi - x + 2k\pi \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (\alpha)$$

helyeihez B -nek ugyanazon y helye felel meg, azért ha az (α) alatt levő halmazt röviden x -nek nevezzük, akkor A minden x halmazának megfelel B -ben egy, de csakis egy y elem, s ha megfordítva B minden y eleméhez mellérendeljük a megfelelő x halmazt, akkor világos, hogy az x halmaz y függvénye, melyet $\sin x$ inverz-függvényének mondunk, arcussinus y -nak nevezzük s így jelölünk:

$$x = \arcsin y.$$

Az $\arcsin y$ tehát már nem egyértékű függvény, hanem végtelen sokértékű, amennyiben minden y -hoz végtelen sok

elemből álló halmaz tartozik. Ezt a függvényt még így is jelöljük: Az y -nak megfelelő végtelen sok érték közül kiválasztjuk azt, mely a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ zárt intervallumba esik s nevezzük ezt az értéket x_0 -nak, akkor világos, hogy x_0 , azaz:

$$x_0 = \arcsin y$$

y -nak egyértékű függvénye s ha y leírja a $(-1, +1)$ intervallumot akkor x_0 leírja a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumot; ezt az x_0 egyértékű függvényt nevezzük a teljes *arcussinus függvény egy ágának*. Könnyű belátni, hogy az arcussinus függvény többi ága x_0 -tól csak π egész számú többszöröseiben különbözik egymástól, tehát egy tetszőleges ág

$$\begin{aligned} x_0 + k\pi &= \arcsin y, \\ k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Ha $k=1$, akkor a $(-1, 1)$ értelmezési tartománynak megfelelő a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ értékkészlet, melyet a függvény $\frac{\pi}{2}$ -től kezdve rendre felvesz, ha a változó $+1$ -től visszamozog -1 -be; a $k=2$ -nek megfelelő értékkészletet $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ -t pedig $\frac{3\pi}{2}$ -től kezdve akkor futja át, ha a változó -1 -től visszarezeg $+1$ -be stb.

Ha tehát a változó a zérus ponton $(-1, 1)$ elongációjú rezgést végez a függvényérték pedig a rezgésnek megfelelően mindig egy irányba mozog, akkor minden félrezgésben a függvény leírja egy-egy ágát.

Megjegyzem, hogy a függvényág definíciójául alapul vehettük volna az $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumot is.

Hasonló diszkussziókat végezhetünk a többi trigonometriai függvényre is, melyeknek inverz-függvényeit általánosan *ciklometrikus* függvényeknek nevezzük. Jelöléseink módosításával tehát ciklometrikus függvényeink a következők:

$$y = (\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x, \operatorname{arcsec} x, \operatorname{arccsec} x) \text{ VI.}$$

Ha az y -t definiáló egyenlet y -ra már megvan oldva,

akkor y -t x explicit-, különben *implicit* függvényének nevezzük. Az *explicit* függvények általános alakja tehát

$$y = f(x),$$

az *implicit*-eké pedig

$$\varphi(x, y) = 0.$$

29. A függvény folytonosságának megszakadása valamely pontban.

Ha $f(x)$ az $x = a$ helyen többféle határértékhez közeledik, vagy pedig teljesen határozatlan, akkor azt mondjuk, hogy a függvény az $x = a$ helyen *szakadós*, vagy pedig hogy a folytonossága megszakad.

1. Pl. Legyen

$$f(x) = a^{\frac{1}{x-a}}, \quad a > 1.$$

Könnyű meggyőződni, hogy ez a függvény az $x = a$ helyen nem folytonos, azaz: $f(a+h)$ nem közeledik határozott értékhez, ha h -val a zérus felé közeledünk. Legyen ugyanis, $h = \frac{1}{n}$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty,$$

ha pedig $h = -\frac{1}{n}$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = 0,$$

mely egyenleteket röviden így is írhatjuk:

$$\begin{aligned} f(a+0) &= \infty, \\ f(a-0) &= 0, \end{aligned}$$

tehát $f(x)$ -nek az $x = a$ helyen két értéke van, ennél fogva nem folytonos.

2. Pl. Ha pedig

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

akkor mint kimutatjuk $f(x)$ az $x = 0$ helyen minden értéket

felvehet -1 és $+1$ között s így $f(x)$ az $x=0$ helyen teljesen határozatlan. Legyen a oly szám, melyre nézve teljesül az

$$|a| \leq \frac{\pi}{2}$$

feltétel és legyen n egész szám, továbbá

$$x = \frac{1}{2n\pi + a},$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x = 0$$

minden oly a -ra nézve, mely kielégíti a fentebbi egyenlőtlenséget. Ennélfogva

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n\pi + a) = \sin a.$$

Minthogy a -t változtathatjuk $-\frac{\pi}{2}$ -től $+\frac{\pi}{2}$ -ig, ennek megfelelőleg $\sin a$, tehát $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ is, -1 -től $+1$ -ig minden értéket felvehet.

Hasonlóképen találjuk, hogy $\sin x$ az $x = \infty$ helyen, $\cos \frac{1}{x}$ az $x=0$, $\cos x$ pedig az $x = \infty$ helyen vehetnek föl -1 és $+1$ között minden értéket.

30. A függvények ábrázolása.

Ha a függvény értelmezési- és értéktartományának összetartozó pontjainak megfelelő értékeket derékszögű x és y koordinátákkul tekintjük, akkor a két tartomány összes összetartozó helyeinek megfelel a derékszögű koordinátarendszerben egy-egy pont s az ezen pontok meghatározta geometriai helyet, vagy görbét a *függvény geometriai képének*, magát a függvényt definiáló egyenletet pedig a *görbe egyenletének* nevezzük.

1. Pl. az

$$y = a^x$$

függvény geometriai képét *hatványgörbének* nevezzük, a 3. ábrán látható két hatványgörbe az egyik az $a > 1$, a másik

az $a < 1$ esetét tünteti fel, a szerkesztést arra az esetre végeztük, midőn $a = 2$ és midőn $a = \frac{1}{2}$.

2. Pl. az

$$y = \log_a x$$

függvény geometriai képét *logaritmusgörbének* nevezzük. A 4-ik ábrán két logaritmus görbe látható, az egyik az $a > 1$, a másik az $a < 1$ esete számára, a szerkesztést arra esetre végeztük, midőn $a = 2$ és midőn $a = \frac{1}{2}$.

3 Pl. az

$$y = \sin x$$

függvény geometriai képét *sinusgörbének* nevezzük. Ábrázolása következőképen történik: az egységsugarú kört (5. ábra) A_0 ponttól kezdve osszuk fel igen kis részekre, úgy hogy ezeket igen nagy megközelítéssel egyenes vonaldaraboknak tekinthetjük. Legyenek az osztáspontok rendre $A_1, A_2, A_3, \dots, A_8$ s vonjunk ezekből az x tengelyre merőlegeseket s mérjük azután az $A_0 A_1, A_1 A_2, \dots, A_7 A_8$ ívdarabokat sorban egymás mellé koordinátarendszerünk x tengelyére a kezdőponttól számítva (6. ábra) s az így nyert B_1, B_2, \dots, B_8 pontokban emelt merőlegesekre mérjük rá az A_1, A_2, \dots, A_8 pontokhoz tartozó merőlegeseket, ezek végpontjait összekötő görbevonallal lesz a sinusgörbe 0-tól $\frac{\pi}{2}$ -ig terjedő része, ugyanilyen a π -től $\frac{\pi}{2}$ -ig terjedő része. A 6. ábra különben világos képet nyújt a sinusgörbe menetéről.

Hasonlóképen szemléltetik a 7., 8. és 9. ábrák rendre a *tangens*-, *cotangens*- és *secans*görbéket.

A 10., 11. és 12. ábrák pedig rendre az *arcsinus*-, *arcustangens*- és *arcusecans*-görbéket.

Az arcusfüggvényeknél az értelmezési- és értéktartományt az azt a részét, melyben ezeket a függvényeket egyértékűeknek tekintjük az ábrázolásban vastagabb egyenessel, a megfelelő görberészt pedig vastagabb vonallal jelöltük.

4. Pl. Az

$$y = a^{\frac{1}{x-a}}$$

függvényt, ha $a > 1$ és $\alpha = \frac{1}{2}$ a 13. ábra szemlélteti, honnan világosan látható, hogy $x = \alpha$ hely a függvénynek szakadáspontja.

II. EGY VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLHÁNYADOSA.

31. A differenciálhányados fogalma.

Ha az x pontban folytonos $f(x)$ függvényre nézve a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

határérték véges és meghatározott, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ az x pontban *differenciálható* s a felírt határértéket az $f(x)$ függvény *differenciálhányadosának* nevezzük.

BONAVENTURA CAVALIERI (1598—1647) «Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota 1635» című munkálata, ROBERVAL (1602—1675) hasonló szellemű kutatásai, FERMAT-nak (1601—1665) a maximum és minimum (1629) meghatározására, valamint az érintők megszerkesztésére vonatkozó módszere, BARROV-nak (1630—1677) a FERMAT-féle módszer tökéletesítésére vonatkozó kutatásai — úgyszólván — logikai következményként vonták maguk után a *differenciálhányados fogalmának felfedezését*. NEWTON (1642—1727) és LEIBNITZ (1646—1716) egymástól teljesen függetlenül fedezték fel ezt az új fogalmat. Csakhogy míg NEWTON 1665-ben kezdi új módszerét kifejteni s alkalmazni, addig LEIBNITZ csak 1675-ben; de míg LEIBNITZ munkálata «Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus etc.» már 1684-ben megjelenik, addig NEWTON-é «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» csak 1687-ben.

NEWTON a differenciálhányadost a függvény fluxiójának nevezi, később LAGRANGE «Traité des fonctikus analytiques 1797» a függvény leszármazottjának, vagy derivált függvényének mondja és $f'(x)$ -el jelöli.

A differenciálhányados jelölésére kényelmesebb módot használunk. Legyen ugyanis

$$y = f(x);$$

h helyett írjunk Δx -t s nevezzük ezt a változó növekményének, ha ennek megfelelően az y függvény Δy -al növekszik, akkor

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x), \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x). \end{aligned}$$

A differenciálhányadost értelmezi a következő egyenlet:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ha a zérusra való átmenetelt úgy jelöljük, hogy Δ helyett d -t írunk, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

LAGRANGE jelölése értelmében tehát

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

A $\frac{dy}{dx}$ jelzés LEIBNITZ-től ered, s helyette Lagrange jelölése szerint y' -t is használunk.

dx és dy tehát minden határon túl kisebbedő végtelen kicsiny mennyiségek szimbolumai és dx -et a változó-, dy -t pedig a függvény differenciálájának nevezzük, minthogy

$$dy = f'(x) dx,$$

tehát a függvény differenciálája egyenlő a differenciálhányados s a változó differenciálájának szorzatával.

32. Folytonos, de nem differenciálható függvények.

Ha a függvény az x helyen differenciálható, akkor ezen a helyen folytonos is. Ugyanis

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

hol $f'(x)$ véges s meghatározott érték, tehát

$$\lim_{h=0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h=0} f'(x) h = 0,$$

azaz:

$$\lim_{h=0} f(x+h) = f(x),$$

mely egyenlet éppen a függvény folytonosságát mondja ki.

Azonban, ha az $f(x)$ függvény valamely helyen folytonos, ebből még nem következik, hogy ezen a helyen egyúttal differenciálható is.

Pl. Legyen

$$y = f(x) = x \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1},$$

ez a függvény az $x=0$ helyen folytonos s zérussal egyenlő, de azért ezen a helyen még sem differenciálható.

Legyen ugyanis h pozitív szám, akkor

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right]_{x=0} = \lim_{h=0} \frac{e^{\frac{1}{h}} - 1}{e^{\frac{1}{h}} + 1} = 1,$$

és

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \right]_{x=0} = \lim_{h=0} \frac{e^{-\frac{1}{h}} - 1}{e^{-\frac{1}{h}} + 1} = -1.$$

Tehát a

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

határértéknek az $x=0$ helyen két értéke van és pedig

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = 1$$

és

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = -1,$$

ennélfogva függvényünknek az $x=0$ helyen nincs differenciálhányadosa.

Azonban oly függvény is van, mely a folytonosság tartományának egyetlen helyén sem differenciálható. Ilyen az

$$y = f(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} \sin(2ab)^n x \quad \begin{matrix} a > 1 \\ b > 1 \end{matrix}$$

függvény, mert ha $f(x)$ valamely tartományban folytonos, akkor y is az, mindazonáltal $y = f(x)$ folytonossági tartományának egyetlen helyén sem differenciálható, dacára hogy $f(x)$ -nek ezen tartomány minden helyén van differenciálhányadosa, ugyanis:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= f'(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} \frac{\sin(2ab)^n (x + \Delta x) - \sin(2ab)^n x}{\Delta x} \right] \\ &= f'(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} \frac{2 \cos(2ab)^n \frac{2x + \Delta x}{2} \sin(2ab)^n \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right]\end{aligned}$$

Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2a)^n},$$

akkor

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} [2^n \cos(2ab)^n x_1 \sin b^n],$$

$$(x_1 = x + \frac{\Delta x}{2})$$

minthogy $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(2ab)^n x_1)$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin b^n$ a $+1$ és -1 között

minden értéket felvehetnek, azért $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ a $+\infty$ és $-\infty$ kö-

zött minden értéket felvehet.

33. A differenciálhányados folytonosságának megvizsgálása.

Ha $f(x)$ az (a, b) tartományban folytonos és differenciálható, abból még nem következik, hogy a függvény differenciálhányadosa ebben a tartományban szintén folytonos.

Legyen pl.

$$f(x) = x^{n+1} \sin \frac{1}{x^n}, \quad n > 0$$

ez a függvény az $x=0$ helyen folytonos s differenciálható, ugyanis

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^n \sin \frac{1}{(\Delta x)^n} = 0.$$

De mint később látjuk

$$f'(x) = (n+1) x^n \sin \frac{1}{x^n} - n \cos \frac{1}{x^n},$$

ez pedig az $n \sin \frac{1}{x^n}$ tag miatt az $x=0$ helyen nem folytonos, tehát daczára, hogy $f(x)$ -nek az $x=0$ helyen van differenciálhányadosa, mindazonáltal az $f'(x)$ az $x=0$ helyen mégsem folytonos. Tehát a differenciálhányadosnak valamely tartományban való létezése még nem involválja annak folytonosságát.

34. A differenciálhányados geometriai jelentése.

Mielőtt a differenciálhányados geometriai jelentésének megállapításához foglalnánk, előbb megmagyarázzuk, hogy mit értünk azon körülmény alatt, midőn azt mondjuk, hogy valamely görbének P pontjában határozott érintője van.

Ha valamely görbének bármely pontjából magán a görbén bármely pontjába eljuthatunk, akkor a görbét *folytonosnak* nevezzük. Tehát valamely folytonos görbe P pontjához annak tetszőleges Q pontjából eljuthatunk. Az olyan görbét pedig, mely több folytonos görbe összetételéből áll *több ágú görbének* nevezzük. Ennélfogva valamely több ágú görbe P pontjához magán a görbén a görbének csak azon Q pontjaiból juthatunk el, melyek ugyanazon az ágon vannak, mint P .

Ha valamely görbe egyik ágának P pontját összekötjük ugyanezen ág egészen tetszőleges Q pontjával PQ egyenessel s ha PQ egyenes, ha Q ponttal P -hez közeledünk, mindig ugyanazt a határhelyzetet veszi fel, bármiként válasszunk is meg Q -t, akkor azt mondjuk, hogy a görbének P pontjában határozott érintője van és érintőnek azt az egyenest nevezzük, melybe PQ az említett határhelyzetnél jut.

Ha az

$$y = f(x)$$

függvény az (a, b) tartományban folytonos, de azonkívül nem, akkor ezzel az egyenlettel képviseli görbe folytonos; mert bármely P pontjából eljuthatunk annak bármely Q pontjához.

Ellenben ha függvényünk az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a^n, b^n)$ különálló tartományokban folytonos, de ezeken kívül nem, akkor egyenletünk egy n -ágú görbének az egyenlete, mint-hogy egyik tartománynak megfelelő görbéről sem juthatunk el egy más tartománynak megfelelő görbére.

Legyen már most AB (14. ábra) az egyenletünkkel képviselt görbének valamely ága, P legyen ezen ág egy tetszőleges pontja, melynek koordinátái: x, y és egy másik Q pontjának koordinátái legyenek: $x + \Delta x, y + \Delta y$. Ha a P és Q pontokból az x tengelyre vont merőlegesek talppontjait rendre P_1, Q_1 -gyel és P -ből a QQ_1 -re vont merőleges talppontját R -nek nevezzük, akkor

$$PR = \Delta x, QR = \Delta y$$

és ha

$$\angle RPQ = \alpha_1,$$

akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Ha már most Q -val P -hez közeledünk a PQ -nak van határhelyzete, akkor az α_1 szög, melyet PQ az x tengely pozitív felével képez, szintén határozott határértékhez közeledik, nevezzük ezt α -nak, ebben az esetben azután

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Tehát az $y = f(x)$ egyenlettel képviselt görbének $P(x, y)$ pontjában van érintője, ha ezen a helyen a függvénynek van differenciálhányadosa, mely aztán egyenlő azon szög tangensével, melyet ehhez a ponthoz tartozó érintő az x tengely pozitív felével alkot.

Ha tehát valamely pontban $\frac{dy}{dx}$ határozatlan, akkor a görbének ebben a pontjában nincs határozott érintője. Pl. az

$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

görbe keresztül megy az $x = 0, y = 0$ ponton, de ebben a pontban

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x},$$

a mi kimondja, hogy a görbének ebben a pontban nincs érintője.

35. A differenciálhányados mechanikai jelentése.

Ha valamely pont az x tengelyen mozog, akkor annak helyzetét bármely időpontban, t -ben ismerjük, ha tudjuk, hogy t változó tartományának bármely helyéhez az x változó tartományának milyen helye tartozik, azaz: ha tudjuk, hogy x milyen függvénye t -nek. Az x és t között levő kapcsolatot fejezze ki a következő egyenlet:

$$x = \varphi(t),$$

hol φ folytonos és differenciálható függvénye t -nek.

Jelöljük x pontban a mozgó pont sebességét v -vel, ha $t+h$ időben ($h>0$) a mozgó pont x_1 helyen van és feltételezzük, hogy h időintervallumban a sebesség folyton növekedett, akkor erre az intervallumra vonatkozó középsebesség

$$v_1 = \frac{x_1 - x}{h} = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$$

nagyobb, mint v , bármily kicsinynek választjuk is h -t, azaz:

$$v < v_1.$$

Ha a sebesség $t-h$ időtől t -ig szintén folytonosan növekedett s $t-h$ időpontban a mozgó pont x_2 helyen volt, akkor a $(t-h, t)$ intervallumhoz tartozó középsebesség

$$v_2 = \frac{x - x_2}{h} = \frac{\varphi(t) - \varphi(t-h)}{h}$$

kisebb, mint v , bármily kicsinynek választjuk is h -t, tehát

$$v_2 < v < v_1,$$

azaz

$$\frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{-h} < v < \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}, \quad (1)$$

de föltevésünknek fogva

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \varphi'(t),$$

következőleg:

$$v = \varphi'(t),$$

ha pedig a sebesség $t-h$ időtől $t+h$ -ig folytonosan csökken, akkor az (1) egyenlőtlenség helyett a következőt találjuk:

$$\frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{-h} > v > \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}, \quad (2)$$

honnán ismét következik, hogy

$$v = \varphi'(t).$$

Ellenben, ha a sebesség t idő előtt fogyó, t idő után pedig növekvő, vagy megfordítva, akkor az imént kimutatott tételünk-nél fogva, ha a $t-h$ és $t+h$ időpontokhoz tartozó sebességeket rendre v_1 és v_2 -vel jelöljük, akkor

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \varphi'(t-h) \\ v_2 &= \varphi'(t+h) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

bármily kicsinek válaszszuk is h -t, így tehát $t-0$ és $t+0$ időben a sebességek rendre:

$$\begin{aligned} \lim_{h=0} v_1 &= \lim_{h=0} \varphi'(t-h), \\ \lim_{h=0} v_2 &= \lim_{h=0} \varphi'(t+h). \end{aligned}$$

De ha bármely t -re nézve feltételezzük, hogy

$$\lim_{h=0} \varphi'(t-h) = \lim_{h=0} \varphi'(t+h),$$

akkor azt mondjuk, hogy a mozgó pont sebessége az időnek folytonos függvénye, s ebben az esetben a mozgás bármely pillanatában

$$v = \varphi'(t).$$

Ha azonban feltételünk a mozgás nem minden helyén teljesül, akkor oly helyeken, melyekre az (1) és (2) egyenlőtlenség vonatkozik $\varphi'(t)$ szolgáltatja a sebességet, de oly helyeken, melyekre a (3) egyenletek vonatkoznak csak azt tudjuk, hogy

$$\varphi'(t-0) > v < \varphi'(t+0),$$

vagy

$$\varphi'(t-0) < v > \varphi'(t+0),$$

mátrészt pedig, mivel φ függvénynek bármely t helyen van differenciálquocziense, azért a középsebességekre vonatkozó kutatás alapján a jelen esetre nézve:

$$\frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{-h} > v < \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h},$$

vagy

$$\frac{\varphi(t-h) - \varphi(t)}{-h} < v > \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h},$$

azaz:

$$\varphi'(t) > v < \varphi'(t),$$

vagy

$$\varphi'(t) < v > \varphi'(t).$$

Egyenlőtlenségeinkből v nagyságára következtetést nem vonhatunk. Ámde a középsebességek határértékei azt mondják meg, hogy a pont a $(t-0, t)$ és $(t, t+0)$ időközökben megtett utat mily sebességgel tenné meg, ha mozgása egyenletes volna, a jelen esetben mindkét időközre nézve a középsebesség $\varphi'(t)$, tehát a mozgó pont a $(t-0, t+0)$ időintervallumban megtett utat $\varphi'(t)$ sebességgel tenné meg, ha mozgása egyenletes volna és ezt a középsebességet nevezzük a t időponthoz tartozó sebességnek.

Ha tehát az

$$x = \varphi(t)$$

függvény az időnek folytonos és differenciálható függvénye, akkor $\varphi'(t)$ -t nevezzük mindig a mozgó pont sebességének; s ez a definíció tökéletesen fűdi is azt a fogalomkört, melyet közönségesen a sebesség szóhoz fűzünk, ha $\varphi'(t)$ folytonos függvénye t -nek. Ellenben ha $\varphi'(t)$ oly helyen veszti el folytonosságát, melyen a sebesség fogyásból növekedésbe csap át, vagy megfordítva, akkor csak a minden más esetben bekövetkező törvényszerűség analogiája alapján mondottuk ki, hogy $\varphi'(t)$ -t ebben az esetben is a mozgó pont sebességének nevezzük s ezáltal a sebességnek a fogalmát általánosítottuk.

36. Függvény függvényének differenciálhányadosa.

Legyen valamely (U) tartományban

$$y = f(u)$$

u -nak folytonos s differenciálható függvénye, ezenkívül legyen

$$u = \varphi(x)$$

valamely tartományban x -nek folytonos és differenciálható függvénye, ha ezen tartomány azon részét, a melynek bármely x helyéhez tartozó u benne van az (U) tartományban (X) -nek nevezzük, akkor y (X) tartományban x folytonos és differenciálható függvénye. Legyen ugyanis x az (X) tartomány egyik helye a Δx növekménynek feleljenek meg rendre a Δx és Δy függvény növekmények, akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

tehát

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

következésképpen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

vagy

$$y' = \frac{df(u)}{du} u'.$$

37. A konstans differenciálhányadosa.

Ha

$$y = c,$$

hol c x -től független konstans, akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

tehát

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 0, \quad (1)$$

azaz: a konstans differenciálhányadosa zérus.

38. Függvények összegének differenciálhányadosa.

Ha

$$y = u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

hol u_1, u_2, \dots, u_n x -nek valamely közös tartományban folytonos s differenciálható függvényei, akkor ebben a tartományban y is x -nek folytonos s differenciálható függvénye. Legyen

x ennek a tartománynak valamely helye s a Δx növekménynek megfelelő függvény növekmények legyenek rendre: $\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n$; Δy , akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x} + \dots + \frac{\Delta u_n}{\Delta x},$$

következőleg:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{du_n}{dx},$$

vagy

$$y' = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_n, \quad (2)$$

azaz: függvények összegének differenciálhányadosát úgy képezzük, hogy az összeg minden tagjának differenciálhányadosát képezzük s azután ezeket összeadjuk.

39. Szorzat differenciálhányadosa.

Ha u_1 és u_2 valamely tartományban folytonos és differenciálható függvények, akkor ebben a tartományban az

$$y = u_1 u_2$$

függvény is folytonos s differenciálható, ha x ennek a tartománynak valamely helye és $\Delta x, \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta y$ az összetartozó növekmények, akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u_1 + \Delta u_1)(u_2 + \Delta u_2) - u_1 u_2}{\Delta x} = u_1 \frac{\Delta u_2}{\Delta x} + u_2 \frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \Delta u_1 \frac{\Delta u_2}{\Delta x},$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} = u_1 \frac{du_2}{dx} + u_2 \frac{du_1}{dx},$$

vagy

$$y' = u_2 u'_1 + u_1 u'_2 = u_1 u_2 \left(\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} \right). \quad (3)$$

Kimutatjuk, hogy ha ebben a képletben mutatkozó törvényszerűség érvényes $n-1$ tényezőre, akkor n -re is érvényes s ezzel tételünk általános igazolást nyer. Legyen ugyanis

$$U = u_1 u_2 \dots u_{n-1},$$

akkor

$$U' = u_1 u_2 \dots u_{n-1} \left(\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_{n-1}}{u_{n-1}} \right).$$

Továbbá

$$y = Uu_n,$$

akkor

$$y' = Uu_n \left(\frac{U'}{U} + \frac{u'_n}{u_n} \right),$$

de a fentebbiek szerint:

$$Uu_n = u_1 u_2 \dots u_n,$$

$$\frac{U'}{U} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_{n-1}}{u_{n-1}},$$

következőleg, ha

$$y = u_1 u_2 \dots u_n,$$

akkor

$$y' = u_1 u_2 \dots u_n \left(\frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_n}{u_n} \right) \quad (4)$$

Pl. Legyen

$$y = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) = f(x),$$

tehát általánosan:

$$u_i = x - a_i,$$

$$\frac{u'_i}{u_i} = \frac{1}{x - a_i},$$

ennélfogva

$$y' = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \left(\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n} \right),$$

vagy

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - a_1} + \frac{f(x)}{x - a_2} + \dots + \frac{f(x)}{x - a_n}. \quad (5)$$

40. Hányados differenciálhányadosa.

Ha u és v valamely tartományban folytonos s differenciálható függvényei x -nek, akkor ebben a tartományban azon helyek leszámításával, melyek uv^{-1} -nek egy-nél alacsonyabbrendű zérushelyei, az

$$y = \frac{u}{v}$$

függvény szintén folytonos és differenciálható. Ha x a tartománynak egy nem kiviteles helye; Δx , Δu , Δv , Δy pedig az összetartozó növekmények, akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

következőleg:

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \quad (6)$$

Mely képlet világosan kimondja a tört differenciálhányadosának képzési törvényét:

Pl.

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

41. A hatvány differenciálhányadosa.

Ha

$$y = x^n,$$

akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}} x^{n-1}.$$

Legyen

$$\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon,$$

tehát

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

de a 23. §. (VIII) képlete értelmében:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1 + \varepsilon)^n - 1}{\varepsilon} = n,$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}. \quad (7)$$

Ha pedig

$$y = u^n,$$

hol u folytonos és differenciálható függvénye az x -nek, akkor a 29. §. fejtegetései értelmében:

$$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}u'. \quad (8)$$

1. Pl.

$$y = \sqrt{f(x)} = [f(x)]^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}.$$

2. Pl.

$$y = \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1};$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

42. A hatványfüggvény differenciálhányadosa.

Ha

$$y = e^x,$$

akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} e^x;$$

a 23. §. (VI) képletének értelmében:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1,$$

ennélfogva

$$\frac{dy}{dx} = e^x. \quad (9)$$

Ha pedig

$$y = a^x,$$

akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} a^x,$$

ámde a 23. §. (VII) képlete alapján:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a,$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a. \quad (10)$$

Ha u folytonos és differenciálható függvénye x -nek és

$$y = e^u,$$

akkor a 29. §. fejtegetései alapján:

$$\frac{dy}{dx} = e^u u' \quad (11)$$

és ha

$$y = a^u,$$

akkor

$$\frac{dy}{dx} = a^u \cdot u' \cdot la. \quad (12)$$

43. A logaritmusfüggvény differenciálhányadosa.

Ha

$$y = lx,$$

akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{l(x + \Delta x) - lx}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot l \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Legyen a rövidség kedvéért

$$\frac{\Delta x}{x} = \varepsilon,$$

tehát

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

s minthogy a 23. §. (V) képlete értelmében:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{l(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = 1,$$

következőleg:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \quad (13)$$

Ha pedig

$$y = \log_a x,$$

akkor az

$$x = a^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot la} = e^{\frac{\log x}{la} \cdot la} = e^{\log x} = x,$$

egyenlet alapján

$$\log_a x = \frac{1}{la} \cdot lx,$$

következőleg:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{la} \cdot \frac{1}{x}. \quad (14)$$

Ha u valamely tartományban folytonos és differenciálható függvénye x -nek és

$$y = lu$$

függvény szintén, akkor a 29. §. fejtegetései alapján:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}. \quad (15)$$

Végül ha

$$y = \log_a u,$$

akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log a} \frac{u'}{u}. \quad (16)$$

Pl.

$$y = l(ax+b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}.$$

44. A trigonometriai függvények differenciálhányadosa.

Ha

$$y = \sin x,$$

akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

megfontolva, hogy

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1,$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} = \cos x. \quad (17)$$

Ha pedig

$$y = \sin u,$$

hol u folytonos és differenciálható függvénye x -nek, akkor

$$\frac{dy}{dx} = u' \cos u. \quad (18)$$

Ha már most

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

akkor a (18) alapján:

$$\frac{dy}{dx} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x,$$

azaz:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \quad (19)$$

és ha

$$y = \cos u,$$

akkor

$$\frac{dy}{dx} = -u' \sin u. \quad (20)$$

A törtfüggvény differenciálhányadosának képzési törvénye s az imént talált formulák segítségével találjuk, hogy

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{d \frac{\sin x}{\cos x}}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (21)$$

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = \frac{d \frac{\cos x}{\sin x}}{dx} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (22)$$

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{d \frac{1}{\cos x}}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x, \quad (23)$$

$$\frac{d \operatorname{csec} x}{dx} = \frac{d \frac{1}{\sin x}}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{csec} x. \quad (24)$$

Az előbbi fejtegetésekben ismertetett eljárás után találjuk, hogy

$$\frac{d \operatorname{tg} u}{dx} = \frac{u'}{\cos^2 u}. \quad (25)$$

$$\frac{d \operatorname{ctg} u}{dx} = -\frac{u'}{\sin^2 u}. \quad (26)$$

$$\frac{d \sec u}{dx} = u' \operatorname{tg} u \sec u. \quad (27)$$

$$\frac{d \operatorname{csec} u}{dx} = -u' \operatorname{ctg} u \operatorname{csec} u. \quad (28)$$

Pl.

$$\frac{d \sin u}{dx} = u' \frac{\cos u}{\sin u} = u' \operatorname{ctg} u,$$

$$\frac{d \cos u}{dx} = -u' \frac{\sin u}{\cos u} = -u' \operatorname{tg} u,$$

$$\frac{d \operatorname{tg} u}{du} = \frac{u'}{\cos^2 u \operatorname{tg} u} = \frac{2u'}{\sin 2u},$$

$$\frac{d \operatorname{ctg} u}{du} = -\frac{u'}{\sin^2 u \operatorname{ctg} u} = -\frac{2u'}{\sin 2u}.$$

45. Inverz függvények differenciálhányadosa.

A függvények megfordításánál mindig szem előtt tartjuk a 18. §-ban kifejtett elveket, melyek szerint a megfordítást a változónak csak oly tartományára kell érteni, melyben az inverz függvény, mint egyértékű függvény jelenik meg.

Ezen az alapon azután könnyű meggyőződni, hogy ha valamely függvénynek van differenciálhányadosa, akkor inverz-függvényének is van. Legyen ugyanis

$$y = f(x);$$

az inverzfüggvény pedig

$$x = \varphi(y).$$

Ha Δx és Δy az összetartozó növekmények, akkor

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

és

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y},$$

ezen két egyenlet összeszorzásából következik, hogy

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} = 1,$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = f'(x) \cdot \varphi'(y) = 1.$$

Az

$$f'(x) \varphi'(y) = 1 \quad (29)$$

egyenlet alapján tehát, ha valamely függvény differenciálhányadosát ismerjük, akkor inverz függvényének differenciálhányadosát is rögtön felírhatjuk.

Pl.

$$y = e^x$$

inverz függvénye:

$$x = \lg y,$$

tehát

$$(e^x)' (\lg y)' = 1.$$

Ennélfogva, ha tudjuk az egyiknek differenciálhányadosát, akkor a másikat rögtön felírhatjuk. Nevezetesen, ha tudjuk, hogy

$$(e^x)' = e^x = y,$$

akkor egyenletünk alapján:

$$(ly)' = \frac{1}{y}.$$

46. A ciklometrikus függvények differenciálhányadosa.

A ciklometrikus függvények a trigonometriai függvények inverz függvényei. Ha tehát rendre:

$y = \arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arcsec} x$;

akkor megfelelően:

$$x = \sin y, \cos y, \operatorname{tg} y, \operatorname{ctg} y, \sec y, \operatorname{csec} y.$$

Következőleg:

$$(\sin y)' (\arcsin x)' = 1,$$

$$(\cos y)' (\arccos x)' = 1,$$

$$(\operatorname{tg} y)' (\arctg x)' = 1,$$

$$(\operatorname{ctg} y)' (\operatorname{arcctg} x)' = 1,$$

$$(\sec y)' (\operatorname{arcsec} x)' = 1,$$

$$(\operatorname{csec} y)' (\operatorname{arcsec} x)' = 1.$$

Ha már most megfontoljuk, hogy

$$(\sin y)' = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

$$(\cos y)' = -\sin y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2},$$

$$(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2,$$

$$(\operatorname{ctg} y)' = -\frac{1}{\sin^2 y} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 y) = -(1 + x^2),$$

$$(\sec y)' = \sec y \operatorname{tg} y = x \sqrt{x^2 - 1},$$

$$(\operatorname{csec} y)' = -\operatorname{csec} y \operatorname{ctg} y = -x \sqrt{x^2 - 1},$$

akkor fentebbi egyenleteink alapján:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (30)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (31)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (32)$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (33)$$

$$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad (34)$$

$$(\operatorname{arccsec} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}. \quad (35)$$

Ezen egyenleteknek általánosabb alakjai:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (36)$$

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (37)$$

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}, \quad (38)$$

$$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}, \quad (39)$$

$$(\operatorname{arcsec} u)' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}, \quad (40)$$

$$(\operatorname{arccsec} u)' = -\frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}. \quad (41)$$

47. A differenciálhányados tulajdonságai.

I. Ha $y=f(x)$ az x helyen folytonos s a

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

létezik, akkor bármely kicsiny pozitív ε -hoz tartozik oly pozitív δ , melyre nézve:

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \right| < \varepsilon,$$

ha

$$|\Delta x| < \delta.$$

Ennélfogva

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon'. \quad |\varepsilon'| < \varepsilon.$$

Ha tehát, $f'(x)$ nem nulla, akkor ε -t mindig megválaszthatjuk úgy, hogy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ előjele megegyezze $f'(x)$ előjelével, mely tényt szimbolikusan így szoktuk kifejezni:

$$\text{sig.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{sig.} f'(x). \quad \text{I.}$$

Ha $f'(x) > 0$, akkor $f'(x)$ -t az x helyen növekvőnek —, ha pedig $f'(x) < 0$, akkor fogyónak, vagy csökkenőnek mondjuk.

II. Rolle tétele. Ha $f'(x)$ az (a, b) zárt intervallumban folytonos, differenciálható és $f(a) = f(b) = 0$, akkor az (a, b) intervallum belsejében van oly ξ hely, melyre nézve:

$$f'(\xi) = 0. \quad \text{II.}$$

Ugyanis, ha $f(x)$ (a, b) -re vonatkozó értéktartományának felső határa H , az alsó pedig h és

$$H = h = 0. \quad 1.$$

akkor $f(x)$ és így $f'(x)$ is (a, b) minden helyén nulla.

Ha pedig pld. $H = 0$, akkor van (a, b) intervallum belsejében oly ξ hely, melyre nézve:

$$f(\xi) = H. \quad 2.$$

Az ilyen ξ helyen $f'(\xi)$ föltétlenül nulla, mert ha nem volna az, akkor nem lehetne az I. alapján a 2-nek megfelelő hely.

II. *Lagrange tétele.* Ha $f(x)$ az (a, b) zárt intervallumban folytonos és differenciálható, akkor az (a, b) intervallum belsejében van oly ξ hely, melyre nézve:

$$\text{Ugyanis a} \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi). \quad \text{III.}$$

$$\varphi(x) = (b - a)[f(x) - f(a)] - (x - a)[f(b) - f(a)]$$

függvényre alkalmazható a *Rolle-féle tétel*, tehát (a, b) belsejében van oly ξ hely, melyre nézve:

$$\varphi'(\xi) = (b - a)f'(\xi) - [f(b) - f(a)] = 0,$$

mely már a III-t igazolja. Tételünk az $a = x$, $b = x + h$, $\xi = x + \theta h$, $0 < \theta < 1$ esetre a következő alakot ölti:

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h). \quad \text{III'}$$

IV. *Cauchy tétele.* Ha az (a, b) zárt intervallumban folytonos és differenciálható $F(x)$ és $f(x)$ függvényekre nézve:

$$F(b) - F(a) \neq 0,$$

az $F(x), f'(x)$ függvényeknek pedig az (a, b) belsejében nincs közös zérushelyük, akkor van (a, b) -ben oly belső hely ξ , melyre nézve:

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}. \quad \text{IV.}$$

Ugyanis a

$$\varphi(x) = [F(b) - F(a)][f(x) - f(a)] - [f(b) - f(a)][F(x) - F(a)]$$

függvényre alkalmazható a *Rolle-féle tétel*, miért is (a, b) belsejében van oly hely: ξ , melyre nézve:

$$\varphi'(\xi) = [F(b) - F(a)]f'(\xi) - [f(b) - f(a)]F'(\xi) = 0. \quad 3.$$

Föltevéseink értelmében $F'(\xi)$ nem lehet nulla, mert ekkor $f'(\xi)$ is az lenne. Miért is a 3. a IV-et már igazolja.

Ha már most $f(a) = F(b) = 0$ és $b = a + h$, akkor, ha a 4. tételben foglalt föltételek teljesülnek:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad 4.$$

Ha már most az

$$\frac{f(a)}{F(a)} = 0$$

értéke alatt értjük a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{F(a+h)} \quad a+h < \xi < a$$

értékét, akkor a 4. alapján kimondhatjuk a következő tételt:

V. Ha az $(a, a+h)$ zárt intervallumban folytonos és differenciálható $F(x)$ és $f(x)$ -re nézve $F(a) = f(a) = 0$ és $F(a+h)$ az $(a+0, a+h)$ alulról nyílt intervallumban sehol sem nulla, $F(x)$ és $f'(x)$ -nek pedig nincs közös zérus helyük, akkor

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad V.$$

feltéve, hogy a jobboldalon levő limes létezik.

Megjegyzendő, hogy az V. a megjelöltük feltételek mellett, akkor is érvényes, ha $f(a) = F(b) = \infty$; ugyanis ekkor $\frac{1}{f(x)}$ és $\frac{1}{F(x)}$ függvényekre kell alkalmazni az V-et, miáltal újra eljutunk az V-höz.

De ha a tételünkben foglalt feltételek nem teljesülnek, akkor már az V. következtetések vonására nem alkalmas.

Ha pedig $a = \infty$, akkor a $t = \frac{1}{x}$ szubsztitúció alkalmazásával, a $t = 0$ helyre vonatkozó vizsgálat vezet el az V. alatt levő formulához.

1. Pl. Legyen $F(x) = \frac{x^2}{2}$, $f(x) = (a+x)^x - a^x$; következésképpen:

$$F'(x) = x, f'(x) = x(a+x)^{x-1} + (a+x)^x \ln(a+x) - a^x \ln a.$$

Mivel függvényeinkre a $(0, h)$ intervallumban az V. alatt levő föltételek teljesülnek, azért

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{F(h)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{2}{a}.$$

2. Pl. Legyen

$$f(x) = c + x + \sin x \cos x; \quad F(x) = (a + x + \sin x \cos x) e^{\sin x},$$

tehát

$$f'(x) = 2 \cos^2 x, \quad F'(x) = (a + x + 2 \cos x + \sin x \cos x) \cos x e^{\sin x}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)}$$

az $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ zárt intervallum minden elemével egyenlő lehet; ellenben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = 0.$$

Az V. tehát nem alkalmazható s ez természetes, mert a jelen esetben a (b, ∞) intervallumban $f'(x)$ és $F'(x)$ -nak közös nullhelyei vannak.

3. Pl. Legyen

$$f(x) = c + \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}, \quad F(x) = a + \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}.$$

Tehát

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right), \quad F'(x) = -\frac{1}{x^2} \left(1 + \cos \frac{1}{x}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{F(x)} = 1,$$

ellenben

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \frac{1}{2x}$$

határozatlan, tehát az V. nem alkalmazható. A 4. a jelen esetben is minden nullától különböző h -ra érvényes, de az

$x=0$ helyen nem; s ez természetes, mert ezen a helyen függvényeink nem folytonosak.

4. Pl. Legyen

$$f(x) = cx - x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad F(x) = ax + x^2 \sin \frac{1}{x}$$

Tehát

$$f'(x) = c - 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}, \quad F'(x) = a + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{c}{a},$$

ellenben

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

határozatlan. Ugyanis a jelen esetben függvényeink az $x=0$ helyen folytonosak ugyan és differenciálhatók, de a differenciálhányadosok nem folytonosak. Ugyanis pl.

$$f'(0) = c,$$

ellenben

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$$

határozatlan; ezen értékek között természetesen megvan a c is.

Ha pedig $f'(\xi) = f_1(\xi)$, $F'(\xi) = F_1(\xi)$ függvényekre nézve teljesülnek az V.-ben levő feltételek, de

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f_1(\xi)}{F_1(\xi)} = \frac{0}{0},$$

akkor újra alkalmazzuk az V. alatt levő szabályt.

5. Pl. Meghatározandó

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{1 - \sin x} = L$$

Az V. első alkalmazásával:

$$L = \lim_{x=0} \frac{e^x - \cos x e^{\sin x}}{1 - \cos x},$$

második alkalmazásával:

$$L = \lim_{x=0} \frac{e^x + (\sin x - \cos^2 x) e^{\sin x}}{\sin x},$$

harmadik alkalmazásával:

$$L = \lim_{x=0} \frac{e^x + (\cos x + 3 \sin x \cos x - \cos^3 x) e^{\sin x}}{\cos x} = 1.$$

A határozatlan alakok meghatározásának további módszerint a *Taylor-féle sor* tárgyalása után mutatjuk be.

III. TÖBB VÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLÁSA.

48. A parciális differenciálhányados definíciója.

Hogy z az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak valamely T tartományban folytonos és differenciálható függvénye, az alatt azt értjük, hogy bármelyik x_i változóra nézve a

$$\lim_{\Delta x_i = 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i},$$

határérték létezik, melyet a függvény x_i szerinti *parciális differenciálhányadosának* nevezünk, s jelölésére a

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}; \quad \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

szimbolumok bármelyikét használhatjuk.

1. Pl. Legyen

$$z = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2},$$

akkor

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = -\frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = -\frac{x_n}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}}.$$

2. Pl. Ha

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{x_2},$$

akkor

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = -\frac{\frac{x_1}{x_2^2}}{1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2} = -\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

A parciális differenciálhányadosok képzésénél tehát folyton szem előtt tartandó, hogy csak azt a változót tekintjük változónak, mely szerint a differenciálás történik.

49. Parciális és totális differenciále.

Ha a

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

függvények az x_i szerinti parciális differenciálhányadosát megszorozzuk x_i differenciáléjával, a szorzatot a függvény

szerinti parciális differenciálójának nevezzük és így jelöljük

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} dx_i = f'_{x_i} dx_i.$$

A függvény összes parciális differenciálójának az összegét a függvény *totális differenciálójának* nevezzük és dz -vel, vagy df -el jelöljük, tehát

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n,$$

vagy

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Kimutatjuk, hogy a totális differenciále, ha a parciális differenciálhányadosok folytonosak, nem más, mint a következő határérték:

$$df = \lim_{\Delta x_1=0, \dots, \Delta x_n=0} [f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)].$$

Tételünket előbb két változós függvényekre mutatjuk ki. Legyen ugyanis

$$z = f(x_1, x_2),$$

akkor

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2),$$

melyet ily alakban is írhatunk:

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2) + f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2)$$

a 42. §. (II) képlete értelmében:

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2) &= f'_{x_1}(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \Delta x_1, \\ f(x_1, x_2 + \Delta x_2) - f(x_1, x_2) &= f'_{x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 \Delta x_2) \Delta x_2, \end{aligned}$$

hol

$$\theta_1 < 1, \quad \theta_2 < 1,$$

ennélfogva:

$$\Delta z = f'_{x_1}(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) \Delta x_1 + f'_{x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 \Delta x_2) \Delta x_2,$$

tehát

$$dz = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2,$$

vagy

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2.$$

Már most ha

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

akkor

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

vagy

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \\ &+ f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots, x_n + \Delta x_n) \\ &+ \dots \\ &+ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Honnan az előbbi eljáráshoz teljesen hasonló módon nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \Delta z &= f'_{x_1}(x_1 + \theta_1 \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) \Delta x_1 + \\ &+ f'_{x_2}(x_1, x_2 + \theta_2 \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \dots, x_n + \Delta x_n) \Delta x_2 + \dots + \\ &+ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n + \theta_n \Delta x_n) \Delta x_n, \end{aligned}$$

tehát

$$dz = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_n} dx_n,$$

vagy

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n, \quad (\text{I})$$

a mi behizonyítandó volt.

Ha $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c,$

hol c konstans szám, akkor

$$dz = 0,$$

tehát

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (\text{II})$$

1. Pl. Ha

$$z = \arctg \frac{x_1}{x_2},$$

akkor

$$dz = \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

2. Pl. Ha pedig

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0,$$

akkor a (II) alapján 2-vel való osztás után:

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0.$$

50. Impliczit függvények differenciálhányadosa.

Ha y -t, mint x függvényét, az

$$f(x, y) = 0$$

egyenlet definiálja, akkor az előbbi fejezet (II) képlete értelmében:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \quad (1)$$

Általánosan, ha z_1, z_2, \dots, z_n -t, mint x függvényeit a következő n egyenletet definiálja:

$$\varphi_1(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_n(x, z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

akkor a differenciálhányadosok meghatározása végett, az előbbi fejezet (II) egyenlete alapján, képezzük a következő n egyenletet:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dx} + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dx} + \dots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} \frac{dz_n}{dx} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_2} \frac{dz_2}{dx} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n} \frac{dz_n}{dx} = 0.$$

Ha már most a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n} \\ a & a_1 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

determináns utolsó sorához tartozó aldeterminánsokat rendre D, D_1, \dots, D_n -el jelöljük, akkor

$$\frac{dz_1}{dx} = \frac{D_1}{D}, \quad \frac{dz_2}{dx} = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad \frac{dz_n}{dx} = \frac{D_n}{D}.$$

1. Pl. Ha y -t és z -t, mint x -nek függvényeit, a

$$\varphi_1(x, y, z) = 0,$$

$$\varphi_2(x, y, z) = 0$$

egyenletek definiálják, akkor

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0,$$

honnan

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}},$$

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix}} = - \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}}.$$

2. Pl. Ha

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

akkor

$$\frac{x dx'}{a^2} + \frac{y dy}{b^2} = 0,$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

51. Összetett függvények differenciálhányadosa.

Ha z valamely U tartományban az u_1, u_2, \dots, u_n változóknak folytonos és differenciálható függvénye; az u_1, u_2, \dots, u_n pedig valamely X tartományban x változó folytonos és differenciálható függvényei, akkor ha az X értelmezési tartománynak megfelelő értéktartomány összeesik U -val, vagy ebbe beleesik, a z is X tartományban folytonos és differenciálható függvénye x -nek. Ugyanis, ha

$$z = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

akkor az U tartományra nézve helyes a következő egyenlet:

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} du_n, \quad (1)$$

ámde föltevésünknel fogva az X tartomány megfelelő helyén

$$du_i = u'_i dx,$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

tehát

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} u'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} u'_2 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} u'_n. \quad (2)$$

Ha pedig u_1, u_2, \dots, u_n X tartományban x_1, x_2, \dots, x_n -nek folytonos és differenciálható függvényei és X értelmezési tartománynak most is az U értéktartomány felel meg, akkor z X tartományban az x_1, x_2, \dots, x_n -nek folytonos és differenciálható függvénye. Ha tehát z -ben csak az x_i -t tekintjük változónak, akkor (1) egyenletünk baloldala az x_i -re vonatkozó parciális differenciáléval $\frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i$ -vel a jobb oldalon előfor-

$$D \frac{\partial z_i}{\partial x} = D_{1i} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + D_{2i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots + D_{ni} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \quad (7)$$

A (6) és (7) egyenleteket éppen úgy nyerjük az (5)-ből, miként az (1)-ből a (2) és (3)-t.

Pl. Ha

$$z = u_1^{u_2},$$

hol

$$(u_1, u_2) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x)],$$

akkor

$$\frac{dz}{dx} = u_2 u_1^{u_2-1} u_1' + u_1^{u_2} u_2'.$$

52. Összetett függvények totális differenciáléja.

Az előbbi fejezetben láttuk: hogyan kell az akár explicit, akár implicit alakban adott összetett függvények parciális differenciálhányadosait meghatározni, ha ezeket az értékeket helyettesítjük az előttünk már ismeretes

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

egyenletbe, nyerjük z totális differenciáléját.

53. Függvénydeterminánsok.

Ha u_1, u_2, \dots, u_n folytonos és differenciálható függvényei az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak, akkor a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

determináns létezik és JACOBI-féle determinánsnak, vagy függvénydeterminánsnak nevezzük s

$$\frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

szimbolummal jelöljük.

mondja ki, hogy u_1, u_2, \dots, u_m függvények változásai meghatározzák a többi függvény változásait, a mi csak úgy lehetséges, ha ezek u_1, u_2, \dots, u_m -el kifejezhetők, azaz: ha

$$u_{m+1} = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_m),$$

$$u_{m+2} = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_m),$$

$$u_n = \varphi_{n-m}(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

relációk teljesülnek, a mi bebizonyítandó volt.

Ha z_1, z_2, \dots, z_n összetett függvényei x_1, x_2, \dots, x_n -nek és pedig

$$z_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

akkor

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \frac{\partial z_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \frac{\partial z_i}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_k}$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

$$(k=1, 2, \dots, n).$$

A determinánsok szorzási törvénye értelmében tehát

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (1)$$

Ha pedig a z_1, z_2, \dots, z_n implicit függvényeket az

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_n) = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$

egyenletek definiálják, akkor a

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z_2} \frac{\partial z_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial z_n} \frac{\partial z_n}{\partial x_k} = 0$$

reláció alapján:

$$(-1)^n \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)} \cdot \frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

$$\frac{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} = (-1)^n \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} : \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, \dots, z_n; u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0, \\ f_2(z_1, z_2, \dots, z_n; u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(z_1, z_2, \dots, z_n; u_1, u_2, \dots, u_n) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)} = (-1)^n \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)} : \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}.$$

$$\frac{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)} = \frac{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

$$\frac{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} = (-1)^n \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)} \cdot \frac{\partial (u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (z_1, z_2, \dots, z_n)}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \varphi_1, \\ z_2 &= \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ z_3 &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\ . &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ z_n &= \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1} \cos \varphi_n, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)} = (-1)^n \sin^n \varphi_1 \sin^{n-1} \varphi_2 \dots \sin^2 \varphi_{n-1} \sin \varphi_n.$$

2. Pl. Ha

akkor

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

$$dx = \cos \varphi d\rho - \rho \sin \varphi d\varphi,$$

$$dy = \sin \varphi d\rho + \rho \cos \varphi d\varphi,$$

tehát

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

3. Pl. Ha pedig

akkor

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

$$dx = \cos \varphi \sin \theta d\rho - \rho \sin \varphi \sin \theta d\varphi + \rho \cos \varphi \cos \theta d\theta,$$

$$dy = \sin \varphi \sin \theta d\rho + \rho \cos \varphi \sin \theta d\varphi + \rho \sin \varphi \cos \theta d\theta,$$

$$dz = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta,$$

honnan

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \theta.$$

4. Pl. Ha az első egyenletben u helyett x -t és x helyett z -t írunk,

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)} = 1,$$

egyenlethez jutunk, melynek megfelelő alapegyenletek:

$$z_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

és az inverz függvényeket definiáló:

$$x_i = \phi_i(z_1, z_2, \dots, z_n) \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

egyenletek.

IV. MAGASABB RENDŰ DIFFERENCIÁLHÁNYADOSOK.

54. A magasabb rendű differenciálhányadosok definíciója.

Ha az

$$y = f(x)$$

folytonos és differenciálható függvénynek a differenciálhányadosa $f'(x)$ szintén folytonos és differenciálható, akkor differenciálhányadosát *másodrendű differenciálhányadosnak* nevezzük és így jelöljük:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x).$$

Hasonlóképen jutunk a másodrendű differenciálhányados fogalmából a *harmadrendű differenciálhányados* fogalmához, melyet így jelölünk:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x).$$

Ezen módon azután eljutunk általánosan az *r-edrendű differenciálhányados* fogalmához, melyet az előző jelöléseknek megfelelőleg

$$\frac{d^r y}{dx^r} = f^{(r)}(x)$$

szimbolummal jelölünk.

55. Néhány elemibb függvény magasabbrendű differenciálhányadosai.

a) Ismeretes, hogy

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1},$$

tehát

$$\frac{d^2(x^m)}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

általánosan tehát

$$\frac{d^r (x^m)}{dx^r} = m(m-1) \dots (m-r+1) x^{m-r},$$

vagy

$$\frac{d^r (x^m)}{dx^r} = r! \binom{m}{r} x^{m-r}. \quad (1)$$

1. Pl. Ha

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-r} x^{m-r} + \dots + a_{m-1} x + a_m,$$

akkor

$$f^{(r)}(x) = r! \left[a_0 \binom{m}{r} x^{m-r} + a_1 \binom{m-1}{r} x^{m-r-1} + \dots + \binom{r}{r} a_{m-r} \right]$$

2. Pl. Ha

$$f(x) = (ax+b)^m,$$

akkor

$$f'(x) = ma(ax+b)^{m-1},$$

tehát

$$f^{(r)}(x) = r! \binom{m}{r} a^r (ax+b)^{m-r}.$$

β) Láttuk, hogy

$$\frac{d(lx)}{dx} = \frac{1}{x},$$

ámde

$$\frac{d^{r-1}(x^{-1})}{dx^{r-1}} = (r-1)! \binom{-1}{r-1} x^{-r} = (-1)^{r-1} (r-1)! x^{-r},$$

következésképpen:

$$\frac{d^r(lx)}{dx^r} = (-1)^{r-1} (r-1)! x^{-r}. \quad (2)$$

γ) Továbbá

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x,$$

tehát

$$\frac{d^r(e^x)}{dx^r} = e^x. \quad (3)$$

δ) Általánosabban

$$\frac{d(a^x)}{dx} = la \cdot a^x,$$

tehát

$$\frac{d^r(a^x)}{dx^r} = (la)^r a^x. \quad (4)$$

ε) Ismeretes továbbá, hogy

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

tehát

$$\frac{d^2(\sin x)}{dx^2} = \sin \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right),$$

általánosan pedig

$$\frac{d^r(\sin x)}{dx^r} = \sin \left(x + r \frac{\pi}{2} \right). \quad (5)$$

§) Végül, miként láttuk

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

tehát

$$\frac{d^2(\cos x)}{dx^2} = \cos \left(x + 2 \frac{\pi}{2} \right),$$

ennélfogva:

$$\frac{d^r(\cos x)}{dx^r} = \cos \left(x + r \frac{\pi}{2} \right). \quad (6)$$

51. A szorzat magasabbrendű differenciálhányadosai.

Legyen

$$y = uv,$$

akkor miként láttuk, ha u és v valamely tartományban egyidejűleg folytonos és differenciálható függvények:

$$\frac{dy}{dx} = u'v + uv',$$

ha u és v -nek magasabbrendű differenciálhányadosai is vannak az említett tartományban, akkor

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u''v + 2u'v' + uv'',$$

mely kifejezést szimbolikusan, röviden így jelölünk:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (u+v)^{(2)},$$

azzal a megjegyzéssel, hogy $u^{(0)}$ és $v^{(0)}$ alatt magukat a függvényeket u -t és v -t értjük; $u^{(2)}$, $u^{(1)}$ stb. alatt pedig a másod- és elsőrendű differenciálhányadosokat. Hasonlóképen találjuk, hogy

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (u+v)^{(3)}.$$

Általánosan legyen:

$$\frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} = (u+v)^{(r-1)},$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{d^{r-1}y}{dx^{r-1}} &= u^{(r-1)}v + \binom{r-1}{1} u^{(r-2)}v' + \dots + \\ &+ \binom{r-1}{i} u^{(r-i-1)}v^{(i)} + \dots + \binom{r-1}{r-1} uv^{r-1}. \end{aligned}$$

Kimutatjuk, hogy ezen képlet alapján:

$$\frac{d^ry}{dx^r} = (u+v)^{(r)}.$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \frac{d^ry}{dx^r} &= u^{(r)}v + \binom{r-1}{1} u^{(r-1)}v' + \dots + \binom{r-1}{i} u^{(r-i)}v^{(i)} + \dots + \\ &+ u^{(r-1)}v' + \dots + \binom{r-1}{i-1} u^{(r-i)}v^{(i)} + \dots + \\ &+ \binom{r-1}{r-1} uv^{(r)}. \end{aligned}$$

Már most, ha megfontoljuk, hogy

$$\binom{r-1}{i} + \binom{r-1}{i-1} = \binom{r}{i},$$

és hogy

$$\binom{r-1}{r-1} = \binom{r}{r},$$

akkor

$$\frac{d^ry}{dx^r} = u^{(r)}v + \binom{r}{1} u^{(r-1)}v' + \dots + \binom{r}{i} u^{(r-i)}v^{(i)} + \dots + \binom{r}{1} uv^{(r)},$$

mely nem más, mint az a formula, melyet bebizonyítani akarunk, s a melyet felfedezője után LEIBNITZ-féle formulának nevezünk, s a melyet

$$\binom{r}{0} = 1$$

szimbolum számontartásával

$$\frac{d^r y}{dx^r} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} u^{(r-i)} v^{(i)}$$

alakba is írhatunk.

Pl. Miként ismeretes

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ha már most

$$u = (1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad v = (1-x)^{-\frac{1}{2}},$$

akkor

$$\frac{d^{r+1}(\arcsin x)}{dx^{r+1}} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} u^{(r-i)} v^{(i)}.$$

Azonban az előbbi fejezet fejtegetései szerint:

$$\begin{aligned} u^{(r-i)} &= (r-i)! \binom{-\frac{1}{2}}{r-i} (1+x)^{-\frac{1}{2}-r+i} = \\ &= (-1)^{r-i} \frac{1 \cdot 3 \dots (2r-2i-1)}{2^{r-i}} (1+x)^{-\frac{1}{2}-r+i} \\ v^{(i)} &= (-1)^i i! \binom{-\frac{1}{2}}{i} (1-x)^{-\frac{1}{2}-i} = \frac{1 \cdot 3 \dots (2i-1)}{2^i} (1-x)^{-\frac{1}{2}-i}, \end{aligned}$$

következőleg:

$$\begin{aligned} u^{(r-i)} v^{(i)} &= \\ &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2r-1)}{2^r (1+x)^r \sqrt{1-x^2}} \cdot (-1)^{r-i} \frac{1 \cdot 3 \dots 2i-1}{(2r-1)(2r-3) \dots (2r-2i+1)} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^i, \end{aligned}$$

ennélfogva:

$$\begin{aligned} \frac{d^{r+1}(\arcsin x)}{dx^{r+1}} &= \frac{1 \cdot 3 \dots (2r-1)}{2^r (1+x)^r \sqrt{1-x^2}} \left[(-1)^r + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^r (-1)^{r-i} \frac{1 \cdot 3 \dots 2i-1}{(2r-1)(2r-3) \dots (2r-2i+1)} \binom{r}{i} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^i \right]. \end{aligned}$$

57. A hánýados magasabbrendű differenciál-
hánýadosai.

Az

$$y = \frac{u}{v}$$

függvény n -edrendű differenciálhányadosát az

$$yv = u$$

szorzat magasabbrendű differenciálhányadosainak és a determinánsoknak segítségével határozhatjuk meg. Ugyanis

[illegible]

Ha ebben az egyenletrendszerben $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y^{(1)}, y$ -t ismeretleneknek tekintjük, akkor determinánsa

$$D = v^{n+1},$$

tehát

$$y^{(n)} = \frac{1}{v^{n+1}} \begin{vmatrix} u^{(n)} & \binom{n}{1} v^{(1)} & \binom{n}{2} v^{(2)} & \dots & \binom{n}{n-1} v^{(n-1)} & \binom{n}{n} v^{(n)} \\ u^{(n-1)} & v & \binom{n-1}{1} v' & \dots & \binom{n-1}{n-2} v^{(n-2)} & \binom{n-1}{n-1} v^{(n-1)} \\ u^{(n-2)} & 0 & v & \dots & \binom{n-2}{n-3} v^{(n-3)} & \binom{n-2}{n-2} v^{(n-2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u' & 0 & 0 & \dots & v & \binom{1}{1} v' \\ u & 0 & 0 & \dots & 0 & v \end{vmatrix}$$

1. Pl.

$$y' = \frac{1}{v^2} \begin{vmatrix} u' & v' \\ u & v \end{vmatrix}$$

$$y'' = \frac{1}{v^3} \begin{vmatrix} u'' & 2v' & v'' \\ u' & v & v' \\ u & 0 & v \end{vmatrix}$$

$$y''' = \frac{1}{v^4} \begin{vmatrix} u''' & 3v' & 3v'' & v''' \\ u'' & v & 2v' & v'' \\ u' & 0 & v & v' \\ u & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

2. Pl. Ha

$$y = \frac{1}{1+x^2},$$

akkor

$$u=1, \quad v=1+x^2,$$

tehát

$$y^{(n)} = \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2\binom{n}{1}x & 2\binom{n}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & 2\binom{n-1}{1}x & 2\binom{n-1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+x^2 & 2\binom{n-2}{1}x & 2\binom{n-2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1+x^2 & 2x \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

58. Magasabbrendű differenciálhányadosok rekursiv kiszámítása.

A magasabbrendű differenciálhányadosok recursiv kiszámítási módja abban áll, hogy tisztán algebrai műveletek segítségével a magasabbrendű differenciálhányadosokat alacsonyabb rendűekkel fejezzük ki. Azt a képletet, mely ennek a számításnak alapjául szolgál, *rekursivképletnek* nevezzük.

1. Pl. Legyen

$$y = \arcsin x,$$

tehát

$$y' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y'' = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

következően:

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0. \quad (1)$$

A LEIBNITZ-féle formula alkalmazásával:

$$\begin{aligned} \frac{d^n (1-x^2)y''}{dx^n} &= (1-x^2)y^{(n+2)} + \binom{n}{1}(1-x^2)'y^{(n+1)} + \binom{n}{2}(1-x^2)''y^{(n)} \\ &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} + (n-n^2)y^{(n)} \\ \frac{d^n (xy')}{dx^n} &= xy^{(n+1)} + ny^{(n)} \end{aligned}$$

(1) egyenletünk értelmében ennek a két egyenletnek a különbsége zérus, azaz:

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0. \quad (2)$$

Ez az a *rekursivformula*, melynek segítségével a magasabbrendű differenciálhányadosokat alacsonyabb rendűekkel kifejezhetjük, határozzuk meg $y^{(r)}$ -et az $x=0$ helyen, e végből legyen:

$$[y^{(r)}]_{x=0} = a_r;$$

(2) egyenletünk alapján tehát

honnan:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= n^2 a_n, \\ a_n &= (n-2)^2 a_{n-2}, \\ a_{n-2} &= (n-4)^2 a_{n-4}, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-2r+2} &= (n-2r)^2 a_{n-2r}, \end{aligned}$$

tehát

$$a_n = (n-2)^2 (n-4)^2 \dots (n-2r)^2 a_{n-2r},$$

honnan

$$a_{2r+1} = (2r-1)^2 (2r-3)^2 \dots 1^2 a_1,$$

$$a_{2r} = (2r-2)^2 (2r-4)^2 \dots 2^2 \cdot 0^2 a_0 = 0;$$

minthogy a_0 is zérus és a_1 az egységgel egyenlő, azért:

$$\left. \begin{aligned} a_{2r} &= 0, \\ a_{2r+1} &= 1^2 \cdot 3^2 \dots (2r-1)^2 \end{aligned} \right\} \quad (r=0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

2. Pl. Legyen most

$$y = \operatorname{arctg} x,$$

tehát

$$(1+x^2) y' = 1,$$

melyből a LEIBNITZ-féle formula alkalmazásával nyerjük, hogy

$$(1+x^2) y^{(n+1)} + 2nx y^{(n)} + n(n-1) y^{(n-1)} = 0. \quad (4)$$

Ez az a rekursivformula, melyet meg akartunk határozni. Határozzuk meg $y^{(r)}$ -t az $x=0$ helyen, e végből legyen:

$$[y^{(r)}]_{x=0} = t_n,$$

(4) egyenletünk alapján tehát

$$t_{n+1} = -n(n-1) t_{n-1},$$

$$t_{n-1} = -(n-2)(n-3) t_{n-3},$$

$$\vdots$$

$$t_{n-2r+3} = -(n-2r+2)(n-2r+1) t_{n-2r+1},$$

honnan

$$t_{n+1} = (-1)^r \cdot n(n-1)(n-2) \dots (n-2r+1) t_{n-2r+1},$$

tehát

$$t_{2r} = (-1)^r (2r-1)(2r-2) \dots 1 \cdot 0 \cdot t_0,$$

$$t_{2r+1} = (-1)^r 2r(2r-1) \dots 1 t_1,$$

mivel $t_0 = 0$ és $t_1 = 1$, azért

$$\left. \begin{aligned} t_{2r} &= 0, \\ t_{2r+1} &= (-1)^r (2r)! \end{aligned} \right\} \quad (r=0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

3. Pl. Legyen

$$y = \sec x,$$

tehát

$$y \cos x = 1.$$

Honnan

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} y^{(n-i)} \cos \left(x + i \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad (6)$$

mely a magasabbrendű differenciálhányadosok meghatározására szolgáló rekursívformula; határozzuk meg $y^{(r)}$ -t az $x=0$ helyen; e végből legyen

$$[y^{(r)}]_{x=0} = b_r,$$

ha i páros szám, akkor

$$\cos i \frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{i}{2}},$$

ha pedig páratlan, akkor

$$\cos i \frac{\pi}{2} = 0,$$

tehát (6) egyenletünkben csak azok a tagok maradnak meg, melyekben i páros, s így egyenletünk a következő alakot veszi fel:

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{2r}{2i} b_{2r-2i} = 0,$$

vagy

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{2r+1}{2i} b_{2r-2i+1} = 0,$$

a szerint, a mint n páros, vagy páratlan. Egyenleteink kifejtett alakjai:

$$\left. \begin{aligned} b_{2r} - \binom{2r}{2} b_{2r-2} + \binom{2r}{4} b_{2r-4} - \dots + (-1)^r b_0 &= 0 \\ b_{2r+1} - \binom{2r+1}{2} b_{2r-1} + \binom{2r+1}{4} b_{2r-3} - \dots + (-1)^r b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

utóbbi egyenletünk alapján:

$$\begin{aligned} b_{2r+1} &= 0 \\ r &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

az előbbi alapján pedig

$$b_0 = 1, \quad b_2 = 1, \quad b_4 = 5, \quad b_6 = 61, \quad b_8 = 1385, \quad b_{10} = 50521, \dots$$

Ezeket a számokat így is jelölik

$$b_{2r} = E_r$$

s felfedezőjük után EULER-féle számoknak is nevezik.

4. Pl. Legyen végre

$$y = \operatorname{tg} x,$$

tehát

$$y \cos x = \sin x,$$

honnan a rekursívformula:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} y^{(i)} \cos \left(x + i \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right). \quad (8)$$

Legyen már most

$$[y^{(r)}]_{x=0} = \tau_r,$$

akkor megfontolva, hogy

$$\sin n \frac{\pi}{2} = 0,$$

ha n páros, és

$$\sin n \frac{\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

ha n páratlan, (8) egyenletünket következő alakba írhatjuk:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^r (-1)^i \binom{2r}{2i} \tau_{2r-2i} &= 0 \\ \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{2r+1}{2i} \tau_{2r-2i+1} &= (-1)^r. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Az első egyenlet alapján:

$$\tau_{2r} = 0, \\ r=0, 1, 2, \dots$$

a második alapján pedig:

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_3 = 2, \quad \tau_5 = 16, \quad \tau_7 = 272, \quad \tau_9 = 7936, \dots$$

ezeket a számokat így is jelölik :

$$\tau_{2r-1} = T_r$$

s *tangensegyütthatóknak* nevezik, a

$$B_s = \frac{s T_s}{2^{2s-1} (2^{2s} - 1)}$$

számokat pedig BERNOULLI-féle számoknak, így pl.

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66},$$

$$B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}, \dots$$

59. Két változós függvények magasabbrendű differenciálhányadosai.

Az elsőrendű differenciálhányadosok tárgyalásánál láttuk, hogy a

$$z = \varphi(x_1, x_2)$$

folytonos s differenciálható függvényre nézve a

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

elsőrendű parciális differenciálhányadosok léteznek ; s ha ezek is folytonos s differenciálható függvényei a változóknak, akkor azt mondjuk, hogy a függvénynek másodrendű differenciálhányadosai is vannak. $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ -nek parciális differenciálhányadosait így jelöljük :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1},$$

vagy pedig $\varphi''_{x_1 x_1}$, $\varphi''_{x_2 x_1}$ -el. Hasonlóképen a $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ parciális differenciálhányadosainak jelölésére a következő szimbolumokat használjuk :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \varphi''_{x_1 x_2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \varphi''_{x_2 x_2}.$$

Kimutatjuk a következő tételt: ha $\varphi''_{x_1x_2}$ és $\varphi''_{x_2x_1}$ az (x_1, x_2) helyen folytonos függvényei a változóknak, akkor

$$\varphi''_{x_1x_2} = \varphi''_{x_2x_1}$$

Legyen ugyanis

$$\Delta\varphi = \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2),$$

$$\Delta_1\varphi = \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2) - \varphi(x_1, x_2);$$

továbbá

$$\begin{aligned} \Delta_1\Delta\varphi &= \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - \varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2) - \\ &\quad - [\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)], \\ \Delta\Delta_1\varphi &= \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) - \varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2) - \\ &\quad - [\varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2) - \varphi(x_1, x_2)], \end{aligned}$$

tehát

$$\Delta_1\Delta\varphi = \Delta\Delta_1\varphi. \quad (1)$$

Amde a középértéktételnél fogva:

$$\Delta\varphi = \varphi'_{x_1}(x_1 + \theta\Delta x_1, x_2)\Delta x_1,$$

$$\Delta_1\varphi = \varphi'_{x_2}(x_1, x_2 + \theta_1\Delta x_2)\Delta x_2$$

és

$$\Delta_1\Delta\varphi = \varphi''_{x_2x_1}(x_1 + \theta\Delta x_1, x_2 + \theta'\Delta x_2)\Delta x_1\Delta x_2,$$

$$\Delta\Delta_1\varphi = \varphi''_{x_1x_2}(x_1 + \theta_1'\Delta x_1, x_2 + \theta_1\Delta x_2)\Delta x_2\Delta x_1.$$

De a folytonosság föltételénél fogva, az (1) egyenlet alapján:

$$\lim \frac{\Delta_1\Delta\varphi}{\Delta x_2\Delta x_1} = \lim \frac{\Delta\Delta_1\varphi}{\Delta x_1\Delta x_2},$$

azaz:

$$\varphi''_{x_2x_1} = \varphi''_{x_1x_2},$$

a mi bebizonyítandó volt.

Fejtegetéseink alapján kimondhatjuk a következő általánosabb tételt, ha

$$\frac{\partial^{a+\beta}\varphi}{\partial x_1^a \partial x_2^\beta} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^{a+\beta}\varphi}{\partial x_2^\beta \partial x_1^a}$$

$a + \beta$ -rendű differenciálhányadosok léteznek a folytonos függvényei a változóknak, akkor

$$\frac{\partial^{a+\beta}\varphi}{\partial x_1^a \partial x_2^\beta} = \frac{\partial^{a+\beta}\varphi}{\partial x_2^\beta \partial x_1^a}.$$

60. Magasabbrendű totális differenciálék.

Ha a

$$z = \varphi(x_1, x_2)$$

függvény differenciálhányadosai is folytonosak, akkor mint láttuk

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2,$$

melyet szimbolikusan ezután így írunk:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right) \varphi.$$

Már most, ha a másodrendű differenciálhányadosok is folytonosak, akkor

$$\begin{aligned} d^2z &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} dx_2 \right) dx_2 \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} dx_2^2. \end{aligned}$$

Szimbolikus jelölésünk értelmében, tehát

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right)^2 \varphi.$$

Általánosan, ha

$$d^{n-1}z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right)^{(n-1)} \varphi,$$

akkor

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right)^n \varphi.$$

Ugyanis $d^{n-1}z$ bizonyos Φ függvénye x_1, x_2, \dots, x_n -nek, tehát

$$d^n z = d\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right) \Phi;$$

Φ értékének behelyettesítésével

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right)^{n-1} \varphi,$$

azaz :

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 \right)^n \varphi.$$

Azonban tételünket a LEIBNITZ-féle formula bebizonyításánál alkalmazott módszerrel is meg lehet állapítani.

Megjegyzendő, hogy tételeink érvényessége a fejezet eiején mondottak alapján feltételezi a tételek analitikai alakjában előforduló differenciálhányadosok folytonosságát.

61. Több változós függvények magasabbrendű differenciálhányadosai s differenciáléi.

A két változós függvényekre kimutatott tételeket teljesen azonos bizonyítással átruházhatjuk a több változós függvényekre is. Nevezetesen, ha

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak folytonos és differenciálható függvénye és a

$$\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} \varphi}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}}$$

$a_1+a_2+\dots+a_n$ -edrendű differenciálhányadosa létezik és folytonos, akkor a differenciálást bármily sorrendben végezhetjük.

Végül, ha az első-, másod-, \dots , r -edrendű differenciálhányadosok nemcsak léteznek, hanem folytonosak is, akkor a már definiált szimbolikus jelölést használva:

$$\begin{aligned} dz &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) \varphi, \\ d^2 z &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 \varphi, \\ &\dots \dots \dots \\ d^r z &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^r \varphi. \end{aligned}$$

Pl. Legyen

$$z = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n = u^n,$$

akkor

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial z}{\partial x_n} = nu^{n-1},$$

általánosan, ha

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = r,$$

akkor

$$\frac{\partial^r z}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} = r! \binom{n}{r} u^{n-r}.$$

Minthogy az összes r -edrendű differenciálhányadosok egyenlők, azért

$$d^r z = r! \binom{n}{r} (dx_1 + dx_2 + \dots + dx_n)^r u^{n-r}.$$

62. Összetett és implicit függvények magasabbrendű differenciálhányadosai.

Az explicit alakban adott összetett függvények magasabbrendű differenciálhányadosait az összetett függvények differenciálási szabálya szerint többszörös differenciálással nyerjük. Az implicit függvények magasabbrendű differenciálhányadosait úgy határozzuk meg, hogy a függvényt definiáló egyenletet annyszor differenciáljuk, mint a hány különböző rendű differenciálhányadosot akarunk meghatározni, a nyert egyenletrendszernek a differenciálhányadosok szerinti megoldásai szolgáltatják a differenciálhányadosok értékét.

1. Pl. Legyen

$$z = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

hol u_1, u_2, \dots, u_n x oly függvényei, melyekre a már többször hangoztatott folytonossági s differenciálhatósági feltételek teljesülnek, tehát

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{du_n}{dx},$$

honnan

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) \frac{du_1}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \right) \frac{du_n}{dx} \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{d^2 u_n}{dx^2}, \end{aligned}$$

amde

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2 \partial u_1} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_n \partial u_1} \frac{du_n}{dx}, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_n \partial u_2} \frac{du_n}{dx}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \right) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_n} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2 \partial u_n} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_n^2} \frac{du_n}{dx}.\end{aligned}$$

Ha általában

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_k \partial u_i},$$

akkor helyettesítés után:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 z}{dx^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{du_2}{dx} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{du_n}{dx} \right)^2 \varphi \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{d^2 u_n}{dx^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Ha a_1, a_2, \dots, a_n konstans számok és

$$\frac{du_1}{dx} = a_1, \quad \frac{du_2}{dx} = a_2, \dots, \quad \frac{du_n}{dx} = a_n,$$

akkor

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} a_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} a_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} a_n \right)^2 \varphi,$$

általánosan tehát a már ismeretes föltételek mellett:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} a_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} a_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} a_n \right)^2 \varphi. \quad (3)$$

Ha pedig az u_1, u_2, \dots, u_n több változó függvényei, akkor teljesen hasonló szellemben kell képezni a parciális differenciálhányadosokat.

2. Pl. az y -t, mint x függvényét definiálja a következő egyenlet

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Az elsőrendű differenciálhányados meghatározására szolgál a következő egyenlet:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

ha a másodrendű differenciálhányadost is meg akarjuk határozni, akkor ezt az egyenletet még egyszer kell differenciálni, az eredmény rendezett alakban a következő:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

3. Pl. Ha z -t, mint x és y implicit függvényét a következő egyenlet definiálja:

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

akkor az első és másodrendű parciális differenciálhányadosok meghatározására szolgál a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Ha z -t, mint x összetett függvényét a következő egyenlet definiálja:

$$\varphi(\bar{u}_1, u_2, \dots, u_n, z) = 0,$$

akkor az első feladványhoz fűzött fejtegetések értelmében az első s másodrendű differenciálhányadosokat meghatározza a következő két egyenlet:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{du_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{du_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{du_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{\partial x} \right) \varphi = 0 \\ \text{és} \quad &\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{du_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{du_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{du_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{dz}{\partial x} \right)^2 \varphi \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{d^2 z}{dx^2} = 0. \end{aligned}$$

Ha pedig u_1, u_2, \dots, u_n az x és y változók függvényei, akkor z x és y változók összetett implicit függvénye; az első és másodrendű differenciálhányadosok meghatározására szolgál a következő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \varphi = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \varphi = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \varphi \\ & + \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{d^2 z}{dx^2} = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \\ & \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \varphi + \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \varphi \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

63. Hesse-féle determinans.

Jelöljük a

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

függvénynek az x_1, x_2, \dots, x_n szerint képzett differenciálhányadosait rendre f_1, f_2, \dots, f_n -el, akkor a

$$H = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

determinanst HESSE-féle determinansnak nevezzük s ha általánosabban a $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ jelölésére az f_{ik} szimbolumot használjuk akkor

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{12} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Pl. Ha

$$z = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

akkor

$$H = 2^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad a_{12} = a_{21}.$$

Altalánosan, ha

$$z = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + \dots +$$

$$+ 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{2n}x_2x_n + 2a_{3n}x_3x_n + \dots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2,$$

melyet

$$a_{ik} = a_{ki}$$

számontartásával így jelölünk:

$$z = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i x_k.$$

Ugyanis, ha a szummációt először k -ra végezzük, akkor

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i x_k = \sum_{i=1}^n (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n) x_i,$$

ha már most a szummációt i -re végezzük, akkor

[illegible]

mely összeg az egynemű tagoknak $a_{ik} = a_{ki}$ egyenlőség alapján való csoportosításával csakugyan z -t szolgáltatja. Könnyű belátni, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \frac{1}{2}f_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{1}{2}f_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

és

$$\frac{1}{2} f_{ik} = a_{ik},$$

tehát

$$H = 2^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

z -nek az imént definiált különös alakját *quadratikus alaknak*, $H: 2^n$ -t pedig a *quadratikus alak determinánsának* nevezzük.

V. A VÁLTOZÓK TRANSZFORMÁCIÓJA.

64. A független változók transzformációja.

Ha a

$$z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

 n változós függvénybe az

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

szubstitució segítségével a t_1, t_2, \dots, t_n új változókat vezetjük be, akkor z a t_1, t_2, \dots, t_n változóknak összetett függvényévé lesz, tehát a transzformáció csak az összetett függvényekre vonatkozó fejtegetések alkalmazásával megállapított körülmények között lehetséges. S ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor z -nek az új változók szerint vett differenciálhányadosait az összetett függvényekre vonatkozó fejtegetéseink alkalmazásával megállapított törvények szerint határozzuk meg. Így pl.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t_i} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \right) \varphi, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t_k \partial t_i} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \right) \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \right) \varphi + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t_k \partial t_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t_k \partial t_i} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial^2 x_n}{\partial t_k \partial t_i} \end{aligned}$$

Ha pedig már z maga is összetett függvény és pedig

$$z = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

akkor az új változók bevezetésével u_1, u_2, \dots, u_n szintén összetett függvényei lesznek t_1, t_2, \dots, t_n -nek, tehát általánosan:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t_i} = \frac{\partial u_r}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u_r}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u_r}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

s mivel

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial t_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial t_i}$$

azért $\frac{\partial u_1}{\partial t_i}, \frac{\partial u_2}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial u_n}{\partial t_i}$ értékeinek behelyettesítése után:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t_i} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial t_i} \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_2}{\partial t_i} \\ &+ \dots \\ &+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \end{aligned}$$

1. Pl. Ha f_1, f_2, \dots, f_n az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak függvényei, akkor az

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ i=1, 2, \dots, n$$

szubstitució alkalmazásával f_1, f_2, \dots, f_n a t_1, t_2, \dots, t_n változóknak összetett függvényeivé lesznek, tehát a függvény-determinánsok tárgyalása alkalmával megállapított egyik tételünk értelmében:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} \quad (1)$$

Ha pedig az f_1, f_2, \dots, f_n -t, mint x_1, x_2, \dots, x_n összetett függvényeit az

$$f_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n), \\ i=1, 2, \dots, n$$

egyenletek definiálják, akkor az új változók bevezetésével s annak megfontolásával, hogy a jelen esetben

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)},$$

a 48. §. (1) képlete értelmében:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \\ &= \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)}. \end{aligned} \quad (2)$$

2. Pl. Legyen

$$y = f(x),$$

ha már most

$$x = \varphi(t),$$

akkor

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{dy}{dx} \frac{d^2x}{dt^2}. \end{aligned}$$

Általános transzformációnknak egy igen különös esete az, midőn

$$x = \varphi(y),$$

hol $\varphi(y)$ x inverz függvénye, formuláinkban tehát t helyett mindenütt y -t írva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}, \\ 0 &= \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2x}{dy^2}, \end{aligned}$$

mely egyenletekből

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} \\ \frac{d^2x}{dy^2} &= -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ha tehát az

$$y = f(x)$$

egyenlettel definiált függvényt tekintjük független változónak, x -t pedig y függvényének, akkor x -nek y -szerinti első és másod-

rendű differenciálhányadosainak meghatározására a (3) formulák szolgálnak. Azonban az implicit függvény differenciálhányadosainak képzési törvénye szintén ugyanezen formulákhoz vezet. Ugyanis az

$$F(x, y) = f(x) - y = 0$$

egyenlet definiálja x -t, mint y implicit függvényét, akkor az általános differenciálási szabályok értelmében:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dy} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{d^2 x}{dy^2} = 0,$$

mely egyenletek, tekintettel $F(x, y)$ különös alakjára, rendre a következő alakokat veszik fel:

$$-1 + f'(x) \frac{dx}{dy} = 0,$$

$$f''(x) \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + f'(x) \frac{d^2 x}{dy^2} = 0,$$

mely egyenleteknek $\frac{dx}{dy}$ és $\frac{d^2 x}{dy^2}$ szerint vett megoldásai ismét a (3) alatt levő formulákat szolgáltatják. Azt az eljárást, midőn a független változót tekintjük függvénynek s függvényt magát pedig független változónak, a *függő és független változó felcserélésének* nevezzük. Ámde ez az eljárás tökéletesen azonos a függvény megfordításával, tehát ennek a tárgyalásánál megállapított körülményeket mindig figyelembe kell venni.

Így ha

$$y = e^x,$$

akkor

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{e^x}{e^{3x}} = -\frac{1}{y^2},$$

mely egyenletekben a logaritmus függvény differenciálhányadosaira ismerünk.

Ha már most függvénydeterminánsainkban előforduló differenciálhányadosok értékeit a (3) alatt levő egyenletrendszer-

ből behelyettesítjük, nyerjük $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ értékeit kifejezve $\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_n}$ -el. Hasonló szellemben kell a másodrendű differenciálhányadosokat is meghatározni.

1. Pl. Legyen

$$y = f(x)$$

y és x helyett hozzuk be rendre a ρ és φ változókat a következő szubsztitucióformulák segítségével:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

az új függvényünket tehát

$$\rho = F(\varphi)$$

alakú egyenlet fogja jellemezni, melynek alapján x és y φ -nek összetett függvényei, tehát

$$x' = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi - \rho \sin \varphi,$$

$$y' = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \varphi + \rho \cos \varphi;$$

továbbá

$$y' = \frac{dy}{d\varphi} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\varphi},$$

tehát

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}.$$

A másodrendű differenciálhányados meghatározása kedvéért képeznünk kell a következő egyenleteket:

$$x'' = \frac{d^2x}{d\varphi^2} = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} \cos \varphi - 2 \frac{d\rho}{d\varphi} \sin \varphi - \rho \cos \varphi,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{d\varphi^2} = \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} \sin \varphi + 2 \frac{d\rho}{d\varphi} \cos \varphi - \rho \sin \varphi.$$

Ezenkívül

$$y'' = \frac{d^2y}{d\varphi^2} = \frac{d^2y}{dx^2} \left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \frac{dy}{dx} \frac{d^2x}{d\varphi^2}$$

Honnan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3}$$

Igy ha volna

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

akkor

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{x'^2},$$

tehát

$$r = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$$

A szubstitucziók végrehajtása után:

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2.$$

$$x'y'' - y'x'' = 2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho^2,$$

következőleg:

$$r = \frac{\left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2\right]^{\frac{3}{2}}}{2\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 - \rho \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho^2}$$

2. Pl. Legyen

$$z = f(x, y);$$

a z, x, y változók helyett rendre vezessük be a ρ, φ, θ változókat a következő szubstituczióformulák segítségével:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

melyek alapján találjuk, hogy

$$\rho = F(\varphi, \theta),$$

tehát x, y, z összetett függvényei φ és θ -nak, tehát

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cos \varphi \sin \theta - \rho \sin \varphi \sin \theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta + \rho \cos \varphi \sin \theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin \varphi \sin \theta + \rho \cos \varphi \sin \theta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \sin \varphi \sin \theta + \rho \sin \varphi \cos \theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cos \theta,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \cos \theta - \rho \sin \theta.$$

Továbbá

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta},$$

honnan

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (z, y)}{\partial (\varphi, \theta)} : \frac{\partial (x, y)}{\partial (\varphi, \theta)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial (x, z)}{\partial (\varphi, \theta)} : \frac{\partial (x, y)}{\partial (\varphi, \theta)}.$$

A szubstitucziók végrehajtásával:

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (\varphi, \theta)} = -\rho \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \sin^2 \theta - \rho^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial (z, y)}{\partial (\varphi, \theta)} = -\rho \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \cos \varphi \sin^2 \theta + \rho \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial (x, z)}{\partial (\varphi, \theta)} = -\rho \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \rho^2 \sin \varphi \sin^2 \theta - \rho \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \cos \varphi.$$

és

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial (x, y)}{\partial (\varphi, \theta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (z, y)}{\partial (\varphi, \theta)} \right]^2 + \left[\frac{\partial (x, z)}{\partial (\varphi, \theta)} \right]^2 = \\ & = \left[\rho^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 + \rho^4 \right] \sin^2 \theta + \rho^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2. \end{aligned}$$

A $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ differenciálhányadosok meghatározása

$\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi \partial \theta}$, $\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2}$ segítségével még egy differenciálással tel-

jesen hasonló szellemben történik.

VI. A RACZIONÁLIS EGÉSZ FÜGGVÉNYEK SORBAFEJTÉSE.

67. Az egyváltozós raczionális egész függvények sorbafejtése.

Racionális egész függvényünket jellemezze a következő analitikai alak:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \quad (1)$$

Ha x helyett $t+h$ -t írunk, akkor

$f(t+h) = a_0(t+h)^n + a_1(t+h)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(t+h) + a_n$
egyenlethez jutunk, melyet a hatványozási műveletek végrehajtása után h hatványai szerint rendezve következő alakba írhatunk:

$$f(t+h) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)h + \varphi_2(t)h^2 + \dots + \varphi_{n-1}(t)h^{n-1} + \varphi_n(t)h^n,$$

melyből

$$t = a, \quad h = x - a$$

szubsztitució után a következő egyenletet nyerjük:

$$f(x) = \varphi_0(a) + \varphi_1(a)(x-a) + \varphi_2(a)(x-a)^2 + \dots + \varphi_{n-1}(a)(x-a)^{n-1} + \varphi_n(a)(x-a)^n.$$

Honnan az 50. §. fejtegetései alapján:

$$f^{(i)}(x) = i! \left[\binom{i}{i} \varphi_i(a) + \binom{i+1}{i} \varphi_{i+1}(a)(x-a) + \dots + \binom{n}{i} \varphi_n(a)(x-a)^{n-i} \right]$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n.$

Ha már most ebben az egyenletben x helyett a -t írunk, akkor

$$f^{(i)}(a) = i! \varphi_i(a)$$

egyenlethez jutunk, melyből:

$$\varphi_i(a) = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$$

megfontolva már most azt, hogy

$$f^{(0)}(a) = f(a), \quad 0! = 1;$$

következően:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (2)$$

$f(x)$ -nek erre az alakjára azt mondjuk, hogy ez $f(x)$ sorbafejtett alakja az $x = a$ helyen.

Ha (2) egyenletünkben x helyett $x+h$ -t és a helyett x -t írunk, akkor a következő egyenletet nyerjük:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n. \quad (3)$$

Ha pedig a (2) egyenletben a helyett zérust írunk, akkor

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (4)$$

egyenlethez jutunk, mely nem más, mint $f(x)$ sora az $x = 0$ helyen.

Pl. Legyen

tehát

$$f(x) = x^n,$$

$$f^{(i)}(x) = i! \binom{n}{i} x^{n-i}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

következően a (3) egyenlet alapján:

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + \binom{n}{n}h^n,$$

mely az ismeretes binomialis tételt mondja ki.

Suták: A differenciál- és integrálszámítás elmélete.

68. Két változós racionális egész függvények sorbafejtése.

A két változós n -edfokú racionális egész függvények általános alakja a következő:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & a_{00} \\ & + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 \\ & + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 \\ & + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 \\ & \dots \\ & + a_{n0}x_1^n + a_{n-1,1}x_1^{n-1}x_2 + \dots + a_{1n-1}x_1x_2^{n-1} + a_{0n}x_2^n, \end{aligned}$$

mit röviden így jelölünk:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i+k \leq n} a_{ik} x_1^i x_2^k, \quad (1)$$

hol a szummációt ki kell terjeszteni mindazokra a tagokra, melyekre nézve $i+k$ kisebb n -nél, vagy egyenlő n -nel.

Ha már most (1) egyenletünkben x_1 helyett $t_1 + h_1$ -t, x_2 helyett pedig $t_2 + h_2$ -t írunk s a nyert kifejezést h_1 és h_2 hatványai szerint rendezzük, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$f(t_1 + h_1, t_2 + h_2) = \sum_{i+k \leq n} \varphi_{ik}(t_1, t_2) h_1^i h_2^k,$$

melyből a

$$t_1 = a_1, \quad t_2 = a_2; \quad h_1 = x_1 - a_1, \quad h_2 = x_2 - a_2$$

szubsztitúció az

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i+k \leq n} \varphi_{ik}(a_1, a_2) (x_1 - a_1)^i (x_2 - a_2)^k$$

egyenlethez vezet, mely $f(x_1, x_2)$ -nek a sora az $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ helyen. Ha ennek az egyenletnek mindkét oldalát differenciáljuk x_1 szerint i -szer, x_2 szerint pedig k -szor s azután x_1 helyett a_1 -t, x_2 helyett pedig a_2 -t írunk, akkor mindazok a tagok, melyekben a differenciálás után $x_1 - a_1$, vagy $x_2 - a_2$, vagy mindakettő még előfordul, eltűnnek s csak az a tag marad

meg, mely a differenciálás után konstanssá lesz, ilyen tag csak egy van és ez a

$$\varphi_{ik}(a_1, a_2)(x_1 - a_1)^i(x_2 - a_2)^k$$

tag, melynek az említett differenciálhányadosa

$$i!k! \varphi_{ik}(a_1, a_2).$$

Ha már most a rövidség kedvéért

$$\left[\frac{\partial^{i+k} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^i \partial x_2^k} \right]_{x_1=a_1, x_2=a_2} = f_{ik}(a_1, a_2),$$

akkor

$$f_{ik}(a_1, a_2) = i!k! \varphi_{ik}(a_1, a_2),$$

honnan

$$\varphi_{ik}(a_1, a_2) = \frac{f_{ik}(a_1, a_2)}{i!k!}.$$

következőleg:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i+k \leq n} \frac{f_{ik}(a_1, a_2)}{i!k!} (x_1 - a_1)^i (x_2 - a_2)^k. \quad (2)$$

Ha ebben az egyenletben x_1 és x_2 helyett rendre $x_1 + h_1$, $x_2 + h_2$ -t, a_1 és a_2 helyett pedig rendre x_1 -t, és x_2 -t írunk, akkor nyerjük, hogy

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) = \sum \frac{f_{ik}(x_1, x_2)}{i!k!} h_1^i h_2^k. \quad (3)$$

Ha pedig a_1 és a_2 helyett zérust írunk, akkor a

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i+k \leq n} \frac{f_{ik}(0, 0)}{i!k!} x_1^i x_2^k \quad (4)$$

egyenletet nyerjük.

Pl. Legyen

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^n,$$

tehát

$$f_{ik}(x_1, x_2) = r! \binom{n}{r} (x_1 + x_2)^{n-r},$$

hol

$$i + k = r,$$

ennélfogva

$$f_{ik}(0, 0) = 0, \quad \text{ha } r = i + k < n$$

és

$$f_{ik}(0, 0) = n! \binom{n}{n} = n!, \quad \text{ha } r = i + k = n,$$

következőleg a (4) képlet alapján:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{i+k=n} \frac{n!}{i!k!} x_1^i x_2^k,$$

mely a binomiális tételnek egy más alakja.

69. Az n -változós racionális egész függvények sorbafejtése.

Ha $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a változóknak r -edfokú racionális egész függvénye, akkor az előbbi fejezetben alkalmazott jelölés általánosításával függvényünket a következő analitikai alakkal jellemezhetjük:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n \leq r} a_{i_1 i_2 \dots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n},$$

hol a szummációt ki kell mindazon tagokra terjeszteni, melyekre nézve $i_1 + i_2 + \dots + i_n$ kisebb, vagy egyenlő r -rel.

Az előbbi fejezet elementáris eljárása helyett a sorbafejtést a következő módon végezzük. Irjunk mindenek előtt x_1, x_2, \dots, x_n helyett rendre $x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n$ -et, ezáltal

$$f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)$$

t -nek függvényévé lesz, nevezzük ezt a függvényt röviden $\varphi(t)$ -nek, tehát

$$\varphi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n) = f(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

egyenlet alapján $\varphi(t)$ t -nek összetett függvénye s így az összetett függvények differenciálási szabálya értelmében:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \frac{du_n}{dt}.$$

Minthogy

$$\frac{du_i}{dt} = h_i,$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

hol h_i konstans, azért az 57. §. fejtegetései értelmében:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} h_n \right) f, \\ \varphi''(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} h_n \right)^2 f, \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi^{(r)}(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial u_n} h_n \right)^r f.\end{aligned}$$

A magasabbrendű differenciálhányadosok eltűnnek, mint-hogy $\varphi(t)$ r -edfokú, s minthogy

$$(u_i)_{t=0} = x_i,$$

azért általánosan

$$\varphi^{(i)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^i f. \quad (1)$$

Ámde a 62. §. fejtegetései értelmében:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} t + \frac{\varphi''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} t^r,$$

honnan

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!},$$

mivel

$$\varphi(1) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n),$$

azért különös tekintettel az (1) egyenletre:

$$\begin{aligned}f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right) f \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^2 f \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^r f.\end{aligned} \quad (2)$$

Legyen

$$h_1 = y_1, h_2 = y_2, \dots, h_n = y_n$$

és a rövidség kedvéért

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} y_n \right) f = \Delta f,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} y_n \right)^i f = \Delta^i f,$$

akkor

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f + \frac{\Delta f}{1!} + \frac{\Delta^2 f}{2!} + \dots + \frac{\Delta^r f}{r!}. \quad (2')$$

Δf -t az y_1, y_2, \dots, y_n első *polárisának*, azt a műveletet pedig, melylyel kiszámítjuk *poldrozás* műveletének nevezzük. Hasonlóképen nevezzük $\Delta^i f$ -t y_1, y_2, \dots, y_n i -edik *polárisának*.

A polárisok meghatározása szükségessé teszi a binomiális tétel általánosítását. Láttuk ugyanis, hogy

$$(x_1 + x_2)^r = \sum_{i_1 + i_2 = r} \frac{r!}{i_1! i_2!} x_1^{i_1} x_2^{i_2}.$$

Ha tételünk $n-1$ tagra helyes, azaz

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^r = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1} = r} \frac{r!}{i_1! i_2! \dots i_{n-1}!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}},$$

akkor n tagra is helyes, legyen ugyanis

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = u,$$

akkor

$$(u + x_n)^r = \sum_{i + i_n = r} \frac{r!}{i! i_n!} u^i x_n^{i_n},$$

de

$$u^i = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1} = i} \frac{i!}{i_1! i_2! \dots i_{n-1}!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}},$$

ennélfogva

$$\frac{r!}{i! i_n!} u^i x_n^{i_n} = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1} = i} \frac{r!}{i_1! i_2! \dots i_n!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}} x_n^{i_n},$$

következően:

$$(u + x_n)^r = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_n = r} \frac{r!}{i_1! i_2! \dots i_n!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \quad (3)$$

s ezzel tételünket, melyet *polinomiális tételnek* nevezünk, igazoltuk. Ennélfogva

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} y_n \right)^r =$$

$$= \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_n = r} \frac{r!}{i_1! i_2! \dots i_n!} \frac{\partial^{i_1 + i_2 + \dots + i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_n^{i_n},$$

tehát

$$\Delta^r f = \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_n = r} \frac{r!}{i_1! i_2! \dots i_n!} \frac{\partial^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_n^{i_n}. \quad (4)$$

Ezen formula alkalmazásával (2') egyenletünk új alakja:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) =$$

$$= \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq r} \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_n!} \frac{\partial^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_n^{i_n}. \quad (5)$$

Mely egyenlet az előbbi fejezet (3) egyenletének az általánosítottja. Az előbbi fejezet jelöléseinek az alkalmazásával az (5) alapján felírhatjuk a következő egyenleteket:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) =$$

$$= \sum \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{i_1! i_2! \dots i_n!} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_n^{i_n} \quad (6)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \frac{f(0, 0, \dots, 0)}{i_1! i_2! \dots i_n!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \quad (7)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \sum \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{i_1! i_2! \dots i_n!} (x_1 - a_1)^{i_1} (x_2 - a_2)^{i_2} \dots (x_n - a_n)^{i_n}. \quad (8)$$

Ha formuláinkat az előbbi fejezet fejtegetései alkalmával használt módszerrel állapítottuk volna meg, akkor a (7) formula következményeként nyertük volna a *polinomiális tételt*.

70. Alkalmazás a quadratikus alakokra.

Az 58. fejezetben definiált

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

$$a_{ik} = a_{ki}$$

quadratikus alakot jelöljük röviden f_{xx} -el; legyen továbbá

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f_{xx}}{\partial x_1} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial f_{xx}}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial f_{xx}}{\partial x_n} y_n &= f_{xy}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f_{yy}}{\partial y_1} x_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial f_{yy}}{\partial y_2} x_2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial f_{yy}}{\partial y_n} x_n &= f_{yx}; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ezenkívül általánosan legyen

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} y_n \right)^i f_{xx} &= \Delta^i f_{xx}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial y_n} x_n \right)^i f_{yy} &= \Delta^i f_{yy}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Az előbbi fejezet (2) képlete értelmében tehát

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f_{xx} + \Delta f_{xx} + \frac{1}{2!} \Delta^2 f_{xx}, \quad (3)$$

$$f(y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) = f_{yy} + \Delta f_{yy} + \frac{1}{2!} \Delta^2 f_{yy}. \quad (4)$$

Ha a (3) egyenletben x_1, x_2, \dots, x_n változók mindegyike helyett zérust írunk, akkor nyerjük, hogy

$$f_{yy} = \frac{1}{2!} \Delta^2 f_{xx}, \quad (5)$$

ha pedig a (4) egyenletben az y_1, y_2, \dots, y_n változók mindegyike helyett írunk zérust, akkor

$$f_{xx} = \frac{1}{2!} \Delta^2 f_{yy} \quad (6)$$

egyenlethez jutunk; másrésztől

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = f(y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n),$$

azért tekintettel a (3), (4), (5) és (6) egyenletekre

$$\Delta f_{xx} = \Delta f_{yy},$$

ámde

$$\Delta f_{xx} = 2f_{xy}, \quad \Delta f_{yy} = 2f_{yx},$$

azért

$$f_{xy} = f_{yx}. \quad (7)$$

Ha még megfontoljuk, hogy

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \lambda y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda y_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \lambda y_n \right)^i f_{xx} = \lambda^i \Delta^i f_{xx},$$

akkor nyerjük, hogy

$$f(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, \dots, x_n + \lambda y_n) = f_{xx} + 2\lambda f_{xy} + \lambda^2 f_{yy}. \quad (8)$$

Megjegyezzük még, hogy az f_{xy} jelölésnek megfelelően is

$$f_{xx} = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Mielőtt (8) képletünk fontos alkalmazásával foglalkoznánk, előbb definiáljuk, hogy mit értünk *forma definit* és mit *forma indefinit* alatt.

f_{xx} -t forma definit-nek nevezzük, ha az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak csak a $(0, 0, \dots, 0)$ helyén lesz zérussá, tehát értelmezési tartományának minden más helyén zérustól különböző.

Ha pedig f_{xx} értelmezési tartományának több helyén veszi fel a zérusértékét, akkor forma indefinitnek nevezzük.

Alkalmazzuk az f_{xx} -re a következő transzformációt

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \dots + a_{1n}x'_n, \\ x_2 &= a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \dots + a_{2n}x'_n, \\ &\vdots \\ x_n &= a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \dots + a_{nn}x'_n. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Legyen a transzformált alak

$$f'x'x' = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a'_{ik} x'_i x'_k.$$

Ha a szubsztitució determinánsa $\Delta \neq 0$, akkor (9) egyenletrendszerünk x'_1, x'_2, \dots, x'_n szerint megoldható, tehát nemcsak x'_1, x'_2, \dots, x'_n minden értékrendszeréhez tartozik egy, de csakis egy x_1, x_2, \dots, x_n értékrendszer, hanem megfordítva is; tehát f_{xx} különböző zérushelyeinek megfelelnek $f_{x'x'}$ különböző

zérushelyei, s viszont, ha tehát f_{xx} definit volt, akkor $f'_{x'x'}$ is az s megfordítva. Ennélfogva kimondhatjuk a következő tételt:

Ha f_{xx} -t zérustól különböző determinánssal bíró lineáris szubsztituczióval $f'_{x'x'}$ alakba transzformáljuk, akkor f_{xx} és $f'_{x'x'}$ egyszerre definit, vagy indefinit alakok.

Általánosan, ha az f_{xx} , $f'_{x'x'}$, $f''_{x''x''}$, ... alakok egymásból zérustól különböző determinánssal bíró lineáris transzformációval leszámaztathatók, akkor azok egyszerre definit vagy indefinit alakok.

Nevezzük el ezután f_{xx} determinánsát D -nek, legyen továbbá

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

általánosan

$$D^{(i)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-i1} & a_{n-i2} & \dots & a_{n-in-i} \end{vmatrix}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$D^{(n-1)} = a_{11}, \quad D^{(n)} = 1.$$

Jelöljük végül D -nek az a_{ik} -hoz tartozó aldeterminánsát A_{ik} -val, tehát

$$A_{nn} = D'.$$

Alkalmazzuk már most $A_{nn} \neq 0$ föltevés alapján a következő szubsztitucziót:

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + \frac{A_{n1}}{A_{nn}} x'_n, \\ x_2 &= x'_2 + \frac{A_{n2}}{A_{nn}} x'_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_{n-1} &= x'_{n-1} + \frac{A_{nn-1}}{A_{nn}} x'_n, \\ x_n &= 0 + x'_n. \end{aligned}$$

Ha (8) egyenletünkben $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ helyett rendre $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, 0$ -t y_1, y_2, \dots, y_n helyett pedig rendre

$\frac{A_{n1}}{A_{nn}}, \frac{A_{n2}}{A_{nn}}, \dots, \frac{A_{nn-1}}{A_{nn}}$, 1-t, s végül λ helyett x'_n -t írunk, akkor nyerjük a transzformált alakot $f'x'$ -t. A mondott helyettesítés alapján a jelen esetben:

$$f_{xx} = f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} x'_i x'_k,$$

$$f_{yx} = \sum_{i=1}^n (a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \dots + a_{in} y_n) x_i$$

$$= \frac{1}{A_{nn}} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i1} A_{n1} + a_{i2} A_{n2} + \dots + a_{in} A_{nn}) x'_i,$$

de

tehát

$$a_{i1} A_{n1} + a_{i2} A_{n2} + \dots + a_{in} A_{nn} = 0, \quad i \neq n, \quad (10)$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 0,$$

$$f_{yy} = \sum_{i=1}^n (a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \dots + a_{in} y_n) y_i,$$

de a (10) alapján

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \dots + a_{in} y_n = 0, \quad i \neq 0$$

ellenben, ha $i=n$, akkor

$$a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n =$$

$$= \frac{a_{n1} A_{n1} + a_{n2} A_{n2} + \dots + a_{nn} A_{nn}}{A_{nn}} = \frac{D}{A_{nn}} = \frac{D}{D'},$$

tehát

$$f_{yy} = \frac{D}{D'},$$

következőleg a transzformált alak:

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, 0) + \frac{D}{D'} x_n'^2. \quad (11)$$

Ez az alak f_{xx} -el egyszerre definit, vagy indefinit, mert az alkalmazott szubsztituczió determinánsa az egységgel egyenlő.

Az $f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, 0)$ alak determinánsa D' s ha D'' nem null, akkor hasonló eljárással találjuk, hogy

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, 0) = f(x''_1, x''_2, \dots, x''_{n-2}, 0) + \frac{D'}{D''} x_{n-1}''^2.$$

Látható tehát, hogy eljárásunk végeredménye az, hogy f_{xx} -t olyan szubsztituciók segítségével, melyeknek a determinánsa az egység, a következő alakba transzformálhatjuk:

$$\frac{D^{(n-1)}}{D^{(n)}} x_1^{(n)^2} + \frac{D^{(n-2)}}{D^{(n-1)}} x_2^{(n-1)^2} + \dots + \frac{D'}{D''} x_{n-1}''^2 + \frac{D}{D'} x_n'^2,$$

föltéve természetesen, hogy

$$D^{(i)} \neq 0, \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

Ha $x_1^{(n)}, x_2^{(n-1)}, \dots, x_n'$ helyett röviden y_1, y_2, \dots, y_n -t írunk, akkor transzformált alakunk:

$$f_{yy} = \frac{D^{(n-1)}}{D^{(n)}} y_1^2 + \frac{D^{(n-2)}}{D^{(n-1)}} y_2^2 + \dots + \frac{D}{D'} y_n^2, \quad (12)$$

mely az f_{xx} -el egyszerre definit, vagy indefinit.

f_{xx} nem lehet definit, ha determinánsa zérus, mert ekkor f_{xx} a (11)-ik egyenlet alapján

$$f(x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}, 0)$$

alakba transzformálható, melyet az

$$x'_1=0, x'_2=0, \dots, x'_{n-1}=0, x'_n=\lambda$$

értékrendszer zérussá tesz, ennek megfelelően f_{xx} -t zérussá teszi az

$$x_1 = \frac{A_{n1}}{A_{nn}} \lambda, x_2 = \frac{A_{n2}}{A_{nn}} \lambda, \dots, x_{n-1} = \frac{A_{nn-1}}{A_{nn}} \lambda, x_n = \lambda$$

értékrendszer, tehát f_{xx} nem definit, de ha A_{nn} is zérus volna, akkor $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ nem lehetne definit s vele egyuttal f_{xx} sem, mert zérussá tenné az $x_n=0$ és az x_1, x_2, \dots, x_{n-1} -nek $(0, 0, \dots, 0)$ értékektől különböző értékrendszere. Ugyanezen alapon könnyű belátni, hogy D egyetlen egy bármilyrendű átlói aldeterminánsa sem lehet null.

Mert ha pl.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2i} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} = 0$$

akkor az $f(x_1, x_2, \dots, x_i, 0, \dots, 0)$ alak nem lehet definit, tehát vele együtt f_{xx} sem. Tehát, hogy f_{xx} definit lehessen, szükséges hogy a különböző rendű átlói aldeterminánsok egyike se legyen null.

Ha tehát f_{xx} definit, akkor minden esetre a (12) alatt levő alakba transzformálható, de f_{yy} definit csak úgy lehet, ha a

$$\frac{D}{D'}, \frac{D'}{D'}, \dots, \frac{D^{(n-1)}}{D^{(n)}}$$

sorozat minden tagja pozitív, vagy minden tagja negatív, az első esetben alakunkat *pozitív*, a másodikban pedig *negatív* alaknak nevezzük.

Mint hogy $D^{(n)}=1$, azért pozitív alakra nézve

$$D, D', \dots, D^{(n-1)}, 1 \quad (13)$$

sorozat minden tagja pozitív, azaz csupa jelkövetkezés van benne, negatív alakra nézve pedig csupa jelváltás.

Ha tehát a (13) sorozat minden tagja zérustól különböző, akkor lehet hogy f_{xx} definit; mert a szükséges feltételnek egy része teljesül, de ha a sorozatban csupa jelkövetkezés, vagy jelváltás van, akkor f_{yy} s vele együtt f_{xx} is definit, tehát a szükséges feltételek többi részének is, t. i. hogy minden átlói aldeterminánsnak zérustól különbözőnek kell lenni, teljesülni kell. Ennélfogva: hogy f_{xx} *quadratikus alak definit lehessen*, arra nézve a szükséges s elegendő feltétel, hogy a

$$D, D', \dots, D^{(n-1)}, 1$$

sorozat minden tagja zérustól különböző legyen s benne vagy csupa jelkövetkezés vagy csupa jelváltás forduljon elő; az első esetben az alakot *pozitív*nak, a másodikban *negatív*nak nevezzük.

Megjegyzendő még, hogy ha

$$D=0, D'=0, D^{(i-1)}=0, D^{(i)} \neq 0$$

és az $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-i}, 0, \dots, 0)$ alak definit, akkor az f_{xx} alakot *szemidefinit*nek is nevezik.

Pl. Az

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

alak definit, ha

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2, a_{11}, 1$$

sorozat minden tagja zérustól különböző és pedig alakunk pozitív, ha

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, a_{11} > 0,$$

de ekkor a_{22} is nagyobb zérus; ellenben negatív ha

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, a_{11} < 0,$$

de ekkor a_{22} is negatív. Következőleg alakunk pozitív, ha

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, a_{11} > 0, a_{22} > 0;$$

negatív, ha

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, a_{11} < 0, a_{22} < 0.$$

VII. KOMPLEXVÁLTOZÓK FÜGGVÉNYEI.

71. Komplexváltozók.

Jelöljük $\sqrt{-1}$ -t i -vel; a és β pedig jelentsenek valós számokat, akkor az

$$a = a + \beta i$$

számot komplexszámnak nevezzük. A síkban 15. á. a komplexszámnak megfelel az (a, β) pont, melyet a koordináta-rendszerünk kezdőpontjával összekötő ρ hosszúságú egyenest a komplexszám *abszolút értékének*, vagy *modulus-ának*, ρ egyenesnek az x tengely pozitív felével alkotott szögét pedig a komplexszám argumentumának nevezzük.

Tehát

$$\rho = |a + \beta i| = \sqrt{a^2 + \beta^2}$$

és mivel

$$a = \rho \cos \varphi, \quad \beta = \rho \sin \varphi,$$

tehát

$$a + \beta i = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Legyen adva most két komplexszám ú. m.

$$a_1 = a_1 + \beta_1 i,$$

$$a_2 = a_2 + \beta_2 i;$$

jelöljük az összegüket a -val, tehát

$$a = a_1 + a_2 + (\beta_1 + \beta_2)i.$$

Az a_1 , a_2 és a komplexszámoknak (16. ábra) feleljenek meg rendre a P_1 , P_2 , P pontok, akkor kezdőpontunkat O -val jelölvén

$$OP = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2} = |a|,$$

$$OP_1 = \sqrt{a_1^2 + \beta_1^2} = |a_1|,$$

$$P_1P = \sqrt{a_2^2 + \beta_2^2} = |a_2|,$$

Ha O , P , P_1 pontok háromszöget alkotnak, akkor

$$OP < OP_1 + P_1P,$$

ha pedig egy egyenesen vannak, akkor

$$OP \leq OP_1 + P_1P,$$

ennélfogva

$$|a| \leq |a_1| + |a_2|$$

vagy

$$|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|,$$

azaz: az összeg abszolút értéke kisebb, legfeljebb egyenlő az összeadandók abszolút értékeinek összegével.

Másrésről tudjuk, hogy a háromszögben bármelyik oldal nagyobb, mint a másik kettő különbsége, azért fentebbi tételünknek megfelelően:

$$|a_1 + a_2| \geq |a_1| - |a_2|.$$

Ha pedig

$$a_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$a_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

akkor

$$a_1 a_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)],$$

ennélfogva

$$|a_1 a_2| = \rho_1 \rho_2,$$

azaz:

$$|a_1 a_2| = |a_1| |a_2|.$$

Tehát a szorzat modulusa egyenlő a tényezők modulusainak abszolút értékével. Továbbá

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2}.$$

Ha ezt az egyenletet

$$1 = \frac{\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)}{\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2}$$

egyenlettel megszorozzuk, akkor

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

egyenlethez jutunk, mely kimondja, hogy

$$\left| \frac{a_1}{a_2} \right| = \left| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right|.$$

Legyen ezek után a egy állandó, z pedig egy változó komplexszám; vizsgáljuk meg, hol vannak azok a z pontok, melyekre nézve

$$|a - z| < \rho.$$

Ha

$$a = \alpha + \beta i,$$

$$z = x + yi,$$

akkor

$$|a - z| = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2},$$

tehát $|a - z|$ nem más, mint A pontnak Z -től való távolsága, tehát az A pont körül irt ρ sugarú kör kerületén belül fekvő összes Z pontokra nézve

$$|a - z| < \rho.$$

Ha a z szám úgy változik, hogy $|a - z|$ még ε -nál is kisebbé válik bármily kicsiny is ε , akkor azt mondjuk, hogy z határértéke a , mit így jelölünk:

$$\lim z = a.$$

Minthogy

$$a - z = \alpha - x + (\beta - y)i,$$

azért

$$|a - z| \leq |\alpha - x| + |\beta - y|.$$

Ha tehát

$$|\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

akkor

$$|a - z| < \varepsilon,$$

azaz: $\lim z = a$, ha $\lim x = a$ és $\lim y = \beta$. Minthogy így a komplexszám határértékét valós számok határértékére vezettük vissza, azért a 7. fejezetben kifejtett tételek alapján:

$$\lim (z_1 \pm z_2) = \lim z_1 \pm \lim z_2,$$

$$\lim (z_1 z_2) = \lim z_1 \lim z_2,$$

$$\lim \frac{z_1}{z_2} = \frac{\lim z_1}{\lim z_2}.$$

72. Szinektikus függvények.

Ha z változó tartományának minden helyéhez tartozik az u tartományának egy vagy több helye, akkor u -t z függvényének mondjuk, tehát a már használt jelölés szerint

$$u = f(z),$$

u értelmezési tartományát z azon értékei képezik, melyekhez határozott u értékek tartoznak, és ezek alkotják u értéktartományát; ha az értelmezési tartomány egy helyének az értéktartománynak csak egy helye felel meg, akkor a függvényt egyértékűnek, *monodom*-nak nevezzük.

Ha pedig az értelmezési tartomány valamely helyén a

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

határérték véges és határozott, akkor CAUCHY-val a függvényt ezen a helyen *monogen*-nak nevezzük.

Ha $f(z)$ valamely tartományban egyidejűleg folytonos, véges, monodrom és monogen, akkor CAUCHY-val *szinektikus*-nak nevezzük. Ujabban BRIOT és BOUQUET után a *szinektikus* függvényeket *holomorph* függvényeknek, RIEMANN után egyszerűen *függvények*-nek, MÉRAY után *olotrop* függvényeknek, WEIERSTRASS után pedig *analitikai függvények*-nek is nevezik. Mi CAUCHY elnevezését tartjuk meg, miután semmi okunk sincs terminológiájának elvetésére.

A többértékű függvények egyes ágai a nekik megfelelő tartományban, mint szinektikus függvények tárgyalhatók. Azért midőn szinektikus függvényekről beszélünk, akkor nem mindig azt értjük, mintha a függvény egész értelmezési tartományában

szinektikus volna, hanem azt, hogy az értelmezési tartományának valamely részében szinektikus függvény módjára viselkedik s vizsgálódásunkat a tartománynak csak erre a részére terjesztjük ki.

Értelmezésünk szerint tehát $u=f(z)$ valamely tartományban monogén függvény, ha a tartomány minden helyén

$$\frac{du}{dz} = f'(z)$$

differentiálhányados létezik. Ha függvényünk analitikai alakjában z helyett $x+iy$ -t írunk, akkor $f(z)$, mint x és y -nak összetett függvénye, a valós és képzetes részek elválasztása után ily alakban jelenik meg:

$$f(x+iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Minthogy

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{df}{dz},$$

azért

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$i \frac{df}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

ebből a két egyenletből pedig következik, hogy

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (I)$$

Ennélfogva, ha $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ az $x+iy$ -nak monogen függvénye, akkor az (I) alatt levő relációk teljesülnek.

Az (I) egyenletekből differenciálással még a következőket származtathatjuk le:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}; \quad (a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (\beta)$$

Ha

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x},$$

akkor az (a) és (β) egyenletek alapján:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

Ha tehát $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ monogen függvénye a $z = x + iy$ -nak, továbbá φ és ψ másodrendű differenciálhányadosai is léteznek és folytonosak, akkor a (II) alatt levő egyenletek is teljesülnek.

73. Monogen függvények összege, szorzata és hányadosa.

Ha v_1 és v_2 z -nek monogen függvényei, akkor értelmezési tartományuk közös részében $v_1 + v_2$, $v_1 v_2$ szintén monogen függvényei z -nek; ellenben $\frac{v_1}{v_2}$ hányados a közös értelmezési tartománynak minden helyén monogen, kivéve azokat, melyek $v_1 v_2^{-1}$ -nek egynél alacsonyabbrendű zérushelyei.

Ha ezek a körülmények teljesülnek, akkor a 31., 32. és 33-ik fejezetek fejtegetései alapján kimondhatjuk, hogy

$$\frac{d(v_1 + v_2)}{dz} = v'_1 + v'_2, \quad (1)$$

$$\frac{d(v_1 v_2)}{dz} = v'_1 v_2 + v_1 v'_2. \quad (2)$$

$$\frac{d \frac{v_1}{v_2}}{dz} = \frac{v'_1 v_2 - v_1 v'_2}{v_2^2}. \quad (3)$$

Altalában, ha v_1, v_2, \dots, v_n értelmezési tartományuk közös részében monogen függvények, akkor $v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ szorzat is az, tehát

$$\frac{d(v_1 v_2 \dots v_n)}{dz} = v_1 v_2 \dots v_n \left(\frac{v'_1}{v_1} + \frac{v'_2}{v_2} + \dots + \frac{v'_n}{v_n} \right). \quad (4)$$

Ha

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n = v,$$

akkor a (4) alapján:

$$\frac{dv^n}{dz} = nv^{n-1}v'. \quad (5)$$

Pl. $v = z$ monogen függvénye z -nek, s mivel

$$v' = 1,$$

azért

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}. \quad (6)$$

Ha a_0, a_1, \dots, a_n konstans számok, akkor, ha n pozitív egész szám

$$f(z) = c_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

szintén monogen függvénye z -nek, tehát

$$f'(z) = na_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1},$$

honnan látható, hogy $f'(z)$ szintén monogen, éppen így monogenek a magasabbrendű differenciálhányadosok is, következőleg:

$$f^{(r)}(z) = r! \left[\binom{n}{r} a_0 z^{n-r} + \binom{n-1}{r} a_1 z^{n-r-1} + \dots + \binom{r}{r} a_{n-r} \right].$$

Ennélfogva a 62. fejezet fejtegetései szerint:

$$f(z+h) = f(z) + \frac{f'(z)}{1!} h + \frac{f''(z)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!} h^n.$$

74. Az algebra alaptétele.

Az előbbi fejezetben láttuk, hogy az

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

raczionális egész függvény z -nek monogen függvénye, de mint könnyen belátható egyúttal szinektikus függvény is.

A 65. fejezet fejtegetései értelmében:

$$|f(z)| \geq |a_0 z^n| - |a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n|$$

és

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| \leq |a_1 z^{n-1}| + \dots + |a_{n-1} z| + |a_n|,$$

azért még inkább helyes a következő egyenlőtlenség:

azaz : $|f(z)| \geq |a_0 z^n| - |a_1 z^{n-1}| - \dots - |a_{n-1} z| - |a_n|,$

$$|f(z)| \geq |z|^n \left(|a_0| - \frac{|a_1|}{|z|} - \frac{|a_2|}{|z|^2} - \dots - \frac{|a_n|}{|z|^n} \right).$$

Ha

$$|z| > 1,$$

akkor

$$|f(z)| > |z| \left(|a_0| - \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|}{|z|} \right),$$

honnan

$$|f(z)| > |a_0| |z| - (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|).$$

Ez az egyenlőtlenség, minden oly z -re helyes, melyre nézve :

$$|z| > 1.$$

Ha tehát ε oly pozitív szám, melyre nézve :

$$\frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \varepsilon}{|a_0|} = r > 1,$$

akkor, mihelyt

$$\left. \begin{array}{l} |z| \geq r, \\ |f(z)| > \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (\text{I.})$$

De azok a z helyek, melyekre nézve

$$|z| \geq r,$$

a koordinátarendszerünk kezdőpontja körül r sugarral írt kör területén, vagy kívül vannak. Az (I) egyenlet értelmében tehát az r sugarú körön és kívül nincs oly hely, mely az $f(z)$ függvénynek zérus helye lenne, tehát $f(z)$ zérus helyeit az r sugarú körben kell keresni.

Ha már most a az r sugarú kör belsejének oly pontja, mely $f(z)$ -nek nem zérus helye s ε -t a fentebbi feltételnek megfelelően már eleve úgy választjuk, hogy az $|f(a)| \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség is teljesüljön, akkor könnyű igazolni, hogy az r sugarú kör belsejében van oly $a+h$ hely melyre nézve :

$$|f(a+h)| < |f(a)|.$$

Láttuk ugyanis, hogy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n,$$

ha

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(i-1)}(a) = 0,$$

akkor

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 + \frac{f^{(1)}(a)}{f(a)} \frac{h^1}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{f(a)} \frac{h^n}{n!},$$

melyet rövidebben így írunk:

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 + a_1 h^1 + a_{i+k} h^{i+1} + \dots + a_n h^n.$$

Válaszszuk h -t úgy, hogy ha t alatt pozitív számot értünk, legyen

$$a_i h^i = -t^i,$$

honnan

$$h = t \sqrt[i]{-\frac{1}{a_i}}.$$

Ezen szubstituczió végrehajtása után, megfontolva azt, hogy

$$a_{i+1} h^{i+1} + \dots + a_n h^n = t^i \varphi(t),$$

hol $\varphi(t)$ oly függvénye t -nek, melyre nézve:

$$\lim_{t=0} |\varphi(t)| = 0,$$

nyerjük a következő egyenletet:

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 - t^i + t^i \varphi(t)$$

$$\left| \frac{f(a+h)}{f(a)} \right| \leq |1 - t^i| + t^i |\varphi(t)|.$$

Ha t -t az egységnél kisebbnek, de oly módon választjuk, hogy legyen

$$|\varphi(t)| < 1,$$

akkor

$$|1 - t^i| + t^i |\varphi(t)| < 1,$$

ennélfogva

$$\left| \frac{f(a+h)}{f(a)} \right| < 1,$$

azaz:

$$|f(a+h)| < |f(a)|.$$

Ha már most $a + h$ helyett röviden a_1 -t írunk, akkor ki-
mondhatjuk a következő tételt: *Ha a az r sugarú kör oly
helye, mely $f(z)$ -nek nem nullpontja, akkor mindig van ugyan-
abban a tartományban oly a_1 hely, melyre nézve:*

$$|f(a)| > |f(a_1)|.$$

Hogy a_1 hely az r sugarú körön belül van, az kitűnik abból, hogy a kör területén és kívül bármely z helyre nézve:

$$|f(z)| > \varepsilon > |f(a)|.$$

Ha $z = x + iy$, akkor $|f(z)|$ x, y -nak valós és folytonos függvénye lévén, a $|z| \leq r$ zárt tartományban kell legalább egy oly z helynek lennie, mely helyen $|f(z)|$ felveszi a $|z| \leq r$ tartományra vonatkozó értékkészletének alsó határát. (23. § III. tétel). Minthogy ily z helyen $|f(z)| < |f(a)|$ azért $|z| < r$, következőleg $f(z) = 0$, mert különben $|f(z)|$ fentebbi tételünk értelmében nem lehetne az értékkészlet alsó határa.

Ennélfogva kimondhatjuk a következő fontos tételt:

Ha $f(z)$ raczionális egész függvénye z -nek, akkor értelmezési tartományának van oly a helye, melyre nézve:

$$f(a) = 0.$$

Ezt a tételt az algebra alaptételének nevezzük.

75. Következtetések az algebra alaptételéből.

Mint láttuk, helyes a következő egyenlet:

$$f(z) = f(a_1) + \frac{f'(a_1)}{1!} (z-a_1) + \dots + \frac{f^{(n)}(a_1)}{n!} (z-a_1)^n.$$

Ha a_1 az $f(z)$ -nek zérus helye, tehát

$$f(a_1) = 0,$$

akkor

akkor

$$f(z) = (z-a_1) \left[f'(a_1) + \frac{f''(a_1)}{2!} (z-a_1) + \dots + \frac{f^{(n)}(a_1)}{n!} (z-a_1)^{n-1} \right]$$

$z-a_1$ együttthatója $n-1$ -edfokú egész függvény, melyben z^{n-1} -nek az együttthatója

$$\frac{f^{(n)}(a_1)}{n!} = a_0;$$

jelöljük ezt a függvényt $f_1(z)$ -vel, akkor

$$f(z) = (z-a_1) f_1(z),$$

ha $f_1(z)$ egyik nullhelye a_2 , akkor a most bemutatott tételnél fogva:

$$f_1(z) = (z-a_2) f_2(z),$$

hol $f_2(z)$ $n-2$ -ed fokú és z^{n-2} együttthatója a_0 , hasonlóképen jutunk a következő sorozathoz:

$$f_2(z) = (z-a_3) f_3(z),$$

$$\dots$$

$$f_{n-1}(z) = (z-a_n) f_n(z),$$

hol $f_n(z)$ zérusfokú függvény és z^0 együttthatója a_0 , tehát

$$f_n(z) = a_0.$$

Következőleg:

$$f(z) = a_0 (z-a_1) (z-a_2) \dots (z-a_n). \quad (\text{I})$$

Tehát $f(z)$ n -edfokú racionális függvénynek n gyöke van s előállítható, mint az n gyöktényezőnek s a legmagasabb kitevőjű változó együttthatójának a szorzata.

Differenciálási szabályunk értelmében tehát (32. §.)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{z-a_2} + \dots + \frac{1}{z-a_n}. \quad (\text{II})$$

Ha a gyökök között a_1 i_1 -szer, a_2 i_2 -szer, \dots , a_k i_k -kor fordul elő és

$$i_1 + i_2 + \dots + i_k = n,$$

akkor

$$f(z) = a_0 (z-a_1)^{i_1} (z-a_2)^{i_2} + \dots + (z-a_k)^{i_k}. \quad (\text{III})$$

Ebben az esetben azután

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{i_1}{z-a_1} + \frac{i_2}{z-a_2} + \dots + \frac{i_k}{z-a_k}. \quad (\text{IV})$$

Lássuk ezek után mi a föltétel arra nézve, hogy $z=a$ m -szeres gyök legyen. Erre nézve szükséges, hogy $f(z)$ osztható legyen $(z-a)^m$ -el. Minthogy $f(a) = 0$, azért

$$\frac{f(z)}{z-a} = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!} (z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-1},$$

mely egyenlet osztható $z-a$ -val, ha

$$f'(a) = 0,$$

tehát

$$\frac{f(z)}{(z-a)^2} = \frac{f''(a)}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!} (z-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-2}.$$

Hasonlóképen találjuk, hogy

$$f''(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0,$$

de már

$$f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Ennélfogva $f(z)$ -nek az a hely m -szeres zérushelye, ha

$$f(a) = 0, f'(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0.$$

76. Racionális egész függvények legnagyobb közös osztója.

$f(z)$ racionális egész függvény együtthatói legyenek egészen tetszőleges számok; $f(z)$ -vel *equivalens*nek mondunk minden oly racionális egész függvényt, mely $f(z)$ -ből úgy jön létre, ha azt valamely konstans számmal megszorozzuk, vagy elosztjuk. *Equivalens* függvények egymással oszthatók. Így pl.

$$f(z) : af(z) = \frac{1}{a},$$

$$af(z) : f(z) = a,$$

hol úgy a , mint $\frac{1}{a}$ egyformán tetszőleges számok.

$f(z)$ valóságos osztója alatt értünk minden oly függvényt,

mely z -ben legalább elsőfokú. Az oly függvényeket, melyeknek valóságos közös osztójuk nincs, relatív törzsfüggvényeknek nevezzük. Két racionális egész függvény legnagyobb közös osztója alatt értjük azt a legmagasabbfokú racionális egész függvényt, mely mindkettőt maradék nélkül osztja.

Ha

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \\ \varphi(z) &= b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m, \\ &\quad m < n \end{aligned}$$

akkor mindig meghatározhatunk oly $n-m$ -edfokú $q(z)$ és oly $m-1$ -edfokú $r(z)$ racionális egész függvényeket, melyekre nézve:

$$f(z) = q(z) \varphi(z) + r(z). \quad (1)$$

Ha már

$$q(z) = q_0 z^{n-m} + q_1 z^{n-m-1} + \dots + q_{n-m}$$

együtthatóit meghatároztuk, akkor $r(z)$ -t szolgáltatja az

$$f(z) - q(z) \varphi(z) = r(z) \quad (2)$$

egyenlet, melynek baloldalán $\varphi(z) q(z)$ szorzás végrehajtása után annak megfontolásával, hogy x^n, x^{n-1}, \dots, x^m együtthatói eltűnnek, a következő egyenletrendszert nyerjük:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 q_0 \\ a_1 &= b_1 q_0 + b_0 q_1 \\ a_2 &= b_2 q_0 + b_1 q_1 + b_0 q_2 \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-m} &= b_{n-m} q_0 + b_{n-m+1} q_1 + \dots + b_0 q_{n-m}, \end{aligned}$$

melynek determinánsa $D = b_0^{n-m+1} \neq 0$, tehát egyenletrendszerünk q_0, q_1, \dots, q_{n-m} szerint megoldható, ezek értékeinek behelyettesítése után a (2) szolgáltatja $r(z)$ -t.

Az (1) egyenletben kifejezett törvényszerűség alapján már most felírható a következő egyenletrendszer:

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= q(z) \varphi(z) + r(z) \\ \varphi(z) &= q_1(z) r(z) + r_1(z) \\ r(z) &= q_2(z) r_1(z) + r_2(z) \\ &\dots \dots \dots \\ r_{i-2}(z) &= q_i(z) r_{i-1}(z) + r_i(z) \\ r_{i-1}(z) &= q_{i+1}(z) r_i(z), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

hol $r(z)$, $r_1(z)$, \dots , $r_i(z)$ fokszámai rendre kisebbednek, tehát $r_i(z)$ legalacsonyabb fokú. $f(z)$ és $\varphi(z)$ minden valóságos osztója, tehát a legnagyobb közös osztója is, az első egyenlet alapján osztja $r(z)$ -t, a második alapján $r_1(z)$ -t, az utolsóelőtti alapján $r_i(z)$ -t. Ennélfogva $f(z)$ és $\varphi(z)$ minden osztója osztja rendre az $r(z)$, $r_1(z)$, \dots , $r_i(z)$ -t, tehát $r_i(z)$ -nél nagyobb osztó nem lehet, de $r_i(z)$ az utolsó egyenlet alapján osztja $r_{i-1}(z)$ -t, az utolsóelőtti egyenlet alapján $r_{i-2}(z)$ -t, \dots , a második alapján $\varphi(z)$ -t, az első alapján pedig $f(z)$ -t, tehát $r_i(z)$ az $f(z)$ és $\varphi(z)$ legnagyobb közös osztója. Ha $r_i(z)$ konstans, akkor $f(z)$ és $\varphi(z)$ relativ törzsfüggvények.

Az első egyenletünk alapján:

$$r(z) = f(z) - q(z)\varphi(z),$$

a második alapján:

$$r_1(z) = \varphi(z) + q_1(z)q(z)\varphi(z) - q_1(z)f(z),$$

röviden:

$$r_1(z) = a_1(z)f(z) + b_1(z)\varphi(z),$$

éppen így:

$$r_2(z) = a_2(z)f(z) + b_2(z)\varphi(z),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$r_i(z) = a_i(z)f(z) + b_i(z)\varphi(z).$$

Ha $r_i(z) = c$ konstans számmal, akkor $\frac{a_i(z)}{c}$ helyett $a(z)$ -t $\frac{b_i(z)}{c}$ helyett $b(z)$ -t irván, kimondhatjuk a következő tételt: Ha $f(z)$ és $\varphi(z)$ relativ törzsfüggvények, akkor mindig meghatározhatunk oly $a(z)$ és $b(z)$ racionális egész függvényeket, melyekre nézve:

$$a(z)f(z) + b(z)\varphi(z) = 1.$$

77. Racionális törtfüggvények.

Ha $f(z)$ és $\varphi(z)$ racionális egész függvények, akkor az

$$u = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

minden oly helyen monogen, mely a nevezőnek nem magasabbrendű zérushelye, mint a számlálónak. Föltételezhetjük különben, hogy $f(z)$ és $\varphi(z)$ relativ törzsfüggvények s hogy

$f(z)$ alacsonyabb fokú mint $\varphi(z)$, mert különben az előbbi fejezet (3) egyenletrendszerének első egyenlete alapján:

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = q(z) + \frac{r(z)}{\varphi(z)},$$

hol $q(z)$ raczionális egész függvény, $\frac{r(z)}{\varphi(z)}$ pedig a kívánt tulajdonságokkal bíró raczionális törtfüggvény.

Ha $\varphi(z)$ két relatív törzstényezőre $\varphi_1(z)$ és $\varphi_2(z)$ -re bontható, akkor vannak oly $a_1(z)$ és $a_2(z)$ raczionális egész függvények, melyekre nézve:

$$a_1(z) \varphi_1(z) + a_2(z) \varphi_2(z) = 1,$$

tehát

$$\frac{a_1(z)}{\varphi_2(z)} + \frac{a_2(z)}{\varphi_1(z)} = \frac{1}{\varphi_1(z) \varphi_2(z)}.$$

Ha tehát a rövidség kedvéért:

$$a_2(z) f(z) = f_1(z), \quad a_1(z) f(z) = f_2(z),$$

akkor

$$\frac{f(z)}{\varphi_1(z) \varphi_2(z)} = \frac{f_1(z)}{\varphi_1(z)} + \frac{f_2(z)}{\varphi_2(z)}.$$

Ha már most $\varphi_1(z)$ és $\varphi_2(z)$ szintén felbonthatók relatív törzstényezőkre, akkor ezt az eljárást újra alkalmazzuk minden törtre s ha végül már oly törtekhez jutunk, melyeknek a nevezőik már relatív törzsfüggvényekre bontani nem lehet, akkor eljárásunk véget ér. *Eanél fogva, ha $\varphi(z)$ a $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_i(z)$ relatív törzsfüggvényekre bontható, akkor*

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{f_1(z)}{\varphi_1(z)} + \frac{f_2(z)}{\varphi_2(z)} + \dots + \frac{f_i(z)}{\varphi_i(z)}. \quad (1)$$

Pl. Ha

$$\varphi(z) = a_0(z-a_1)^{i_1}(z-a_2)^{i_2} \dots (z-a_r)^{i_r},$$

akkor

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{f_1(z)}{(z-a_1)^{i_1}} + \frac{f_2(z)}{(z-a_2)^{i_2}} + \dots + \frac{f_r(z)}{(z-a_r)^{i_r}}. \quad (2)$$

Legyen

$$z - a_1 = t,$$

tehát

$$\frac{f_1(z)}{(z-a_1)^{i_1}} = \frac{f_1(t+a_1)}{t^{i_1}},$$

ámde

$$f_1(t+a_1) = f_1(a_1) + \frac{f_1'(a_1)}{1!} t + \dots + \frac{f_1^{(i_1-1)}(a_1)}{(i_1-1)!} t^{i_1-1} + t^{i_1} \varphi_1(t),$$

Hasonlóképpen határozzuk meg a többi együtthatókat:

1. Pl. Legyen

$$f(z) = 2z + 3,$$

$$\varphi(z) = (z-2)^2(z-1),$$

tehát

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{a}{(z-2)^2} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{z-1},$$

honnan

$$\frac{2z+3}{z-1} = a + b(z-2) + \frac{c(z-2)^2}{z-1},$$

$$\left(\frac{2z+3}{z-1}\right)_{z=2} = a = 7,$$

$$\left(\frac{2z+3}{z-1}\right)'_{z=2} = b = -5,$$

továbbá

$$\left[\frac{(2z+3)}{(z-2)^2}\right]_{z=1} = c = 5,$$

következőleg:

$$\frac{2z+3}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{7}{(z-2)^2} - \frac{5}{z-2} + \frac{5}{z-1},$$

2. Pl. Legyen

$$f(z) = 2z^2 + 1,$$

$$\varphi(z) = (z^2+1)^2(z-1),$$

következőleg:

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{(z+i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z-i)^2} + \frac{f}{z-i},$$

tehát

$$\left(\frac{2z^2+1}{(z^2+1)^2}\right)_{z=1} = a = \frac{1}{4};$$

$$\frac{2z^2+1}{(z-i)^2(z-1)} = b + c(z+i) + (z+i)^2 R_1,$$

$$\frac{2z^2+1}{(z+i)^2(z-1)} = d + f(z-i) + (z-i)^2 R_2,$$

honnan

$$\left[\frac{2z^2+1}{(z-i)^2(z-1)}\right]_{z=-i} = -\frac{1-i}{8} = b,$$

$$\left[\frac{2z^2+1}{(z+i)^2(z-1)}\right]_{z=i} = -\frac{1+i}{8} = d,$$

$$\left[\frac{2z^2+1}{(z-i)^2(z-1)}\right]'_{z=-i} = -\frac{3+2i}{8} = c,$$

$$\left[\frac{2z^2+1}{(z+i)^2(z-1)}\right]'_{z=i} = -\frac{3-2i}{8} = f.$$

Ennélfogva:

$$\frac{2z^2+1}{(z^2+1)^2(z-1)} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z-1} - \frac{1-i}{8} \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{3+2i}{8} \frac{1}{z+i} -$$

$$- \frac{1+i}{8} \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{3-2i}{8} \frac{1}{z-i}.$$

Minthogy

$$- \frac{1-i}{8} \frac{1}{(z+i)^2} - \frac{1+i}{8} \frac{1}{(z-i)^2} = - \frac{1}{4} \frac{z^2-2z-1}{(z^2+1)^2} =$$

$$= - \frac{1}{4} \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{2} \frac{z+1}{(z^2+1)^2},$$

$$- \frac{3+2i}{8} \frac{1}{z+i} - \frac{3-2i}{8} \frac{1}{z-i} = - \frac{1}{4} \frac{3z+2}{z^2+1},$$

azért

$$\frac{2z^2+1}{(z^2+1)^2(z-1)} = \frac{3}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \frac{z+1}{(z^2+1)^2} - \frac{3}{4} \frac{z+1}{z^2+1}.$$

Ha $f(z)$ és $\varphi(z)$ együttthatói reális számok és $\varphi(z)$ -nek komplex gyökei is vannak, akkor ezek párosával fordulnak elő; ugyanis, ha $a+\beta i$ $\varphi(z)$ -nek zérushelye, tehát

$$\varphi(a+\beta i) = \varphi_1(a, \beta) + i\varphi_2(a, \beta) = 0,$$

akkor

$$\varphi_1(a, \beta) = 0, \quad \varphi_2(a, \beta) = 0,$$

tehát helyes a következő egyenlet is:

$$\varphi(a-\beta i) = \varphi_1(a, \beta) - i\varphi_2(a, \beta) = 0,$$

azaz $a-\beta i$ szintén gyöke $\varphi(z)=0$ egyenletnek, s minthogy

$$[z-(a+\beta i)][z-(a-\beta i)] = (z-a)^2 + \beta^2,$$

azért $(z-a)^2 + \beta^2$ osztója $\varphi(z)$ -nek és pedig legyen r -szeres osztója, akkor

$$\varphi(z) = [(z-a)^2 + \beta^2]^r \varphi_1(z),$$

következöleg:

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{f_1(z)}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} + \frac{f_2(z)}{\varphi_1(z)}.$$

$$z-a=t, \quad f_1(z)=\psi(t), \quad \beta^2=h$$

szubstituczió után:

$$\frac{f_1(z)}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} = \frac{\psi(t)}{(t^2+h)^r} = \frac{\psi_1(t^2) + t\psi_2(t^2)}{(t^2+h)^r},$$

ha $\psi(t)$ -ben a páros kitevőjű tagok összegét $\psi_1(t^2)$ -re, a páratlan kitevőjűek összegét pedig $t\psi_2(t^2)$ -al jelöljük, alkalmazzuk még a következő szubsztitucziót:

$$t^2 + h = u,$$

akkor a már ismeretes sorbafejtési szabály alkalmazásával:

$$\psi_1(t^2) = \psi_1(u-h) = a'_0 + a'_1 u + \dots + a'_{r-1} u^{r-1} + u^r \chi_1(u),$$

$$\psi_2(t^2) = \psi_2(u-h) = b_0 + b_1 u + \dots + b_{r-1} u^{r-1} + u^r \chi_2(u),$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{f_1(z)}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} &= \frac{a'_0 + tb_0}{u^r} + \frac{a'_1 + tb_1}{u^{r-1}} + \dots + \\ &+ \frac{a'_{r-1} + tb_{r-1}}{u} + \chi_1(u) + t\chi_2(u). \end{aligned}$$

Ha már most u értékét visszahelyettesítjük és a

$$\chi_1(u) + t\chi_2(u) = \chi_1(t^2 + h) + t\chi_2(t^2 + h) = \chi(t)$$

jelölést kasználjuk, akkor

$$\frac{f_1(z)}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} = \frac{a'_0 + tb_0}{(t^2 + h)^r} + \frac{a'_1 + tb_1}{(t^2 + h)^{r-1}} + \dots + \frac{a'_{r-1} + tb_{r-1}}{t^2 + h} + \chi(t).$$

Végül ha t és h értékeit visszahelyettesítjük s $a'_0 - ab_0$, $a'_1 - ab_1$, \dots , $a'_{r-1} - ab_{r-1}$ helyett rendre a_0 , a_1 , \dots , a_{r-1} -t írunk, akkor

$$\begin{aligned} \frac{f_1(z)}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} &= \frac{a_0 + zb_0}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} + \frac{a_1 + zb_1}{[(z-a)^2 + \beta^2]^{r-1}} + \dots + \\ &+ \frac{a_{r-1} + zb_{r-1}}{(z-a)^2 + \beta^2} + \chi(z-a), \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{\varphi(z)} &= \frac{a_0 + zb_0}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} + \frac{a_1 + zb_1}{[(z-a)^2 + \beta^2]^{r-1}} + \dots + \\ &+ \frac{a_{r-1} + zb_{r-1}}{(z-a)^2 + \beta^2} + \chi(z-a) + \frac{f_2(z)}{\varphi_1(z)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Hasonló műveletnek kell alávetni $\frac{f_2(z)}{\varphi_1(z)}$ -t is, ha $\varphi_1(z)$ -nek még vannak $a_1 \pm \beta_1 i$ alakú zérushelyei, akkor minden konjugált gyökpár olyan részlettörteket szolgáltat, mint a milyenek az (5) egyenletben fordulnak elő, a valós gyökök pedig olyanokat, mint a milyenek a (3)-ikban fordulnak elő. Megjegyzendő, hogy kutatásaink alapjául a (3) egyenlet is szolgálhatott volna.

ha $\phi(t)$ -ben a páros kitevőjű tagok összegét $\phi_1(t^2)$ -, a páratlan kitevőjűek összegét pedig $\phi_2(t^2)$ -al jelöljük, alkalmazzuk még a következő szubsztitúciót:

$$t^2 + h = u,$$

akkor a már ismeretes sorbafejtési szabály alkalmazásával:

$$\phi_1(t^2) = \phi_1(u-h) = a'_0 + a'_1 u + \dots + a'_{r-1} u^{r-1} + u^r \chi_1(u),$$

$$\phi_2(t^2) = \phi_2(u-h) = b_0 + b_1 u + \dots + b_{r-1} u^{r-1} + u^r \chi_2(u),$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{f_1(z)}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} &= \frac{a'_0 + tb_0}{u^r} + \frac{a'_1 + tb_1}{u^{r-1}} + \dots + \\ &+ \frac{a'_{r-1} + tb_{r-1}}{u} + \chi_1(u) + t\chi_2(u). \end{aligned}$$

Ha már most u értékét visszahelyettesítjük és a

$$\chi_1(u) + t\chi_2(u) = \chi_1(t^2 + h) + t\chi_2(t^2 + h) = \chi(t)$$

jelölést kasználjuk, akkor

$$\frac{f_1(z)}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} = \frac{a'_0 + tb_0}{(t^2 + h)^r} + \frac{a'_1 + tb_1}{(t^2 + h)^{r-1}} + \dots + \frac{a'_{r-1} + tb_{r-1}}{t^2 + h} + \chi(t).$$

Végül ha t és h értékeit visszahelyettesítjük s $a'_0 - ab_0$, $a'_1 - ab_1$, ..., $a'_{r-1} - ab_{r-1}$ helyett rendre a_0 , a_1 , ..., a_{r-1} -t írunk, akkor

$$\begin{aligned} \frac{f_1(z)}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} &= \frac{a_0 + zb_0}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} + \frac{a_1 + zb_1}{[(z-a)^2 + \beta^2]^{r-1}} + \dots + \\ &+ \frac{a_{r-1} + zb_{r-1}}{(z-a)^2 + \beta^2} + \chi(z-a), \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{\varphi(z)} &= \frac{a_0 + zb_0}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} + \frac{a_1 + zb_1}{[(z-a)^2 + \beta^2]^{r-1}} + \dots + \\ &+ \frac{a_{r-1} + zb_{r-1}}{(z-a)^2 + \beta^2} + \chi(z-a) + \frac{f_2(z)}{\varphi_1(z)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Hasonló műveletnek kell alávetni $\frac{f_2(z)}{\varphi_1(z)}$ -t is, ha $\varphi_1(z)$ -nek még vannak $a_1 \pm \beta_1 i$ alakú zérushelyei, akkor minden konjugált gyökpár olyan részlettörteket szolgáltat, mint a milyenek az (5) egyenletben fordulnak elő, a valós gyökök pedig olyanokat, mint a milyenek a (3)-ikban fordulnak elő. Megjegyzendő, hogy kutatásaink alapjául a (3) egyenlet is szolgálhatott volna.

Ugyanis a mondott feltételek mellett, t. i. hogy $f(z)$ és $\varphi(z)$ együttthatói reális számok, ha a_1 és a_2 konjugált komplexgyökök, akkor

$$i_1 = i_2 = i$$

s a (3) egyenlet ugyanolyan kitevőjű megfelelő tagjai konjugált komplex kifejezések, így pl. az

$$\frac{a_{1r}}{(z-a_1)^{i-r}} \text{ és } \frac{a_{2r}}{(z-a_2)^{i-r}}$$

alakú tagok számlálói is konjugált komplexszámok.

Ugyanis, ha $\frac{\varphi(z)}{(z-a_1)^i}$, $\frac{\varphi(z)}{(z-a_2)^i}$ -t rendre $\varphi_{1i}(z)$, $\varphi_{2i}(z)$ -vel jelöljük, akkor

$$\frac{1}{r!} \left[\frac{dr}{dz^r} \left(\frac{f(z)}{\varphi_{1i}(z)} \right) \right]_{z=a_1} = a_{1r},$$

$$\frac{1}{r!} \left[\frac{dr}{dz^r} \left(\frac{f(z)}{\varphi_{2i}(z)} \right) \right]_{z=a_2} = a_{2r}.$$

Minthogy, ha valós együttthatókkal bíró kifejezésbe a változó helyett konjugált komplexszámokat helyettesítünk, ugyanilyen számokat nyerünk, azért a_{1r} és a_{2r} is ilyenek.

Legyen tehát

$$a_{1r} = a + bi, \quad a_{2r} = a - bi;$$

$$(z-a_1)^{i-r} = A + Bi, \quad (z-a_2)^{i-r} = A - Bi,$$

hol A és B z -nek valós együttthatókkal bíró raczionális egész függvényei, mivel

$$(a+bi)(A-Bi) + (a-bi)(A+Bi) = 2(Aa+Bb),$$

azért, ha

$$a_1 = a + \beta i, \quad a_2 = a - \beta i,$$

akkor

$$\frac{a_{1r}}{(z-a_1)^{i-r}} + \frac{a_{2r}}{(z-a_2)^{i-r}} = 2 \frac{Aa+Bb}{[(z-a)^2 + \beta^2]^{i-r}},$$

melyet olyan alakú részlettörtekbe bonthatunk, mint a melyeknek az (5) egyenletben fordulnak elő.

Az (5) képletben előforduló $a_0, b_0; a_1, b_1; \dots$; meghatározása gyakorlatilag következőképen történik: Tekintve a kép-
letben előforduló $\varphi_1(z)$ jelentését

$$\frac{f(z)}{\varphi_1(z)} = a_0 + zb_0 + [(z-a)^2 + \beta^2]^r R(z),$$

ha $R(z)$ -vel a maradék tagokat jelöljük. Honnan

$$\left[\frac{f(z)}{\varphi_1(z)} \right]_{z=a+\beta i} = A + Bi = a_0 + (a + \beta i) b_0 \quad (6)$$

a valós s képzetes részek szétválasztásából nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} a_0 &= A - \frac{a}{\beta} B, \\ b_0 &= B : \beta. \end{aligned}$$

Képezzük ezután a következő különbséget:

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} - \frac{a_0 + zb_0}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} = \frac{f(z) - (a_0 + zb_0) \varphi_1(z)}{\varphi(z)}.$$

(6) egyenletünk értelmében törtünk számlálója osztható $z - (a + \beta i)$ -vel, tehát osztható $(z-a)^2 + \beta^2$ -al is, ennél fogva:

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} - \frac{a_0 + zb_0}{[(z-a)^2 + \beta^2]^r} = \frac{\psi(z)}{\chi(z)},$$

hol $\chi(z)$ -nek a $(z-a)^2 + \beta^2$ már csak $r-1$ -szeres tényezője; (5) egyenletünk értelmében tehát

$$\frac{\psi(z)}{\chi(z)} = \frac{a_1 + zb_1}{[(z-a)^2 + \beta^2]^{r-1}} + \frac{a_2 + zb_2}{[(z-a)^2 + \beta^2]^{r-2}} + \dots$$

mely egyenletből teljesen hasonló módon határozzuk meg a_1 -t és b_1 -et.

Pl. Legyen

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{2z^2 + 1}{(z^2 + 1)^2(z-1)},$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{\varphi(z)} &= \frac{a+bz}{(z^2+1)^2} + \frac{a_1+b_1z}{(z^2+1)} + \frac{c}{z-1}; \\ \left(\frac{2z^2+1}{z-1} \right)_{z=i} &= a+bi = -\frac{1}{i-1} = \frac{1+i}{2}, \end{aligned}$$

honnan

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}; \\ \frac{2z^2+1}{(z^2+1)^2(z-1)} - \frac{1}{2} \frac{1+z}{(z^2+1)^2} &= \frac{3}{2} \frac{1}{(z^2+1)(z-1)} = \\ &= \frac{a_1+b_1z}{z^2+1} + \frac{c}{z-1}, \end{aligned}$$

honnan

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{z-1} \right)_{z=i} = a_1 + b_1 i = -\frac{3}{4} (1+i),$$

ennélfogva:

$$a_1 = -\frac{3}{4}, \quad b_1 = -\frac{3}{4};$$

végül

$$\left[\frac{2z^2+1}{(z^2+1)^2} \right]_{z=1} = c = \frac{3}{4},$$

következően:

$$\frac{2z^2+1}{(z^2+1)^2(z-1)} = \frac{1}{2} \frac{1+z}{(z^2+1)^2} - \frac{3}{4} \frac{1+z}{z^2+1} + \frac{3}{4} \frac{1}{z-1},$$

mely eredmény tökéletesen megegyezik fejezetünk első felében talált eredménnyel.

78. Az exponenciális és logaritmus függvény általánosítása.

A valós változók körében az exponenciális függvény e^x oly függvény volt, melynek differenciálhányadosa szintén e^x .

A komplexváltozók körében is exponenciális függvény alatt oly függvényt értünk, melynek differenciálhányadosa egyenlő magával a függvénnyel, ezt a függvényt szintén e^z szimbólummal jelöljük, tehát e^z -t

$$\frac{de^z}{dz} = e^z \quad (1)$$

egyenlet definiálja, ilyen függvény csak egy van, mert ha volna még egy ily függvény $f(z)$; azaz volna

$$\frac{df(z)}{dz} = f(z), \quad (2)$$

akkor kimutatható, hogy

$$f(z) = e^z.$$

Első egyenletünk alapján, ha v monogen függvénye z -nek, akkor

$$\frac{de^v}{dz} = e^v v'. \quad (3)$$

Pl. Ha a^v differenciálhányadosát kell meghatározni, akkor előbb

$$a = e^{la}$$

egyenletre hivatkozunk, melynek alapján:

$$\frac{da^v}{dz} = la \cdot a^v v'.$$

Hasonlóképen, ha v_1 és v_2 monogen függvényei z -nek, akkor

$$\frac{d(e^{v_1} e^{v_2})}{dz} = e^{v_1} e^{v_2} v_1' + e^{v_1} e^{v_2} v_2' = e^{v_1} e^{v_2} (v_1 + v_2)',$$

másrésről:

$$\frac{de^{v_1+v_2}}{dz} = e^{v_1+v_2} (v_1+v_2)',$$

tehát az (1) alatt levő definíció értelmében:

$$e^{v_1} e^{v_2} = e^{v_1+v_2}. \quad (4)$$

Hasonlóképen találjuk, hogy a (2) definíció értelmében:

$$f(v_1) f(v_2) = f(v_1+v_2), \quad (5)$$

ez utóbbi egyenletből következik, hogy

$$f(v_1) f(v_2) \dots f(v_n) = f(v_1+v_2+\dots+v_n),$$

melynek különös esete az, midőn

$$[f(v)]^n = f(nv),$$

honnan

$$[f(1)]^n = f(n).$$

Ha az (1) alatt levő feltételnek megfelelően $f(1)$ -t úgy választjuk, hogy legyen

$$f(1) = e,$$

akkor

$$f(n) = e^n.$$

Ha pedig v helyett $\frac{1}{n}$ -t írunk, akkor

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{\frac{1}{n}}$$

egyenlethez jutunk.

Ennélfogva a valós változók körében $f(z)$ éppen e^z -el egyenlő. Ha $z = x + iy$, akkor a monogen függvények definíciója értelmében:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ami azt jelenti, hogy $f(z)$ -t $f(x)$ -ből úgy nyerjük, ha x helyett egyszerűen z -t írunk, a jelen esetre alkalmazva észrevételünket, nyerjük, hogy

$$f(z) = e^z.$$

A logaritmus függvény jelölésére szintén az lz szimbolumot használjuk s oly függvényt értünk alatta, melyre nézve:

$$z = e^{lz}; \quad (6)$$

a (3) egyenlet alapján tehát

$$1 = e^{lz} (lz)' = z (lz)',$$

honnan

$$(lz)' = \frac{1}{z}. \quad (7)$$

Pl. Ha v monogen függvény, akkor

$$\frac{dlv}{dz} = \frac{v'}{v}.$$

Legyen már most

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

akkor a (6) alapján

$$\rho = |z| = |e^{lz}| = e^{l\rho},$$

ennélfogva

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{l(\cos \varphi + i \sin \varphi)}.$$

De könnyű meggyőződni, hogy

$$dl(\cos \varphi + i \sin \varphi) = i d\varphi,$$

a mi csak úgy lehetséges, ha

$$l(\cos \varphi + i \sin \varphi) = i\varphi + c,$$

hol c egy tetszőleges konstans, melyet így határozunk meg: legyen

$$\varphi = 0,$$

akkor

$$l = c = 0,$$

tehát

$$l(\cos \varphi + i \sin \varphi) = i\varphi,$$

következőleg:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \quad (8)$$

Ennélfogva

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{lz} = e^{l\rho + i\varphi} \quad (9)$$

és

$$lz = l\rho + i\varphi.$$

Ámde z értéke nem változik, hogy ha argumentumát $2n\pi$ -vel növeljük, hol n pozitív, vagy negatív egész szám, azért általánosabban:

$$lz = l\rho + i\varphi + 2ni\pi \quad (10)$$

és

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi + 2ni\pi}. \quad (11)$$

A (10) alapján

$$lz + lz_1 = l\rho + l\rho_1 + i(\varphi + \varphi_1) + 2ri\pi,$$

$$r = n + n_1,$$

azaz:

$$Lz + Lz_1 = Lzz_1.$$

Ezek után áttérhetünk az exponenciális s a logaritmus függvény értékváltozásának tanulmányozására. Ha

$$z = x + iy,$$

akkor a (8) képlet értelmében:

$$u = e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (12)$$

tehát e^z modulusa e^x , argumentuma pedig y ; a (11) értelmében pedig

$$e^{z+2ni\pi} = e^z;$$

azaz e^z periodikus függvény és periodusa $2i\pi$.

Minthogy $\cos y$ és $\sin y$ a ∞ helyen határozatlan, azért e^z is a $z = \infty$ helyen határozatlan. Ha síkunkat az x tengellyel egymástól 2π távolságban levő párhuzamos egyenesekkel sávokra osztjuk (17. ábra), akkor egy ily sávot e^z periodussávjának nevezünk. Bármely periodussávban e^z felvehet minden értéket; de minden periodussávban ugyanazokat az értékeket veszi fel.

A logaritmusfüggvény az exponenciálisnak az inverz függvénye, tehát végtelen sokértékű, miként az a (10) formulából is kivethető. Ámde ha az inverziót csak az egyik periodussávra mondjuk a 0-tól 2π -ig terjedőre tekintjük érvényesnek, akkor az inverzfüggvény egyértékű függvénynyé lesz, mert ebben az esetben egy z -hez egy u tartozik s viszont; azaz $lu = x + yi$ egyértékű, ha képzetes része csak 0-tól 2π -ig változik. Ennél fogva Lz egyértékű függvény, ha z argumentuma csak 0-tól 2π -ig változhatik, és ekkor

$$Lz = l\rho + i\varphi$$

$$\varphi < 2\pi.$$

79. A hatvány fogalmának általánosítása.

Ha z és m egészen tetszőleges, valós vagy képzetes számok,akkor az előbbi fejezet (6) képlete alapján z^m -t a következő egyenlettel definiáljuk:

$$z^m = e^{mlz}. \quad (1)$$

Legyen általánosan

$$m = a + ib,$$

$$lz = l\rho + i\varphi,$$

tehát

$$mlz = al\rho - b\varphi + i(bl\rho + a\varphi),$$

hol

$$\varphi = \varphi_1 + 2n\pi$$

$$\varphi_1 < 2\pi,$$

ennélfogva:

$$z^m = e^{al\rho - b\varphi + i(bl\rho + a\varphi)} \quad (2)$$

Pl. Legyen

$$m = \frac{1}{p}, \quad z = 1,$$

hol p valós egész szám, ebben a különös esetben:

$$a = \frac{1}{p}, \quad b = 0, \quad \rho = 1, \quad \varphi = 2n\pi,$$

tehát

$$z^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{2n\pi}{p}i} = (e^{\frac{2\pi}{p}i})^n, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Legyen a rövidség kedvéért

$$e^{\frac{2\pi}{p}i} = a_1,$$

$$(e^{\frac{2\pi}{p}i})^n = a_1^n,$$

akkor $z^{\frac{1}{p}}$, azaz az egység p -edik gyökének egymástól különböző értékei:

$$a_1^0, a_1, a_1^2, \dots, a_1^{p-1},$$

mert

$$a_1^p = a_1^0, \quad a_1^{p+1} = a_1, \dots, a_1^{p+r} = a_1^r.$$

Az (1) egyenlet definiálta általánosított hatványra vonatkozólag érvényesek a hatványozás alaptörvényei. Így

$$z^m z^{m_1} = e^{m_1 lz} e^{m lz} = e^{(m+m_1)lz} = z^{m+m_1}. \quad (3)$$

Általánosabban

$$\begin{aligned} z^n &= e^{nl\varphi} + im\varphi_1 + 2mn\pi & \varphi_1 < 2\pi, n=0, 1, \dots \\ z^{m_1} &= e^{m_1 l\varphi} + im_1\varphi_1 + 2m_1 n_1 \pi & n_1=0, 1, 2, \dots \\ z^m z^{m_1} &= e^{(m+m_1)(l\varphi + i\varphi_1) + 2(mn+m_1 n_1)\pi} \end{aligned}$$

Ha tehát z^m és z^{m_1} egészen tetszőleges értékeit szorozzuk össze, akkor a hatványozás (3) alatt kimondott törvénye némi módosulást szenved. A mi más szóval azt jelenti, hogy a (3) egyenlet jobboldalán levő szimbolum kevesebb értékrendszert foglal magában, mint a baloldalán levő. Lássuk még, hogy hogyan kell hatványt hatványra emelni. Legyen e végből

$$u = (e^{v_1})^{v_2};$$

az (1) alatt levő definíció értelmében

$$u = e^{v_2 l e^{v_1}} = e^{v_1 v_2},$$

tehát

$$(e^{v_1})^{v_2} = e^{v_1 v_2}. \quad (4)$$

Ezen az alapon azután

$$(z^m)^{m_1} = (e^{mlz})^{m_1} = e^{mm_1 lz} = z^{mm_1}. \quad (5)$$

Mely képletek a hatványozás egyik ismeretes törvényét mondják ki.

Végül hogy

$$\begin{aligned} z^m &= e^{ml\varphi} + im\varphi_1 + 2mn\pi & \varphi_1 < 2\pi, n=1, 2, \dots \\ z_1^{m_1} &= e^{m_1 l\varphi_1} + im_1\varphi_2 + 2m_1 n_1 \pi & \varphi_2 < 2\pi, n_1=1, 2, \dots \\ z^m z_1^{m_1} &= e^{m[l(\varphi\varphi_1) + i(\varphi_1 + \varphi_2) + 2r\pi]} & r=n+n_1 \end{aligned}$$

tehát

$$z^m z_1^{m_1} = (zz_1)^{mm_1}.$$

80. A trigonometriai függvények általánosítása.

A 73. fejezetben láttuk, hogy

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

tehát

$$\cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi},$$

ebből a két egyenletből:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Ezen két egyenlet alapján a z komplex változó sinusát s cosinusát a következő egyenletekkel definiáljuk:

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Formuláinkból rögtön kiolvasható, hogy

$$\left. \begin{aligned} \sin(z+z_1) &= \sin z \cos z_1 + \cos z \sin z_1, \\ \cos(z+z_1) &= \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(z+2n\pi) &= \cos z, \\ \sin(z+2r\pi) &= \sin z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Tehát a $\sin z$ és $\cos z$ periodikus függvények; periodusuk 2π ; a trigonometriai alapformulák rájuk nézve is érvényesek. Az (1) egyenletek értelmében:

$$\cos iy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\sin iy = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Nevezzük $\cos iy$ -t cosinushiperbolikusnak, $\frac{\sin iy}{i}$ -t pedig sinushiperbolikusnak, s jelöljük őket rendre $\cosh y$ és $\sinh y$ -al, tehát

$$\cos iy = \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

$$\frac{\sin iy}{i} = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Honnan következik, hogy

$$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

$$\cosh(y_1 + y_2) = \cosh y_1 \cosh y_2 + \sinh y_1 \sinh y_2,$$

$$\sinh(y_1 + y_2) = \sinh y_1 \cosh y_2 + \cosh y_1 \sinh y_2.$$

A többi trigonometriai függvényeket úgy definiáljuk, mint a valós változók körében, így

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}},$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Végül az (1) egyenletek alapján könnyű meggyőződni, hogy
 $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$
 következőleg:

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Az exponenciális függvény értékváltozásainak figyelembe vételével, rögtön belátható, hogy $\sin z$ és $\cos z$ függvények a ∞ helyen határozatlanok; a periodussávok helyzete kiolvasható a következő egyenletekből:

$$\cos z = \cos(x + iy) = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2},$$

$$\sin z = \sin(x + iy) = \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i}.$$

Ha az y tengelyel a kezdőponttól számítva 2π távolságokban párhuzamos egyeneseket vonunk, ezek a síkot sávokra osztják, melyeket a $\sin z$ és $\cos z$ periodus sávjainak nevezünk; bármely sávban függvényeink minden értéket felvesznek, de csak egyszer.

Lássuk már most fejtegetéseink néhány alkalmazását.

Az (1) egyenletek alapján, ha m pozitív egész szám:

$$(2i)^m \sin^m z = (e^{iz} - e^{-iz})^m = e^{miz} - \binom{m}{1} e^{(m-2)iz} + \dots + (-1)^m e^{-miz}$$

$$(2)^m \cos^m z = (e^{iz} + e^{-iz})^m = e^{miz} + \binom{m}{1} e^{(m-2)iz} + \dots + e^{-miz}.$$

Mínthogy

$$e^{miz} = \cos mz + i \sin mz$$

$$e^{-miz} = \cos mz - i \sin mz$$

azért ha m páros, akkor

$$(2i)^m \sin^m z = 2 \cos mz - 2 \binom{m}{1} \cos(m-2)z + \dots +$$

$$+ (-1)^{\frac{m-2}{2}} 2 \binom{m}{\frac{m-2}{2}} \cos 2z + (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{m}{\frac{m}{2}} \quad (I)$$

$$2^m \cos^m z = 2 \cos mz - 2 \binom{m}{1} \cos^{m-2} z + \dots + \\ + 2 \binom{\frac{m-1}{2}}{\frac{m-2}{2}} \cos 2z + \binom{m}{\frac{m}{2}}. \quad (\text{II})$$

Ha pedig m páratlan, akkor

$$(2i)^m \sin^m z = 2i \sin mz - 2i \binom{m}{1} \sin^{m-2} z + \dots + \\ + 2(-1)^{\frac{m-1}{2}} i \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \sin z. \quad (\text{III})$$

$$2^m \cos^m z = 2 \cos mz + 2 \binom{m}{1} \cos^{m-2} z + \dots + 2 \binom{m}{\frac{m-1}{2}} \cos z. \quad (\text{IV})$$

Másrésről

$$\cos mz + i \sin mz = e^{imz} = (e^{iz})^m = (\cos z + i \sin z)^m = \\ = \cos^m z + i \binom{m}{1} \cos^{m-1} z \sin z - \binom{m}{2} \cos^{m-2} z \sin^2 z + \dots,$$

a valós és képzetes részek szétválasztása után:

$$\cos mz = \cos^m z - \binom{m}{2} \cos^{m-2} z \sin^2 z + \binom{m}{4} \cos^{m-4} z \sin^4 z - \dots \quad (\text{V})$$

$$\sin mz = \binom{m}{1} \cos^{m-1} z \sin z - \binom{m}{3} \cos^{m-3} z \sin^3 z + \dots \quad (\text{VI})$$

Ha m páratlan, akkor $m-1, m-3, \dots$ páros számok, tehát

$$\cos^{m-1} z = (\cos^2 z)^{\frac{m-1}{2}} = (1 - \sin^2 z)^{\frac{m-1}{2}},$$

$$\cos^{m-3} z = (\cos^2 z)^{\frac{m-3}{2}} = (1 - \sin^2 z)^{\frac{m-3}{2}},$$

egyenletek alapján $\cos^{m-1} z, \cos^{m-3} z, \dots$ rendre $\sin z$ -nek $m-1, m-3, \dots$ fokú függvényei, tehát a (VI) alapján $\sin mz$ $\sin z$ -nek m -edfokú racionális egész függvénye, tehát ily alakú:

$$\sin mz = a_0 \sin^m z + a_1 \sin^{m-1} z + \dots + a_{n-1} \sin z + a_n = f(\sin z), \quad (4)$$

ha már most

$$f(\sin z) = 0$$

egyenletnek gyökei:

$$\sin a_1, \sin a_2, \dots, \sin a_m,$$

akkor

$$f(\sin z) = a_0 (\sin z - \sin a_1) (\sin z - \sin a_2) \dots (\sin z - \sin a_m).$$

a_1, a_2, \dots, a_m megegyeznek azon értékekkel, melyek $\sin mz$ -t zérussá teszik, ezek pedig:

$$0, \pm \frac{\pi}{m}, \pm 2 \frac{\pi}{m}, \dots, \pm \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}$$

így tehát

$$f(\sin z) = \\ = a_0 \sin z \left(\sin^2 z - \sin^2 \frac{\pi}{m} \right) \left(\sin^2 z - \sin^2 2 \frac{\pi}{m} \right) \dots \left(\sin^2 z - \sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m} \right) \quad (5)$$

melyet ily alakba is írhatunk:

$$f(\sin z) = \\ = a \sin z \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} \right) \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 2 \frac{\pi}{m}} \right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}} \right) \quad (6)$$

Honnan

$$\lim_{z=0} \frac{\sin mz}{mz} = \frac{a}{m} \lim_{z=0} \frac{\sin z}{z} \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} \right) \dots$$

ebből pedig

$$a = m,$$

következésképpen:

$$\sin mz = \\ = m \sin z \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} \right) \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 2 \frac{\pi}{m}} \right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}} \right) \quad (VII)$$

Ha mz helyett πz -t írunk, akkor

$$\sin \pi z = \\ = m \sin \frac{\pi z}{m} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} \right) \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 2 \frac{\pi}{m}} \right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}} \right) \quad (VIII)$$

(ha m páros).

Azonban a -t meg így is meghatározhatjuk: a (VI) egyenlet alapján rögtön belátható, hogy a (4) egyenletben előforduló

$$a_n = 0, \quad a_{n-1} = m,$$

tehát

$$\sin mz = \sin z (a_0 \sin^{m-1} z + \dots + a_{n-2} \sin z + m).$$

Mint hogy a

$$a_0 \sin^{m-1} z + \dots + a_{m-2} \sin z + m = 0$$

egyenlet gyökei:

$$\sin \frac{\pi}{m}, \pm \sin 2 \frac{\pi}{m}, \dots, \pm \sin \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m},$$

tehát

$$\begin{aligned} & a_0 \sin^{m-1} z + \dots + a_{m-2} \sin z + m = \\ & = a_0 \left(\sin^2 z - \sin^2 \frac{\pi}{m} \right) \dots \left(\sin^2 z - \sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m} \right) \end{aligned}$$

honnan következik, hogy

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} a_0 \sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 z \frac{\pi}{m} \dots \sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m} = m,$$

az (5) és (6) egyenletek összehasonlításából pedig következik, hogy

$$a = (-1)^{\frac{m-1}{2}} a_0 \sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 z \frac{\pi}{m} \dots \sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m} = m.$$

81. A ciklometrikus függvények általánosítása.

Ha z sinusfüggvénye az u komplex változónak akkor, mint láttuk

$$\sin(u + 2n\pi) = z.$$

Tehát az u változónak végtelen sok értékéhez egy, de csakis egy z függvényérték tartozik, tehát a sinusfüggvény inverz-függvénye végtelen sok értékű függvény, ugyanis

$$u + 2n\pi = \arcsin z,$$

tehát z egy s ugyanazon értékéhez végtelen sok függvényérték tartozik, de ha az inverziót a $\sin u$ függvény csak egyik periodus-sávjára, mondjuk 0-tól 2π -ig terjedőre tekintjük érvényesnek,

akkor ezen megszorítások között az arcsin z egyértékű függvény, azaz:

$$u = \arcsin z$$

$$0 \leq u < 2\pi$$

egyértékű függvény.

Láttuk, hogy

$$\sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i} = z,$$

honnan

$$e^{2iu} - 2ize^{iu} = 1,$$

ebből pedig

$$e^{iu} = iz \pm \sqrt{1-z^2},$$

tehát

$$u = \frac{1}{i} l(iz \pm \sqrt{1-z^2}).$$

Legyen

$$u_1 = \frac{1}{i} l(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$u_2 = \frac{1}{i} l(iz - \sqrt{1-z^2}).$$

Ámde

$$iz - \sqrt{1-z^2} = -\frac{1}{iz + \sqrt{1-z^2}},$$

következően

$$l(iz - \sqrt{1-z^2}) = l(-1) - l(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

de

$$l(-1) = \pi i + 2k\pi i,$$

mivel u nem lehet nagyobb 2π -nél, azért k -t zérusnak vesszük s így

$$u_2 = \pi - \frac{1}{i} l(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

azaz:

$$u_2 = \pi - u_1.$$

Míg tehát u_1 0-tól 2π -ig változik, addig u_2 π -től $-\pi$ -ig; ámde a sinusfüggvényre nézve a $-\pi$ -től $+\pi$ -ig terjedő sávot éppen úgy tekinthetjük egy periodussávnak, mint a 0-tól 2π -ig terjedőt, tehát u_1 és u_2 csak különböző periodussávokban képviselik ugyanazt a függvényt, azért elég lesz egyiket tanulmányunk tárgyává tenni, s kiindulási pontunknak megfelelőleg u_1 -t választjuk, a mit ezután röviden u -nak nevezünk, tehát

$$u = \arcsin z = \frac{1}{i} l(iz + \sqrt{1-z^2}). \quad (I)$$

arcsin z -nek ezen analitikai alakjából szintén kiolvashatók mindazok a sajátságok, melyeket ezen fejezet elején említettünk.

Határozzuk meg még u -nak differenciálhányadosát

$$u' = \frac{(iz + \sqrt{1-z^2})'}{iz + \sqrt{1-z^2}},$$

a műveletek végrehajtása után:

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\text{II})$$

tehát u' folytonos és véges, kivéve a $z = \pm 1$ helyeket. Ezekben a pontokban

$$u_1 = \frac{1}{i} li = \frac{\pi}{2}$$

$$u_2 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

tehát

$$u_1 = u_2,$$

azaz az u_1 és u_2 függvényágak értékei megegyeznek, tehát $z = \pm 1$ a függvénynek is szingularis helyei. Az (I) egyenlet alapján megállapíthatjuk az arcsin z függvényre vonatkozó összeadási formulákat is. Nevezetesen

$$\begin{aligned} \arcsin z_1 + \arcsin z_2 &= \frac{1}{i} l(z_1 i + \sqrt{1-z_1^2})(z_2 i + \sqrt{1-z_2^2}) = \\ &= \frac{1}{i} l[\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} - z_1 z_2 + i(z_1 \sqrt{1-z_2^2} + z_2 \sqrt{1-z_1^2})]. \end{aligned}$$

Ámde könnyű meggyőződni, hogy

$$(\sqrt{(1-z_1^2)(1-z_2^2)} - z_1 z_2)^2 = 1 - (z_1 \sqrt{1-z_2^2} + z_2 \sqrt{1-z_1^2})^2,$$

következésképpen:

$$\arcsin z_1 + \arcsin z_2 = \frac{1}{i} \arcsin(z_1 \sqrt{1-z_2^2} + z_2 \sqrt{1-z_1^2}). \quad (\text{III})$$

Azonban ezt a formulát a trigonometriai függvények összeadási formuláiból is levezethetjük: Legyen ugyanis

$$u_1 = \arcsin z_1, \quad z_1 = \sin u_1,$$

$$u_2 = \arcsin z_2, \quad z_2 = \sin u_2,$$

$$\begin{aligned}\sin(u_1 + u_2) &= \sin u_1 \cos u_2 + \cos u_1 \sin u_2 \\ &= \sin u_1 \sqrt{1 - \sin^2 u_2} + \sin u_2 \sqrt{1 - \sin^2 u_1} \\ &= z_1 \sqrt{1 - z_2^2} + z_2 \sqrt{1 - z_1^2},\end{aligned}$$

honnan

$$u_1 + u_2 = \arcsin z_1 + \arcsin z_2 = \arcsin(z_1 \sqrt{1 - z_2^2} + z_2 \sqrt{1 - z_1^2}).$$

Az $\arccos z$ sajátosságait levezethetjük a következő formulából

$$\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = z,$$

honnan

$$u = \arccos z,$$

$$\frac{\pi}{2} - u = \arcsin z,$$

tehát

$$\arccos z = \frac{\pi}{2} - \arcsin z,$$

következésképpen:

$$(\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \quad (\text{IV})$$

és mivel

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{i} li,$$

$$\arcsin z = \frac{1}{i} l(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

azért

$$\arccos z = \frac{1}{i} l \frac{i}{zi + \sqrt{1 - z^2}} = \frac{1}{i} l(z + i\sqrt{1 - z^2}). \quad (\text{V})$$

Honnan a fentebbi eljáráshoz hasonlóan találjuk, hogy

$$\arccos z_1 + \arccos z_2 = \arccos(z_1 z_2 - \sqrt{1 - z_1^2} \sqrt{1 - z_2^2}).$$

A $\operatorname{tg} u$ függvényt pedig mint láttuk a következő egyenlet definiálja:

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{i} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2iu} - 1}{e^{2iu} + 1}.$$

Legyen már most

$$\operatorname{tg} u = z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iu} - 1}{e^{2iu} + 1},$$

honnan

$$e^{2iu} = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

következőleg:

$$u = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \cdot l \frac{1+iz}{1-iz}, \quad (\text{VI})$$

honnan

$$(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}, \quad (\text{VII})$$

mely egyenletekből kiolvasható, hogy a $z = \pm i$ úgy $\operatorname{arctg} z$ -nek, mint differenciálhányadosának szinguláris helye. S minthogy a logaritmus végtelen sok értékű, mely értékek $2i\pi$ többszörösében különböznek csak egymástól, ennél fogva $\operatorname{arctg} z$ szintén végtelen sok értékű, de ezek az értékek már csak π többszöröseiben különböznek egymástól.

A (VI) egyenlet alapján megállapíthatók az összeadási formulák. Nevezetesen

$$\operatorname{arctg} z_1 + \operatorname{arctg} z_2 = \frac{1}{2i} \cdot l \frac{(1+iz_1)(1+iz_2)}{(1-iz_1)(1-iz_2)},$$

ámde

$$\frac{(1+iz_1)(1+iz_2)}{(1-iz_1)(1-iz_2)} = \frac{1-z_1z_2+i(z_1+z_2)}{1-z_1z_2-i(z_1+z_2)} = \frac{1+i \frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}}{1-i \frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}},$$

következőleg:

$$\operatorname{arctg} z_1 + \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg} \frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2}. \quad (\text{VIII})$$

Azonban ezt a képletet a trigonometriai összeadási formulákból is leszámaztathatjuk. Legyen ugyanis

$$\operatorname{arctg} z_1 = u_1, \quad z_1 = \operatorname{tg} u_1,$$

$$\operatorname{arctg} z_2 = u_2, \quad z_2 = \operatorname{tg} u_2,$$

tehát

$$\operatorname{tg}(u_1+u_2) = \frac{\operatorname{tg} u_1 + \operatorname{tg} u_2}{1 - \operatorname{tg} u_1 \operatorname{tg} u_2} = \frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2},$$

honnan inverzióval nyerjük a (VIII) formulát.

Az $\operatorname{arctg} z$ tulajdonságait a következő ismeretes formulából származtatjuk le:

$$\operatorname{ctg} u = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - u \right) = z,$$

tehát

$$u = \operatorname{arctg} z,$$

$$\frac{\pi}{2} - u = \operatorname{arctg} z,$$

azaz :

$$\operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z,$$

de

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{i} \operatorname{li} = \frac{1}{2i} l(-1),$$

ennélfogva :

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \left[l(-1) - l \frac{1+iz}{1-iz} \right],$$

tehát

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} l \frac{iz-1}{iz+1}, \quad (\text{IX})$$

$$(\operatorname{arctg} z)' = -\frac{1}{1+z^2}. \quad (\text{X})$$

A fentebb bemutatott eljáráshoz hasonlóan találjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} z_1 + \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg} \frac{z_1 z_2 - 1}{z_2 + z_1}. \quad (\text{XI})$$

A (IX) egyenlet alapján :

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{z} = \frac{1}{2i} l \frac{i-z}{i+z} = \frac{1}{2i} l \frac{1+iz}{1-iz},$$

következően :

$$\operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} \frac{1}{z}. \quad (\text{XII})$$

VIII. VÉGTELEN SOROK ÉS SZORZATOK.

82. A végtelen sorok definíciója.

Legyen adva a számoknak következő sorozata :

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

már most, ha a rövidség kedvéért

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

akkor az

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$$

számsorozatnak határértékét, feltéve természetesen, hogy ez létezik, nevezzük az

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

végteles sor összegének, mit röviden így is jelölhetünk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Pl. Legyen adva a következő végteles sor:

$$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\dots$$

a jelen esetben

$$s_n = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1},$$

vagy

$$s_n = \frac{1-x^n}{1-x},$$

ha $|x| < 1$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-x},$$

következőleg:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

ha

$$|x| < 1.$$

Ellenben, ha $|x| \geq 1$, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nem határozott véges szám. Abban az esetben, midőn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ véges és határozott, a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

sor *konvergensnek*, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$, akkor *divergensnek*, ha

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ határozatlan, akkor *oszcilláló*nak nevezzük.

Pl. az

$$1+1+1+\dots+\dots$$

sor divergens, az

$$1-1+1-1+1-\dots$$

sor pedig oszcilláló.

83. A konvergencia szükséges feltételei.

A

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

végteles sor értékének s_n határértékét nevezzük, jelöljük ezt röviden s -el, legyen továbbá

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots,$$

tehát

$$s - s_n = R_n.$$

Ennélfogva végteles sorunk összege s , ha megválaszthatom n -t, úgy hogy

$$|s - s_n| < \varepsilon,$$

vagy

$$|R_n| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesüljön. Tehát végteles sorunk konvergens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

1. Pl. Legyen adva a következő sor:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

tehát

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots,$$

minthogy

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n} > \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}$$

tehát bármily nagynak válasszuk is n -t, azért

$$R_n > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots,$$

a mi világosan kimondja, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty,$$

következésképpen végteles sorunk divergens.

2. Pl. Ha

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$$

a pozitív számoknak folyton fogyó szorzata s

$$\lim p_n = 0,$$

akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} p_n = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \dots$$

sor konvergens.

Nevezetesen

$$s_{2n} = p_1 - p_2 + \dots + p_{2n-1} - p_{2n},$$

$$R_{2n} = p_{2n+1} - p_{2n+2} + p_{2n+3} - p_{2n+4} + \dots$$

R_{2n} -et a következő két különböző alakba írjuk:

$$R_{2n} = (p_{2n+1} - p_{2n+2}) + (p_{2n+3} - p_{2n+4}) + \dots$$

$$R_{2n} = p_{2n+1} - (p_{2n+2} - p_{2n+3}) - (p_{2n+4} - p_{2n+5}) - \dots$$

R_{2n} minden körülmények között pozitív, tehát ezen egyenletek alapján

$$p_{2n+1} > R_{2n} > p_{2n+1} - p_{2n+1},$$

honnan következik, hogy

$$\lim_{n=\infty} R_{2n} = 0,$$

tehát $\lim_{n=\infty} s_{2n}$ is határozott véges szám, de $\lim_{n=\infty} s_{2n-1}$ szintén ugyanazon limeshez közeledik, ugyanis

$$s_{2n-1} - s_{2n} = p_{2n},$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = 0,$$

a mivel egyúttal igazoltuk, hogy felvett sorunk tényleg konvergens. Így az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

sor konvergens.

Ha sorunk konvergens, akkor úgy s_n -nek, mint s_{n+k} -nak ugyanazon határértékhez kell közeledni, ha n -el a végtelenbe megyünk, mert különben az s_1, s_2, \dots számsorozatnak nem lenne határértéke, tehát

$$\lim_{n=\infty} s_{n+k} = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Legyen a rövidség kedvéért

$$K_{nk} = s_{n+k} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}.$$

Tehát fentebbi egyenletünk alapján kimondhatjuk, hogy *végtelen sorunk konvergens, ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{nk} = 0$$

k minden értéke mellett. Ha *k*-t végtelennek választjuk, akkor mivel

$$(K_{nk})_{k=\infty} = R_n,$$

tehát a már első ízben kimondott konvergencia kriteriumunkat nyerjük.

Ha *k*-t egynek választjuk, akkor

$$K_{n1} = u_{n+1},$$

miel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{n1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = 0$$

a konvergencia szükséges feltételeinek csak egyike, azért még nem elegendő. Ennélfogva a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

végteles sor konvergenciájának szükséges, de nem elegendő feltétele, hogy legyen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Az abszolút-értékek tárgyalásánál láttuk, hogy

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

Ha tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

sor is konvergens, akkor adott sorunk is az s az ilyen sort *feltétlenül konvergens* sornak nevezzük.

Pl. legyen

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n},$$

mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 2$$

sor konvergens, azért adott sorunk feltétlenül konvergens.

Ha az adott sorunk konvergens, de a tagok abszolút értékeiből alkotott sor nem az, akkor sorunkat *feltételesen konvergensnek* nevezzük.

Pl. Mint láttuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

sor konvergens, de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

nem az, tehát az előbbi sor feltételesen konvergens.

Minthogy a következőkben a soroknak csak abszolút konvergencia kriteriumait állapítjuk meg, azért vizsgálódásainkat csak pozitív tagokból álló sorokra terjesztjük ki.

84. A végtelen szorzatokról általában.

Legyen adva az

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

számoknak végtelen sorozata, s legyen a rövidség kedvéért

$$P_n = u_1 u_2 \dots u_n, \\ n = 1, 2, 3, \dots$$

akkor a

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

számsorozatnak a határértékét — föltéve, hogy ez létezik — az adott számsorozatból alkotott végtelen szorzatnak nevezzük s így jelöljük :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (1)$$

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ véges zérustól különböző szám, akkor a végtelen szorzatot *konvergensnek*, ha zérus, akkor *tágabb értelemben konvergensnek* s ha végtelen, akkor *divergensnek* nevezzük.

Ha P_n -nek van zérustól különböző határértéke, akkor bármily szám legyen is k

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_{n+k} - P_n) = 0,$$

azaz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n (u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+k} - 1) = 0,$$

a mi csak úgy lehetséges, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} u_{n+2} \dots u_{n+k} - 1) = 0 \quad (2)$$

minden k mellett, ez egyúttal a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy végtelen szorzatunk konvergens legyen.

$k=1$ esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = 1 \quad (3)$$

a konvergenciának csak szükséges, de nem elegendő feltétele, minthogy a (2) egyenletnek bármily k -ra nézve teljesülni kell. (3) feltételünk alapján u_n -t a következő alakba írhatjuk:

$$u_n = 1 + a_n,$$

hol

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

a konvergenciának szükséges, de nem elegendő feltétele.

Végtelen szorzatunkat ezen alapon következő alakba írhatjuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Végtelen szorzatunkat pozitív, negatív vagy komplex tagokból álló végtelen szorzatnak nevezzük, a szerint a mint a_1, a_2, \dots számsorozat tagjai pozitív, negatív vagy komplex számok.

85. Pozitív és negatív tagokból álló végtelen szorzatok.

Ha a

$$p_1, p_2, \dots, p_n, \dots, \\ q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

számsorozatokban csak pozitív számok fordulnak elő, akkor a

pozitív és negatív tagokból álló végtelen szorzatokat jellemző analitikai alakok rendre:

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + p_n),$$

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q_n),$$

melyekre nézve a konvergencia szükséges, de nem elégséges feltételei:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0,$$

Minthogy vizsgálatainkból kihagyhatjuk azokat a tagokat, melyekben p , vagy q nagyobb az egységnél, éppen azért ezután mindig feltételezzük, hogy

$$p_i < 1, \quad q_i < 1.$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

Ha már most

$$P_n = \prod_{i=1}^n (1 + p_i), \quad Q_n = \prod_{i=1}^n (1 - q_i),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

akkor könnyen belátható a következő egyenlőtlenségek helyesége:

$$P_1 < P_2 < P_3 < \dots$$

$$Q_1 > Q_2 > Q_3 > \dots$$

Ha tehát azt akarjuk kimutatni, hogy végtelen szorzataink konvergensek, akkor azt kell bebizonyítani, hogy a P_1, P_2, \dots folyton növekvő számsorozatnak van véges felső határa, a Q_1, Q_2, \dots folyton fogyó számsorozatnak pedig van zérustól különböző alsó határa.

A szorzások végrehajtásával meggyőződhetünk, hogy

$$P_2 > 1 + p_1 + p_2,$$

$$P_3 > 1 + p_1 + p_2 + p_3,$$

általában

$$P_n > 1 + \sum_{i=1}^n p_i. \quad (1)$$

Hasonlóképen találjuk, hogy

$$Q_n > 1 - \sum_{i=1}^n q_i. \quad (2)$$

Ha a $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ és $\sum_{i=1}^{\infty} q_i$ sorok konvergenssek, akkor kutatásainkat a soroknak csak azon részére terjesztjük ki, melyben az előforduló tagok összege kisebb az egységnél, minthogy a sor elején levő tagok a konvergenciára befolyást nem gyakorolnak, tehát elhanyagolhatók. Feltételezzük tehát, hogy bármily n -re nézve a mondott feltételek mellett:

$$\sum_{i=1}^n p_i < 1, \quad \sum_{i=1}^n q_i < 1,$$

tehát

$$1 - \sum_{i=1}^n q_i$$

minden n -re nézve zérustól különböző pozitív szám. Minthogy az (1) és (2) egyenlőtlenségek alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n > 1 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n > 1 - \sum_{i=1}^{\infty} q_i. \quad (4)$$

Azért a (3) egyenlőtlenség alapján:

$\alpha)$ Ha $\prod_{n=1}^{\infty} (1+p_n)$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ is az.

$\beta)$ Ha $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ divergens, akkor $\prod_{n=1}^{\infty} (1+p_n)$ is az.

A (4) egyenlőtlenségből pedig következik, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ konvergens, akkor $\prod_{n=1}^{\infty} (1-q_n)$ is az, mert Q_n mindig nagyobb marad egy zérustól különböző pozitív számnál.

Kimutatjuk még, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergens, akkor $\prod_{n=1}^{\infty} (1+p_n)$ és az, a miből aztán következik, hogy ha $\prod_{n=1}^{\infty} (1+p_n)$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ is az; mert ha konvergens volna, akkor végtelen szorzatunk is az lenne, a mi feltevésünkkel ellenkezik.

Ugyanis

$$1 + p_n < \frac{1}{1 - p_n},$$

tehát

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+p_n) < \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-p_n)}, \quad (5)$$

ámde, ha $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergens, akkor $\prod_{n=1}^{\infty} (1-p_n)$ zérustól különböző pozitív szám, tehát recziprokja is véges pozitív szám, melynél egyenlőtlenségünk bal oldalán levő végtelen szorzat kisebb marad, a mi csak úgy lehetséges, ha az konvergens.

Végül kimutatjuk, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ divergens, akkor $\prod_{n=1}^{\infty} (1-q_n)$ zérus, a miből következik, hogy ha $\prod_{n=1}^{\infty} (1-q_n)$ zérus, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ divergens, mert ha nem volna az, akkor végtelen szorzatunk sem lehetne zérus, a mi föltevésünkkel ellenkezik.

(5) egyenlőtlenségünk alapján ugyanis

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q_n) < \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1+q_n)}. \quad (6)$$

Ha tehát $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ divergens, akkor $\prod_{n=1}^{\infty} (1+q_n)$ is az, következésképp egyenlőtlenség jobboldala zérus, baloldala pedig ennél is kisebb pozitív szám, a mi csak úgy lehetséges, ha $\prod_{n=1}^{\infty} (1-q_n)$ zérus.

Fejtegetéseink eredményét tehát a következőkben foglalhatjuk össze:

A $\prod_{n=1}^{\infty} (1+p_n)$ végtelen szorzat a $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ végtelen sorral egyszerre konvergens vagy divergens.

A $\prod_{n=1}^{\infty} (1-q_n)$ végtelen szorzat pedig konvergens, vagy zérus a szerint, a mint $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ végtelen sor konvergens, vagy divergens s viszont.

Utóbbi tételünknel mindig feltételezzük, hogy

$$\lim q_n = 0.$$

Ha már most

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$$

kevert előjelű végtelen szorzat konvergencia kriteriumait akar-

jük megállapítani, akkor a pozitív és negatív tagokból alkotott végtelen szorzat értékeit rendre P , Q -val jelölván, kimutatjuk, hogy ha P és Q határozott véges értékek, akkor

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) = PQ.$$

Ugyanis N tag szorzata legyen $P_n Q_m$, $n + m = N$, mivel

$$\lim (P_n Q_m) = \lim P_n \lim Q_m = PQ$$

azért

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) = \lim P_n \lim Q_n = PQ.$$

Pl. Legyen

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a+n-1}{b+n-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a-b}{b+n-1}\right),$$

mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a-b}{b+n-1}$$

divergens, azért ha $a > b$, akkor

$$P = \infty,$$

ha pedig $a < b$, akkor

$$P = 0.$$

Legyen már most a rövideg kedvéért

$$P_r = \prod_{n=1}^r \left(1 + \frac{a-b}{b+n-1}\right),$$

ha

$$b = 1, \quad a = -m,$$

akkor

$$\begin{aligned} P_r &= \prod_{n=1}^r -\frac{m-n+1}{n} = \\ &= (-1)^r \frac{m(m-1) \dots (m-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r} = (-1)^r \binom{m}{r}. \end{aligned}$$

A jelen esetben $a < b$, ha $-m < 1$, azaz: $m > -1$.

Ennélfogva

$$\lim_{r=\infty} P_r = 0, \quad \text{ha } m > -1,$$

azaz

$$\lim_{r=\infty} \binom{m}{r} = 0, \quad \text{ha } m > -1. \quad (7)$$

86. Komplex tagokból álló végtelen szorzatok.

Ha a

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$$

végtelen szorzat komplex tagokból áll, akkor, mivel általában

$$|1+u_n| \leq 1+|u_n|,$$

azért

$$\prod_{n=1}^{\infty} |1+u_n| \leq \prod_{n=1}^{\infty} (1+|u_n|).$$

Ha tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

végtelen sor konvergens, akkor biztos, hogy végtelen szorzatunk értékének abszolút értéke kisebb marad egy határozott véges számnál. Ki kell még mutatnunk, hogy ebben az esetben még határozott értékhez is közeledik.

Legyen ugyanis

$$u_n = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n) = a_n + ib_n;$$

mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$$

sor konvergens, azért

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

sorok is azok. Legyen továbbá

$$1+u_n = \rho_n (\cos \psi_n + i \sin \psi_n) = \alpha_n + 1 + ib_n,$$

mivel

$$|1+u_n| \leq 1+|u_n|,$$

azaz:

$$\rho_n \leq 1+r_n,$$

azért

$$\rho_n = 1 + \lambda_n r_n \quad |\lambda_n| \leq 1$$

s mivel ezen feltételek mellett $\sum r_n$ sorral a $\sum \lambda_n r_n$ sor is konvergens, azért $\prod (1+r_n)$ -al a $\prod \rho_n = \prod (1+\lambda_n r_n)$ végtelen szorzat is az. Ámde

$$\sum |b_n| \quad \text{és} \quad \sum \frac{|b_n|}{|1+\lambda_n r_n|}$$

sorok egyszerre konvergensek, minthogy

$$\lim_{n=\infty} |b_n| : \frac{|b_n|}{|1+\lambda_n r_n|} = \lim_{n=\infty} |1+\lambda_n r_n| = 1.$$

$$\rho_n \sin \phi_n = b_n,$$

tehát

$$|\sin \phi_n| = \frac{|b_n|}{|1+\lambda_n r_n|}$$

következőleg

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin \phi_n| \quad (1)$$

végtelen sor szintén konvergens s evvel együtt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n| \quad (2)$$

sor is az. Ugyanis (1) sorunk konvergenziája értelmében:

$$\lim_{n=\infty} \sin \phi_n = 0,$$

tehát $\lim_{n=\infty} \phi_n$ szintén zérus s így

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin \phi_n}{\phi_n} = 1,$$

tehát (1) és (2) soraink egyszerre konvergensek. Amde

$$\prod_{n=1}^r (1+u_n) = \prod_{n=1}^r \rho_n (\cos \phi_n + i \sin \phi_n) =$$

$$= \rho_1 \rho_2 \dots \rho_r [\cos (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_r) + i \sin (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_r)],$$

melyet jelöljünk röviden $R_r (\cos \chi_r + i \sin \chi_r)$ -vel, s mivel fejtegetéseink szerint:

$$\lim_{r=\infty} R_r = R, \quad \lim_{r=\infty} \chi_r = \chi,$$

hol R és χ határozott véges számok, azért

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$$

végtelen sorzat is határozott véges szám. Kimondhatjuk tehát

a következő tételt: $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n)$ végtelen szorzat konvergens, ha

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ végtelen sor is az.

87. Hatványsorok konvergenciája.

A hatványsorok analitikai alakja a következő:

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

ennek a sornak a konvergenciáját megállapítani annyit tesz, mint meghatározni z azon értékeit, melyek mellett sorunk konvergens, z minden ilyen értékeire nézve:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| < 1,$$

honnan

$$|z| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

tehát a $z=0$ pont körül írt $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ sugarú körben vannak azon z értékek, melyek mellett hatványsorunk konvergens s ezt a kört nevezzük hatványsorunk *konvergenciakörének*. Tehát hatványsorunk konvergenciakörének bármely helyén határozott véges értéket vesz fel.

Egy másik kritériumunk alapján hatványsorunk konvergens, ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1.$$

honnan

$$|z| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = r.$$

Tehát hatványsorunk konvergencia körül ezen r sugarú kört is tekintjük. Ha pedig

$$\mathfrak{P}(z-a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

akkor hatványsorunk konvergens, ha

$$|z-a| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \rho,$$

vagy ha

$$|z-a| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = r,$$

azaz: hatványsorunk konvergenciaköréül az a pont körül írt ρ , vagy r sugarú kört kell tekinteni.

1. Pl. Legyen

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

ennélfogva hatványsorunk konvergenciaköre a $z=0$ pont körül írt végtelennagy sugarú kör. Más részről, ha k tetszőleges véges egész szám, de n ennél nagyobb, akkor

$$n! = k!(k+1) \dots n > k! k^{n-k},$$

tehát

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{k!} k^{1-\frac{k}{n}}$$

honnan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} > k,$$

azaz: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$ minden véges k számnál nagyobb; ámde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = r,$$

tehát hatványsorunk konvergenciakörének sugara minden véges számnál nagyobb; ez eredmény az imént talált eredménnyel megegyezik.

2. Pl. Ha

$$\mathfrak{P}(z) = \sum \frac{z^n}{n},$$

akkor a konvergenciakör sugara

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

vagy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n},$$

ez nem lehet egyenlő $1+\varepsilon$ -nal, bármily kicsiny véges szám volna is ε , mert

$$(1+\varepsilon)^n > 1+n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2,$$

n -et mindig megválaszthatjuk oly nagyak, hogy legyen

$$n < 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} n < \lim_{n=\infty} \left[1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 \right],$$

ha tehát föltevésünk értelmében:

$$\lim_{n=\infty} n = \lim_{n=\infty} (1 + \varepsilon)^n > \lim_{n=\infty} \left[1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 \right],$$

akkor előbbi egyenlőtlenségünkkel ellentmondásba jutunk, tehát ε minden véges számnál kisebb, azaz: a konvergencziakör sugara a második kritérium alapján is egy.

Ha pedig hatványsorunk

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n},$$

akkor a konvergencia feltétele:

$$|z| > \lim_{n=\infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right| = \rho_1,$$

vagy

$$|z| > \lim_{n=\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b_n}} = r_1,$$

tehát hatványsorunk a kezdőpont körül ρ_1 , vagy r_1 sugárral írt körön kívül konvergens. Hasonlóképen a

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{z-a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

az a pont körül ρ_1 vagy r_1 sugárral írt körön kívül konvergens.

Két hatványsor összege, vagy különbsége konvergencia köreik közös területének bármely helyén egyenlő az egyes végtelen soroknak azon helyhez tartozó értékeinek összegével. Legyen ugyanis adva a következő két hatványsor:

$$\mathfrak{P}(z-a_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a_1)^n$$

$$\mathfrak{P}(z-a_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a_2)^n$$

a legyen konvergenciaköreik közös területének valamely helye, akkor, ha

$$P_n = \sum_{i=0}^n a_i (a-a_1)^i,$$

$$Q_m = \sum_{i=0}^m b_i (a+a_2)^i$$

$$\lim (P_n \pm Q_m) = \lim P_n \pm \lim Q_m.$$

Minthogy $P_n \pm Q_m$ összegezését tetszőleges módon végezhetem, azért egyenletünk azt a tételt mondja ki, hogy az $x=a$ helyen a két hatványsor tetszőleges módon képzett összege, vagy különbsége oly határértéket szolgáltat, mely egyenlő az egyes sorok határértékeinek összegével, vagy különbségével.

88. Taylor és Maclaurin sora.

Láttuk, hogy $f(x)$, ha n -edfokú racionális függvény, az $x=a$ helyen a következő sorral jellemezhető:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Ha már most $f(x)$ valódi függvény nem racionális egész függvény, akkor nem is lehet egyenlő a főlírt polinommal; mindazonáltal azt a kérdést vetjük fel, hogy egy ily polinom az $x=a$ hely környezetében, mily pontossággal határozza meg a függvény értékét. Mindenekelőtt függvényünkéről feltételezzük, hogy az első, ..., másod- és n -ed rendű differenciálhányadosai az $x=a$ hely közelében léteznek. Mindenesetre kell a megszabott feltételek mellett oly $R_1(x)$ függvénynek létezni, melyre nézve:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + R_1(x),$$

honnan

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!} (x-a) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1}.$$

Ha a -t felcseréljük x -el, akkor $R_1(x)$ függvényből meghatározott $R(x)$ függvény lesz, ennél fogva:

$$R(x) = f(a) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(a-x) - \dots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(a-x)^{n-1}, \quad (1)$$

honnan

$$R'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(a-x)^{n-1}.$$

Amde általánosított középértéktételünk értelmében, ha $R(x)$ és $\varphi(x)$ folytonos és differenciálható függvények, akkor

$$\frac{R(x) - R(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{R'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

hol ξ az x és a között levő szám; minthogy a jelen esetben

$$R(a) = 0,$$

$$R'(\xi) = -\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(a-\xi)^{n-1},$$

következőleg:

$$R(x) = \frac{\varphi(a) - \varphi(x)}{\varphi'(\xi)} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} (a-\xi)^{n-1}. \quad (2)$$

Ha már most

$$a - x = h,$$

akkor

$$a = x + h, \quad \xi = x + \theta h, \quad \theta < 1$$

tehát az (1) egyenlet következtében:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + R(x), \quad (3)$$

hol a (2) egyenlet alapján:

$$R(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\varphi'(x+\theta h)} \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{(n-1)!} ((1-\theta)^{n-1}h^{n-1}). \quad (4)$$

A (3) sort véges TAYLOR sornak, $R(x)$ -t pedig a TAYLOR sor maradékának nevezzük. Ha h változó valamely tartományában

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0,$$

akkor

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots, \quad (5)$$

mely végtelen sor föltevésünk értelmében h -nak csak az imént megjelölt tartományában konvergens, ezt a sort nevezzük TAYLOR sornak.

Ha (3) és (4) egyenletünkben x helyett 0-t, h helyett pedig x -et írunk, akkor a következő két egyenlethez jutunk:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R(0), \quad (6)$$

$$R(0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{\varphi'(\theta x)} \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} x^{n-1}; \quad (7)$$

a (6) sort véges MACLAURIN-féle sornak nevezzük. Ha x valamely tartományában

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(0) = 0,$$

akkor $f(x)$ -t ebben a tartományban a következő konvergens sor képviseli:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \dots \quad (8)$$

melyet MACLAURIN-féle sornak nevezünk.

A (2) alatt levő maradék alakjának $\varphi(x)$ tetszőleges megválasztásával végtelen sokféle alakot adhatunk. Legyen pl.

$$\varphi(x) = (a-x)^p,$$

tehát

$$\varphi'(x) = -p(a-x)^{p-1}$$

következőleg:

$$R(x) = \frac{(a-x)^p (a-\xi)^{n-p} f^{(n)}(\xi)}{p \cdot (n-1)!},$$

melyből az $a = x + h$, $\xi = x + \theta h$ szubsztituczióval a (4) egyenletnek következő alakját nyerjük:

$$R(x) = \frac{h^n (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(\xi)}{p \cdot (n-1)!};$$

melyből, ha $p=1$, akkor

$$R(x) = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(x+\theta h)}{(n-1)!}; \quad (9)$$

ez a maradéktag CAUCHY-féle alakja, ha pedig $p=n$, akkor

$$R(x) = \frac{h^n f^{(n)}(x+\theta h)}{n!}; \quad (10)$$

ez pedig a maradék LAGRANGE-féle alakja. A (9) és (10) for-

mulákból a MACLAURIN sorra nézve a következő alakú maradéktagokat nyerjük:

$$R(0) = \frac{x^n (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}, \quad (11)$$

$$R(0) = \frac{x^n f^{(n)}(\theta x)}{n!}. \quad (12)$$

Az alkalmazásokban a maradéktagnak azt az alakját használjuk fel, a melyik kutatásunkban célunknak legjobban megfelel.

89. Az exponenciális függvény sorbafejtése.

Legyen

$$f(x) = e^x,$$

tehát

$$f^{(i)}(x) = e^x, \quad f^{(i)}(0) = 1,$$

ennélfogva a véges MACLAURIN-féle sor szerint:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x_n}{n!} + R(0),$$

hol a LAGRANGE-féle alak szerint:

$$R(0) = \frac{x^n e^{\theta x}}{n!}.$$

Legyen x két egészen tetszőleges p és $p+1$ véges egész számok között levő szám, tehát

$$p < x < p+1,$$

tehát $e^{\theta x}$ szintén véges, és mivel

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x^p}{p!} \cdot \frac{1}{\frac{p+1}{x} \cdot \frac{p+2}{x} \dots \frac{n}{x}},$$

azért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(0) = \frac{x^p e^{\theta x}}{p!} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty} \frac{p+i}{x}} = 0,$$

mínthogy $R(0)$ határértéke x minden véges értéke mellett

zérus, azért e^x a következő x minden véges értéke mellett konvergens végtelen sorral jellemezhető:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ha pedig

akkor

$$f(x) = a^x,$$

$$f^{(n)}(x) = (la)^n a^x,$$

$$f^{(n)}(0) = (la)^n.$$

A jelen esetben tehát

$$R(0) = \frac{(xla)^n a^{\theta x}}{n!},$$

mely az imént bemutatott fejtegetések alapján x minden véges értéke mellett n növésevel a zérus felé közeledik, tehát

$$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(la)^n}{n!} x^n.$$

90. $\sin x$ és $\cos x$ sorbafejtése.

Ha

akkor

$$f(x) = \sin x,$$

$$f^n(x) = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f^n(0) = \sin n \frac{\pi}{2},$$

tehát

$$R(0) = \frac{x^n \sin \left(\theta x + n \frac{\pi}{2} \right)}{n!},$$

mely az előbbi fejezet fejtegetései szerint n növekedésével a zérus felé közeledik, tehát

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n!} x^n.$$

Ha n páros, akkor $\sin n \frac{\pi}{2} = 0$, tehát végtelen sorunkban a

páros kitevőjű tagok nem fordulnak elő, ha pedig

$$n = 2r + 1,$$

akkor

$$\sin(2r+1) \frac{\pi}{2} = (-1)^r,$$

következően:

$$\sin x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Ha pedig

$$f(x) = \cos x,$$

akkor

$$f^{(n)}(x) = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right),$$

$$f^{(n)}(0) = \cos n \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right)}{n!} = 0,$$

tehát

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n!} x^n.$$

De ha n páratlan, akkor $\cos n \frac{\pi}{2}$ zérus, tehát sorunkban a páratlan kitevőjű tagok nem fordulnak elő; ha pedig:

$$n = 2r,$$

akkor

$$\cos 2r \frac{\pi}{2} = (-1)^r,$$

következően:

$$\cos x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{2r!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

91. Newton binomiális tételének általánosítása.

Jelöljünk k -val tetszőleges valós számot és legyen

$$f(x) = (1+x)^k,$$

tehát

$$f^{(n)}(x) = n! \binom{k}{n} (1+x)^{k-n},$$

$$f^{(n)}(0) = n! \binom{k}{n},$$

és a CAUCHY-féle maradéktétel értelmében:

$$R(0) = n \binom{k}{n} x^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} (1+\theta x)^{k-1}.$$

Ha $|x|$ kisebb az egységnél, akkor

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x}$$

kiseb az egységnél, vagy avval egyenlő a szerint, a mint θ zérustól különböző, vagy zérus, tehát ennek megfelelőleg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1}$$

zérussal, vagy az egységgel egyenlő.

Legyen továbbá

$$u_n = n \binom{k}{n} x^n,$$

tehát

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left(1 - \frac{k}{n} \right) |x|,$$

ennélfogva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| < 1,$$

a miből következik, hogy $\sum u_n$ sor konvergens, tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

s így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(0) = 0, \quad |x| < 1$$

következőleg:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

Ha $x = -1$, akkor

$$R(0) = (-1)^n n \binom{k}{n} (1-\theta)^{k-1},$$

de

$$n \binom{k}{n} = (-1)^{n-1} k \left(1 - \frac{k}{1} \right) \left(1 - \frac{k}{2} \right) \dots \left(1 - \frac{k}{n-1} \right),$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(0) = -k(1-\theta)^{k-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right),$$

mely zérus csak úgy lehet, ha a végtelen szorzat tárgyalása alkalmával kifejtett tételek alapján:

$$k > 0.$$

Végül ha $x=1$, akkor a LAGRANGE-féle maradéktétel alapján:

$$R(0) = \binom{k}{n} (1+\theta)^{k-n},$$

a 81. fejezetben láttuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{k}{n} = 0, \quad k > -1$$

tehát ebben, de csakis ebben az esetben egész biztosan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(0) = 0.$$

Ezek után kimondhatjuk a következő tételt:

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n,$$

ha $|x| < 1$, vagy ha $x=1$, $k > -1$; vagy ha $x=-1$, $k > 0$.

92. $l(1+x)$ sorbafejtése.

Ha

$$f(x) = l(1+x),$$

akkor

$$f(0) = 0,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (1+x)^{-n},$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)!;$$

tehát a maradéktagnak CAUCHY-féle alakja:

$$R(0) = (-1)^{n-1} x^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} (1+\theta x)^{-1},$$

ennélfogva

$$\lim_{n=\infty} R(0) = 0,$$

ha

$$|x| < 1.$$

De ha $x = 1$, akkor a LAGRANGE-féle maradék-tétel értelmében

$$R(0) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} (1+\theta)^{-n},$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} R(0) = 0.$$

$x = -1$ esetében a maradék nem zérus, tehát

$$l(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

ha $|x| < 1$, vagy $x = 1$.

Gyakorlati számításoknál a következő eljárást követjük:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$|x| < 1, x = 1$

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$|x| < 1, x = -1$

hatványsoraink a közös konvergencia-területen összeadhatók, vagy kivonhatók, tehát

$$l \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right),$$

$|x| < 1$

ha

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{z+h}{z},$$

akkor

$$x = \frac{h}{2z+h}$$

és

$$l(z+h) - lz = 2 \left[\frac{h}{2z+h} + \frac{h^3}{3(2z+h)^3} + \frac{h^5}{5(2z+h)^5} + \dots \right],$$

ha

$$z=1, h=1,$$

akkor

$$l_2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right),$$

ha

$$z=2, \quad h=1,$$

akkor

$$l_3 = l_2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots \right).$$

Hasonlóképpen könnyen belátható, hogy

$$l_5 = l_4 + 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \dots \right),$$

$$l_7 = l_6 + 2 \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 13^3} + \frac{1}{5 \cdot 13^5} + \dots \right).$$

...

Ezzel az eljárással, mint látható az e alapú logaritmus-rendszer igen nagy könnyűséggel kiszámítható, az áttérés a alapú logaritmusrendszerre az ismeretes

$$\log_a m = \frac{1}{l_a} l m$$

képlet segítségével történik. Így

$$\log_{10} m = \frac{1}{l_{10}} l m,$$

hol

$$l_{10} = 0,43429448 \dots$$

$\log_{10} m$ szimbolum helyett röviden a $\log m$ szimbolumot használjuk.

93. Arctg x sorbafejtése.

Legyen

$$f(x) = \arctg x,$$

akkor az 53. §. fejtegetései szerint:

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n 2n!$$

tehát

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n R(x),$$

honnan

$$(\arctg x)' = 1 - x^2 + x^4 - \dots (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n R'(x),$$

más részről

$$(\arctg x)' = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2},$$

tehát

$$R'(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

De a 84. §. fejtegetései szerint:

$$\frac{R(x) - R(0)}{\varphi(x) - \varphi(0)} = \frac{R'(\theta x)}{\varphi'(\theta x)},$$

hol

$$R(0) = 0,$$

$$R'(\theta x) = \frac{(\theta x)^{2n}}{1+(\theta x)^2}.$$

Legyen továbbá

$$\varphi(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \varphi'(x) = x^{2n},$$

tehát

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(\theta x) = (\theta x)^{2n},$$

és így

$$R(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1+\theta^2 x^2},$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0,$$

ha

$$|x| \leq 1.$$

Ámde az $R'(x)$ számára nyert kifejezés a mértani sor saját-ságai alapján csak akkor helyes, ha $|x| < 1$, mert $x = \pm 1$ esetben $(\arctg x)'$ sora nem konvergens, tehát

$$\arctg x = \sum_{\substack{n=0 \\ |x| < 1}}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

De sorunk még az $x=1$ határnál is konvergens, ennélfogva:

$$\arctg 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

ugyanis

$$\operatorname{arctg}(1-\varepsilon) = 1 - \varepsilon - \frac{(1-\varepsilon)^3}{3} + \frac{(1-\varepsilon)^5}{5} - \dots$$

konvergens ε minden képzelhető kicsiny értéke mellett. Legyen általában

$$(1-\varepsilon)^{2r+1} = 1 - \eta_{2r+1}$$

hol

$$\lim_{\varepsilon=0} \eta_{2r+1} = 0,$$

tehát

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(1-\varepsilon) &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \\ &\quad - \eta_1 + \frac{\eta_3}{3} - \frac{\eta_5}{5} + \frac{\eta_7}{7} - \dots \end{aligned}$$

ε megválasztható oly kicsinynek, hogy legyen:

$$\eta_1 - \frac{\eta_3}{3} + \frac{\eta_5}{5} - \dots = \eta,$$

hol η minden képzelhetőnél kisebb szám s ekkor

$$\operatorname{arctg}(1-\varepsilon) = -\eta + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

ha ε -t már annyira kisebbitettük, hogy vele együtt η is elhanyagolható minden véges mennyiség mellett, akkor

$$\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

egyenlethez jutunk, tehát sorunk csakugyan arctg értékét szolgáltatja. Ezt azért kellett kimutatni, mert sorunk az általános elmélet szerint csak $|x| < 1$ esetben szolgáltatja $\operatorname{arctg} x$ értékét.

A π meghatározására talált fentebbi sort feltalálója után LEIBNITZ-féle sornak nevezzük, de ennek konvergenciája igen lassú, azért a következő MACHIN-tól eredő eljárással π kiszámítására konvergensebb sort állapítunk meg. Legyen a rövidség kedvéért:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots$$

tehát

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{5},$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4a = \frac{2 \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a} = \frac{120}{119},$$

$$\operatorname{tg} \left(4a - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} 4a - 1}{1 + \operatorname{tg} 4a} = \frac{1}{239},$$

következően:

$$4a - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots,$$

honnan

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) - \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right) \end{aligned}$$

94. Arcsin x sorbafejtése.

Legyen

$$f(x) = \arcsin x,$$

akkor a 53. §. fejtegetése szerint:

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = 1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2,$$

tehát

$$\begin{aligned} f(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R(x), \end{aligned}$$

honnan

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} x^{2n-2} + R'(x).$$

De ismeretes, hogy

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

ha a rövidség kedvéért $-x^2$ helyett u -t írunk, akkor

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) u + \left(-\frac{1}{2}\right) u^2 + \dots + \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2}\right) u^{n-1} + R_1(u) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)} x^{2n-2} + R'(x) \\
 |u| &= |-x^2| < 1, \quad |x| < 1,
 \end{aligned}$$

tehát

$$R'(x) = R_1(u).$$

De a CAUCHY-féle maradéktétel értelmében:

$$\begin{aligned}
 R_1(u) &= n \left(-\frac{1}{2}\right) u^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta u}\right)^{n-1} (1+\theta u)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= (-1)^n n \left(-\frac{1}{2}\right) x^{2n} \left(\frac{1-\theta}{1-\theta x^2}\right)^{n-1} (1-\theta x^2)^{-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Az

$$\frac{R(x) - R(0)}{\varphi(x) - \varphi(0)} = \frac{R'(\theta_1 x)}{\varphi'(\theta_1 x)} \quad \theta_1 < 1$$

képletben legyen

$$\varphi(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

tehát

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(x) = x^{2n},$$

következően:

$$R(x) = (-1)^n n \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \left(\frac{1-\theta}{1-\theta(\theta_1 x)^2}\right)^{n-1} (1-\theta(\theta_1 x)^2)^{-\frac{1}{2}},$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(x) = 0,$$

ha $|x|$ kisebb az egységnél, s így

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x| < 1$$

Ha

95. $\sin(r \arcsin x)$ sorbafejtése.

akkor

$$f(x) = \sin(r \arcsin x),$$

$$f'(x) = r(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(r \arcsin x),$$

$$f''(x) =$$

$$= -r^2(1-x^2)^{-1} \sin(r \arcsin x) + rx(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cos(r \arcsin x),$$

honnan

$$f''(x)(1-x^2) - f'(x) \cdot x + r^2 f(x) = 0.$$

Ebből pedig n -szeres differenciálás után a következő redukciós formulát nyerjük:

$$(1-x^2) f^{(n+2)}(x) - (2n+1) x f^{(n+1)}(x) + (r^2 - n^2) f^{(n)}(x) = 0,$$

tehát

$$f^{(n+2)}(0) = -\frac{1}{(r^2 - n^2)} f^{(n)}(0),$$

$$f^{(n)}(0) = -\frac{1}{[r^2 - (n-2)^2]} f^{(n-2)}(0),$$

$$f^{(n-2k+2)}(0) = -\frac{1}{[r^2 - (n-2k)^2]} f^{(n-2k)}(0),$$

mely egyenletek összesorzásából következik, hogy

$$\begin{aligned} f^{(n+2)}(0) &= \\ &= (-1)^{k+1} [r^2 - (n-2k)^2] [r^2 - (n-2k+2)^2] \dots (r^2 - n^2) f^{(n-2k)}(0). \end{aligned}$$

Megfontolva már most, hogy

$$f^{(0)}(0) = f(0) = 0,$$

$$f'(0) = r,$$

azért, ha n helyett rendre $2k+1$ -t és $2k$ -t helyettesítünk, akkor a következő egyenletekhez jutunk:

$$f^{(2k+3)}(0) = (-1)^{k+1} r (r^2 - 1^2) (r^2 - 3^2) \dots [r^2 - (2k+1)^2],$$

$$f^{(2k+2)}(0) = 0,$$

ha pedig ezekben k helyett $k-1$ -et írunk, akkor

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k r (r^2 - 1^2) (r^2 - 3^2) \dots [r^2 - (2k-1)^2]$$

$$f^{(2k)}(0) = 0.$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

Tehát hatványsorunkban a páros kitevőjű tagok nem fordulhatnak elő. Ha r páratlan szám és pedig

$$r=2n+1,$$

akkor $f^{(2k-1)}(0)$ zérustól különböző míg $k \leq n$, de ha $k > n$, akkor mindig zérus. Ebben az esetben azután $\sin(r \operatorname{arcsin} x)$ $2n+1$ -ed fokú polinomává válik és pedig:

$$\sin(r \operatorname{arcsin} x) = rx + \sum_{k=1}^n \frac{r (r^2 - 1^2) (r^2 - 3^2) \dots [r^2 - (2k-1)^2]}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$r=2n+1.$

Ha

$$\arcsin x = z, \quad x = \sin z,$$

akkor

$$\sin rz = r \sin z + \sum_{k=1}^n \frac{r(r^2-1^2)(r^2-3^2)\dots[r^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!} \sin^{2k+1} z.$$

Ha már most ezt a képletet összevetjük a 75. §. (4) képletével, akkor azt találjuk, hogy az ott előforduló

$$a_0 = \frac{r(r^2-1^2)(r^2-3^2)\dots[r^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!}$$

$m=r=2n+1,$

következőleg ugyanazon fejezet fejtegetései alapján:

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \sin^2 \frac{\pi}{r} \sin^2 2 \frac{\pi}{r} \dots \sin^2 \frac{r-1}{2} \frac{\pi}{r} &= \\ &= \frac{r!}{(r^2-1^2)(r^2-3^2)\dots[r^2-(r-2)^2]}, \end{aligned}$$

ha r páros szám.

96. $\sin x$ és $\cos x$, mint végtelen szorzatok.

A 75. §. (VIII) képlete alapján

$$\sin \pi z = m \sin \frac{\pi z}{m} \prod_{r=1}^{\frac{m-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 r \frac{\pi}{m}} \right).$$

Ha m végtelen nagygyá válik, akkor, mivel

$$\lim_{m=\infty} m \sin \frac{\pi z}{m} = \pi z,$$

$$\lim_{m=\infty} \frac{\sin \frac{\pi z}{m}}{\sin r \frac{\pi}{m}} = \frac{z}{r},$$

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right). \quad (1)$$

A határértékre szabad volt áttérni, a mennyiben végtelen szorzatunk z minden véges értéke mellett konvergens, minthogy

$$\frac{z^2}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^2}{3^2} + \dots = z^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2}$$

végtelen sor is az. Ha (1) képletünkben πz helyett x -t írunk, akkor

$$\sin x = x \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{r^2 \pi^2} \right). \quad (2)$$

Továbbá az (1) képlet alapján:

$$\frac{\sin \pi x}{\sin \pi y} = \frac{x}{y} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{r^2 - x^2}{r^2 - y^2} = \frac{x}{y} \prod_{r=1}^{\infty} \frac{r-x}{r-y} \cdot \frac{r+x}{r+y}.$$

Ha

$$x = \frac{1}{2} - z,$$

$$y = \frac{1}{2},$$

akkor

$$\begin{aligned} \cos \pi z &= \left(1 - \frac{2z}{1} \right) \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2z}{2r-1} \right) \left(1 - \frac{2z}{2r+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{2z}{1} \right) \left(1 + \frac{2z}{1} \right) \left(1 - \frac{2z}{3} \right) \left(1 + \frac{2z}{3} \right) \left(1 - \frac{2z}{5} \right) \left(1 + \frac{2z}{5} \right) \dots \end{aligned}$$

tehát

$$\cos \pi z = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2r-1)^2} \right), \quad (3)$$

honnan

$$\cos x = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2r-1)^2 \pi^2} \right). \quad (4)$$

Az (1) képlet részletes alakja:

$$\sin \pi z = \pi z (1-z) (1+z) \left(1 - \frac{z}{2} \right) \left(1 + \frac{z}{2} \right) \left(1 - \frac{z}{3} \right) \left(1 + \frac{z}{3} \right) \dots,$$

ha z helyett $\frac{1}{2}$ -t írunk, akkor

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \dots$$

honnan

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \dots,$$

ezt a formulát fölfedezője után WALLIS-féle formulának nevezzük. Megjegyzendő, hogy JOHN WALLIS (1616—1703) ezt a formulát a differenciálszámítás felfedezése előtt állapította meg.

97. Végtelen soralakban adott függvények általános tulajdonságai.

Ha a

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

hatványsor a kezdő pont körül írható r sugarú körben konvergens, akkor ebben a körben folytonos és differenciálható függvény. Ugyanis

$$\mathfrak{P}(z + \Delta z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z + \Delta z)^n \quad (2)$$

hatványsor konvergens, ha

$$|z - (-\Delta z)| < r,$$

azaz a $-\Delta z$ körül írható r sugarú körben. Az (1) és (2) sor konvergenciaköreinek legyen z valamely közös helye, akkor ezen a helyen a két sor összegezhető s kivonható egymásból, tehát

$$\mathfrak{P}(z + \Delta z) - \mathfrak{P}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [(z + \Delta z)^n - z^n],$$

honnan

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [\mathfrak{P}(z + \Delta z) - \mathfrak{P}(z)] = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right) dz =$$

könnyű meggyőződni, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

végtelen sor, melyet $\mathfrak{P}(z)$ differenciálhányadosának nevezzünk és $\mathfrak{P}'(z)$ -vel jelölünk, szintén konvergens a kezdőpont körül írható r sugarú körben, tehát

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} [\mathfrak{P}(z + \Delta z) - \mathfrak{P}(z)] = 0,$$

továbbá

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{P}(z + \Delta z) - \mathfrak{P}(z)}{\Delta z} = \mathfrak{P}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Hasonlóképen bizonyítható be, hogy $\mathfrak{P}'(z)$ összes differenciálhányadosaival együtt a kezdőpont körül írt r sugarú körben folytonos és differenciálható függvények, ezen az alapon ezután $\mathfrak{P}(z)$ -t $f(z)$ -vel jelöljük, tehát

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

függvény a konvergenciakör területén folytonos s többszörösen differenciálható. Ugyanezen az alapon könnyű meggyőződni az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ jelentéséről. Ugyanis

$$f^{(n)}(0) = n! a_n,$$

tehát

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

s így

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Általánosabban, ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

az a pont körül írható r sugarú körben konvergens, akkor $f(z)$ ezen kör területén folytonos s többszörösen differenciálható függvény és

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

tehát

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n.$$

Ebből következik, hogy ha valamely függvény értelmezési tartományának a helyén sorbafejthető, ez a sorbafejtés csak egyféle módon lehetséges.

Hasonlóképen, ha az

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$$

függvényekből alkotott végtelen sor valamely tartományban konvergens, ez azt jelenti, hogy e tartomány bármely helyén, ha n -et elég nagynak választjuk k minden értéke mellett

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \dots + f_{n+k}(z)| < \varepsilon, \quad (1)$$

hol ε minden véges számnál kisebb. Ebben az esetben azután $f(z)$ a konvergencia tartományában folytonos s ha $f_1(z), f_2(z), \dots$ differenciálhatók, akkor differenciálható függvény is, és

$$f'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(z).$$

Ha $f_1(z), f_2(z) \dots$ végtelen sorok és általában

$$f_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + a_{i2}z^2 + a_{i3}z^3 + \dots,$$

akkor konvergenciaköreik közös tartományának bármely helyén:

$$f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r z^r, \quad (2)$$

hol

$$A_r = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ir}. \quad (3)$$

Tételünket csak arra az esetre mutatjuk ki, midőn a_{in} együtthatók pozitív számok. Legyen ugyanis a közös konvergenciakör sugara r , s ha ρ r -nél kisebb szám, akkor az (1) feltétel alapján:

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} a_{i0} + \rho \sum_{i=n+1}^{n+k} a_{i1} + \dots < \varepsilon \quad (1')$$

k minden értéke mellett, a mi feltevéseink alapján csak úgy lehetséges, ha általában

$$\sum_{i=n+1}^{n+k} a_{ir} < \varepsilon \rho^{-r}. \quad (4)$$

$r=0, 1, 2, \dots$

A mi azt mondja ki, hogy az A_r -nek megfelelő (3) sor konvergens, tehát A_r véges.

Ebből következik, hogy a (2) sor konvergens. Ugyanis a (4) alapján meghatározható h véges szám úgy, hogy legyen

$$A_r < h\rho^{-r}$$

és így

$$\left| \sum_{r=1}^{\infty} A_r z^r \right| < h \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|z|^r}{\rho^r},$$

azaz: a (2) sor a ρ sugarú, tehát ezzel együtt az r sugarú körben is konvergens.

Most még azt kell kimutatnunk, hogy

$$\left| \sum_{i=0}^n A_i z^i - \sum_{i=0}^n f_i(z) \right| < \varepsilon_1,$$

ha n -et elég nagynak választjuk. A kivonás eredménye a következő:

$$\left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i0} + z \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i1} + \dots + z^n \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{in} - \eta \right| < \varepsilon_1,$$

hol

$$\begin{aligned} \eta &= z^{n+1} \sum_{i=0}^{\infty} a_{in+1} + z^{n+2} \sum_{i=0}^{\infty} a_{in+2} + \\ &= A_{n+1} z^{n+1} + A_{n+2} z^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

minthogy a (2) sor konvergens, azért, ha n elég nagy

$$|\eta| < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

a (4) alapján pedig

$$\left| \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i0} + z \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{i1} + \dots + z^n \sum_{i=n+1}^{\infty} a_{in} \right| < \varepsilon \sum_{r=0}^n \frac{|z|^r}{\rho^r} < \frac{\varepsilon}{1 - \frac{|z|}{\rho}},$$

ha $|z| < \rho$, ámde ε megválasztható úgy, hogy legyen

$$\frac{\varepsilon}{1 - \frac{|z|}{\rho}} < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

következésképpen:

$$\left| \sum_{i=0}^n A_i z^i - \sum_{i=1}^n f_i(z) \right| < \varepsilon_1,$$

ha n -t elég nagynak választjuk, ebből aztán következik, hogy az r sugarú körben:

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i z^i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z).$$

Rögtön belátható, hogy ha a

$$\varphi_i = |a_{i0}| + |a_{i1}| |z| + |a_{i2}| |z|^2 \dots$$

sorokból alkotott

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i$$

sor konvergens, akkor reá alkalmazható a tétel, annál inkább alkalmazható tehát a

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(z)$$

sorra.

Vegyünk fel most két különböző sort az a pont körül, legyenek ezek:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n.$$

Ha $f(z)$ és $\varphi(z)$ az a pont körül írható bármily kis sugarú kör minden helyén ugyanazt az értéket veszi fel, akkor

$$a_n = b_n \\ n=1, 2, \dots$$

Ugyanis

$$f(a) = \varphi(a),$$

tehát

$$a_0 = b_0,$$

ebből következik, hogy

$$(z-a) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$$

és

$$(z-a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{n-1}$$

sorok az a pont körül írható ugyanazon kis kör minden helyén egyforma értéket vesznek fel, a mi csak úgy lehetséges, ha $z-a$ együtthatói is ugyanily tulajdonságúak, de ebből következik, hogy

$$a_1 = b_1,$$

tehát

$$(z-a)^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2}$$

és

$$(z-a)^2 \sum_{n=2}^{\infty} b_n (z-a)^{n-2}$$

szintén ily tulajdonságúak, tehát

$$a_2 = b_2$$

s i. t.

Legyen ezek után

adva a következő hatványsor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \mathfrak{P}(z-a);$$

konvergenciakörét nevezzük R_a -nak, tehát az R_a sugarú kör bármely helyén

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z-a|^n$$

sor konvergens. Ha b a konvergenciakör egy tetszőleges pontja, akkor mindazok a h pontok, melyekre nézve

$$|b-a| + |h| \leq R_a$$

benne vannak a b pont irható oly ρ sugarú körben, mely az R_a kört érinti. Ennélfogva

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|b-a| + |h|)^n$$

a ρ sugarú körben konvergens; tehát az előbbi fejezet fejtegetései szerint szabad $|h|$ hatványai szerint rendezni. Annál inkább szabad tehát rendezni h hatványai szerint a

$$f(b+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(b-a)+h]^n$$

sort. Miként könnyű meggyőződni a rendezés eredménye a következő sort szolgáltatja:

$$f(b+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} h^n.$$

$|h| < \rho$

$f(b+h)$ a ρ sugarú körben ugyanazokat az értékeket szolgáltatja, mint $f(z)$. A $f(b+h)$ -nak h szerint rendezett s a ρ sugarú körben érvényes sorát $f(z)$ identikusan transzformált sorának nevezzük.

98. Végtelen soralakban adott függvények folytatásai.

Ha az $f(z)$ -nek b ponthoz tartozó identikusan transzformált sora a ρ sugarú körnél nagyobb, mondjuk R_b sugarú körben (19. ábrán) konvergens, akkor $f(b+h)$, melyet ezután röviden $\varphi(h)$ -nak nevezünk, h -nak oly függvénye, mely oly pontokban is definiálva van, melyekben $f(z)$ még nincs. Már most ha ki tudjuk mutatni, hogy $\varphi(h)$ az R_a és R_b körök közös területének minden helyén oly értékeket vesz fel mint $f(z)$, akkor méltán nevezhetjük $f(z)$ folytatásának, a mennyiben értelmezési tartományának $f(z)$ értelmezési tartományába eső részének minden helyén a $f(z)$ -nek megfelelő értékrendszereket veszi fel, ellenben értelmezési tartományának többi részében már oly függvényértékekhez jutunk, melyeket $f(z)$ még nem tartalmaz. Ha tehát z -nek nevezzük a független változót s u -nak azon értéket, melyet $f(z)$, vagy $\varphi(z)$ felvesz a szerint, a mint z a R_a körben, vagy R_a körön kívül, de R_b körön belül van, akkor látható, hogy u -t oly vonatkozásba hoztuk z -vel, mely szerint R_a és R_b körök egyesítette tartományának minden z helyéhez tartozik egy határozott u érték, tehát u az egyesített tartományban z függvénye s ezt az u függvényt nem egy, hanem két végtelen sor definiálja, ú. m. az $f(z)$ és a $\varphi(z)$ sor, ezért mondjuk tehát $\varphi(z)$ -t $f(z)$ folytatásának, mert u értéktartományának $f(z)$ csak egy részét határozza meg, folytatását $\varphi(z)$ segítségével határozzuk meg.

Hogy tételünket bebizonyíthassuk, vegyünk fel a ρ sugarú körben egy c pontot úgy, hogy a c körül az R_a kört érintő ρ_1 sugarú körnek minden része ne essék bele a ρ sugarú körbe, vonjunk továbbá c pont körül oly ρ_2 sugarú kört is, mely a ρ kört érintse.

$f(z)$ -nek a c ponthoz tartozó identikusan transzformált sora

$$f(c+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} h^n, \\ |h| < \varrho_1$$

mely a ρ_1 sugarú körben oly értékrendszert szolgáltat, mint $f(z)$.

$\varphi(h)$ csak a ρ sugarú körben transzformálható identikusan, tehát a c ponthoz tartozó identikusan transzformált sora

$$\varphi(c+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n(c)}{n!} h^n, \\ |h| < \varrho_2$$

mely a ρ_2 sugarú körben ugyanazt az értékrendszert szolgáltatja mint $f(z)$, tehát $f(c+h)$ és $\varphi(c+h)$ a ρ_2 sugarú kör minden helyén megegyeznek egymással, s így

$$f^{(n)}(c) = \dot{\varphi}^{(n)}(c) \\ n=0, 1, 2, \dots$$

a miből következik, hogy $\varphi(c+h)$ a ρ_1 sugarú körnek is minden helyén megegyezik $f(z)$ -vel, a mi kimondja, hogy $\varphi(h)$ az R_a és R_b körök közös területének bármely helyén megegyezik $f(z)$ -vel, tehát $\varphi(h)$ $f(z)$ -nek tényleg folytatása.

Ha már most $\varphi(h) = f(b+h)$ -t jellemző analitikai alakban h helyett $z-b$ -t írunk, akkor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n = \mathfrak{P}(z-b), \\ |z-b| < R_b$$

ezt az alakot az $f(z)$ függvény analitikai alakjának nevezzük a $z=b$ helyen, ha az R_b sugarú körben felvesszünk valamely c pontot és erre a pontra nézve képezzük a függvény folytatását, nyerjük, hogy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z-c)^n = \mathfrak{P}(z-c); \\ |z-c| < R_c$$

az R_c sugarú kör az R_a és R_b körök meghatározta tartományon kívül levő helyeket is tartalmazhat. Ezen eljárásunkat tovább folytatva eljutunk a

$$\mathfrak{P}(z-a), \mathfrak{P}(z-b), \mathfrak{P}(z-c), \dots$$

végtelen sorok szakadatlan sorához, melyek valamennyien egy s ugyanazon függvény folytatásait képezik; összesen egy függvényt definiálnak s ezt a függvényt nevezte WEIERSTRASS *analitikai függvénynek*. Az analitikai függvények tehát nem egyebek, mint a CAUCHY definiálta *szinektikus* függvények. Később kimutatjuk még, hogy a *szinektikus függvény* fogalomköre sem tágabb az analitikai függvény fogalom körénél.

Fontos tételünkéből néhány következtetést vonunk, ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

és

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$$

hatványsorok konvergencia-köreik közös területének minden helyén egyforma értékeket vesznek fel, akkor azok egy s ugyanazon függvénynek a folytatásai. Ha c a közös konvergencia-területen van, akkor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (z-c)^n,$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(c)}{n!} (z-c)^n$$

hatványsorok c pont körül irt elég kis kör területének minden helyén ugyanazt az értéket veszik fel, tehát

$$f^{(n)}(c) = \varphi^{(n)}(c),$$

a mi kimondott tételünket igazolja. Ebből következik, hogy ha valamely hatványsorral definiált függvény konvergencia-körének bármily kis véges tartományában mindenütt konstans, akkor a függvény maga is az.

1. Pl. Legyen

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

$z=0$ hely körül

$$f(z) = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \mathfrak{P}(z)$$

$$|z| < 1$$

csak a zérus pont körül írható egységsugarú körben definiálja az $f(z)$ függvényt, ha a benne van ebben a körben, akkor $\frac{1}{1-a}$ -t sorunk segítségével meghatározhatjuk s mivel

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}},$$

tehát

$$f(z) = \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{1-a} \right)^n = \mathfrak{P}(z-a)$$

$$\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$$

$$|z-a| < |1-a|.$$

Sorunk tehát abban a körben konvergens, melyet az a pont körül az a pontot az 1 ponttal összekötő egyenessel, mint sugárral rajzolunk. Ha β benne van ebben a körben, akkor $\frac{1}{1-\beta}$ sorunk segítségével meghatározhatjuk s hasonlóképen nyerjük, hogy

$$f(z) = \frac{1}{1-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-\beta}{1-\beta} \right)^n = \mathfrak{P}(z-\beta).$$

$$|z-\beta| < |1-\beta|$$

Ez úton a

$$\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}(z-a), \mathfrak{P}(z-\beta), \dots$$

hatványsorok szakadatlan sorozatához jutunk, melyek valamennyien ugyanazon $\frac{1}{1-z}$ függvényt definiálják s valamennyinek konvergenciaköre átmegy a $z=1$ ponton.

Ezen elemi eljárással megállapított hatványsorok megegyeznek az általános elmélet útján megállapítottakkal. Ugyanis pl. $\mathfrak{P}(z-a)$ hatványsorban $(z-a)^n$ -nek az együtthatója

$$(1-a)^{-n-1}$$

ez pedig egyenlő $f^{(n)}(a) : n!$ -al, ugyanis

$$f^{(n)}(z) = [(1-z)^{-1}]^{(n)} = n! (1-z)^{-n-1},$$

a mi tételünket igazolja.

2. Pl. Ha $f(z)$ és $\varphi(z)$ rendre m és n -edfokú függvények, akkor, ha m kisebb, mint n és $\varphi(z)=0$ egyenletnek a gyökei a_1, a_2, \dots, a_n egymástól különbözők,

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{a_1}{1-\frac{z}{a_1}} + \frac{a_2}{1-\frac{z}{a_2}} + \dots + \frac{a_n}{1-\frac{z}{a_n}}$$

alakba írható, hol

$$a_i = -\frac{f(a_i)}{a_i \varphi'(a_i)}.$$

Minthogy az előbbi feladat szerint:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{a_i}} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a_i}\right)^r = \mathfrak{P}\left(\frac{z}{a_i}\right),$$

$|z| < |a_i|$

azért

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \sum_{i=1}^n a_i \mathfrak{P}\left(\frac{z}{a_i}\right),$$

$|z| < |a_1|$

ha az $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_i|$ között $|a_1|$ a legkisebb. Továbbá ha α az $|a_1|$ sugarú kör valamely pontja, akkor

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\frac{z}{a_i}} &= \frac{1}{1-\frac{\alpha}{a_i}} - \frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{a_i-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{1-\frac{\alpha}{a_i}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{z-\alpha}{a_i-\alpha}\right)^r = \mathfrak{P}\left(\frac{z-\alpha}{a_i-\alpha}\right) \end{aligned}$$

$|z-\alpha| < |a_i-\alpha|$

következően:

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \sum_{i=1}^n a_i \mathfrak{P}\left(\frac{z-\alpha}{a_i-\alpha}\right),$$

$|z-\alpha| < |a_i-\alpha|$

ha az $|a_1 - a|$, $|a_2 - a|$, ..., $|a_n - a|$ között $|a_r - a|$ a legkisebb. Azaz: valamely ponthoz tartozó sor konvergenciaköre átmegy a függvénynek a ponthoz legközelebb eső polusán.

99. $\operatorname{Tg} x$ és $x \operatorname{ctg} x$ sorbafejtése.

A $\sin x$ és $\cos x$ függvények értékváltozásaiából rögtön belátható, hogy $\ln \sin x$ véges, ha $0 < x < \pi$, $\ln \cos x$ pedig akkor véges, ha $|x| < \frac{\pi}{2}$. Következésképpen:

$$\ln \sin x = \ln x + \sum_{r=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{r^2 \pi^2} \right), \quad 0 < x < \pi$$

$$\ln \cos x = \sum_{r=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{4x^2}{(2r+1)^2 \pi^2} \right), \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

Ha mindkét egyenletünket differenciáljuk, akkor a következő két egyenlethez jutunk:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2x}{r^2 \pi^2 - x^2}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{8x}{(2r+1)^2 \pi^2 - 4x^2}. \quad (2)$$

De

$$\frac{x}{r^2 \pi^2 - x^2} = \frac{x}{r^2 \pi^2} + \frac{x^3}{r^4 \pi^4} + \frac{x^5}{r^6 \pi^6} + \dots,$$

tehát

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \frac{2x^2}{\pi^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} - \frac{2x^4}{\pi^4} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^4} - \frac{2x^6}{\pi^6} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^6} - \dots$$

Ha a rövidség kedvéért

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} = S_{2k}.$$

akkor

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{\pi^{2k}} x^{2k}. \quad (3)$$

$$0 < x < \pi$$

Továbbá

$$\frac{x}{(2r+1)\pi^2 - (2x)^2} = \frac{x}{(2r+1)^2\pi^2} + \frac{2^2x^3}{(2r+1)^4\pi^4} + \frac{2^4x^5}{(2r+1)^6\pi^6} + \dots$$

s ha

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^{2k}} = s_{2k},$$

akkor

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k+1}s_{2k}}{\pi^{2k}} x^{2k-1}. \quad (4)$$

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

Ámde

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^{2k}} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r)^{2k}} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}}, \end{aligned}$$

azaz:

$$S_{2k} = s_{2k} + \frac{1}{2^{2k}} S_{2k},$$

honnan

$$s_{2k} = \frac{S_{2k}(2^{2k}-1)}{2^{2k}},$$

ennélfogva a (4) egyenlet alapján:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2S_{2k}(2^{2k}-1)}{\pi^{2k}} x^{2k-1}, \quad (5)$$

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

Ezen egyenlet alapján pedig

$$(\operatorname{tg} x)_{x=0}^{(2k-1)} = \frac{2S_{2k}(2^{2k}-1)}{\pi^{2k}} (2k-1)!$$

de az 53. fejezet fejtegetései szerint:

$$(\operatorname{tg} x)_{x=0}^{(2k-1)} = T_k = \frac{1}{k} 2^{2k-1} (2^{2k}-1) B_k,$$

tehát

$$T_k = \frac{2S_{2k} (2^{2k}-1)}{\pi^{2k}} (2k-1)! \quad (6)$$

$$B_k = \frac{2k! S_{2k}}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \quad (7)$$

Ennélfogva $\operatorname{tg} x$ számára még a következő sorokat írhatjuk fel:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k}{(2k-1)!} x^{2k-1}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (2^{2k}-1)}{2k!} B_k x^{2k-1}, \quad (9)$$

$|x| < \frac{\pi}{2}$

$x \operatorname{ctg} x$ számára pedig a következőket:

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k x^{2k}}{(2k-1)! (2^{2k}-1)}, \quad (10)$$

$$x \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{2k!} B_k x^{2k}, \quad (11)$$

$0 < x < \pi$

Továbbá $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ sora konvergens, ha $|x| < \pi$, $\frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ pedig, ha $0 < x < 2\pi$. Ennélfogva

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{csec} x$$

sora konvergens, ha $0 < x < \pi$, tehát a (9) és (11) alapján

$$\operatorname{csec} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (2^{2k}-1)}{2k!} B_k x^{2k-1}, \quad (12)$$

$0 < x < \pi$

100. $\sec x$ sorbafejtése.

Az előbbi fejezetben láttuk, hogy

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2x}{r^2\pi^2 - x^2},$$

$$0 < x < \pi$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{8x}{(2r+1)^2\pi^2 - 4x^2},$$

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

tehát

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = \frac{2}{x} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{4x}{(2r)^2\pi^2 - x^2},$$

$$0 < x < 2\pi$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{4x}{(2r+1)^2\pi^2 - x^2},$$

$$|x| < \pi$$

honnan

$$\frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) = \operatorname{csec} x = \frac{1}{x} + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{2x}{r^2\pi^2 - x^2},$$

$$0 < x < \pi$$

de

$$\frac{2x}{r^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{r\pi - x} - \frac{1}{r\pi + x},$$

tehát

$$\begin{aligned} \operatorname{csec} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) &= \sec x = \\ &= \frac{2}{\pi - 2x} + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \left[\frac{2}{(2r-1)\pi + 2x} + \frac{2}{(2r+1)\pi - 2x} \right] \\ &= \left(\frac{2}{\pi - 2x} + \frac{2}{\pi + 2x} \right) - \left(\frac{2}{3\pi - 2x} + \frac{2}{3\pi + 2x} \right) + \dots \end{aligned}$$

honnan

$$\sec x = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{4(2r-1)\pi}{(2r-1)^2\pi^2 - 4x^2},$$

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

de

$$\frac{(2r-1)\pi}{(2r-1)^2\pi^2-4x^2} = \frac{1}{(2r-1)\pi} + \frac{2^2x^2}{(2r-1)^3\pi^3} + \frac{2^4x^4}{(2r-1)^5\pi^5} + \dots$$

ha tehát

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1}}{(2r-1)^{2k+1}} = s'_{2k+1},$$

akkor

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+2}s'_{2k+1}}{\pi^{2k+1}} x^{2k}, \quad (I)$$

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

De az 53. fejezet fejtegetései szerint:

$$(\sec x)^{(2k)}_{x=0} = E_k,$$

az (I) szerint pedig:

$$(\sec x)^{(2k)}_{x=0} = \frac{2^{2k+2}s'_{2k+1}}{\pi^{2k+1}} (2k)!$$

következőleg:

$$\frac{2^{2k+2}s'_{2k+1}}{\pi^{2k+1}} = \frac{E_k}{2k!},$$

ennélfogva $\sec x$ végtelen sorának második alakja a következő:

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{2k!} x^{2k}, \quad (II)$$

$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

101. $l \sin x$ és $l \cos x$ sorbafejtése.

Ha megfontoljuk, hogy

$$l \left(1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kr^{2k}} \left(\frac{x}{\pi} \right)^{2k},$$

$$l \left(1 - \frac{4x^2}{(2r+1)^2\pi^2} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2r+1)^{2k}} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{2k},$$

akkor a 96. §. legelső képletei alapján:

$$I \frac{\sin x}{x} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{k} \left(\frac{x}{\pi} \right)^{2k}, \quad (1)$$

$0 < x < \pi$

$$I \cos x = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{k} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{2k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k} (2^{2k}-1)}{k 2^{2k}} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{2k}, \quad (2)$$

$|x| < \frac{\pi}{2}$

mely egyenletekből

$$I \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2S_{2k} (2^{2k-1}-1)}{k} \left(\frac{x}{\pi} \right)^{2k} \quad (3)$$

$x < \frac{\pi}{2}$

A 96. fejezet (6) és (7) képletei alapján pedig:

$$I \frac{\sin x}{x} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1} B_k}{k \cdot 2k!} x^{2k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k x^{2k}}{(2^{2k}-1) 2k!} \quad (4)$$

$$I \cos x = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1} (2^{2k}-1) B_k}{k \cdot 2k!} x^{2k} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k}{2k!} x^{2k} \quad (5)$$

$$I \frac{\operatorname{tg} x}{x} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} (2^{2k-1}-1) B_k}{k \cdot 2k!} x^{2k}. \quad (6)$$

102. Az általánosított elemi transzczendens függvények sorbafejtése.

A 73. fejezetben láttuk, hogy z komplex változónak csak egy oly $f(z)$ függvénye van, melyre nézve

$$\frac{df(z)}{dz} = f(z);$$

s ezt a függvényt e^z -el jelöltük, tehát

$$\left(\frac{d^n (e^z)}{dz^n} \right)_{z=0} = 1.$$

Ha tehát e^z ily alakú

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

akkor

$$a_n = \frac{1}{n!},$$

tehát

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

minthogy végtelen sorunk az egész síkon konvergens, azért folytonos függvényt képvisel, mely e^z függvény sajátágaival megegyezik s minthogy csak egy ily függvény van, tehát e^z -el egyenlő.

Ebből következik, hogy a többi transzczendens függvényeket jellemző sorok a komplex változók körében is ugyanolyan függvényt képviselnek, mint a valós változók körében. Továbbá NEWTON binomialis tantétele a komplex kitevőjű hatvány esetében sem veszti el érvényességét.

103. Többváltozós függvények sorbafejtése.

Ha a

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

az x_1, x_2, \dots, x_n változóknak valamely tartományban folytonos és differenciálható függvénye, akkor $f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)$ ebben a tartományban h_1, h_2, \dots, h_n hatványai szerint menő sorba fejthető. Legyen ugyanis

$$f(x_1+th_1, x_2+th_2, \dots, x_n+th_n) = F(t),$$

akkor MACLAURIN sora szerint:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

tehát

$$F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!},$$

de

$$F(1) = f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)$$

$$F^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^n f,$$

ennélfogva

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^n f.$$

104. Homogen alakokra vonatkozó EULER-féle tétel.

Az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -t a változók m -edfokú homogen függvényének nevezzük, ha

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ha

$$t = 1 + a,$$

akkor

$$f(x_1+ax_1, x_2+ax_2, \dots, x_n+ax_n) = (1+a)^m f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

de

$$\begin{aligned} f(x_1+ax_1, x_2+ax_2, \dots, x_n+ax_n) &= \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} x_n \right)^r f \\ (1+a)^m f &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{m}{r} a^r f, \end{aligned}$$

mely egyenletekből következik, hogy

$$\frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} x_n \right)^r f = \binom{m}{r} f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

mely egyenlet az EULER-féle tételt mondja ki s az $n=1$, $n=2$ esetekben rendre a következő alakot veszi fel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n &= m f(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} x_n \right)^2 f &= m(m-1) f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Ha $r > m$ és m egész szám, akkor

$$\binom{m}{r} = 0,$$

tehát

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} x_n \right)^r = 0. \quad r > m$$

IX. A TAYLOR-FÉLE SOR ALKALMAZÁSA HATÁR-ÉRTÉKEK MEGHATÁROZÁSÁRA.

105. A $\frac{0}{0}$ alakok meghatározása.

A 44. §-ban már megoldott probléma gyakorlati alkalmazását a következőkkel egészítjük ki:

Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $x=a$ helyen folytonos s sorbafejthető függvények, tehát

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots,$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{\varphi'(a)}{1!} (x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots,$$

akkor

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots}{\varphi(a) + \frac{1}{1!} \varphi'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} \varphi''(a)(x-a)^2 + \dots}.$$

Ha már most

$$f(a) = 0, \quad \varphi(a) = 0,$$

akkor

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a) + \dots}{\varphi'(a) + \frac{1}{2!} \varphi''(a)(x-a) + \dots},$$

honnan nyerjük, hogy

$$\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{0}{0} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}. \quad (I)$$

Azt a szabályt, melyet az az egyenlet a $\frac{0}{0}$ határértékének meghatározására szolgáltat L'HOSPITAL-féle szabálynak nevezük.

Ha pedig általánosan

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(i-1)}(a) = 0, \quad f^{(i)}(a) \neq 0$$

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \dots = \varphi^{(i-1)}(a) = 0, \quad \varphi^{(i)}(a) \neq 0,$$

akkor

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f^{(i)}(a)}{\varphi^{(i)}(a)} \left[(x-a)^{i-k} \right]_{x=a}, \quad (II)$$

mely zérus, véges vagy végtelen értéket szolgáltat a szerint, a mint i nagyobb, egyenlő vagy kisebb k -nál.

1. Pl.

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}.$$

A L'HOSPITAL-féle szabály alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x=0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Hasonlóképen találjuk, hogy:

2. Pl.

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = 1.$$

3. Pl.

$$\lim_{x=0} \frac{l(1+x)}{x} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

4. Pl.

$$\lim_{x=0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x=0} \frac{\mu(1+x)^{\mu-1}}{1} = \mu.$$

5. Pl. Meghatározandó

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x} l \frac{1-ax}{1+ax}.$$

Mivel

$$l \frac{1-ax}{1+ax} = -2ax - 2\frac{(ax)^3}{3} - 2\frac{(ax)^5}{5} - \dots,$$

azért

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x} l \frac{1-ax}{1+ax} = -2a.$$

6. Pl. Meghatározandó

$$\lim_{x=0} \frac{l \cos ax}{x^2}.$$

Mivel 55. és 98. §.

$$l \cos ax = -3B_1(ax)^2 - \dots$$

azért

$$\lim_{x=0} \frac{l \cos ax}{x^2} = -\frac{a^2}{2}.$$

Ha pedig $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ az $x = \infty$ helyen veszi fel a határozatlan értéket, akkor az $\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}$ a $t = 0$ helyen. Szükséges természetesen.

hogy $x = +\infty$ -nek megfelelően $f\left(\frac{1}{t}\right)$ és $\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ függvények $x = +0$ oldalon folytonos és differenciálható függvények legyenek, ebben az esetben azután

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

azaz;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Tehát a L'HOSPITAL-féle tétel ebben az esetben is alkalmazható.

1. Pl. Ha m pozitív egész szám, akkor

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-m}} = \frac{0}{0}$$

$e^{-\frac{1}{t}}$ a $t = +0$ -nál folytonos s differenciálható, tehát

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-m}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{mx^{-(m+1)}},$$

honnan

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-(m+1)}} = m \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-m}} = m! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-1}},$$

következőleg:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-m}} = m! \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

2. Pl. Meghatározandó

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} l\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$$

Az

$$(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \dots$$

egyenletből világos, hogy

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} \dots$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} l\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\operatorname{arctg} x}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x} = 0.$$

106. A $\frac{\infty}{\infty}$ alakok meghatározása.

Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty},$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\frac{\varphi(x)}{f(x)}}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}.$$

Amde a L'HOSPITAL-féle szabály értelmében

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\frac{\varphi(x)}{f(x)}}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}}{-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}},$$

honnan nyerjük, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Tehát a L'HOSPITAL-féle tétel a jelen esetben is alkalmazható.

1. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty},$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

Altalában, ha m pozitív egész szám, akkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{m!} = \infty.$$

2. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 0.$$

107. $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0$ alakok meghatározása.

a) Ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \varphi(x) = 0 \cdot \infty,$$

akkor, mivel

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0},$$

azért alkalmazható a L'HOSPITAL-féle eljárás.

Pl.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

β) Ha pedig

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - \varphi(x)] = \infty - \infty,$$

akkor a

$$\varphi(x) \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1 \right]$$

alakban meghatározandó, a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

kifejezés, ha ez az egységgel egyenlő, akkor

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1 \right] = \infty \cdot 0,$$

tehát az előbbi eljárás alkalmazandó; ha pedig az egységtől különböző, akkor limesünk értéke végtelen.

γ) Ha pedig

$$\lim_{x=a} [f(x)]^{g(x)} = 1^\infty, \text{ vagy } 0^0,$$

akkor

$$\lim_{x=a} \varphi(x) l f(x) = \infty \cdot 0, \text{ vagy } -0 \cdot \infty,$$

tehát az (α) alatt kifejtett eljárás alkalmazandó.

1. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x - \operatorname{csec} x) = \infty - \infty$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{csec} x} = 1,$$

tehát

$$\lim_{x=0} \operatorname{csec} x \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{csec} x} - 1 \right) = \infty \cdot 0,$$

de

$$\operatorname{csec} x \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{csec} x} - 1 \right) = \frac{\cos x - 1}{\sin x}$$

s mivel

$$\lim_{x=0} \frac{\cos x - 1}{\sin x} = 0,$$

azért

$$\lim_{x=0} (\operatorname{ctg} x - \operatorname{csec} x) = 0.$$

2. Pl.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos^x \frac{a}{\sqrt{x}} = 1^\infty,$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x l \cos \frac{a}{\sqrt{x}} = \infty \cdot 0,$$

ámde

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x l \cos \frac{a}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l \cos \frac{a}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \frac{a}{x^{-\frac{3}{2}}}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\frac{1}{2} a^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{\sqrt{x}}}{\frac{a}{\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2} a^2, \end{aligned}$$

következőleg:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos^x \frac{a}{\sqrt{x}} = e^{-\frac{1}{2} a^2}.$$

3. Pl.

$$\lim_{x=0} \sin^x a x = 0^0.$$

Amde

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin ax = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{ctg} ax}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^x ax = 1.$$

A L'HOSPITAL-féle szabály nem alkalmazható, ha függvényeinknek nincsen differenciálhányadosuk, vagy ha minden differenciálhányadosuk zérus, vagy végtelen. Pl. ha

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}, \\ \varphi(x) &= (x - a)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

akkor könnyű meggyőződni, hogy

$$f^{(n)}(a) = \infty, \quad \varphi^{(n)}(a) = \infty, \quad n=1, 2, \dots$$

tehát

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}}}{(x - a)^{\frac{1}{3}}}$$

értéke a L'HOSPITAL-féle szabály segítségével nem határozható meg, de ha megfontoljuk, hogy

$$(x^2 - a^2)^{\frac{2}{3}} = (x + a)^{\frac{2}{3}} (x - a)^{\frac{2}{3}},$$

akkor rögtön beláthatjuk, hogy limesünk értéke zérus. Ha pedig

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}}, \\ \varphi(x) &= e^{-\frac{1}{x^4}}, \end{aligned}$$

akkor

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \varphi^{(n)}(0) = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

Tehát a L'HOSPITAL-féle tétel megint nem alkalmazható, de ha megfontoljuk, hogy

$$e^{-\frac{1}{x^4}} = (e^{-\frac{1}{x^2}})^{\frac{1}{x^2}},$$

akkor könnyen beláthatjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{e^{-\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(e^{-\frac{1}{x^2}})^{\frac{1}{x^2} - 1}} = \infty.$$

X. A MAXIMUM ÉS MINIMUM ELMÉLETE.

108. Egyváltozós függvények maximuma és minimuma.

Ha az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ hely maximális helye, ez azt jelenti, hogy elég kicsiny pozitív h mellett

$$f(a+h) - f(a) < 0,$$

$$f(a-h) - f(a) < 0,$$

vagy

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < 0, \quad (1)$$

$$\frac{f(a-h) - f(a)}{-h} > 0. \quad (2)$$

Ha függvényünknek az $x = a$ helyen nincs differenciálhányadosa, de az (1) és (2) egyenlőtlenségek h bármily kis értékei mellett teljesülnek, akkor függvényünknek az $x = a$ hely maximális helye.

Ha pedig az $x = a$ hely függvényünknek minimális helye, ez azt jelenti, hogy elég kicsiny pozitív h mellett

$$f(a+h) - f(a) > 0,$$

$$f(a-h) - f(a) > 0,$$

vagy

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0, \quad (3)$$

$$\frac{f(a-h) - f(a)}{-h} < 0, \quad (4)$$

mely feltételek, ha az $x = a$ helyen nem differenciálható függvényre h bármily kicsiny értéke mellett teljesülnek, akkor az $x = a$ hely függvényünknek minimális helye.

Pl. A 25. fejezetben láttuk, hogy

$$f(x) = x \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

az $x = 0$ helyen folytonos, de nem differenciálható függvény,

mindazonáltal ez a hely függvényünknek minimális helye, mert mint láttuk

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right]_{x=0} = 1 > 0$$

$$\lim_{h=0} \left[\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \right]_{x=0} = -1 < 0.$$

De ha függvényünk az $x = a$ helyen differenciálható, akkor úgy

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

mint

$$\lim_{h=0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

$f'(a)$ -val egyenlő, tehát egyenlőtlenségeink csak úgy állhatnak meg, ha

$$f'(a) = 0.$$

Ennélfogva az $f(x)$ függvénynek mindazon maximális és minimális helyei, melyeken a függvény differenciálható, eleget tesznek az

$$f'(x) = 0 \quad (5)$$

egyenletnek. Ennek megoldásai alkotják tehát függvényünk összes oly maximalis és minimalis helyeit, melyeken függvényünknek van differenciálhányadosa. Hogy egyenletünknek valamely $x = a$ megoldása maximális, vagy minimális hely-e, azt következőképen döntjük el: Az

$$f'(a) = 0$$

főltételénél fogva

$$f(a+h)-f(a) = f''(a) \frac{h^2}{2!} + f^{(3)}(a) \frac{h^3}{3!} + \dots,$$

ha $f''(a)$ nem zérus, akkor mindig megválaszthatjuk h -t oly kicsinynek, hogy $f''(a) \frac{h^2}{2}$ abszolút értéke nagyobb legyen, mint a többi tag összegének abszolút értéke; ily kicsiny h -k mellett összegünk előjele az első tag előjelétől függ, ez pedig akár pozitív, akár negatív h mellett $f''(a)$ -val egyforma előjelű, ennélfogva:

$$f(a \pm h) - f(a) < 0, \quad \text{ha } f''(a) < 0,$$

$$f(a \pm h) - f(a) > 0, \quad \text{ha } f''(a) > 0.$$

Következőleg: Az

$$f'(x) = 0$$

egyenletnek $x = a$ gyöke $f(x)$ függvénynek maximális helye, ha

$$f''(a) < 0,$$

minimális, ha

$$f''(a) > 0.$$

1. Pl. Legyen

$$f(x) = \sin x,$$

tehát

$$f'(x) = \cos x,$$

$$f''(x) = -\sin x.$$

Az

$$f'(x) = \cos x = 0$$

egyenletnek gyökei:

$$x = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, 7\frac{\pi}{2}, \dots, (2n-1)\frac{\pi}{2}, \dots$$

tehát

$$f''(x) = -\sin x = 1 > 0, \text{ ha } x = 3\frac{\pi}{2}, 7\frac{\pi}{2}, \dots, (4n-1)\frac{\pi}{2},$$

$$f''(x) = -\sin x = -1 < 0, \text{ ha } x = \frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots, (4n-3)\frac{\pi}{2}.$$

Ennélfogva $\sin x$ minimális helyei:

$$x = (4n-1)\frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \dots$$

maximális helyei pedig:

$$x = (4n-3)\frac{\pi}{2}, n = 1, 2, \dots$$

2. Pl. Ha

$$f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2,$$

akkor

$$f'(x) = 2a_0 x + a_1,$$

$$f''(x) = 2a_0;$$

következőleg az

$$x = -\frac{a_1}{2a_0}$$

hely függvényünknek maximális, vagy minimális helye, a szerint, a mint a_0 kisebb, vagy nagyobb zérusnál.

Ha pedig az

$$f'(a) = 0$$

egyenlettel még

$$f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0,$$

akkor

$$f(a \pm h) - f(a) = (\pm 1)^n f^{(n)}(a) \frac{h^n}{n!} + \varepsilon,$$

ha ε -al jelöljük a többi tagok összegét; mindig megválaszthatjuk h úgy, hogy legyen

$$|\varepsilon| < |f^{(n)}(a)| \frac{|h|^n}{n!},$$

ha h -t pozitívnak választjuk, de úgy, hogy a felírt föltételnek eleget tegyen, akkor

$$f(a \pm h) - f(a) \text{ oly előjelű, mint } (\pm 1)^n f^{(n)}(a).$$

Ha tehát n páratlan, akkor az

$$f'(x) = 0$$

egyenletnek $x = a$ megoldása sem maximális, sem minimális hely nem lehet, minthogy

$$f(a+h) - f(a) \text{ és } f(a-h) - f(a)$$

különböző előjelűek, de ha n páros, akkor

$$\begin{aligned} f(a \pm h) - f(a) &> 0, & \text{ha } f^{(n)}(a) > 0, \\ f(a \pm h) - f(a) &< 0, & \text{ha } f^{(n)}(a) < 0, \end{aligned}$$

Az első esetben az $x = a$ hely minimális, a másodikban maximális helye az $f(x)$ függvénynek.

Pl. Legyen

$$f(x) = x(x-a)^{2n},$$

tehát

$$f'(x) = (x-a)^{2n} + 2nx(x-a)^{2n-1} = (2n+1)(x-a)^{2n-1} \left(x - \frac{a}{2n+1} \right)$$

$$f''(x) = (4n^2-1)(x-a)^{2n-2} \left(x - \frac{a}{2n+1} \right) + (2n+1)(x-a)^{2n-1}.$$

Az

$$f'(x) = 0$$

egyenletnek gyökei

$$x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a}{2n+1},$$

tehát

$$f''(x_2) = -\frac{(2an)^{2n-1}}{(2n+1)^{2n-2}}.$$

Ennélfogva x_2 maximális, vagy minimális hely, a szerint a mint $a > 0$, vagy $a < 0$.

Ellenben

$$f'''(x_1) = 0, \dots, f^{2n-1}(x_1) = 0,$$

de

$$f^{(2n)}(x) = (2n+1)(2n-1)! \left[\left(x - \frac{a}{2n+1} \right) + \binom{2n-1}{1}(x-a) \right],$$

tehát

$$f^{2n}(x_1) = 2n! a,$$

következőleg x_1 maximális, vagy minimális hely, a szerint a mint $a < 0$, vagy $a > 0$.

109. Implicit függvények maximuma és minimuma.

Ha y -t, mint x függvényét, az

$$f(x, y) = 0 \quad (1)$$

egyenlet definiálja, akkor $x=a$ hely y -nak maximális, vagy minimális helye, ha

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=a} = - \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right)_{x=a} = 0. \quad (2)$$

Tehát y maximális, vagy minimális helyeit az

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0 \quad (3)$$

egyenletek megoldásai szolgáltatják. A maximum, vagy minimum eldöntésére szolgáló másodrendű differenciálhányadost a következő egyenlet szolgáltatja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (4)$$

A (3) egyenletrendszer megoldásaiból azokat az értékrendszereket, melyekre nézve $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ egyszerre eltűnnek, kutatásainkból kizárjuk, mert ily értékrendszer mellett, föltéve hogy az $f(x, y)$ másodrendű differenciálhányadosai nem mind nullok, a (4) alapján

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0,$$

a mi azt mondja ki, hogy ezen a helyen $\frac{dy}{dx}$ nem null, hanem kétértékű, tehát az ily hely függvényünknek szinguláris helye. Ha a másodrendű differenciálhányadosok is mind eltűnnek, de a harmadrendűek nem mind, akkor (4) egyenletünk differenciálása $\frac{dy}{dx}$ meghatározására egy harmadfokú egyenletet szolgáltat s i. t.

(4) egyenletünk különben annak a megfontolásával, hogy a maximális és minimális helyeken

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

a következő egyszerűbb alakot veszi fel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (5)$$

1. Pl. Legyen

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

tehát a (3) egyenletrendszerünknek a jelen esetben megfelel:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x}{y} = 0.$$

y b -nél nagyobb nem lehet, tehát végtelen sem lehet, azért egyenletrendszerünk megoldása

$$x=0, \quad y=\pm b.$$

Az (5) egyenlet alapján

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2 y},$$

tehát $+b$ y -nak maximuma, $-b$ pedig minimuma.

2. Pl. Legyen

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + y^4,$$

tehát a (3) egyenletrendszernek a jelen esetben megfelel:

$$x^4 - 4xy + y^4 = 0, \quad \frac{x^3 - y}{y^3 - x} = 0,$$

minthogy ezen két egyenlet alapján könnyű meggyőződni, hogy x nem lehet végtelen, tehát $y^3 - x$ sem lehet azzá, ennél fogva egyenletrendszerünk egyszerűbb alakja:

$$x^4 - 4xy + y^4 = 0, \quad x^3 - y = 0,$$

a megoldások:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = \pm 3^{\frac{1}{3}}, \quad y_2 = \pm 3^{\frac{1}{3}},$$

ezek elseje szinguláris helyet szolgáltat.

Az (5)-nek megfelelő egyenlet:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3x^2}{y^3 - x},$$

tehát $3^{\frac{1}{3}}$ maximum, $-3^{\frac{1}{3}}$ pedig minimum.

110. Kétváltozós függvények maximuma és minimuma.

A

$$z = f(x, y)$$

kétváltozós függvénynek az x, y helyen *maximuma* van, ha meg tudunk határozni oly ϵ számot, melyre nézve

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) < 0, \quad (1)$$

ha h és k abszolút értékei kisebbek maradnak ϵ -nál; ellenben az x, y helyen *minimum* van, ha ugyanazon körülmények között

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) > 0. \quad (2)$$

Tehát az x, y helyen *maximum* vagy *minimum* van, ha

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

előjelét nem változtatja, bármiként változtassuk is h -t s k -t a $|h| < \varepsilon$, $|k| < \varepsilon$ feltételek mellett. Így ha $k=0$, akkor úgy

$$f(x+h, y) - f(x, y),$$

mint

$$f(x-h, y) - f(x, y)$$

egyforma előjelűek, ha

$$|h| < \varepsilon,$$

tehát

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \text{ és } \frac{f(x-h, y) - f(x, y)}{-h}$$

ugyanazon feltételek mellett ellenkező előjelűek, de ha $f(x, y)$ differenciálható, akkor

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h, y) - f(x, y)}{-h} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

a mi csak úgy lehetséges, ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

hasonlóképen találjuk, hogy $\frac{\partial f}{\partial y}$ is zérus. Tehát $f(x, y)$ összes oly maximális s minimális helyei, melyeken a függvény differenciálható, eleget tesznek a következő egyenletrendszernek:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Már most, hogy ezen egyenletrendszernek gyökei maximális vagy minimális helyek-e? Következésképen döntjük el: (3) egyenletünk alapján

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f + \eta,$$

ha a másodrendű differenciálhányadosok nem mindegyike null, akkor h és k megválaszthatók úgy, hogy legyen

$$\left| \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f \right| > |\eta|,$$

tehát egyenlőségünk jobb oldalának az előjele az első tag első jelétől függ, melyet

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a_{11}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a_{12} = a_{21}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a_{22}$$

jelölések alkalmazásával ily alakba írhatunk:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f = a_{11} h^2 + 2a_{12} h k + a_{22} k^2,$$

mely nem más, mint egy kétváltozós quadratikus alak, mely egyforma előjelű, ha definitív és pedig pozitív, ha

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{11} > 0, \quad a_{22} > 0,$$

negatív, ha

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad a_{11} < 0, \quad a_{22} < 0,$$

az első esetben (3) egyenletrendszerünk megoldása minimális, a második esetben pedig maximális hely.

Ha pedig a másodrendű differenciálhányadosok mindegyike nulla, ezenkívül

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^3 f \equiv 0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n-1} f \equiv 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(n)} f \equiv 0,$$

akkor

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

előjele

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{(n)} f$$

elejétől függ, a mi ha n páratlan, akkor előjelét megváltoztatja, ha n páros, akkor előjelét nem változtatja, ha a

$$\frac{1}{k^n} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f =$$

$$= a_{n0} \left(\frac{h}{k} \right)^n + \binom{n}{1} a_{n-1,1} \left(\frac{h}{k} \right)^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} a_{0n} = 0,$$

egyenletnek, hol

$$a_{ik} = \frac{\partial^{i+k} f}{\partial x^i \partial y^k},$$

csak képzetes gyökei vannak, ebben az esetben azután minimum, vagy maximum van, a szerint a mint kifejezésünk pozitív, vagy negatív.

Tételünk annak az általános tételnek a következménye, mely szerint az (a, b) intervallumban folytonos $f(x)$ függvény $f(a)$ -tól $f(b)$ -ig minden értéket felvesz, ha x a -ból b -ig változik, tehát ha $f(a)$ és $f(b)$ ellenkező előjelű, akkor van (a, b) intervallumban oly ξ hely, melyre nézve

$$f(\xi) = 0,$$

ha pedig ily ξ hely nincs, akkor $f(x)$ az értelmezési tartományban nem is vehet fel ellenkező előjelű értékeket.

Pl. Egy $2s$ kerületű háromszögnek az oldalait úgy kell meghatározni, hogy területe maximum legyen.

Ismeretes, hogy

$$t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Legyen

$$s-a=x, \quad s-b=y,$$

tehát

$$s-x-y=s-c$$

és

$$t^2 = f(x, y) = sxy(s-x-y),$$

honnan

$$\frac{\partial f}{\partial x} = sy(s-x-y) - sxy,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = sx(s-x-y) - sxy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2sy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2sx,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s^2 - 2s(x+y).$$

A maximális és minimális helyeket tehát a következő egyenletrendszer határozza meg:

$$2x + y = s,$$

$$x + 2y = s,$$

honnan

$$x = \frac{s}{3}, \quad y = \frac{s}{3},$$

ennek megfelelőleg:

$$a = \frac{2s}{3}, \quad b = \frac{2s}{3}, \quad c = \frac{2s}{3},$$

továbbá

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0.$$

Tehát adott kerület mellett az egyenlő oldalú háromszög a legnagyobb területű.

111. Többváltozós függvények maximuma és minimuma.

A

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

függvénynek az x_1, x_2, \dots, x_n helyen akkor van maximuma, ha meg tudunk oly ε számot határozni, melyre nézve:

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0, \quad (1)$$

ha h_1, h_2, \dots, h_n mindegyikének abszolút értéke kisebb ε -nál; ellenben ugyanezen körülmények között minimum van, ha

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0. \quad (2)$$

Föltételeink alapján az előbbi fejezet fejtegetéseihez hasonlóan találjuk, hogy függvényünk összes maximális és minimális helyei eleget tesznek a következő egyenletrendszernek

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0. \quad (3)$$

Már most ha a másodrendű differenciálhányadosok nem mind nullok, akkor arra nézve, hogy egyenletrendszerünk valamely megoldása maximális, vagy minimális hely-e, felvilágosítással szolgál a következő quadratikuss alak:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^2 f = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} h_i h_k$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k},$$

mely csak akkor egyforma előjelű mindig, ha definitív és pedig pozitív, ha a 65. §. szerint a zérustól különböző tagokból álló

$$D, D', \dots, D^{(n-1)}, 1,$$

sorozatban csupa jelkövetkezés van, ellenben negatív, ha sorozatunkban csupa jelváltás van, az első esetben (3) egyenletünk megoldása minimális, a másodikban maximális hely.

De ha

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^k f \equiv 0,$$

$k=1, 2, \dots, i-1$

akkor a

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} h_n \right)^i f$$

dönti el a kérdést, ha i páratlan, akkor a megoldás semmi esetre sem maximális, vagy minimális hely, ha pedig i páros, akkor h_1, \dots, h_n oly értékeinél, melyeknek abszolút értéke kisebb ε -nál, állandóan pozitívnek, vagy negatívnek kell lenni, az első esetben a megoldás minimális, a másodikban maximális hely.

112. Összetett függvények maximuma és minimuma.

Ha y -t, mint x összetett függvényét, a

$$\varphi(x, y) = 0$$

egyenlet definiálja, akkor $F(x, y)$ x -nek összetett függvénye; határozzuk meg maximális és minimális helyeit. Ezek meghatározására szolgál a

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

egyenlet, de az (1) egyenlet alapján:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

melyből $\frac{dy}{dx}$ értékét behelyettesítvén a (2) egyenletbe, a következőt nyerjük:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

mely kapcsolatban az (1) egyenlettel meghatározza a maximális és minimális helyeket.

Ha pedig y -t és z -t, mint x függvényeit, a következő egyenletek definiálják:

$$\varphi_1(x; y, z) = 0, \quad \varphi_2(x; y, z) = 0, \quad (4)$$

akkor $F(x; y, z)$ szintén összetett függvénye x -nek. A maximális s minimális helyek meghatározásához tehát a következő egyenletek állanak rendelkezésünkre:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{dz}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \frac{dz}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

mely

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

egyenlethez vezet, mely — kapcsolatban a (4) egyenletekkel — meghatározza a maximális s minimális helyeket. De a (6) egyenlet még azt is kimondja, hogy vannak oly λ_1, λ_2 paraméterek, melyekre nézve:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

melyek kapcsolatban a (4) egyenletekkel meghatározzák az $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ ismeretleneket.

Ha pedig z -t, mint x, y összetett függvényét, a

$$\varphi(x, y; z) = 0 \quad (8)$$

egyenlet definiálja, akkor $F(x, y; z)$ x és y -nak összetett függvénye, tehát a maximális és minimális helyek meghatározásához a

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ban néhány ismeretlen határozatlan marad, a mi végtelen sok maximális vagy minimális helyet involválna.

Végül annak az eldöntése, hogy valamely megoldás maximális, vagy minimális helyet szolgáltat-e, vagy nem, a második, vagy ha azok eltűnnek a magasabbrendű differenciálhányadosok segítségével egészen úgy történik mint az előző fejezetekben.

1. Pl. *Meghatározandó az az ellipsisbe írható derékszögű négyszög, melynek területe a lehető legnagyobb.* Jelöljük a parallelogramm oldalait (20. á.) $2x$, $2y$ -nal, területét pedig t -vel, és legyen

$$\frac{t}{4} = F(x, y) = xy,$$

továbbá

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

Tehát a maximális és minimális helyek meghatározásához szükséges egyenletek:

$$y + x \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0,$$

honnan

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

melyhez hozzájárul még az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

egyenlet, melyekből

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

Továbbá

$$\frac{d^2F}{dx^2} = 2 \frac{dy}{dx} + x \frac{d^2y}{dx^2},$$

de a

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{2y}{x^2} \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

egyenletek alapján:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\sqrt{2}b}{a^2},$$

tehát

$$\frac{d^2F}{dx^2} < 0,$$

ennélfogva a talált terület

$$t = 4xy = 2ab$$

csakugyan maximum.

2. Pl. Meghatározandó az adott felületű paralelepipedonok között a legnagyobb köbtartalmú.

A jelen esetben, különben az előbbiben is már, a feladat természetete mutatja, hogy csak maximum lehetséges. Jelöljük a paralelepipedon éleit x , y , z -vel, köbtartalmát és felületét V és s -el; legyen továbbá

$$V = F(x, y, z) = xyz,$$

$$s = \varphi(x, y, z) = 2(xy + xz + yz).$$

Könnyű meggyőződni, hogy a jelen esetben a (11) egyenleteknek a következők felelnek meg:

$$\begin{vmatrix} yz & xy \\ y+z & x+y \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} xz & xy \\ x+z & x+y \end{vmatrix} = 0,$$

vagy más egyszerűbb alakban:

$$\begin{vmatrix} z & x \\ y & y \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z & x \\ x & y \end{vmatrix} = 0,$$

honnan következik, hogy

$$x = y = z,$$

tehát

$$s = 6x^2,$$

honnan

$$x = \frac{s\sqrt{6}}{6}.$$

azaz: az adott felületű paralelepipedonok között a kocka a legnagyobb köbtartalmú.

II. RÉSZ.

INTEGRÁLSZÁMITÁS.

XI. A HATÁROZOTT INTEGRALOK ALAPTULAJDONSÁGAI.

113. A határozott integrál értelmezése.

Az (a, b) véges tartományban legyen $f(x)$ folytonos és véges függvény; az (a, b) tartományt x_1, x_2, \dots, x_{n-1} pontjaival osszszuk n részre, s legyen a rövidség kedvéért

$$x_1 - a = \delta_1, \quad x_2 - x_1 = \delta_2, \quad \dots, \quad x_i - x_{i-1} = \delta_i, \quad \dots, \quad b - x_{n-1} = \delta_n.$$

Jelöljük δ_i intervallumban az $f(x)$ legnagyobb értékét M_i -vel, a legkisebbet pedig m_i -vel ($i = 1, 2, \dots, n$). Képezzük ezután a következő összegeket:

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \delta_i,$$

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \delta_i.$$

Ha az (a, b) tartományban $f(x)$ legnagyobb értéke M , a legkisebb pedig m , akkor mindenestre

$$M \geq M_i, \quad m \leq m_i,$$

tehát, ha $a < b$, akkor

$$S \leq M \sum_{i=1}^n \delta_i = M(b-a),$$

$$s \leq m \sum_{i=1}^n \delta_i = m(b-a).$$

Ezen tételünk alapján, ha a $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ intervallumokat ismét részekre osztjuk s az új intervallumokra vonatkozólag hasonló szellemben képezzük a S -nek és s -nek megfelelő S' és

s' összegeket, akkor S' -ben $M_i \delta_i$ helyett nálánál kisebb, vagy legfeljebb vele egyenlő összeg lép, tehát

$$S \geq S';$$

hasonlóképen találjuk, hogy

$$s \leq s'.$$

Kimutatjuk: hogy ha az intervallumokat mindaddig osztjuk, mígnem azok száma végtelen nagygyá s minden új intervallum végtelen kicsinyé nem lesz, akkor a S és s mintájára képezett összegek egyenlők lesznek, azaz:

$$\lim_{n=\infty, \delta=0} S = \lim_{n=\infty, \delta=0} s = I.$$

Ugyanis, ha az intervallumokat oly kicsinyeknek választjuk, hogy bármely intervallumban a függvény ingadozása kisebb ϵ -nál, azaz

$$M_i - m_i < \epsilon \\ i=1, 2, \dots, n$$

bármily kicsiny legyen is ϵ , akkor

$$S - s = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \delta_i < \epsilon \sum_{i=1}^n \delta_i$$

azaz:

$$S - s < \epsilon(b - a);$$

$b - a$ véges, tehát S és s tényleg ugyanazon határértékhez közeledik, mit röviden így jelölünk:

$$\lim S = \lim s = I.$$

Már most kimutatjuk, hogy a definiáltuk limes értéke független attól, hogy hogyan osztjuk az (a, b) tartományt intervallumokra. Legyenek ugyanis egy másféle beosztás osztáspontjai

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_{m-1}.$$

Ha a megfelelő összegeket S' és s' -sel jelöljük s azután az első felosztás x_1, \dots, x_{n-1} és a második felosztás x'_1, \dots, x'_{m-1} osztáspontjait egy halmazba egyesítjük és ez a halmaz x''_1, \dots, x''_{k-1} , akkor világos, hogy ez a pontthalmaz az (a, b) tartomány egy oly harmadik felosztását létesíti, melyet a

másik kettő akármelyikéből úgy nyerünk, ha azok rész-intervallumait ismét részekre osztjuk. Ha tehát a harmadik beosztásra vonatkozó összegeket S'' és s'' -sel jelöljük, akkor világos, hogy

$$\begin{aligned} S'' &< S, S'' \leq S', \\ s'' &\geq s, s'' \geq s'. \end{aligned}$$

Ha tehát

$$\begin{aligned} \lim S'' &= \lim s'' = S'', \\ \lim S' &= \lim s' = S', \end{aligned}$$

akkor a

$$\begin{aligned} \lim s &\leq \lim s'' = \lim S'' \leq \lim S, \\ \lim s' &\leq \lim s'' = \lim S'' \leq \lim S' \end{aligned}$$

egyenlőtlenségekből rögtön következik, hogy

$$S = S'' = S'.$$

A beosztásoktól a független

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \delta_i,$$

határozott értékű összeget nevezzük $f(x)$ a -tól b -ig terjedő integráljának s így jelöljük:

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

hol x a végtelen kicsiny dx intervallum egy tetszőleges pontja. Az *integrál elnevezés* LEIBNITZ és BERNOULLI JÁNOS megjegyzése folytán 1696-ban keletkezett, a jelölés pedig LEIBNITZ-től ered.

114. Az integrál elemi tulajdonságai.

I. Ha az (a, b) tartományt a_1, a_2, \dots, a_{n-1} pontokkal n részre osztjuk, akkor az integrál értelmezése következtében

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^b f(x) dx;$$

mert az összeadandók összege éppen a definíció szerint vett a -ból b -ig terjedő integrál.

II. Az értelmezés szerint:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \delta_i,$$

hol

$$\delta_i = x_i - x_{i-1}.$$

Ha tehát b -tól a -ig integrálunk, akkor ugyanazon osztáspontok megtartásával az intervallumok

$$x_{n-1}-b, x_{n-2}-x_{n-1}, \dots, x_{i-1}-x_i, \dots, a-x_1$$

lesznek, tehát δ_i helyébe $-\delta_i$ lép, következőleg:

$$\int_a^b f(x) dx = - \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \delta_i,$$

azaz:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

vagy

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = 0.$$

III. Láttuk, hogy

$$S \leq M(b-a), \quad s \geq m(b-a),$$

továbbá

$$S > \int_a^b f(x) dx > s,$$

tehát

$$M(b-a) > \int_a^b f(x) dx > m(b-a),$$

honnan következik, hogy

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

IV. Továbbá, hogy van oly M és m között levő μ érték, melyre nézve:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a),$$

minthogy a függvény (a, b) tartományban folytonos, azér

m -től M -ig minden értéket felvesz; van tehát intervallumunkban oly ξ hely, melyre nézve:

$$f(\xi) = \mu,$$

következően:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi), \quad a < \xi < b$$

ezt a tételt nevezzük *középértéktételnek*.

Középértéktételünk azonban általánosítható. Nevezetesen, ha $\varphi(x)$ az (a, b) tartományban előjelét nem változtatja — mondjuk, hogy mindig pozitív — akkor

$$M \int_a^b \varphi(x) dx > \int_a^b f(x) \varphi(x) dx > m \int_a^b \varphi(x) dx,$$

honnan az előbbi okoskodáshoz hasonlóan következik, hogy

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx. \quad a < \xi < b$$

Ezt a tételt *általánosított középértéktételnek* nevezzük; ha egyenletünk mindkét oldalát minus egygyel megszorozzuk, akkor $-\varphi(x)$ függvényre, azaz oly függvényre nyerjük ugyanezt a tételt, mely (a, b) tartományban mindig negatív.

115. A határozott integrál transzformációja.

Ha $\varphi(t)$ egyértékű folytonos s differenciálható függvény s azonkívül $\varphi'(t)$ is folytonos, akkor bebizonyítható, hogy ha

$$x = \varphi(t),$$

akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

ha t_1 és t_2 $\varphi(t)$ értelmezési tartományának végesben levő oly értékei, melyekre nézve

$$\varphi(t_1) = a, \quad \varphi(t_2) = b.$$

$\varphi(t)$ folytonosságánál fogva, ha t t_1 -től t_2 -ig változik, akkor $\varphi(t)$, azaz x a -tól b -ig minden értéket felvesz. A későbbiekben feltételezzük, hogy $t_2 > t_1$. A definíció értelmében:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}),$$

ha

$$x_i = \varphi(t_i), \quad x_{i-1} = \varphi(t_{i-1}),$$

akkor, mivel a differenciálszámítás körében előfordult középértéktételről fogva:

$$\frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \varphi'(\tau_i), \quad t_i > \tau_i > t_{i-1}$$

tehát

$$x_i - x_{i-1} = \varphi'(\tau_i) (t_i - t_{i-1}).$$

Minthogy ξ az (x_i, x_{i-1}) intervallumban van, azért a (t_i, t_{i-1}) intervallumban van oly t érték, melyre nézve

$$\xi = \varphi(t)$$

s mivel τ_i szintén ebben az intervallumban van, azért úgy τ_i , mint t így alakúak

$$t = t_{i-1} + \theta (t_i - t_{i-1}), \quad \theta < 1$$

$$\tau_i = t_{i-1} + \theta_1 (t_i - t_{i-1}), \quad \theta_1 < 1$$

honnan

$$\tau_i = t + \theta_2 (t_i - t_{i-1}), \quad |\theta_2| = |\theta_1 - \theta| < 1$$

minthogy $\varphi'(t)$ folytonos, azért $t_i - t_{i-1}$ -t megválaszthatjuk oly kicsinynek, hogy legyen

$$|\varphi'(t) - \varphi'(\tau_i)| < \eta,$$

tehát

$$\varphi'(\tau_i) = \varphi'(t) + \eta_i$$

hol η_i és $t_i - t_{i-1}$ egyidejűleg zérussá lesz. Ennélfogva

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\varphi(t)) \varphi'(t) (t_i - t_{i-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\varphi(t)) \eta_i (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Legyen ugyanis

$$|\eta_i| < \varepsilon; \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

s $f(x)$ -nek az (a, b) tartományhoz tartozó legnagyobb értékének abszolút értéke M , akkor

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\varphi(t)) \eta_i (t_i - t_{i-1}) \right| \leq M(t_2 - t_1) \varepsilon,$$

a mi kimondja, hogy fentebbi egyenletünk jobboldalán a második limes eltűnik.

116. Differenciálás az integrál jele alatt.

Ha $f(x, a)$ nemcsak x -nek, hanem a -nak is folytonos és differenciálható függvénye és ezenkívül f'_a szintén folytonos, akkor

$$I = \int_a^b f(x, a) dx$$

a szerint a következő szabály szerint differenciálható:

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial a} dx.$$

Legyen ugyanis

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_a^b f(x, a+h) dx - \int_a^b f(x, a) dx \\ &= \int_a^b [f(x, a+h) - f(x, a)] dx, \end{aligned}$$

de

tehát

$$f(x, a+h) - f(x, a) = f'_a(x, a+\theta h) h, \quad \theta < 1$$

$$\frac{\Delta I}{h} = \int_a^b f'_a(x, a+\theta h) dx,$$

ámde, ha h elég kicsiny, akkor

$$f'_a(x, a+\theta h) = f'_a(x, a) + \eta,$$

hol az (a, b) tartomány minden x értéke mellett

$$|\eta| < \varepsilon,$$

tehát

$$\frac{\Delta I}{h} = \int_a^b f'_a(x, a) dx + \int_a^b \eta dx.$$

De

$$\left| \int_a^b \eta dx \right| < \varepsilon (b-a) \quad b > a$$

s minthogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon = 0,$$

azért

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{h} = \int_a^b f'_a(x, a) dx.$$

117. Az integrálfüggvény differenciálhányadosa.

Minthogy az

$$\int_a^X f(x) dx$$

integrálnak $f(x)$ folytonossági tartományának minden X helyéhez tartozik egy határozott értéke, azért integrálunk X függvénye s jelöljük ezt $F(X)$ -el, tehát

$$F(X) = \int_a^X f(x) dx.$$

$F(X)$ -t *integrálfüggvénynek* nevezzük. Határozzuk meg differenciálhányadosát. Legyen

$$\Delta F(X) = \int_a^{X+\Delta X} f(x) dx - \int_a^X f(x) dx,$$

de mivel

$$\int_a^{X+\Delta X} f(x) dx = \int_a^X f(x) dx + \int_X^{X+\Delta X} f(x) dx,$$

azért

$$\Delta F(X) = \int_X^{X+\Delta X} f(x) dx.$$

De a középértéktétel értelmében :

$$\int_X^{X+\Delta X} f(x) dx = f(X+\theta\Delta X) \Delta X, \quad \theta < 1$$

azért

$$\frac{\Delta F(X)}{\Delta X} = f(X+\theta\Delta X),$$

tehát

$$F'(X) = f(X).$$

Azaz az integrálfüggvény differenciálhányadosa az integrál ele alatt levő függvényével egyenlő.

Ha tehát $f(x)$ az (a, b) tartományban folytonos, akkor mindig van oly $F(x)$ függvény, melynek differenciálhányadosa az (a, b) tartomány bármely x helyén $f(x)$ -el egyenlő. De, ha $F(x)$ -nek meg van ez a sajátsága, akkor, ha c -vel egy tetszőleges konstans jelölünk, $F(x)+c$ -nek szintén meglesz ugyanaz a tulajdonsága s ezt a $F(x)+c$ -t nevezzük $f(x)$ határozatlan integráljának s így jelöljük:

$$\int f(x) dx = F(x) + c.$$

Ha tehát egy ily $F(x)$ -et már meghatároztunk, akkor a határozott integrálok számára c -nek a jelentését is könnyű megállapítani. Ugyanis

$$\int_a^X f(x) dx = F(X) + c,$$

honnan

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) + c = 0,$$

tehát

$$c = -F(a)$$

s így

$$\int_a^X f(x) dx = F(X) - F(a).$$

Ha tehát $F(x)$ az (a, b) intervallumban folytonos $f(x)$ -nek a határozatlan integrálja, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Ezen tétel alapján aztán könnyű kimutatni, hogy az integrál számításban megállapított közéértéktétel oly alakúvá változ-

tatható, mint az, melyet a differenciálszámításban megállapítottunk. Ugyanis

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(\xi), \quad a < \xi < b$$

de

$$f(\xi) = F'(\xi),$$

tehát fentebbi egyenletünk alapján:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(\xi). \quad a < \xi < b$$

Természetes, hogy csak alaki megjegyzés jött létre, a mennyiben föltevésünk értelmében $F'(\xi)$, azaz $f(\xi)$ folytonos, míg a differenciálszámításban ily föltevés nélkül történt a bizonyítás.

118. Valós változójú komplex függvények integrálása.

Ha $f(x)$ az x valós változónak komplex függvénye, akkor bizonyára ily alakú:

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

hol $f_1(x)$ és $f_2(x)$ már valós függvények, s ha még az (a, b) intervallumban folytonosak is, akkor az integrál definíciója értelmében:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + i \int_a^b f_2(x) dx.$$

Ha $f(x)$ határozatlan integrálja $F(x)$; $f_1(x)$ és $f_2(x)$ -é pedig rendre $F_1(x)$ és $F_2(x)$, akkor egy határozatlan konstanstól eltekintve:

$$F(x) = F_1(x) + iF_2(x),$$

minthogy mindkét oldalt differenciálhányadosa ugyanazt a függvényt szolgáltatja. Tehát a határozatlan integrált akár a valós és képzetes részre való felbontással, akár a nélkül határozhatjuk meg.

Azonban a középértéktétel már módosulást szenved, ugyanis mint láttuk

$$|f(x)| = \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2},$$

tehát

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b \sqrt{f_1^2(x) + f_2^2(x)} dx,$$

ámde

$$\int_a^b \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2} dx = \sqrt{f_1(\xi)^2 + f_2(\xi)^2} (b-a),$$

$$a < \xi < b$$

ennélfogva

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \theta (b-a) \sqrt{f_1(\xi)^2 + f_2(\xi)^2}.$$

$$\theta \leq 1$$

Ha pedig $\varphi(x)$ az (a, b) tartományban pozitív, akkor az általánosított közéértéktételünk alkalmazásával következik, hogy

$$\left| \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| = \theta \sqrt{f_1(\xi)^2 + f_2(\xi)^2} \int_a^b \varphi(x) dx.$$

$$\theta \leq 1$$

A közéértéktételnek ez a módosítása DARBOUX-tól ered.

XII. A HATÁROZATLAN INTEGRÁLOK MEGHATÁROZÁSÁNAK ÁLTALÁNOS MÓDSZEREI.

119. A priori ismeretes határozatlan integrálok.

A határozatlan integrálok meghatározásának problémája a következő: *Adva van $f(x)$ függvény, meg kell határoznunk oly $F(x)$ -t, melynek differenciálhányadosa $f(x)$ -el egyenlő.* Ha tehát valamely ismeretes $F(x)$ -nek ismerjük a differenciálhányadosát $f(x)$ -t, akkor $f(x)$ -nek a priori ismerjük a határozatlan integrálját, mert ebben az esetben

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

c a határozatlan konstans. A differenciálszámítás alaptörvényei alapján tehát a priori felírhatjuk a következő integrálképleteket:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = l x + c \quad (2)$$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad (3)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + c \quad (4)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad (5)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c \quad (8)$$

$$\int \operatorname{tg} x \sec x dx = \sec x + c \quad (9)$$

$$\int \operatorname{ctg} x \csc x dx = -\csc x + c \quad (10)$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = l \sin x + c \quad (11)$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -l \cos x + c \quad (12)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c_1 \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arctg} x + c_1 \quad (14)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + c = -\operatorname{arcsec} x + c_1 \quad (15)$$

Ha u x -nek folytonos s differenciálható függvénye, s differenciálhányadosát u' -el jelöljük, akkor a differenciálási szabályok értelmében képleteinket következőképen általánosíthatjuk

$$\int u^n u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = l u + c,$$

s i. t. Pl.

$$\int \frac{\varphi'(x) dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = 2\sqrt{\varphi(x)} + c,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} l(ax+b) + c.$$

120. A dekompozíció módszere.

A dekompozíció módszere abban áll, hogy a függvényt, ha lehetséges, több oly függvény összegére bontjuk, melyeknek integráljait már ismerjük. Így ha

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x),$$

akkor

$$\int f(x) dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx + \dots + c_n \int f_n(x) dx.$$

Pl. legyen meghatározandó

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

Minthogy

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \frac{1}{x - a} - \frac{1}{2a} \frac{1}{x + a},$$

azért

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x + a} \\ &= \frac{1}{2a} l(x - a) - \frac{1}{2a} l(x + a) + c, \end{aligned}$$

következően:

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} l \frac{x - a}{x + a} + c.$$

121. A szubsztitució módszere.

A szubsztitució módszere abban áll, hogy a változó helyett alkalmas szubsztitucióval oly változót vezetünk be, melylyel integrálunkat más egyszerűbb, vagy talán már ismeretes integrállá változtatjuk.

1. Pl. Meghatározandó

$$\int \frac{ax + b}{(x - a)^n} dx.$$

Alkalmazzuk a következő szubsztituciót:

$$x = t + a,$$

tehát

$$dx = dt,$$

ennélfogva

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{(x-a)^n} dx &= \int \frac{at+aa+b}{t^n} dt \\ &= a \int t^{-n+1} dt + (aa+b) \int t^{-n} dt \\ &= \frac{at^{-n+2}}{-n+2} + \frac{(aa+b)t^{-n+1}}{-n+1} + c,\end{aligned}$$

honnan

$$\int \frac{ax+b}{(x-a)^n} dx = \frac{a}{(2-n)(x-a)^{n-2}} + \frac{aa+b}{(1-n)t^{n-1}} + c.$$

2. Pl. Legyen még meghatározandó

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Legyen

$$\sqrt{x^2+a}+x=t,$$

honnan egyszerű differenciálással nyerjük, hogy

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+a}} = \frac{dt}{t},$$

tehát

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c,$$

azaz:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln(\sqrt{x^2+a}+x) + c.$$

3. Pl. Végül határozzuk meg még a következő integrált

$$\int \frac{dx}{x^2+a} \quad a>1.$$

Legyen

$$\begin{aligned}x &= t\sqrt{a}, \\ dx &= dt\sqrt{a},\end{aligned}$$

tehát

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} t + c,$$

következõleg:

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} + c.$$

122. Az integrál jele alatti differenciálás módszere.

Láttuk, hogy ha $f(x, a)$ az integrál határai között a szerint vett differenciálhányadosával együtt a -nak folytonos függvénye, akkor ha

$$F(x, a) = \int f(x, a) dx,$$

$$\frac{dF}{da} = \int \frac{df}{da} dx.$$

Ezen eljárás alkalmazásával adott integrálból az integrálok-nak egész sorozatát származtathatjuk le. Pl. Az előbbi fejezet utolsó feladványa szerint:

$$\int \frac{dx}{x^2+a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}},$$

$$\frac{d^{n-1}(x^2+a)^{-1}}{da^{n-1}} = (-1)^{n-1}(n-1)! (x^2+a)^{-n},$$

tehát

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}} \right).$$

123. A parciális integrálás módszere.

Ismeretes, hogy adott föltételek mellett, ha u és v x függvényei, akkor

$$(uv)' = uv' + vu',$$

tehát

$$uv = \int uv' dx + \int vu' dx,$$

honnan

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx.$$

Az integrálásnak azt a módszerét, melyet ez a képlet nyújt, *parciális integrálás módszerének* nevezzük.

1. Pl. Meghatározandó

$$\int x^n l x dx.$$

Legyen

$$v' = x^n, \quad u = l x,$$

tehát

$$v = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad u' = \frac{1}{x},$$

ennélfogva

$$\int x^n l x dx = \frac{x^{n+1} l x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int x^n dx,$$

honnan

$$\int x^n l x dx = \frac{x^{n+1} l x}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c.$$

2. Pl. Ha pedig meghatározandó

$$\int x \cos x dx,$$

akkor legyen

$$u = x, \quad v' = \cos x$$

$$u' = 1, \quad v = \sin x,$$

tehát

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx,$$

következően:

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c.$$

XIII. A RACZIONÁLIS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLCZIÓJA.

124. Az alaptípusok integrálása.

Ha az integrál alatt levő függvény raczionális egész függvény, akkor az ax^n alakú tagok összegéből áll, tehát az integrált

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$$

alakú tagok összege szolgáltatja. Ha pedig az integrál alatt levő függvény raczionális törtfüggvény, akkor integrálunk a következő típusú integrálok meghatározásával határozható meg:

$$\int \frac{dx}{x-a}, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n}, \quad \int \frac{ax+b}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}.$$

Az első kettőnek integráljait ismerjük, ugyanis

$$\int \frac{dx}{x-a} = l(x-a) + c,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c.$$

A harmadik integrált pedig

$$x-a=t, \quad \beta^2=\lambda$$

szubsztituczióval a következő két különböző típusú integrál segítségével határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} & \int \frac{tdt}{(t^2+a)^n}, \quad \int \frac{dt}{(t^2+a)^n}, \\ \text{de} \quad & \int \frac{tdt}{(t^2+a)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(t^2+a)^{n-1}}, \end{aligned}$$

és a 119. §. szerint

$$\int \frac{dt}{(t^2+a)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \arctg \frac{t}{\sqrt{\lambda}} \right).$$

Ezzel azután az összes alaptípusokat meghatároztuk.

125. A racionális függvények rekursiv módon való integrálása.

Ha P_1, P_2, \dots, P_r racionális egész függvények a valós számok körében törzstényezők és

$$f(x) = P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_r^{n_r},$$

akkor

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{P_1^{n_1}} + \frac{\varphi_2(x)}{P_2^{n_2}} + \dots + \frac{\varphi_r(x)}{P_r^{n_r}}.$$

Tehát a racionális törtfüggvények integrációja

$$\int \frac{\varphi(x)}{P^n} dx$$

típusú integrálok meghatározására vezethető vissza, hol $\varphi(x)$ racionális egész függvény, P pedig a valós számok körében törzsfüggvény.

Minthogy P és P' viszonylagos törzsfüggvények, vannak tehát x -nek oly A és B racionális egész függvényei, melyekre nézve:

$$AP + BP' = 1,$$

tehát

$$\frac{\varphi(x)}{P_n} = \frac{A\varphi(x)}{P_{n-1}} + \frac{BP'\varphi(x)}{P_n},$$

következőleg:

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{P_n} = \int \frac{B\varphi(x) P'}{P_n} dx + \int \frac{A\varphi(x)}{P_{n-1}} dx.$$

Ha egyenletünk jobb oldalán az első integrált parciálisan integráljuk s

$$u = B\varphi(x), \quad v' = P'P^{-n};$$

$$u' = (B\varphi(x))', \quad v = -\frac{1}{(n-1)} \frac{1}{P^{n-1}},$$

akkor

$$\int \frac{P\varphi(x) P' dx}{P^n} = -\frac{B\varphi(x)}{(n-1) P^{n-1}} + \int \frac{(B\varphi(x))'}{(n-1) P^{n-1}} dx,$$

tehát

$$\int \frac{\varphi(x)}{P^n} dx = -\frac{B\varphi(x)}{(n-1) P^{n-1}} + \int \frac{\varphi_1(x)}{P^{n-1}} dx, \quad (I)$$

hol

$$\varphi_1(x) = \frac{(B\varphi(x))' + (n-1) A\varphi(x)}{n-1}.$$

Ezzel az eljárással tehát integrálunk meghatározása

$$\int \frac{\psi(x) dx}{P^{n-1}}$$

alakú integrál meghatározására vezethető vissza.

Pl. Alkalmazzuk eljárásunkat az

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a)^n}$$

meghatározására. A jelen esetben:

$$\varphi(x) = 1, \quad P = x^2 + a, \quad P' = 2x,$$

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = -\frac{x}{2a}$$

szubstitució után nyerjük, hogy

$$I_n = \frac{x}{(2n-2)(x^2+a)^{n-1}} + \frac{1}{a} \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}. \quad (II)$$

Lzt a formulát, mely I_n meghatározását I_{n-1} meghatározá-

sára vezeti vissza, *rekurzív formulának* nevezzük, melynek alapján a végelemzésben I_n

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{a}}$$

segítségével meghatározható.

XIV. ALGEBRAI FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA.

126. Az algebrai integrálok osztályozása.

Ha y az

$$f(x, y) = 0$$

algebrai egyenletnek gyöke s $F(x, y)$ az x és y változók racionális függvénye, akkor az

$$\int F(x, y) dx$$

integrált *algebrai*, vagy ABEL-féle integrálnak nevezzük.

Az ABEL-féle integrálok egyik különös esete az, midőn y -t az

$$y^2 = R(x)$$

algebrai egyenlet definiálja, hol $R(x)$ x -nek racionális egész függvénye; az ennek megfelelő

$$\int F(x, \sqrt{R(x)}) dx$$

integrált, ha $R(x)$ fokszáma $n > 4$ *hiperelliptikus*-, ha pedig $n = 3$, vagy 4, akkor *elliptikus* integrálnak nevezzük.

127. Az algebrai integrálok meghatározása szubsztituczióval.

Ha az

$$\int F(x, y) dx$$

algebrai integrálra alkalmazzuk a következő szubsztitucziót:

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt,$$

akkor az

$$f(x, y) = 0$$

egyenlet értelmében y valamely $\phi(t)$ függvénye lesz t -nek, következőleg:

$$\int F(x, y) dx = \int F(\phi(t), \psi(t)) \phi'(t) dt.$$

Ha meg tudunk határozni oly szubstitucziót, mely az integrál jele alatt levő függvényt raczionálissá teszi, vagy pedig *a priori* adott integrálra vezeti vissza, akkor integrálunk az eddig ismeretes függvényalakok segítségével meghatározható.

1. Pl. Ha

$$F(x, y) = f\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{a_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{a_2}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{a_r}\right],$$

hol a, b, c, d konstans számok; a_1, a_2, \dots, a_r pedig oly törtetek, melyeknek közös nevezője a , akkor

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^a$$

szubstituczió alkalmazásával $F(x, y)$ integrálja raczionális függvény integráljává lesz. Ugyanis

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{a_i} = t^{aa_i},$$

hol aa_i egész szám, továbbá

$$x = \frac{dt^a - b}{a - ct^a}, \quad dx = a \frac{(ad - bc) t^{a-1}}{(a - ct^a)^2} dt.$$

Tehát

$$\int F(x, y) dx = a(ad - bc) \int f\left(\frac{dt^a - b}{a - ct^a}, t^{aa_1}, t^{aa_2}, \dots, t^{aa_r}\right) \frac{dt}{(a - ct^a)^2}.$$

2. Pl. Legyen a meghatározandó integrál

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}.$$

Ismeretes, hogy a minden értékére nézve

$$f(x) = ax^2 + 2bx + c = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

Ha a -t úgy választjuk meg, hogy legyen

$$f'(a)=0,$$

akkor

$$a = -\frac{b}{a}, \quad f(a) = \frac{ac-b^2}{a}.$$

Ha tehát $f(a)$ -t röviden λ -val jelöljük; $x-a$ helyett t -t írunk s megfontoljuk, hogy $\frac{1}{2}f''(a)$ nem más, mint a , akkor

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+\lambda}}.$$

Integrálunk meghatározásánál három esetet különböztetünk meg.

I. $a>0$, akkor a 118. §. 2. feladványa értelmében:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{\lambda}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}} l\left(\sqrt{t^2+\frac{\lambda}{a}}+t\right) + c.$$

II. $a<0$, $\lambda<0$, akkor a megoldást szinte ugyanez a képlet szolgáltatja, csak hogy \sqrt{a} képzetessé lesz.

III. $a<0$, $\lambda>0$, akkor

$$t = \frac{z\sqrt{\lambda}}{\sqrt{-a}}$$

szubstituczió alkalmazásával:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{at^2+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin z + c.$$

3. Pl. Határozzuk meg még a következő integrált:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+2bx+c}}.$$

Legyen

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2+2bx+c = f(a) + f'(a)(a-x) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \\ &= a_1 + 2b_1(x-a) + c_1(x-a)^2, \end{aligned}$$

tehát

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{a_1+2b_1(x-a)+c_1(x-a)^2}}$$

honnan

$$x - a = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{1}{z^2}$$

szubstituczióval nyerjük, hogy

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+2bx+c}} = \int \frac{dz}{\sqrt{a_1z^2+2b_1z+c_1}},$$

mely integrálnak megoldását már az előbbi feladatból ismerjük.

128. Binomiális integrálok.

Binomiális integrálok alatt értjük a következő alakú általános integrálokat:

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx,$$

melyből

$$bx^n = at^*$$

szubstituczióval a következő integrált nyerjük:

$$\frac{1}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} a^p \int t^{\frac{m+1}{n}-1} (1+t)^p dt;$$

az

$$\frac{m+1}{n} - 1 = q$$

jelölés alkalmazásával a binomiális integrálok általános alakja:

$$I_{pq} = \int t^q (1+t)^p dt.$$

Integrálunk kiszámítására recursiv formulákat állapítunk meg, e végből legyen

$$t^q (1+t)^p = (1+t) t^q (1+t)^{p-1} = t^q (1+t^{p-1}) + t^{q+1} (1+t^{p-1}),$$

honnan következik, hogy

$$I_{pq} - I_{p-1q} - I_{p-1q+1} = 0. \quad (1)$$

* Ha a és b ellenkező előjelűek és n páros, akkor formuláinkban t helyett mindenütt $-t$ irandó, hogy a szubstituczió valós maradjon.

Ha pedig ebben p helyett $p+1$ -et, q helyett $q-1$ -et írunk, akkor a következő képletet nyerjük:

$$I_{p+1q-1} - I_{pq-1} - I_{pq} = 0. \quad (2)$$

Továbbá

$$\begin{aligned} (t^{q+1}(1+t)^p)' &= (q+1)t^q(1+t)^p + pt^{q+1}(1+t)^{p-1}, \\ (t^q(1+t)^{p+1})' &= qt^{q-1}(1+t)^{p+1} + (p+1)t^q(1+t)^p, \end{aligned}$$

tehát

$$(q+1)I_{pq} + pI_{p-1q+1} = t^{q+1}(1+t)^p, \quad (3)$$

$$qI_{p+1q-1} + (p+1)I_{pq} = t^q(1+t)^{p+1}. \quad (4)$$

Ha a (3)-hoz hozzáadjuk az (1) p -szeresét, a (4)-ből pedig kivonjuk a (2) q -szorosát, akkor a következő két egyenlethez jutunk:

$$(p+q+1)I_{pq} - pI_{p-1q} = t^{q+1}(1+t)^p. \quad (5)$$

$$qI_{p+1q-1} + (p+q+1)I_{pq} = t^q(1+t)^{p+1}. \quad (6)$$

Ha az (5)-ben p helyett $p+1$ -et, a (6)-ban pedig q helyett $q+1$ -et írunk, akkor

$$(p+q+2)I_{p+1,q} - (p+1)I_{pq} = t^{q+1}(1+t)^{p+1}, \quad (7)$$

$$(q+1)I_{pq} + (p+q+2)I_{p+1,q} = t^{q+1}(1+t)^{p+1}. \quad (8)$$

Ezen formulák alapján I_{pq} kiszámítása visszavezethető oly $I_{p'q'}$ kiszámítására, melyre nézve

$$1 > p' > 0, \quad 1 > q' > 0.$$

Ugyanis, ha $p > 1$, akkor az (5) formula segítségével I_{pq} -ról áttérünk az I_{p-1q} -ra s így tovább, míg nem $I_{p'q'}$ -hoz nem jutunk.

Ha pedig $p < 0$, akkor a (7) formula segítségével I_{pq} -ról áttérünk $I_{p+1,q}$ -ra s i. t., míg nem $I_{p'q'}$ -hoz nem jutunk.

q redukciójánál pedig a (6), vagy (8) formulákat használjuk fel, a szerint, a mint $q > 0$, vagy $q < 0$.

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy binomiális integrálunk integrálható, ha

I. p , vagy q , vagy mind a kettő egész szám; mert az ezen eseteknek megfelelőleg I_{pq} integrál, I_{0q} , I_{p0} , I_{00} integrálokra redukálható, melyek meghatározhatók.

II. Ha $p+q=s$ egész számmal. Ugyanis

$$I_{pq} = I_{p, s-p}.$$

Amde $I_{p, s-p}$ $I_{p, -p}$ -re redukálható, de

$$I_{p, -p} = \int \left(\frac{1+t}{t} \right)^p dt,$$

mely az előbbi fejezet (1) feladványa szerint integrálható.

129. A hiperelliptikus integrálok osztályozása.

Hiperelliptikus integráloknak nevezzük az oly

$$\int f(x, y) dx$$

integrálokat, melyekben $f(x, y)$ racionális függvénye x, y -nak és

$$y^2 = \sqrt{R(x)},$$

$$R(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Tekintve, hogy

$$y^{2r} = (R(x))^r, \quad y^{2r+1} = y (R(x))^r,$$

azért $f(x, y)$ általános alakja:

$$f(x, y) = \frac{f_1(x) + y f_2(x)}{\varphi_1(x) + y \varphi_2(x)}.$$

Ha pedig ennek a törtnek is a számlálóját s nevezőjét megszorozzuk $\varphi_1(x) - y \varphi_2(x)$ -el, akkor $f(x, y)$ végleges alakjául a következő kifejezést nyerjük:

$$f(x, y) = P(x) + y Q(x),$$

hol P és Q x -nek racionális függvényei. Mínt hogy a racionális függvények integráljaival már foglalkoztunk, azért még csak az

$$\int y Q(x) dx$$

integrállal kell foglalkoznunk. De mivel

$$yQ(x) = \frac{y^2Q(x)}{y} = \frac{F(x)}{y},$$

azért az általános hiperelliptikus integrálok típusa az

$$\int \frac{F(x)}{y} dx$$

integrál, hol $F(x)$ racionális függvény, mely általában $\varphi(x)$ racionális egész függvény és $\psi(x)$ racionális törtfüggvény összegeként állítható elő s így

$$\int \frac{F(x)}{y} dx = \int \frac{\varphi(x)}{y} dx + \int \frac{\psi(x)}{y} dx.$$

A jobb oldal első integrálja

$$I_1 = \int \frac{x^2}{y} dx$$

tipusú integrálok összegére bontható, s ezeket *első típusú* integráloknak nevezzük, a többieket pedig *másodtípusúaknak*. Vizsgáljuk meg, hogy közöttük hány egymástól független van. E végből az ismeretes differenciálási szabályok alkalmazásával könnyen meggyőződhetünk, hogy

$$(x^i \sqrt{R(x)})' = \frac{ix^{i-1}R(x) + \frac{1}{2}x^i R'(x)}{\sqrt{R(x)}}.$$

Tekintettel $R(x)$ -nek fentebb fölírt alakjára

$$\begin{aligned} (x^i \sqrt{R(x)})' &= \\ \frac{(i + \frac{1}{2}n)a_0 x^{n+i-1} + (i + \frac{1}{2}(n-1))a_1 x^{n+i-2} + \dots + (i + \frac{1}{2})a_{n-1}x^i + ia_n x^{i-1}}{\sqrt{R(x)}} \\ &= \frac{b_0 x^{n+i-1} + b_1 x^{n+i-2} + \dots + b_{n-1}x^i + b_n x^{i-1}}{\sqrt{R(x)}}, \end{aligned}$$

hol $b_n=0$, ha $i=0$. Képletünkben következik, hogy

$$x^i \sqrt{R(x)} = b_0 I_{n+i-1} + b_1 I_{n+i-2} + \dots + b_{n+1} I_i + b_n I_{i-1}.$$

Ha $i=0$, akkor tekintve, hogy b_n is zérus, azért

$$\sqrt{R(x)} = b_0 I_{n-1} + b_1 I_{n-2} + \dots + b_{n-1} I_0.$$

A miből következik, hogy I_{n-1}, I_n, \dots kifejezhetők I_0, I_1, \dots, I_{n-2} -vel. Tehát az első típusú, egymástól független hiperelliptikus integrálok száma $n-1$ és ezek:

$$I_0, I_1, \dots, I_{n-2}.$$

Ezután áttérünk a másodtípusú integrálok tárgyalására.

Mint hogy $\phi(x)$ raczionális függvény

$$\frac{\phi(x)}{(x-a)^n}$$

alakú tagok összegére bontható, azért az

$$\int \frac{\phi(x)}{y} dx$$

integrál is

$$\int \frac{\phi(x) dx}{(x-a)^n y}$$

alakú integrálok összegére bontható, hol $\phi(x)$ raczionális egész függvény. A tárgyalásnál két esetet különböztetünk: I. a ne legyen $R(x)$ -nek gyöke. Ekkor differenciálással nyerjük, hogy

$$\left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{n-1}} \right)' = \frac{-(n-1)R(x) + \frac{1}{2}(x-a)R'(x)}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}},$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{\phi(x)}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}} - \lambda \left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^{n-1}} \right)' &= \\ = \frac{\phi(x) + \lambda(n-1)R(x) - \frac{\lambda}{2}(x-a)R'(x)}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}}. \end{aligned}$$

Egyenletünk jobb oldalának számlálóját osztható $x-a$ -val, ha λ -t úgy választjuk meg, hogy legyen

$$\phi(a) + \lambda(n-1)R(a) = 0,$$

honnan

$$\lambda = -\frac{\phi(a)}{(n-1)R(a)}. \quad n \neq 1$$

Egyenletünk jobb oldala tehát $x-a$ -val való rövidítés után

$$\frac{\phi_1(x)}{(x-a)^{n-1} \sqrt{R(x)}}$$

alakban jelenik meg, tehát

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)^n \sqrt{Rx}} = \frac{\varphi(a) \sqrt{R(x)}}{(n-1) R(a) (x-a)^{n-1}} + \int \frac{\varphi_1(x) dx}{(x-a)^{n-1} \sqrt{R(x)}}$$

Mint hogy ez az eljárás csak akkor alkalmazható, ha $n \neq 1$, azért ezen redukció többszörös alkalmazásával, a másodtipusú integrálokat

$$\int \frac{\chi(x) dx}{(x-a) \sqrt{R(x)}},$$

alakra redukáljuk, mely elsőtipusú integrálokat s az

$$\int \frac{dx}{(x-a) \sqrt{Rx}}$$

másodtipusú integrált foglalja magában, minthogy

$$\frac{\chi(x)}{x-a} = \chi_1(x) + \frac{c}{x-a}$$

alakban állítható elő, hol $\chi_1(x)$ raczionális egész függvény c pedig konstans.

II. a $R(x)$ -nek egyszeres gyöke, többszörös nem is lehet, mert ha pl. $2r$ -szeres gyöke lenne, akkor négyzetgyököket lehetne belőle vonni, ha pedig $2r+1$ -szeres gyöke lenne, akkor $(x-a)^{2r}$ -ből négyzetgyököket lehetne vonni s így a négyzetgyök alatt csak $x-a$ marad meg.

Ebben az esetben kiindulunk a következő differenciál-hányadosból:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^n} \right)' &= \frac{-n \frac{R(x)}{x-a} + \frac{1}{2} R'(x)}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}} \\ \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n \sqrt{Rx}} - \lambda \left(\frac{\sqrt{R(x)}}{(x-a)^n} \right)' &= \frac{\varphi(x) + \lambda n \frac{R(x)}{x-a} - \frac{1}{2} \lambda R'(x)}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}} \end{aligned}$$

Egyenletünk jobboldalának a számlálóját osztható $(x-a)$ -val, λ -t úgy választjuk meg, hogy legyen

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \lambda \left(n - \frac{1}{2}\right) R'(a) &= 0, \\ \lambda &= - \frac{\varphi(a)}{\left(n - \frac{1}{2}\right) R'(a)} \end{aligned}$$

Következőleg egyenletünk jobboldala ily módon

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{n-1} \sqrt{R(x)}}$$

alakba írható, tehát

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}} = \frac{\varphi(a) \sqrt{R(x)}}{(n-\frac{1}{2}) R'(a) (x-a)^n} + \int \frac{\varphi_1(x) dx}{(x-a)^{n-1} \sqrt{R(x)}}$$

Minthogy eljárásunk akkor is alkalmazható, ha $n=1$, azért ezen redukció többszörös megismétlése első típusú integrálokra vezet.

Kutatásainkat tehát a következő tételbe foglalhatjuk össze:

Az

$$\int f(x, y) dx$$

hiperelliptikus integrál, ha benne y^2 n -edfokú racionális egész függvény n egymástól független integrállal kifejezhető; ezek az

$$I_0, I_1, \dots, I_{n-2}, I,$$

hol

$$I_2 = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$I = \int \frac{dx}{(x-a) \sqrt{R(x)}}.$$

Pl. Ha $n=2$, akkor

$$I_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}, \quad I = \int \frac{dx}{(x-a) \sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

integrálokkal, melyeket már meghatároztunk, a többi kifejezhető.

Ha pedig $n=3$, akkor I_0, I_1, I típusokkal a többi kifejezhető. Az $n=4$ esete azonos az $n=3$ esettel ugyanis, ha

$$\begin{aligned} R(x) &= a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \\ &= (x-a)(b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3), \end{aligned}$$

honnan

$$x = a + \frac{1}{z}$$

szubstitúció alkalmazásával:

$$R(x) = \frac{1}{z} \left(c_0 + c_1 \frac{1}{z} + c_2 \frac{1}{z^2} + c_3 \frac{1}{z^3} \right) \\ = \frac{1}{z^4} (c_0 z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3)$$

következőleg:

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{R(x)}} = \frac{\varphi_1(z)}{\sqrt{c_0 z^3 + c_1 z^2 + c_2 z + c_3}},$$

a mi bebizonyítandó volt.

Az $n=3$ és $n=4$ esete tehát egyforma típusú integrálokat foglal magában, melyeket azután *elliptikus* integráloknak nevezünk.

Minthogy az elliptikus integrálok tárgyalásánál már régtől fogva alapul a negyedfokú polinomot választották, azért mi is azok kanonikus alakjainak megállapításánál ezt az eljárást követjük.

130. Az elliptikus integrálok kanonikus alakjai.

Az elliptikus integrálok általános alakja:

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{R(x)}},$$

hol $\varphi(x)$ racionális függvény és

$$R(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4.$$

Nevezzük $R(x)=0$ egyenlet gyökeit a, b, c, d -nek. Mindig feloszthatjuk ezeket oly a, b és c, d csoportokra, melyekre nézve az

$$\begin{cases} (x-a)(x-b) = x^2 + b_1 x + b_2, \\ (x-c)(x-d) = x^2 + c_1 x + c_2 \end{cases} \quad (1)$$

szorzatok együtthatói reális számok. Tehát

$$R(x) = a_0 (x^2 + b_1 x + b_2) (x^2 + c_1 x + c_2),$$

honnan

$$y = \frac{1}{p-x}, \quad x = \frac{py-1}{y}$$

transzformációval

$$R(x) = \frac{a'_0}{y^4} (y^2 + b'_1 y + b'_2) (y^2 + c'_1 y + c'_2)$$

az első tényezőnek a gyökei:

$$\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}$$

a második tényezőjéi pedig:

$$\frac{1}{p-c}, \frac{1}{p-d},$$

ha p -t megválaszthatjuk úgy, hogy legyen

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} = \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-d}, \quad (2)$$

akkor

$$b'_1 = c'_1.$$

A (2) alatt levő feltételnek tényleg elégít tudunk tenni reális p értékkel. Tekintettel ugyanis az (1) alatti relációkra (2) egyenletünket ily alakba írhatjuk:

$$\frac{2p+b_1}{p^2+b_1p+b_2} = \frac{2p+c_1}{p^2+c_1p+c_2},$$

honnan

$$(c_1-b_1)p^2 + 2(c_2-b_2)p + b_1c_2 - c_1b_2 = 0, \quad (3)$$

ennek az egyenletnek a gyökei valósak, ha diskriminánsa

$$D = \begin{vmatrix} c_1-b_1 & c_2-b_2 \\ c_2-b_2 & b_1c_2-c_1b_2 \end{vmatrix} < 0,$$

vagy az (1) relációk alapján

$$D = \begin{vmatrix} c+d-a-b & cd-ab \\ cd-ab & cd(a+b)-ab(c+d) \end{vmatrix} < 0. \quad (4)$$

Ha $a=c$, akkor $D=0$, tehát D osztható $a-c$ -vel, hasonlóképpen osztható $a-d$ -vel, $b-c$ -vel és $b-d$ -vel, tehát

$$D = C(a-c)(a-d)(b-c)(b-d), \quad (5)$$

hol C még ismeretlen konstans, melyet a kétféle alakban fölírt D -nek kifejtésénél nyert a^2b^2 tag együtthatójából rögtön meghatározhatunk. Ugyanis a (4) kifejtésében a^2b^2 együtthatója -1 , az (5) kifejtésében pedig C , tehát

$$C = -1.$$

Ennélfogva a (3) egyenletnek valós gyökei vannak, ha

$$-D = (a-c)(a-d)(b-c)(b-d) > 0.$$

Ha (a, b) , vagy (c, d) , vagy mindkettő konjugált komplex gyökök, akkor feltételünk teljesül, ha pedig a gyökök reálisak $s(a, b)$ a két legkisebb, vagy két legnagyobb gyök, akkor feltételünk szintén teljesül, tehát a gyököket tényleg elrendezhetjük úgy, hogy a (2) alatti feltétel valós p -re nézve teljesüljön és ekkor

$$b'_1 = c'_1 = \lambda,$$

tehát $R(x)$ -t ily alakba írhatjuk:

$$R(x) = \frac{a'_0}{y^4} \left[\left(y + \frac{\lambda}{2} \right)^2 + b'_2 - \frac{\lambda^2}{4} \right] \left[\left(y + \frac{\lambda}{2} \right)^2 + c'_2 - \frac{\lambda^2}{4} \right],$$

honnan

$$y + \frac{\lambda}{2} = z$$

szubstituczióval a következő alakhoz jutunk:

$$R(x) = \frac{a'_0}{\left(z - \frac{\lambda}{2} \right)^4} (z^2 + \alpha)(z^2 + \beta),$$

tehát általánosságban

$$R(x) = \frac{1}{\left(z - \frac{\lambda}{2} \right)^4} (az^2 + b)(a'z^2 + b').$$

Elliptikus integráljaink tehát

$$\int \frac{\varphi_1(x) dx}{\sqrt{(ax^2 + b)(a'x^2 + b')}} = \int \frac{\varphi_1(x) dx}{\sqrt{R_1(x)}}$$

alakúakká transzformálhatók. De $\varphi_1(x)$ általánosan

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x^2) + x\psi'_2(x^2)}{\chi_1(x^2) + x\chi'_2(x^2)}$$

alakba írható, melynek számlálóját s nevezőjét $\chi_1(x^2) - x\chi_2(x^2)$ -al szorozva a következő alakhoz jutunk:

$$\varphi_1(x) = P(x^2) + xQ(x^2),$$

hol P és Q x^2 -nak racionális függvényei. Ennélfogva

$$\int \frac{\varphi_1(x) dx}{\sqrt{R_1(x)}} = \int \frac{P(x^2) dx}{\sqrt{R_1(x)}} + \int \frac{Q(x^2) x dx}{\sqrt{R_1(x)}}.$$

De a jobboldal második integrálja $x^2 = t$ szubstituczióval

$$(1) \quad \frac{1}{2} \int \frac{Q(t) dt}{\sqrt{(at+b)(a't+b')}}.$$

integrállá alakul, mely már nem elliptikus integrál. Ennélfogva az elliptikus integrálok újabb redukált alakja

$$(3) \quad \int \frac{P(x^2) dx}{\sqrt{R_1(x)}}. \quad (6)$$

Ezek után $R_1(x)$ -t vizsgáljuk meg részletesen; két esetet különböztetünk meg.

I. $R_1(x)$ legalább egyik tényezőjének pl. ax^2+b -nek együtt-hatói különböző előjelűek; az általánosság rovása nélkül fel-tételezhetjük, hogy $a < 0$, $b > 0$; mert ha nem így volna, akkor mindkét tényezőt -1 -el kell csak szorozni, hogy úgy legyen. Az ide tartozó összes lehetséges esetek a következők:

1. $a < 0$, $b > 0$; $a' < 0$, $b' > 0$.
2. $a < 0$, $b > 0$; $a' < 0$, $b' < 0$.
3. $a < 0$, $b > 0$; $a' > 0$, $b' > 0$.
4. $a < 0$, $b > 0$; $a' > 0$, $b' < 0$.

II. Ha $R_1(x)$ mindkét tényezőjének együtt-hatói egyforma elő-jelűek, akkor csak a következő két eset lehetséges:

5. $a > 0$, $b > 0$; $a' > 0$, $b' > 0$.
6. $a > 0$, $b > 0$; $a' < 0$, $b' < 0$.

(4) Az 5. és 6. eset azonos, mert ha a 6. esetnek megfelelő integrált megszorozzuk $1:\sqrt{-1}$ -el, akkor az 5. esetnek meg-felelő integrálhoz jutunk.

(5) Kimutatjuk most, hogy a 3., 4. és 5. eset szubstituczióval visszavezethető az 1. vagy 2. esetre.

A 6. alatt levő integrálunkra alkalmazzuk a következő szub-stitucziót:

$$ax^2 + b = t^2,$$

tehát

$$x = \frac{\sqrt{t^2 - b}}{\sqrt{a}}, \quad dx = \frac{tdt}{\sqrt{a}\sqrt{t^2 - b}},$$

$$R_1(x) = \frac{t^2}{a}(a't^2 + ab' - a'b),$$

$$P(x^2) = P\left(\frac{t^2 - b}{a}\right) = P_1(t^2),$$

$$\int \frac{P(x^2) dx}{\sqrt{R_1(x)}} = \int \frac{P_1(t^2) dt}{\sqrt{(-t^2 + b)(-a't^2 - ab' + a'b)}} \quad (7)$$

Há $R_1(x)$ a 3., 4., vagy 5. tipushoz tartozott, akkor a (7) egyenletben

$$-1 < 0, \quad b > 0; \quad -a' < 0, \quad -ab' + ab \leq 0,$$

következőleg a transzformált integrál az 1., vagy 2. tipushoz tartozik.

Végül kimutatjuk, hogy az 1. tipusból szubstitúcióval eljuthatunk a 2. tipushoz.

Jelöljünk ugyanis a -val valamely pozitív számot s alkalmazzuk a következő szubstitúciót:

$$x^2 = t^2 + a,$$

tehát

$$dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + a}},$$

$$R_1(x) = (at^2 + b + aa')(a't^2 + b' + a'a).$$

Minthogy az 1. típusban $-\frac{b}{a}$ és $-\frac{b'}{a'}$ pozitív számok s mivel egyenlők nem lehetnek, mert különben $R_1(x)$ -ből négyzetgyököt lehetne vonni, azért legyen

$$-\frac{b'}{a'} < -\frac{b}{a},$$

azaz:

$$\frac{b'a}{a'b} < 1.$$

Ha tehát

$$a = -\frac{b'}{a'},$$

akkor

$$b' + a'a = 0,$$

$$b + aa = b \left(1 - \frac{ab'}{ba'} \right) > 0,$$

s mivel

$$dx = \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - \frac{b'}{a'}}},$$

$$R_1(x) = t^2 \left(at^2 + \frac{ba' - ab'}{a'} \right) a',$$

$$P(x^2) = P \left(t^2 - \frac{b'}{a'} \right) = P_1(t^2),$$

azért

$$\int \frac{P(x^2) dx}{\sqrt{R_1(x)}} = \int \frac{P_1(t^2)}{\sqrt{\left(at^2 + \frac{ba' - ab'}{a'} \right) (a't^2 - b')}} dt$$

s mivel

$$a < 0, \quad \frac{ba' - ab'}{a'} > 0; \quad a' < 0, \quad -b' < 0,$$

azért integrálunk a 2. típusúhoz tartozik, a mi bebizonyítandó volt.

Fejtegetéseink alapján tehát elég, ha az 1. típusúhoz tartozó integrálokkal foglalkozunk. Minthogy föltevésünk szerint:

$$-\frac{b'}{a'} < -\frac{b}{a},$$

ennélfogva

$$-\frac{a'}{b'} > -\frac{a}{b}.$$

Legyen tehát

$$-\frac{a}{b} = -k^2 \frac{a'}{b'}, \quad k^2 < 1$$

és alkalmazzuk a következő szubstitucziót:

$$a'x^2 = -b't^2,$$

tehát

$$ax^2 = -k^2bt^2,$$

$$R_1(x) = bb'(1-t^2)(1-k^2t^2),$$

$$dx = \sqrt{\frac{-b'}{a'}} dt.$$

Ennélfogva:

$$\int \frac{P(x^2) dx}{\sqrt{R_1(x)}} = \int \frac{P_1(t^2) dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Ez az integrál pedig az előbbi fejezet fejtegetései alapján kifejezhető a következőkkel:

$$I_0 = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad I_1 = \int \frac{tdt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ I_2 = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad I = \int \frac{dt}{(t-a)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Ezek közül I_1 -et a $t^2 = z$ szubsztitució a következő nem elliptikus integrállá változtatja:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k^2z)}}.$$

I_2 -t következőképen transzformáljuk:

$$I_2 = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int \frac{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}(1-k^2t^2)}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt \\ = \frac{1}{k^2} I_0 - \frac{1}{k^2} \int \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

I -t pedig így alakítjuk át:

$$I = \frac{dt}{(t-a)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int \frac{tdt}{(t^2-a^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \\ + \int \frac{adt}{(t^2-a^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

A jobboldal első integrálja $t^2 = z$ szubsztitució alkalmazásával nem elliptikus integrállá transzformálható, míg a második $1 : a^2 = -m$ jelölés alkalmazásával a következő alakot veszi fel:

$$-\frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(1+mt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Ennélfogva összes elliptikus integráljaink kifejezhetők a következő három integrállal:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$\int \frac{dx}{(1+m^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

melyeket rendre első-, másod- és harmadfajú elliptikus integráloknak nevezünk s a melyek $x = \sin \varphi$ szubsztituczió alkalmazása után következőképen jelennek meg:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{(1+m^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

XV. A TRANSZCZENDENS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA.

131. Algebrai integrálokká transzformálható transzczendens integrálok.

I. Ha az integrál jele alatt levő függvény e^x -nek algebrai függvénye, akkor ez az integrál

$$e^x = t, \quad \begin{cases} e^x dx = dt, \\ dx = \frac{dt}{t} \end{cases}$$

szubsztituczióval algebraivá transzformálható. Ugyanis

$$\int f(e^x) dx = \int f(t) \frac{dt}{t}.$$

II. $lx = t$ szubsztituczióval algebraivá tehető az

$$\int f(lx) \frac{dx}{x}$$

integrál is. Ugyanis

$$\frac{dx}{x} = dt,$$

tehát

$$\int f(lx) \frac{dx}{x} = \int f(t) dt.$$

Pl.

$$\int \frac{(lx)^n}{x} dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

III. Az

$$\int f(\sin x) \cos x dx \quad \text{és} \quad \int f(\cos x) \sin x dx$$

integrálok a

$$t = (\sin x, \cos x)$$

szubstitucziók alkalmazásával rendre a következő alakokat veszik fel:

$$\int f(t) dt, \quad - \int f(t) dt.$$

Pl.

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{1}{\sin x} \cos x dx = \int \frac{dt}{t} = l \sin x.$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{1}{\cos x} \sin x dx = - \int \frac{dt}{t} = -l \cos x.$$

IV. Az

$$\int f(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int f(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x}$$

integrálok a

$$t = (\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$$

szubstitucziók alkalmazásával az

$$\int f(t) dt, \quad - \int f(t) dt$$

alakokat veszik fel. Pl.

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{t} = l \operatorname{tg} x.$$

V. Az

$$\int f(\arcsin x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int f(\operatorname{arctg} x) \frac{dx}{1+x^2}$$

integrálok

$$t = (\arcsin x, \operatorname{arctg} x)$$

szubstitucziókkal mindketten az

$$\int f(t) dt$$

alakot veszik fel. Pl.

$$\int \frac{(\arcsin x)^m}{\sqrt{1-x^2}} = \int t^m dt = \frac{(\arcsin x)^{m+1}}{m+1}.$$

VI. Az

$$\int f(\sin x, \cos x) dx$$

integrál szintén algebraivá tehető a következő szubsztitúcióval:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

Ugyanis

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Tehát

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int F(t) dt.$$

1. Pl.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = l \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

2. Pl. Meghatározandó

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.$$

Legyen

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha,$$

tehát

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} l \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+\alpha).$$

3. Pl. Legyen még meghatározandó

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$$

Legyen továbbá

$$\frac{a}{c} = r \sin \alpha, \quad \frac{b}{c} = r \cos \alpha, \quad r = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

tehát

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{1 + r \sin(x+a)}$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+a)$$

szubstitució alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\int \frac{dx}{1 + r \sin(x+a)} = 2 \int \frac{dt}{1 + 2rt + t^2}$$

a) Ha $r < 1$, akkor

$$\int \frac{dt}{1 + 2rt + t^2} = \int \frac{dt}{(t+r)^2 + (1-r^2)}$$

a 118. §. 3. feladványa szerint:

$$\int \frac{dt}{(t+r)^2 + (1-r^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \operatorname{arctg} \frac{t+r}{\sqrt{1-r^2}},$$

következően:

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{2}{c \sqrt{1-r^2}} \operatorname{arctg} \frac{t+r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

β) Ha pedig $r > 1$, akkor

$$\int \frac{dt}{1 + 2rt + t^2} = - \int \frac{dt}{(r^2-1) - (t+r)^2};$$

$$\frac{t+r}{\sqrt{r^2-1}} = z, \quad dt = \sqrt{r^2-1} dz$$

szubstitució alkalmazása után

$$\int \frac{dt}{1 + 2rt + t^2} = - \frac{1}{\sqrt{r^2-1}} \int \frac{dz}{1-z^2},$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-z}$$

$$\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{1}{c \sqrt{r^2-1}} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

$$132. \int \sin^m x \cos^n x dx = I_{mn}.$$

I_{mn} meghatározására $\sin^m x \cos^n x$ -t differenciáljuk; a differenciálhányadosnak két tagja lesz, az elsőben előfordul $\cos^{n+1} x$ abból $\cos^2 x$ helyett $1 - \sin^2 x$ -t írunk s a nyert kifejezést összevonjuk, ez lesz a differenciálhányados egyik alakja, egy másik alakját úgy nyerjük, ha a második tagban előforduló $\sin^{m+1} x$ -ből $\sin^2 x$ helyett $1 - \cos^2 x$ -t írunk s azután összevonunk, ily módon tehát nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin^m x \cos^n x)}{dx} &= m \sin^{m-1} x \cos^n x - n \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x \\ &= m \sin^{m-1} x \cos^n x - (m+n) \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x \\ &= (m+n) \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x - n \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \end{aligned}$$

Ezen képletek alapján felírhatjuk a következő két redukziós alapformulát:

$$m I_{m-1n-1} - (m+n) I_{m+1n-1} = \sin^m x \cos^n x, \quad (I)$$

$$(m+n) I_{m-1n+1} - n I_{m-1n-1} = \sin^m x \cos^n x. \quad (II)$$

Ha m, n helyett $m+1, n+1$ -et írunk, akkor

$$(m+1) I_{mn} - (m+n+2) I_{m+2n} = \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x, \quad (1)$$

$$(m+n+2) I_{m n+2} - (n+1) I_{mn} = \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x. \quad (2)$$

Ha az (1)-ben $m+2$ helyett m -et, a (2)-ben pedig az $n+2$ helyett n -et írunk, akkor

$$(m-1) I_{m-2n} - (m+n) I_{mn} = \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x, \quad (3)$$

$$(m+n) I_{mn} - (n-1) I_{m n-2} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x. \quad (4)$$

A redukciónál az (1) és (2) formulákat pozitív m és n ; a (3) és (4)-et pedig negatív m és n esetében alkalmazzuk. Ha m és n egész számok, akkor I_{mn} meghatározása redukziós képleteink segítségével I_{00}, I_{01}, I_{10} , vagy I_{11} kiszámítására vezethető vissza, a szerint, a mint m és n páros számok, vagy m páros és n páratlan, vagy megfordítva, vagy pedig m és n páratlan számok.

133. A parciális integráció alkalmazása.

Legyenek P és z az x változónak tetszőleges differenciálható függvényei. Képezzük Pz^n differenciálhányadosát, mely a

$$z'P = P_1'$$

jelölés alkalmazásával a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d(Pz^n)}{dx} = P'z^n + nP_1'z^{n-1},$$

honnan

$$\int P'z^n dx = Pz^n - n \int P_1'z^{n-1} dx. \quad (I)$$

Ezen formula alkalmazásával:

$$\int P_1'z^{n-1} dx = P_1z^{n-1} - (n-1) \int P_2'z^{n-2} dx,$$

hol P_1 nem más, mint P_1 integrálja és

$$P_2' = z'P_1.$$

Evvel az eljárással azután eljutunk egy oly integrálhoz, melyben z nem fordul elő s a mely talán könnyebben integrálható.

1. Pl. Legyen

$$z = lx, \quad P' = x^m,$$

tehát

$$P = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad P_1' = \frac{x^m}{m+1}$$

következően:

$$\int x^m (lx)^n dx = \frac{x^{m+1} (lx)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (lx)^{n-1} dx.$$

Látható tehát, hogy baloldali integrálunk visszavezethető

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

integrálra.

2. Pl. Legyen

$$z = x, \quad P' = e^x,$$

tehát

$$P = e^x, \quad P_1' = e^x$$

következően:

$$\int e^x x^n dx = e^x x^n - n \int e^x x^{n-1} dx.$$

3. Pl. Legyen

$$P' = \cos x, \quad z = x,$$

tehát

$$P = \sin x, \quad P_1' = \sin x,$$

következően:

$$\int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx.$$

Hasonlóképen találjuk, hogy

$$\int x^{n-1} \sin x dx = -x^{n-1} \cos x + (n-1) \int x^{n-2} \cos x dx.$$

Határozzuk meg még a következő két integrált:

$$U = \int e^{ax} \cos bxdx, \quad V = \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Az

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$$

képlet alkalmazásával, ha

$$u = \cos bx, \quad v' = e^{ax},$$

nyerjük, hogy

$$U = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx,$$

hasonlóképen találjuk, hogy

$$V = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx,$$

tehát

$$aU - bV = e^{ax} \cos bx,$$

$$bU + aV = e^{ax} \sin bx,$$

honnan

$$U = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx),$$

$$V = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx).$$

134. Alkalmazások.

I. Meghatározandók az

$$\int \cos ax \cos \beta x dx, \quad \int \sin ax \sin \beta x dx \quad \text{és} \quad \int \sin ax \cos \beta x dx$$

integrálok. Ismeretes, hogy

$$\cos ax \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos (a+\beta) x + \cos (a-\beta) x],$$

$$\sin ax \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos (a-\beta) x - \cos (a+\beta) x],$$

$$\sin ax \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin (a+\beta) x + \sin (a-\beta) x];$$

következõleg:

$$\int \cos ax \cos \beta x dx = \frac{\sin (a+\beta) x}{2(a+\beta)} + \frac{\sin (a-\beta) x}{2(a-\beta)},$$

$$\int \sin ax \sin \beta x dx = \frac{\sin (a-\beta) x}{2(a-\beta)} - \frac{\sin (a+\beta) x}{2(a+\beta)},$$

$$\int \sin ax \cos \beta x dx = -\frac{\cos (a+\beta) x}{2(a+\beta)} - \frac{\cos (a-\beta) x}{2(a-\beta)}.$$

II. Meghatározandó:

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x}.$$

A 128. §. IV. pontja alapján:

$$\text{de } \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x \pm b^2 \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2 \pm b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \int \frac{dt}{a^2 \pm b^2 t^2},$$

$$\int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{d\left(\frac{bt}{a}\right)}{1 + \left(\frac{bt}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bt}{a},$$

$$\int \frac{dt}{a^2 - b^2 t^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{d\left(\frac{bt}{a}\right)}{1 - \left(\frac{bt}{a}\right)^2} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{a+bt}{a-bt}.$$

Tehát

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} x}{a},$$

$$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \frac{a+b \operatorname{tg} x}{a-b \operatorname{tg} x}.$$

III. Meghatározandó

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x}.$$

Vagy alkalmazzuk a 128. §. VI. pontjának fejtegetéseit, vagy pedig, mivel

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a+b \cos x} &= \int \frac{dx}{a \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) + b \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)} \\ &= \int \frac{dx}{(a+b) \cos^2 \frac{x}{2} + (a-b) \sin^2 \frac{x}{2}},\end{aligned}$$

tehát alkalmazhatók az imént megállapított (4) és (5) formulák.

XVI. HATÁROZOTT INTEGRÁLOK.

135. Néhány fontosabb határozott integrál kiszámítása.

Ha az (a, b) határok között s a, b pontokban folytonos $f(x)$ függvények határozatlan integrálja $F(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Tehát

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1, \quad (2)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 1. \quad (3)$$

Az előbbi fejezet (1), (2) és (3) képletei alapján, ha α és β egész számok és

akkor $\alpha \neq \beta$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos \beta x dx = 0, \quad (4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \sin \beta x dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \cos \beta x dx = 0.$$

Ha

$$I_{mn} = \int_0^{\pi} \sin^m x \cos^n x dx.$$

Akkor a 129. fejezet (3) és (4) képletei alapján:

$$I_{mn} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2, n},$$

$$I_{mn} = \frac{n-1}{m+n} I_{m, n-2}.$$

Igy

$$I_{20} = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_{02} = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Legyen továbbá:

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx,$$

akkor a 129. §. (3) képlete alapján:

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2},$$

melynek alapján, ha

$$I_{2n} = \frac{n-1}{2n} \cdot \frac{(n-2)-1}{2n-2} \dots \frac{1}{2} I_0,$$

ha pedig

$$m=2n+1,$$

akkor

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n-2)}{(2n-1)} \dots \frac{2}{3} I_1.$$

Amde

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1,$$

azért

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n \cdot (2n-2) \dots 2}{(2n+1)(2n-1) \dots 3}. \quad (10)$$

Minthogy

$$\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

azért

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1},$$

azaz:

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1.$$

Amde

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n},$$

s így

$$\frac{2n+1}{2n} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1,$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1,$$

ennélfogva a (9) és (10) formulák alapján:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{(2 \cdot 4 \dots 2n)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1,$$

következőleg:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 \cdot 4 \dots 2n)^2}{1 \cdot 3 \dots (2n-1) \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)},$$

ez pedig nem más, mint az ismeretes WALLIS-féle formula.

136. Hatványsorok integrálása.

Ha az

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

hatványsor az (a, b) tartományban az a és b helyeket is beleértve konvergens, ez azt jelenti, hogy ezen tartomány bármely helyén, ha n -et elég nagynak választjuk:

$$|R_n| = |a_{n+1}x^{n+1} + a_{n+2}x^{n+2} + \dots| < \varepsilon,$$

bármily kicsinek választjuk is ε -t. Ennélfogva

$$\left| \int_a^b R_n dx \right| < \varepsilon (b-a),$$

következőleg:

$$\int_a^b f(x) dx = \left(a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots \right)_a^b$$

határozott s véges érték. Az

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

hatványsort végtelen sorunk határozatlan integráljának nevezzük.

137. A teljes első- és másodfajú elliptikus integrálok meghatározása.

Az *elsőfajú teljes elliptikus* integrál alatt a következő határozott integrált értjük:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \quad \varepsilon^2 < 1.$$

Minthogy az

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} &= \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} \varepsilon^4 \sin^4 \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} \varepsilon^6 \sin^6 \varphi + \dots \end{aligned}$$

sor konvergens, ha

$$|\varepsilon \sin \varphi| < 1,$$

s mivel $\varepsilon < 1$, azért sorunk konvergens, ha φ 0-tól $\frac{\pi}{2}$ -ig változik; szabad tehát sorunkat φ -re nézve 0-tól $\frac{\pi}{2}$ -ig integrálni, s mivel 132. §. (9) képlete értelmében:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{\pi}{2},$$

azért

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} = \\ = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \varepsilon^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \varepsilon^6 + \dots \right].$$

A másodfajú teljes elliptikus integrál a következő:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Minthogy

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} &= \\ &= 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \sin^4 \varphi - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \sin^6 \varphi - \dots \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \varepsilon^{2n} \sin^{2n} \varphi - \dots \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \varepsilon^{2n} \sin^{2n} \varphi \end{aligned}$$

sor φ -re nézve 0-tól $\varphi \frac{\pi}{2}$ -ig konvergens, tehát ezen határok között integrálható s tekintettel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi$$

főtebb fölirt értékére:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \right)^2 (2n-1) \varepsilon^{2n} \right].$$

Megjegyzendő, hogy elliptikus integráljainkban $\sin \varphi$ helyett $\cos \varphi$ -t is írhatunk; mert ez megfelel annak, midőn φ helyett $\frac{\pi}{2} - \varphi$ -t írunk; ekkor integráljaink ellenkező előjelűvé válnak ugyan, de a határok is felcserélődnek.

138. Sorbafejtés integrálszámítással.

Ha valamely függvény differenciálhányadosának végtelen sorát ismerjük, akkor integrálással meghatározhatjuk magának a függvénynek végtelen sorát is. Így

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = l(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)_n x^{2n},$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)_n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

139. A Taylor-féle sor levezetése integrálszámítással; Bernoulli-féle sor.

Legyen a rövidség kedvéért

$$f(x+h-z) = \varphi(-z),$$

tehát

$$\frac{d\varphi}{dz} = -\varphi'(-z).$$

Az

$$\int \varphi'(-z) dz$$

integrálból parciális integrációval a következő képleteket nyerjük:

$$\begin{aligned}
 \int \varphi'(-z) dz &= \varphi'(-z) z + \int \varphi''(-z) z dz, \\
 \int \varphi''(-z) z dz &= \varphi''(-z) \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{2!} \int \varphi'''(-z) z^2 dz, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\frac{1}{(n-2)!} \int \varphi^{(n-1)}(-z) z^{n-2} dz = \\
 &= \varphi^{(n-1)}(-z) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int \varphi^{(n)}(-z) z^{n-1} dz.
 \end{aligned}$$

Ha már most ezeket az egyenleteket összegezzük, akkor a következőhöz jutunk:

$$\begin{aligned}
 \int \varphi'(-z) dz &= \varphi'(-z) z + \varphi''(-z) \frac{z^2}{2!} + \dots + \\
 &+ \varphi^{(n-1)}(-z) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int \varphi^{(n)}(-z) z^{n-1} dz,
 \end{aligned}$$

honnan

$$\begin{aligned}
 \int_0^h \varphi'(-z) dz &= \varphi'(-h) h + \varphi''(-h) \frac{h^2}{2!} + \dots + \\
 &+ \varphi^{(n-1)}(-h) \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h \varphi^{(n)}(-z) z^{n-1} dz.
 \end{aligned}$$

Amde $\varphi(-z)$ definíciója értelmében:

$$\begin{aligned}
 \int_0^h \varphi'(-z) dz &= \varphi(0) - \varphi(-h) = f(x+h) - f(x), \\
 \varphi^{(i)}(-h) &= f^{(i)}(x),
 \end{aligned}$$

következőleg:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= f(x) + f'(x) h + f''(x) \frac{h^2}{2!} + \dots + \\
 &+ f^{(n-1)}(x) \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h \varphi^{(n)}(-z) z^{n-1} dz.
 \end{aligned}$$

Ez már nem más, mint a TAYLOR-féle sor, melynek maradéktagja:

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h \varphi^{(n)}(-z) z^{n-1} dz,$$

melyből

$$h - z = t$$

szubstituczióval a következő alakot nyerjük:

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h f^{(n)}(x+t) (h-t)^{n-1} dt.$$

Melyből a középértéktétel alkalmazásával:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(x+\theta h) (h-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^h dt = \frac{f^{(n)}(x+\theta h) (1-\theta)^{n-1} h^n}{(n-1)!},$$

$\theta < 1$

mely a maradéktag CAUCHY-féle alakja.

Az általánosított középértéktétel alkalmazásával pedig

$$R_n = \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{(n-1)!} \int_0^h (h-t)^{n-1} dt = \frac{f^{(n)}(x+\theta h) h^n}{n!},$$

ez pedig a maradéktag LAGRANGE-féle alakja.

Ha a

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \dots$$

sorban h helyett $-x$ -et írunk, akkor kellő rendezéssel a következő sort nyerjük:

$$f(x) = f(0) + f'(x)x - f''(x)\frac{x^2}{2!} + f'''(x)\frac{x^3}{3!} - f^{(4)}(x)\frac{x^4}{4!} + \dots,$$

melyet BERNOULLI-féle sornak nevezünk.

XVII. TÖBBSZÖRÖS INTEGRÁLOK.

140. A kettős integrálok definíciója.

Legyen $f(x, y)$ a véges ω tartományban folytonos és véges függvény s oszszuk az ω tartományt $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ intervallumokra; jelöljük ω_i -ben a függvény legnagyobb értékét M_i -vel,

a legkisebbet pedig m_i -vel; képezzük végül a következő összegeket:

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \omega_i,$$

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \omega_i.$$

Minthogy az egyváltozós függvények folytonosságára s ingadozására vonatkozó tételek ugyanazon okoskodások alapján a kétváltozós függvényekre is érvényesek, azért

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ \omega_i=0}} S = \lim_{\substack{n=\infty \\ \omega_i=0}} s = I,$$

mit röviden így jelölünk:

$$\lim S = \lim s = I.$$

Egy másféle $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_r$ beosztás ω'_i intervallumában jelöljük a függvény legnagyobb értékét M'_i -vel, a legkisebbét pedig m'_i -el, és legyen

$$S' = \sum_{i=1}^n M'_i \omega'_i,$$

$$s' = \sum_{i=1}^n m'_i \omega'_i.$$

Ezen összegekre vonatkozólag is

$$\lim S' = \lim s' = \Gamma.$$

Bebizonyítandó, hogy

$$I = \Gamma.$$

Jelöljük ugyanis az $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_r$ intervallumoknak azon részeit, melyek ω_1 -el közösek $\omega_{11}, \omega_{12}, \dots, \omega_{1r}$ -el; általában a melyek ω_i -vel közösek $\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{ir}$ -el. Akkor minden esetre helyesek a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} \omega_{i1} M'_1 + \omega_{i2} M'_2 + \dots + \omega_{ir} M'_r &\geq m_i (\omega_{i1} + \omega_{i2} + \dots + \omega_{ir}) = m_i \omega_i, \\ \omega_{i1} m'_1 + \omega_{i2} m'_2 + \dots + \omega_{ir} m'_r &\leq M_i (\omega_{i1} + \omega_{i2} + \dots + \omega_{ir}) = M_i \omega_i, \end{aligned}$$

$i=1, 2, \dots, n$

mert, ha pl. ω_{i1} nem zérus, akkor minthogy így ω'_1 -nek van közös része ω_1 -gyel, azért ω'_1 -ben a legnagyobb érték nem

lehet kisebb, mint ω_1 -ben a legkisebb, éppen így ω'_1 -ben a legkisebb érték nem lehet nagyobb, mint ω_1 -ben a legnagyobb. Egyenlőtlenségeink összegezéséből következik, hogy

$$M'_1 \sum_{i=1}^n \omega_{i1} + M'_2 \sum_{i=1}^n \omega_{i2} + \dots + M'_r \sum_{i=1}^n \omega_{ir} \geq s,$$

$$m'_1 \sum_{i=1}^n \omega_{i1} + m'_2 \sum_{i=1}^n \omega_{i2} + \dots + m'_r \sum_{i=1}^n \omega_{ir} \leq S.$$

Megfontolva, hogy

$$\sum_{i=1}^n \omega_{i1} = \omega'_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\sum_{i=1}^n \omega_{ir} = \omega'_r,$$

következik, hogy

$$S' \geq s,$$

$$s' \leq S,$$

de

$$\lim S' = \lim s' = I',$$

azért

$$S \geq I' \geq s.$$

De S és s -nek is ugyanaz a határértéke t. i. I , azért

$$I = I',$$

a mi bebizonyítandó volt. Ha már most az ω_i intervallumnak egy tetszőleges pontját (x_i, y_i) -vel jelöljük, akkor

$$S \geq \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \omega_i \geq s,$$

tehát

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \omega_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \omega_i = I.$$

Ezt az összeget nevezzük $f(x, y)$ -nak az ω tartományra vonatkozó kettős integráljának. Ha már most ω_i limesét egyszerűen $d\omega$ -nak és ezen végtelen kis intervallum egy tetszőleges pontját (x, y) -nal jelöljük, akkor I jelölésére a következő szimbolumot használjuk:

$$I = \int_{(\omega)} f(x, y) d\omega.$$

141. A kétszeres integrálok meghatározása.

Tárgyaljuk azt az egyszerűbb esetet (21. ábra), midőn az ω területet oly görbe határolja, melyet úgy az x , mint az y tengelylyel párhuzamos egyenes legfeljebb két pontban metsz. Integrálunkat először is az y tengelytől x távolságban végig húzódó dx vastagságú ABA_1B_1 sávra terjesztjük ki. Ha az ω teret határoló görbe egyenlete:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

akkor föltevésünk értelmében egy s ugyanazon x -hez két y érték tartozik, legyenek ezek y_1 és y_2 , tehát legyen

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x);$$

integrálunknak az ABA_1B_1 sávra vonatkozó része bizonyára

$$dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy$$

szimbolummal van jellemezve. Az egész ω tartományra vonatkozó integrált úgy nyerjük, ha az összes x -ekhez tartozó dx vastagságú sávokra vonatkozó integrálokat összeadjuk. Ha tehát tartományunk határgörbéjéhez az y tengelylyel párhuzamos érintők az origótól a_1 és a_2 távolságban metszik az x tengelyt, akkor a szóban forgó végtelen vékony sávok a_1 -től egészen a_2 -ig terjednek; az ezekre a sávokra vonatkozó integrálok összege tehát:

$$\int_{(\omega)} f(x, y) d\omega = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy.$$

Ha pedig megfordítva (22. ábra) először az y magasságban az x tengelylyel párhuzamos dy vastagságú sávra terjesztettük volna ki az integrált, akkor ennek értékét bizonyára a

$$dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx,$$

integrál határozza meg, ha x_1 és x_2 az egy s ugyanazon y -hoz tartozó x koordináták, tehát

$$x_1 = \phi_1(y), \quad x_2 = \phi_2(y).$$

Ha már most a tartományunkat bezáró görbének az x tengelyvel párhuzamos érintői b_1, b_2 pontokban metszik az y tengelyt. akkor az egész ω -ra vonatkozó integrál:

$$\int_{(\omega)} f(x, y) d\omega = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx.$$

De az előbbi fejezet fejtegetései értelmében bármiként oszszuk is fel az ω tartományt intervallumokra, a kettős integrálnak értelmezett határérték mindig ugyanaz marad, azért

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \int_{y_2}^{y_1} f(x, y) dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx,$$

azaz: az integráció sorrendjét szabad felcserélni.

Ha ω oly parallelogramm, melynek oldalai koordinátatengelyeink oldalaival párhuzamosak s a kezdőponthoz legközelebb és legtávolabb első szögpontjai (a_1, b_1) és (a_2, b_2) , akkor

$$\int_{(\omega)} f(x, y) d\omega = \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx.$$

Ha az integrálás területe több a tárgyalthoz hasonló tulajdonságú területre osztható, akkor az integrálást mindegyikre külön ki kell terjeszteni.

142. A kétszeres integrálok alaptulajdonságai.

Ha az $f(x, y)$ kétváltozós folytonos függvény a folytonossági tartományban levő (a_1, b_1) és (a_2, b_2) helyeken ellenkező előjelű, akkor a két pontot összekötő egyenesen — föltéve, hogy az egész egyenes beleesik a folytonossági tartományba — van oly (ξ, η) pont, melyre nézve

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

Ugyanis, ha a két pontot összekötő r hosszúságú egyenes

α szöget képez az x tengely pozitív felével, akkor bármely pontjának koordinátái:

$$\begin{aligned}x &= a_1 + t \cos \alpha, \\y &= b_1 + t \sin \alpha.\end{aligned}$$

Ha ezeket az értékeket $f(x, y)$ -ba behelyettesítjük, akkor $\varphi(t)$ függvényévé válik a t változónak, mely t -nek $(0, r)$ tartományában folytonos, de $\varphi(0)$ és $\varphi(r)$ ellenkező előjelűek, tehát van oly $0 < \tau < r$ helyünk, melyre nézve:

$$\varphi(\tau) = 0.$$

Ha a τ -nak megfelelő pontot (ξ, η) -nak nevezzük, akkor

$$f(\xi, \eta) = 0,$$

a mi bebizonyítandó volt.

Tételünkéből (16. §.) következik, hogy ha $f(x, y)$ függvény az (a_1, b_1) és (a_2, b_2) pontokat összekötő egyenesen folytonos, akkor a függvény $f(a_1, b_1)$ -től $f(a_2, b_2)$ értékig minden értéket felvesz, ha az (a_1, b_1) pont egyenes vonalon (a_2, b_2) pontba mozog.

Ha már most $f(x, y)$ kétváltozós függvénynek tényleg megvannak azon tulajdonságai, melyektől tételeink érvényessége függ, akkor

$$\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) dx = f(\xi, \eta) (a_2 - a_1) (b_2 - b_1),$$

melyet középertéktételnek nevezünk. Bizonyítása azonos az egyváltozós függvényekre vonatkozó megfelelő tételnek a bebizonyításával. Ha pedig $\varphi(x, y)$ az (a_1, b_1) , (a_2, b_2) pontokat összekötő egyenesen folytonos s jelét nem változtatja, akkor

$$\int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} f(x, y) \varphi(x, y) dx = f(\xi, \eta) \int_{b_1}^{b_2} dy \int_{a_1}^{a_2} \varphi(x, y) dx,$$

ez az általánosított középertéktétel.

Lássuk a középertéktétel egyik fontos alkalmazását.

Jelöljük integrálunkban az alsó határokat a, b -vel, a felsőket pedig X, Y -nal, akkor integrálunk X -nek és Y -nak bizonyára függvénye, tehát

$$F(X, Y) = \int_b^Y dy \int_a^X f(x, y) dx,$$

$$F(X+\Delta X, Y) - F(X, Y) = \int_b^Y dy \int_a^{X+\Delta X} f(x, y) dx - \int_b^Y dy \int_a^X f(x, y) dx = \int_b^Y dy \int_X^{X+\Delta X} f(x, y) dx,$$

innen pedig

$$F(X+\Delta X, Y+\Delta Y) - F(X, Y+\Delta Y) - [F(X+\Delta X, Y) - F(X, Y)] = \int_b^{Y+\Delta Y} dy \int_X^{X+\Delta X} f(x, y) dx - \int_b^Y dy \int_X^{X+\Delta X} f(x, y) dx = \int_Y^{Y+\Delta Y} dy \int_X^{X+\Delta X} f(x, y) dx.$$

De ha az (X, Y) ponthoz az $(X+\Delta X, Y+\Delta Y)$ pontot oly közel választjuk, hogy a két pontot összekötő egyenes $f(x, y)$ folytonossági tartományába essék, akkor

$$\int_Y^{Y+\Delta Y} dy \int_X^{X+\Delta X} f(x, y) dx = f(X+\theta_1\Delta X, Y+\theta_1\Delta Y) \Delta X \Delta Y.$$

$$\theta < 1, \theta_1 < 1.$$

Ha tehát fentebbi egyenletünk mindkét oldalát elosztjuk $\Delta X \Delta Y$ -nal s azután ΔX -el és ΔY -nal a zérus felé közeledünk, akkor határértékül a következő egyenletet nyerjük:

$$\frac{\partial^2 F(X, Y)}{\partial X \partial Y} = f(X, Y).$$

Az olyan tulajdonságú $F(x, y)$ függvényt, melyre nézve az imént felírt egyenlet teljesül, $f(x, y)$ határozatlan integráljának nevezzük s így jelöljük:

$$\iint f(x, y) dx dy = F(x, y) + c.$$

Hasonlóképen könnyű meggyőződni, hogy

$$\int f(x, y) dy = \frac{\partial F}{\partial x},$$

$$\int f(x, y) dx = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Egyenleteink alapján tehát, ha valamely függvénynek hatá-

rozatlan integrálját ismerjük, akkor határozott integrálját is fel tudjuk írni. Ugyanis

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx = \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial F(x_2, y)}{\partial y} - \frac{\partial F(x_1, y)}{\partial y} \right] dy \\ = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

143. Kétszeres integrálok származtatása egyszeres integrálok összesorzásával.

Legyen $f(x)$ és $\varphi(y)$ integrálja

$$I_1 = \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx, \\ I_2 = \int_{b_1}^{b_2} \varphi(y) dy;$$

oszzuk az (a_1, a_2) intervallumot $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, a (b_1, b_2) intervallumot pedig $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n$ részekre, s legyen:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \\ s_r = \sum_{k=1}^r \varphi(y_k) \Delta y_k,$$

hol x_i és y_k a Δx_i illetőleg Δy_k intervallum valamely pontja, minthogy

$$S_n s_r = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^n f(x_i) \varphi(y_k) \Delta x_i \Delta y_k,$$

és

$$\lim (S_n s_r) = \lim S_n \lim s_r = I_1 I_2,$$

azért:

$$I_1 I_2 = \int_{b_1}^{b_2} \varphi(y) dy \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx.$$

Pl. Legyen

$$I = \int_a^b e^{-x^2} dx, \\ I = \int_a^b e^{-y^2} dy,$$

tehát

$$I^2 = \int_a^b e^{-y^2} dy \int_a^b e^{-x^2} dx.$$

Mint hogy a határok egyenlők, azért fölösleges különválasztani az x -re y -ra vonatkozó integrált, s így

$$I^2 = \int_a^b \int_a^b e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

144. A kétszeres integrálok transzformációja.

Alkalmazzuk az

$$\iint f(x, y) dx dy$$

kettős integrálra a következő szubsztitucziót:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(\xi, \eta), \\ y &= \varphi_2(\xi, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Írjuk integrálunkat a következő alakba:

$$\iint f(x, y) dx dy = \int dy \int f(x, y) dx.$$

Az

$$\int f(x, y) dx$$

integrál kiszámításánál y -t konstansnak tekintjük, tehát az (1) egyenletek alapján ebben az esetben:

$$dx = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} d\eta,$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} d\eta,$$

honnan

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} dx,$$

következőleg:

$$\int f(x, y) dx = \int f(\varphi_1, \varphi_2) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{d\xi}{\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}}.$$

Ha ebben az integrálban η -t az (1) egyenletek alapján ξ és y független változók függvényeként fogjuk fel, akkor az

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(\varphi_1, y) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{d\xi dy}{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}}.$$

integrálban ξ és y lesznek a független változók, ha először y szerint integrálunk, akkor az

$$\int f(\varphi, y) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{dy}{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}}$$

integrálban csak y a változó, ξ konstans, tehát az (1) egyenletek másodika alapján:

$$dy = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta} d\eta,$$

következően:

$$\int f(\varphi_1, y) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{dy}{\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}} = \int f(\varphi_1, \varphi_2) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)} d\eta,$$

s így

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f(\varphi_1, \varphi_2) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta.$$

Pl. Transzformáljuk, az

$$\iint dx dy$$

integrált, ha

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

A 48. §-ban már láttuk, hogy

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho,$$

tehát

$$\iint dx dy = \iint \rho d\rho d\varphi,$$

s így

$$\iint e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint e^{-\rho^2} d\rho d\varphi.$$

145. Háromszoros integrálok.

Ha az $f(x, y, z)$ háromváltozós függvény a véges τ tartományban folytonos és végés; továbbá $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ intervallumok összege τ -t szolgáltatja és x_i, y_i, z_i a τ_i intervallum valamely pontja, akkor a

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \tau_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \tau_i$$

összeg határozott limeshez közeledik, melyet $f(x, y, z)$ háromszoros integráljának nevezünk, s így jelöljünk:

$$I = \int_{(\tau)} f(x, y, z) d\tau.$$

Kiszámítása következőképen történik: Legyen az integráció terét határoló felület egyenlete:

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Messük ezt a felületet z magasságban egy síkkal s nevezzük a metszési idom területét ω -nak, akkor

$$dz \int_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy$$

nem más, mint integrálunknak az ω lapon fekvő dz magasságú hengerre vonatkozó része. Ha tehát az összes z -khez tartozó végtelen vékony hengerekre vonatkozó integrálokat összegezzük, nyerjük a τ tartományra vonatkozó integrált, ha tehát tartományunkat bezáró felületet az xy síkkal párhuzamos érintősíkok z_1 és z_2 magasságban érintik, akkor a végtelen vékony hengerek z_1 magasságban kezdődnek s z_2 -nél végződnek, tehát

$$I = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{(\omega)} f(x, y, z) dx dy.$$

Ha pedig τ tartományunk több ily zárt tartományból állana, akkor azok mindegyikére ki kell terjeszteni az integrálást.

Megjegyzendő, hogy az integráció bármily sorrendben vé-

gezhető. Általában mindazok a tételek, melyeket a kettős integrálokra vonatkozólag megállapítottunk, a fogalmazásnak megfelelő módosítással érvényesek a háromszoros integrálokra is. Így pl. $f(x, y, z)$ határozatlan integrálja alatt értjük azt az $F(x, y, z)$ függvényt, melyre nézve:

$$\frac{\partial^3 F(x, y, z)}{\partial x \partial y \partial z} = f(x, y, z).$$

146. A háromszoros integrálok transzformációja.

Az

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz$$

integrálra alkalmazzuk a következő szubsztitucziót:

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta). \quad (1)$$

Ha először z szerint integrálunk, akkor az

$$\int f(x, y, z) dz$$

integrálban csak z -t tekintjük változónak, tehát az (1) alatt levő egyenletek értelmében:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} d\zeta, \\ 0 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} d\zeta, \\ dz &= \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \zeta} d\zeta, \end{aligned}$$

honnan

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} d\zeta = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)} dz,$$

tehát integrálunk ily módon a következő alakba írható:

$$\begin{aligned} &\iiint f(x, y, \varphi_3) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{dx dy d\zeta}{\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)}} = \\ &= \int d\xi \iint f(x, y, \varphi_3) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{dx dy}{\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)}}, \end{aligned}$$

melyben ξ, η értékeit az (1) alatt levő egyenletek alapján x, y, ζ -val kifejezetten behelyettesítve kell képzeelnünk úgy, hogy integrálunkban már most csak ezek a változók fordulnak elő. De a kettős integrálok transzformációjára vonatkozó kutatásainkból következik, hogy

$$\iint f(x, y, \zeta) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{dx dy}{\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\xi, \eta)}} = \\ = \iint f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta,$$

következőleg:

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iiint f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} d\xi d\eta d\zeta.$$

Pl. Transzformálandó a következő integrál:

$$\iiint dx dy dz,$$

ha

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

A 48. §-ban láttuk, hogy

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = r^2 \sin \theta.$$

Minthogy a függvénydetermináns képzésénél két sor felcserélése az előjelet megváltoztatja, már pedig arra, hogy a változókat mily sorrendben vegyük törvényt nem állíthatunk fel, azért a függvénydetermináns értékét is mindig pozitív előjellel vesszük s így:

$$\iiint dx dy dz = \iiint r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta.$$

147. n-szeres integrálok.

Ha $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n változós függvény az $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ tartományban folytonos és véges, akkor az

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

integrál szintén határozott érték s az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvény n -szeres integráljának nevezzük. Az

$$\iint \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

oly függvény, melyre nézve

$$\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Az

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, x_n = \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

szubstituczió alkalmazásával

$$\begin{aligned} & \iint \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ & = \iint \dots \int f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{(\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_n)} dy_1 dy_2 \dots dy_n. \end{aligned}$$

XVIII. AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS GEOMETRIAI ALKALMAZÁSAI.

148. Területszámítás.

Ha $f(x)$ az (a, b) tartományban folytonos s az

$$y = f(x)$$

egyenletnek megfelel az EF görbe 23. ábra, továbbá ha ξ a Δx intervallumnak valamely pontja, akkor az $ABCD$ derékszögű parallelogramnak a területe

$$f(\xi) \Delta x$$

következőleg:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(\xi) \Delta x$$

nem más, mint az $EGFH$ síkrész területe.

1. Pl. A parabola egyenlete:

$$y^2 = 2px,$$

tehát

$$\sqrt{2p} \int_0^a x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2pa^3}$$

nem más, mint az OAB síkrész területe (24. ábra).

De a kettős integrálok tárgyalása alkalmával láttuk, hogy

$$\int_{(\omega)} dx dy$$

nem más, mint maga az ω tartomány területe s hogy ha az ω tartományt határoló görbe egyenlete adva van, akkor ω -t meg tudjuk határozni. Így pl. A kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

honnan

$$y_2 = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y_1 = -\sqrt{r^2 - x^2},$$

tehát az x -hez tartozó dx végtelen kis vékonyságú sávnak a területe (25. ábra)

$$dx \int_{y_1}^{y_2} dy = dx (y_2 - y_1) = 2 \sqrt{r^2 - x^2} dx;$$

a sávok $-r$ -től $+r$ -ig terjednek, tehát a kör területe:

$$t = \int_{-r}^{+r} dx \int_{y_1}^{y_2} dy = 2 \int_{-r}^{+r} \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

De

$$\frac{x}{r} = \sin t, \quad \frac{dx}{r} = \cos t$$

szubsztituczióval és annak megfontolásával, hogy $x = \pm r$ -nek megfelel $t = \pm \frac{\pi}{2}$,

$$t = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt.$$

Ámde a 129. §. (4) képlete szerint:

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} \int dt,$$

tehát

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$$

s így a kör területe:

$$t = r^2\pi.$$

Az ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

honnan

$$y_2 = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_1 = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Minthogy a jelen esetben a végtelen vékonyságú sávok 26. á. $-a$ -tól $+a$ -ig terjednek, azért az ellipszis területe:

$$t = \int_{-a}^{+a} dx \int_{y_1}^{y_2} dy = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} dx,$$

ámde az előbbi feladvány szerint:

$$2 \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2} = a^2\pi,$$

tehát az ellipszis területe:

$$t = ab\pi.$$

Láttuk továbbá, hogy polárkoordinátákban

$$\int_{(w)} dx dy = \int_{(w)} \rho d\rho d\varphi,$$

hol $\rho d\rho d\varphi$ nem más, mint egy oly végtelen kis parallelogramm (27. ábra) területe, melynek egyik oldala $d\rho$, a másik $\rho d\varphi$. Ha pl. egy r sugarú kör területét akarjuk kiszámítani, akkor ha először φ szerint integrálunk 0-tól 2π -ig, nyerjük a ρ sugarú körön levő $d\rho$ vastagságú körgyűrűnek a területét, ezek a körgyűrűk ρ változásával 0-ponttól az r sugarú kör kerületéig terjedhetnek, így tehát ρ -ra nézve integrálnunk kell 0-tól r -ig következőleg:

$$t = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = r^2\pi.$$

A lemniscata egyenlete:

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

hol φ változhatik $-\frac{\pi}{4}$ -től $+\frac{\pi}{4}$ -ig. Ha tehát az

$$\iiint \rho d\rho d\varphi$$

integrálban először ρ szerint integrálunk 0-tól ρ -ig, akkor a φ szöghöz tartozó $d\varphi$ nyílású végtelen vékony hasítvány területét nyerjük (28. ábra), ezek a végtelen vékony hasítványok $-\frac{\pi}{4}$ -nél kezdődnek s $+\frac{\pi}{4}$ -nél végződnek, tehát φ -re nézve integrálnunk kell $-\frac{\pi}{4}$ -től $+\frac{\pi}{4}$ -ig; de ekkor a lemniscatának csak fél területét nyerjük, az egész területe tehát

$$t = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\rho} \rho d\rho = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \rho^2 d\varphi = a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi,$$

azaz:

$$t = a^2.$$

149. Köbtartalom számítás.

A

$$\iiint dx dy dz$$

integrál kiterjesztve valamely τ tartományra szolgáltatja a τ tartomány köbtartalmát, ennek meghatározási módját már a háromszoros integrálok tárgyalásánál láttuk.

Pl. Az ellipszoid egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

A z magasságában fekvő s az xy síkkal párhuzamos sík felületünket

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

ellipszisben metszi, ennek fél főátmérői:

$$a_1 = a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

tehát területe:

$$t = \frac{ab\pi}{c^2} (c^2 - z^2),$$

minthogy a z magasságban fekvő dz vastagságú hengerek $-c$ -től $+c$ -ig terjednek, tehát az ellipszoid köbtartalma

$$K = \int_{-c}^{+c} dz \int_{(t)} dx dy = \frac{ab\pi}{c^2} \int_{-c}^{+c} (c^2 - z^2) dz,$$

honnan

$$K = \frac{4}{3} abc\pi.$$

Láttuk, hogy polárkoordinátákban

$$\int_{(\tau)} dx dy dz = \int_{(\tau)} \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho,$$

hol $\rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\rho$ oly végtelen kis derékszögű paralelepipedonunk (29. ábra) a köbtartalma, melynek élei $d\rho$, $\rho d\theta$, $\rho \sin \theta d\varphi$. Így, ha egy r sugarú gömbnek akarjuk meghatározni a térfogatát, akkor θ -t 0-tól π -ig, azután φ -t 0-tól 2π -ig változtatva, nyerjük a ρ sugarú gömbön levő $d\rho$ vastagságú réteg köbtartalmát, ha még ρ -t 0-tól r -ig változtatjuk, akkor nyerjük a gömb köbtartalmát, tehát

$$K = \int_0^r \rho^2 d\rho \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

A forgási felületek köbtartalma. Ha AB görbét (30. ábra) az x tengely körül megforgatjuk, akkor annak bármely (x, y) pontja y sugarú kört ír le, melynek területe $y^2\pi$ szorozva dx -el $y^2\pi$ alapú és dx magasságú henger köbtartalmát szolgáltatja, tehát az AB görbe leirta forgási test köbtartalma:

$$K = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Pl. Legyen a *kör egyenlete*:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

ha az x tengely körül megforgatjuk forgási testül a gömböt nyerjük, tehát ennek köbtartalma:

$$K = \pi \int_{-r}^{+r} y^2 dx = \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

Az *ellipszis egyenlete*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

ha az x tengely körül megforgatjuk, forgási ellipszoidot nyerünk, tehát ennek köbtartalma:

$$K = \pi \int_{-a}^{+a} y^2 dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} ab^2 \pi.$$

150. A görbék rektifikációja.

Legyenek valamely görbe pontjainak koordinátái t változónak oly folytonos s differenciálható függvényei, melyeknek differenciálhányadosai is ugyanezen változónak folytonos és véges függvényei. Ha tehát

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

akkor $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ szintén folytonos függvényei t -nek.

Oszzuk már most görbénknél $t = a$ és $t = b$ ($b > a$) pontok között fekvő részeit t_1, t_2, \dots, t_{n-1} pontokkal n részre s képezzük a t_i és t_{i-1} pontoknak egymástól való távolságát, melyet Δs_i -nek nevezünk, tehát

$$\Delta s_i = \sqrt{[f(t_i) - f(t_{i-1})]^2 + [\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}.$$

Akkor a

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta s_i$$

összeget a görbe a -tól b -ig terjedő ívhosszúságának nevezzük. Határozzuk már most meg ezt a határértéket. Középértéktételünk értelmében

$$\begin{aligned}\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} &= f'(\tau_i), & t_i > \tau_i > t_{i-1} \\ \frac{\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} &= \varphi'(\tau'_i), & t_i > \tau'_i > t_{i-1} \\ \frac{\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} &= \psi'(\tau''_i), & t_i > \tau''_i > t_{i-1}\end{aligned}$$

hol a 112. §. értelmében, ha t a (t_i, t_{i-1}) intervallum egy tetszőleges pontja, akkor

$$\begin{aligned}\tau_i &= t + \theta (t_i - t_{i-1}), \\ \tau'_i &= t + \theta_1 (t_i - t_{i-1}), \\ \tau''_i &= t + \theta_2 (t_i - t_{i-1}),\end{aligned}$$

hol $|\theta|$, $|\theta_1|$, $|\theta_2|$ mindegyike kisebb az egységnél. Ha tehát $t_i - t_{i-1}$ helyett röviden a Δt_i jelölést használjuk, akkor fölírt egyenleteink értelmében

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{f'(\tau_i)^2 + \varphi'(\tau'_i)^2 + \psi'(\tau''_i)^2} \cdot \Delta t_i.$$

Kimutatjuk már most, hogy

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} \cdot dt.$$

Előbb hivatkozunk a következő tételre: az (a, b, c) és (a_1, b_1, c_1) egészen tetszőleges pontok koordinátarendszerünk kezdőpontjával háromszöget alkotnak; minthogy bármely háromszögben — a degeneráltakat is beleértve — két oldal különbsége nem lehet nagyobb a harmadik oldalnál, azért

$$|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}| \leq \sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2}.$$

Ezen tétel alapján aztán

$$\begin{aligned}& |\sqrt{f'(t)^2 + \varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} - \sqrt{f'(\tau_i)^2 + \varphi'(\tau'_i)^2 + \psi'(\tau''_i)^2}| \leq \\ & \leq \sqrt{[f'(t) - f'(\tau_i)]^2 + [\varphi'(t) - \varphi'(\tau'_i)]^2 + [\psi'(t) - \psi'(\tau''_i)]^2}.\end{aligned}$$

Mint hogy $f'(t)$, $\varphi'(t)$ és $\psi'(t)$ t -nek folytonos függvényei, azért Δt_i -t megválaszthatjuk oly kicsinynek, hogy bármely kicsiny szám is ε , egyidejűleg legyen

$$|f'(t) - f'(\tau_i)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},$$

$$|\varphi'(t) - \varphi'(\tau_i)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},$$

$$|\psi'(t) - \psi'(\tau_i)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},$$

következően:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \cdot \Delta t_i - \sum_{i=1}^n \sqrt{f'^2(\tau_i) + \varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} \cdot \Delta t_i \right| < \varepsilon(b-a),$$

mely egyenlőtlenség kimondott tételünket világosan igazolja, emielfogva, ha görbénknek $t = a$ -tól $t = b$ -ig terjedő ívhosszúságát s -el jelöljük:

$$s = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

mely kifejezésnek annak megfontolásával, hogy

$$dx = f'(t) dt, \quad dy = \varphi'(t) dt, \quad dz = \psi'(t) dt,$$

a következő alakot is adhatjuk:

$$s = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

ha pedig x -t tekintjük függetlenül változó parameternek, akkor

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx.$$

Ha pedig görbénk az xy síkban fekvő síkgörbe, akkor erre nézve

$$z = 0,$$

tehát

$$s = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

1. Pl. A kör parameteres egyenletei.

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

tehát a kör (31. ábra) kerülete

$$k = r \int_0^{2\pi} dt = 2r\pi.$$

2. Pl. Az ellipszis parameteres egyenletei:

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t,$$

tehát az ellipszis (32. ábra) kerülete

$$k = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,$$

honnan az

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} < 1$$

jelölés alkalmazásával

$$k = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt,$$

a 134. §. szerint tehát

$$k = 2a\pi \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^2 (2n-1) \varepsilon^{2n} \right]$$

3. Pl. Ha a kisítkított körhenger (33. ábra) alapjának A pontjából α szög alatt egy egyenest vonunk, akkor ez az egyenes, ha síkunkat ismét hengerre görgetjük, a csavarvonalat írja le. Határozzuk meg egyenleteit. Legyen hengerünk tengelye derékszögű koordinátarendszerünk z tengelye, az x tengelye pedig menjen át az A ponton. Ha tehát C a csavarvonal egyik pontja s az ebből vont merőleges talppontja B s ha

$$\angle AOB = \varphi,$$

a henger alapkörének a sugara r , akkor

$$AB = r\varphi,$$

tehát

$$z = AB \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} \alpha - \varphi = ar\varphi,$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

hol

$$a = \operatorname{tg} \alpha,$$

tehát a csavarvonalnak 0-tól φ szögig terjedő íve

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{r^2(1+a^2)} d\varphi = r\sqrt{1+a^2} \varphi.$$

Ha a síkban az

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

szubstituczióval polárkoordinátákat vezetünk be, akkor

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2,$$

tehát

$$s = \int \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}.$$

Ha pedig a térben az

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta$$

szubstituczióval vezetünk be polárkoordinátákat, akkor

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

következőleg:

$$s = \int \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2}.$$

Pl. Ha egy a átmérőjű körnek O pontját szilárdnak tekintjük (34. ábra) s minden OP hurját az átmérő hosszúságával M -ig megnyújtjuk, az M pontok geometriai helyét *cardoid*-nak nevezzük. Ha $OM = \rho$ szöget képez az x tengely pozitív felével, akkor

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{\rho - a}{a} = \cos \varphi,$$

tehát a cardoid egyenlete polárkoordinátákban:

$$\rho = a(1 + \cos \varphi);$$

0-tól φ -ig terjedő íve tehát

$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{\sin^2 \varphi + (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = 2a \int_0^\varphi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi,$$

azaz:

$$s = 4a \sin \frac{\varphi}{2}.$$

151. A görbék érintőinek egyenletei.

Miként ismeretes $P(x, y, z)$ pontnak $Q(\xi, \eta, \zeta)$ ponttól (35. á.) való távolsága

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Ha PQ egyenes a koordinátatengelyekkel rendre α, β, γ szöget alkot, akkor PQ -nak a koordinátatengelyekre való vetületei:

$$QR = x - \xi = r \cos \alpha,$$

$$RS = y - \eta = r \cos \beta,$$

$$PS = z - \zeta = r \cos \gamma.$$

Honnan következik, hogy

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

továbbá

$$\frac{x-\xi}{\cos \alpha} = \frac{y-\eta}{\cos \beta} = \frac{z-\zeta}{\cos \gamma},$$

mely egyenleteknek eleget tesznek mindazon pontok ξ, η, ζ koordinátái, melyek rajta vannak az (x, y, z) pontból kiinduló (α, β, γ) irányú egyenesen, miért is ezeket az egyenleteket az egyenes egyenleteinek nevezzük; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ -t pedig az egyenes iránycosinusainak.

Egy λ, μ, ν irányú egyenes alkosson PQ egyenessel ε szöget s nevezzük PQ vetületét a λ, μ, ν irányú egyenesre ρ -nak, tehát

$$\rho = r \cos \varepsilon.$$

Másrészt PQ vetülete egyenlő a $PSRQ$ törtvonal vetületével, azaz:

$$\begin{aligned} \rho &= (x-\xi) \cos \lambda + (y-\eta) \cos \mu + (z-\zeta) \cos \nu \\ &= r (\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu), \end{aligned}$$

következésképpen:

$$\cos \varepsilon = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu.$$

Ha az (α, β, γ) irány merőleges a (λ, μ, ν) irányra, akkor $\rho = 0$, tehát

$$(x - \xi) \cos \lambda + (y - \eta) \cos \mu + (z - \zeta) \cos \nu = 0,$$

mely egyenletnek eleget tesznek mindazon pontok (ξ, η, ζ) koordinátái, melyek rajta vannak az x ponton átmenő s a (λ, μ, ν) irányra merőleges síkon, miért is ezt az egyenletet ezen sík egyenletének, $\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$ -t pedig a sík iránycosinusainak nevezzük.

Legyenek ezek után valamely egyenes egyenletei:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

ha f, φ és ψ az előbbi fejezetben megállapított tulajdonságuk, akkor az ív differenciáléja

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt.$$

Ha tehát ds -nek a koordinátatengelyekre való vetületei rendre: dx, dy, dz , akkor a ds -en átmenő, azaz az (x, y, z) ponton keresztül vont érintő iránycosinusai rendre:

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right) = (\lambda x', \lambda y', \lambda z'),$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}.$$

Tehát a görbe (x, y, z) pontjához vont érintő egyenletei:

$$\frac{x - \xi}{x'} = \frac{y - \eta}{y'} = \frac{z - \zeta}{z'},$$

vagy

$$\frac{x - \xi}{dx} = \frac{y - \eta}{dy} = \frac{z - \zeta}{dz}$$

Ha pedig a görbe síkgörbe, akkor az érintő egyenlete:

$$\frac{x - \xi}{x'} = \frac{y - \eta}{y'},$$

vagy

$$\frac{x - \xi}{dx} = \frac{y - \eta}{dy}$$

152. Az érintő sík egyenlete.

Ha valamely felület pontjainak koordinátái u, v változó parameterektől függnek, tehát

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

akkor a felület (x, y, z) pontján átmenő, de a felületen levő tetszőleges görbének (x, y, z) pontban vont érintőjének egyenletei:

$$\frac{x-\xi}{dx} = \frac{y-\eta}{dy} = \frac{z-\zeta}{dz},$$

hol

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

Ha tehát a rövidség kedvéért

$$\frac{x-\xi}{dx} = \frac{y-\eta}{dy} = \frac{z-\zeta}{dz} = -\frac{1}{\rho},$$

akkor

$$(x-\xi)\rho + \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = 0,$$

$$(y-\eta)\rho + \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = 0,$$

$$(z-\zeta)\rho + \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = 0,$$

mely egyenletrendszer csakis úgy állhat meg, ha

$$\begin{vmatrix} x-\xi & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ y-\eta & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ z-\zeta & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0. \quad (I)$$

Ennek az egyenletnek eleget tesznek mindazoknak a pontoknak (ξ, η, ζ) koordinátái, melyek rajta vannak az (x, y, z) ponton átmenő felületi görbéknek ugyanezen ponthoz tartozó érintőin, ezek a pontok alkotják a felületnek az (x, y, z) ponthoz tartozó érintősíkját, melynek az (I) alatt levő egyenlet az egyenlete. Melyet kifejtve ily alakba írhatunk:

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}(x - \xi) + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}(y - \eta) + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(z - \zeta) = 0,$$

tehát az érintő sík normálisának az iránycosinuszai:

$$\lambda \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \lambda \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \lambda \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

hol

$$\frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^2$$

Abban a különös esetben, midőn $u=x$, $v=y$, a felület pontjának a koordinátáit az

$$x=x, \quad y=y, \quad z=f(x, y)$$

egyenleteik jellemzik, s így

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

jelölések alkalmazásával az (x, y, z) ponthoz tartozó érintősík egyenlete:

$$p(x - \xi) + q(y - \eta) - (z - \zeta) = 0,$$

tehát a normális iránycosinuszai:

$$\lambda p, \quad \lambda q, \quad -\lambda,$$

hol

$$\frac{1}{\lambda^2} = 1 + p^2 + q^2.$$

Ha pedig a felület egyenlete

$$F(x, y, z) = 0$$

alakban van adva, akkor

$$p = - \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$q = - \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

tehát az (x, y, z) ponthoz tartozó érintősík egyenlete:

$$\frac{\partial F}{\partial x} (x - \xi) + \frac{\partial F}{\partial y} (y - \eta) + \frac{\partial F}{\partial z} (z - \xi) = 0,$$

normalisának iránycosinusi pedig:

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\partial F}{\partial z},$$

hol

$$\frac{1}{\lambda^2} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2.$$

153. A felületek komplanációja.

A felület (x, y, z) ponthoz tartozó érintősíkja érintse a felületet $d\omega$ elemben, ennek az xy síkra való vetülete $d\omega'$, ha az (x, y, z) ponthoz tartozó felületi normálisnak a z tengellyel alkotott szögét γ -nak nevezzük, $d\omega \cos \gamma$, s így

$$d\omega = \frac{d\omega'}{\cos \gamma}.$$

Ha tehát felületünk ω részének az xy síkra való vetületét ω' -el jelöljük, akkor

$$\int_{(\omega)} d\omega = \omega = \int_{(\omega')} \frac{d\omega'}{\cos \gamma}.$$

Igy ha a felület egyenlete

$$z = f(x, y)$$

alakban van adva s megfontoljuk, hogy

$$d\omega' = \int_{(d\omega')} dx dy,$$

akkor

$$\omega = \int \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (1)$$

Ha pedig a felület egyenlete

$$F(x, y, z) = 0,$$

alakban van adva, akkor

$$\omega = \int_{(\omega')} \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \frac{dx dy}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (\text{II})$$

Pl. Legyen a gömb egyenlete

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

akkor a gömb felülete:

$$\omega = 2r \int_{(\omega')} \frac{dx dy}{z}.$$

Hol ω' az xy sík kimetszette legnagyobb gömbkör területe, ennek a körnek az egyenlete:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

tehát

$$\omega = 2r \int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}};$$

az $r^2 - x^2 = k^2$ jelölés alkalmazásával

$$\omega = 2r \int_{-r}^{+r} dx \int_{-k}^{+k} \frac{dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = 4r\pi \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{\sqrt{k^2 - x^2}} = 4r^2\pi.$$

A forgási felületek komplanácziójára vonatkozó képlet valamivel egyszerűbb. Ha az $AB=s$ ívet az x tengely körül megforgatjuk, akkor annak ds eleme által leírt felület (36. ábra) $2\pi y ds$, tehát az egész s leírta forgási felület

$$\omega = 2\pi \int_{(s)} y ds.$$

Pl. Forgassuk meg az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ellipsist az x tengely körül, akkor tekintettel

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi$$

egyenletekre

$$ds = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi},$$

tehát a forgási felület

$$\omega = 4ab\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\varphi.$$

Alkalmazzuk a következő szubstitucziót:

tehát

$$\varepsilon \cos \varphi = \cos t,$$

$$\varepsilon \sin \varphi d\varphi = \sin t dt,$$

mivel $\varphi=0$ és $\frac{\pi}{2}$ értékeknek rendre megfelel $t = \arccos \varepsilon$ és $t = \frac{\pi}{2}$, azért

$$\omega = \frac{4ab\pi}{\varepsilon} \int_{\arccos \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt.$$

Ebből pedig

$$t = \frac{\pi}{2} - z$$

szubstituczióval és annak megfontolásával, hogy $t = \arccos \varepsilon$, $\frac{\pi}{2}$ -nek rendre megfelel $\arcsin \varepsilon$, 0; nyerjük, hogy

$$\omega = \frac{4ab\pi}{\varepsilon} \int_0^{\arcsin \varepsilon} \cos^2 z dz = \frac{4ab\pi}{\varepsilon} \int_0^{\arcsin \varepsilon} \frac{1 + \cos 2z}{2} dz,$$

honnan

$$\omega = \frac{2ab\pi}{\varepsilon} [\arcsin \varepsilon + \frac{1}{2} \sin (2 \arcsin \varepsilon)],$$

vagy

$$\omega = 2ab\pi \left(\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon^2} \right),$$

ha $a=b=r$, akkor $\varepsilon=0$, tehát

$$\omega = 4r^2\pi.$$

Végül jegyezzük még meg, hogy a felületek komplanáció-jára vonatkozó integrál a 61. §. fejtegetései értelmében polárkoordinátákban a következő:

$$\omega = \iint \sqrt{\left[\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 \right] \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2} \rho d\theta d\varphi.$$

XIX. AZ INTEGRÁL FOGALMÁNAK AZ ÁLTALÁNOSÍTÁSA.

154. Végtelen nagy határokkal bíró integrálok.

Az

$$\int_a^b f(x) dx$$

definiálásánál feltételeztük, hogy az (a, b) tartomány véges és hogy ebben a tartományban $f(x)$ folytonos s véges függvény, már most, ha ezek a feltételek nem teljesülnek, akkor fölirt szimbolumunknak eddigi definíciónk értelmében sincs semmi jelentése. Hogy tehát ezekben a különös esetekben is értelmet tulajdoníthassunk szimbolumunknak, az integrál fogalmát általánosítanunk kell. Az általánosítást mindenek előtt arra az esetre terjesztjük ki, midőn az integrál határainak egyike, vagy pedig mindketteje végtelenné lesz.

Ha a és b végesek s $f(x)$ határozatlan integrálja $F(x)$, akkor, ha $f(x)$ -re teljesülnek (a, b) tartományban a fentebb elmondott feltételek,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Már most, ha az integrál egyik határa pl. b végtelenné lesz s $f(x)$ az (a, ∞) tartományban folytonos s véges, akkor a végtelen nagy felső határral bíró integrált a következő határértékekkel definiáljuk:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [F(b) - F(a)].$$

Hasonlóképen definiáljuk az olyan integrálokat is, melyeknek az alsó, vagy pedig mindkét határuk végtelen, s kiszámításuk, ha a függvény határozatlan integrálja ismeretes, egyszerű limesre való áttéréssel történik.

Pl. A 130. §. fejtegetései szerint:

$$\int e^{-ax} \cos bxdx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2} (b \sin bx - a \cos bx),$$

$$\int e^{-ax} \sin bxdx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2} (b \cos bx + a \sin bx).$$

Honnan következik, hogy ha $a > 0$, akkor

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bxdx = \frac{b}{a^2+b^2}. \quad (2)$$

Ámde megtörténhetik, hogy a függvény határozatlan integrálját nem ismerjük s így egyszerű limesre való áttéréssel nem is dönthetjük el, hogy a végtelen nagy határokkal bíró integrálunk véges, vagy végtelen nagy eredményt szolgáltat-e. S ha mégis meg akarjuk tudni, hogy integrálunk véges eredményt szolgáltat-e, a következő két kritériumot használjuk fel:

I. Ha $f(x)$ egy meghatározott X -en túl előjelét nem változtatja s $|xf(x)| > c$ zérustól különböző véges szám, akkor

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

végtelen nagy.

Tételünket elég arra az esetre kimutatnunk, midőn bizonyos pozitív X -től kezdve $f(x)$ mindig pozitív, tehát

$$xf(x) > c, \quad f(x) > \frac{c}{x},$$

s így

$$\int_X^b f(x) dx > c \int_X^b \frac{dx}{x} = cl \frac{b}{X}, \quad b > X$$

honnan látható, hogy

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_X^b f(x) dx = \infty.$$

II. Ha pedig $f(x)$ bizonyos X -en túl előjelét nem változtatja s $|x^{1+n}f(x)| < c$ véges szám, akkor ha n pozitív

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

véges.

Ha $f(x)$ X -től kezdve pozitív, akkor

$$f(x) < \frac{c}{x^{1+n}},$$

tehát

$$\int_X^b f(x) dx < c \int_X^b \frac{dx}{x^{1+n}} = \frac{c}{n} \left(\frac{1}{X^n} - \frac{1}{b^n} \right), \quad b > X$$

honnan

$$\lim_{b=\infty} \int_X^b f(x) dx < \frac{c}{nX^n}, \quad n > 0, \quad (3)$$

a mi bebizonyítandó volt.

III. Ha $f(x)$ előjelét folytonosan változtatja, akkor

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

véges, ha

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

integrál is az.

Főttételünk teljesülése ugyanis azt mondja ki, hogy ha b és b' bizonyos B számnál nagyobbak, akkor (3) egyenlőtlenségünk értelmében:

$$\int_b^{b'} |f(x)| dx < \varepsilon \quad b' > b$$

bármily kicsiny legyen is ε . De

$$\int_b^{b'} |f(x)| dx > \int_b^{b'} f(x) dx > - \int_b^{b'} |f(x)| dx,$$

honnan következik, hogy $b' = \infty$ -re nézve:

$$\varepsilon > \int_b^{\infty} f(x) dx > -\varepsilon.$$

Ha tehát b elég nagy véges szám, akkor

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \eta, \\ |\eta| < \varepsilon$$

a miből következik, hogy integrálunk véges.

155. Szinguláris helyekkel bíró függvény integrálja.

Ha $f(x)$ az $(a, b]$ tartományban c_1, c_2, \dots, c_n helyeken szakadásos, vagy végtelen, akkor a -tól b -ig terjedő integrálja alatt a következő határértéket értjük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta_1=0} \int_a^{c_1-\eta_1} f(x) dx + \lim_{\substack{\varepsilon_1=0 \\ \eta_2=0}} \int_{c_1+\varepsilon_1}^{c_2-\eta_2} f(x) dx + \dots + \lim_{\substack{\varepsilon_n=0 \\ c_n+\varepsilon_n}} \int_{c_n+\varepsilon_n}^b f(x) dx.$$

Integrálunk tehát a következő alakú integrálok összegére bontható:

$$\lim_{\eta_1=0} \int_a^{c_1-\eta_1} f(x) dx, \quad \lim_{\substack{\varepsilon_i=0 \\ \eta_{i+1}=0}} \int_{c_i+\varepsilon_i}^{c_{i+1}-\eta_{i+1}} f(x) dx, \quad \lim_{\substack{\varepsilon_n=0 \\ c_n+\varepsilon_n}} \int_{c_n+\varepsilon_n}^b f(x) dx. \quad (1)$$

Mint hogy ezek közül a középső a határok között levő hely segítségével olyan alakú integrálok összegére bontható, mint az utolsó s az első integrál, azért csak ezekkel foglalkozunk. Előbb megállapítjuk a szükséges s elégséges feltételt arra nézve, hogy első integrálunk határozott értéket szolgáltatasson, erre nézve a szükséges és elégséges feltétel, hogy legyen

$$\lim_{\eta_1=0} \int_a^{c_1-\eta_1} f(x) dx = \lim_{\eta'_1=0} \int_a^{c_1-\eta'_1} f(x) dx,$$

bármily végtelen kis számok legyenek is η_1 és η'_1 . De

$$\int_a^{c_1-\eta_1} f(x) dx = \int_a^{c_1-\eta'_1} f(x) dx + \int_{c_1-\eta'_1}^{c_1-\eta_1} f(x) dx,$$

főntebbi föltételünk tehát a következő alakba írható:

$$\lim_{\substack{\eta_1=0 \\ \eta'_1=0}} \int_{c_1-\eta'_1}^{c_1-\eta_1} f(x) dx = 0. \quad (2)$$

Hasonlóképen találjuk, hogy (1) alatt levő harmadik integrál értéke határozott, ha

$$\lim_{\substack{\epsilon_n=0 \\ \epsilon'_n=0}} \int_{c_n+\epsilon'_n}^{c_n+\epsilon_n} f(x) dx = 0.$$

Pl.

$$\int_a^c \frac{dx}{(x-c)^n} = \lim_{\eta=0} \int_a^{c-\eta} \frac{dx}{(x-c)^n}, \quad \begin{matrix} a < c \\ n \neq 1 \end{matrix}$$

integrálunk határozott, ha

$$\lim_{\substack{\eta=0 \\ \eta'=0}} \int_{c-\eta'}^{c-\eta} \frac{dx}{(x-c)^n} = \lim_{\substack{\eta=0 \\ \eta'=0}} \frac{(-\eta)^{1-n} - (-\eta')^{1-n}}{1-n} = 0,$$

a mi csak úgy lehetséges, ha $n < 1$.

Ha $n > 1$, akkor végtelen, ha $n = 1$, akkor

$$\lim_{\substack{\eta=0 \\ \eta'=0}} \int_{c-\eta'}^{c-\eta} \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{\eta=0 \\ \eta'=0}} \frac{\eta}{\eta'},$$

a mi határozatlan, tehát

$$\int_a^c \frac{dx}{(x-c)^n}$$

csak abban az esetben véges és határozott, ha $n < 1$.

Ebből következik, hogy ha $f(x)$ az $x=c$ helyen végtelen, de $|(x-c)^n f(x)| < \delta$ véges szám, akkor, ha $n < 1$,

$$\int_a^c f(x) dx$$

határozott, ellenben ha $|(x-c)f(x)| > \delta$ véges szám, akkor az

$$\int_a^c f(x) dx$$

integrál, ha $f(x)$ az $x=c$ hely környezetében jelét nem változtatja, határozatlan.

Az első esetben ugyanis ha x -t c -hez elég közel választjuk, akkor

$$|f(x)| < \frac{\delta}{|x-c|^n},$$

tehát

$$\lim_{\substack{\eta=0 \\ \eta'=0}} \int_{c-\eta'}^{c-\eta} |f(x)| dx < \lim_{\substack{\eta=0 \\ \eta'=0}} \int_{c-\eta'}^{c-\eta} \frac{\delta dx}{|x-c|^n}, \quad \eta' > \eta$$

mely zérus, ha $n < 1$, ekkor azután

$$\int_a^c |f(x)| dx$$

s vele

$$\int_a^c f(x) dx$$

integrál is határozott.

A második esetben legyen $f(x)$ az x hely környezetében pozitív, tehát

$$\lim_{\substack{\eta=0 \\ \eta'=0}} \int_{c-\eta'}^{c-\eta} f(x) dx > \lim_{\substack{\eta=0 \\ \eta'=0}} \int_{c-\eta'}^{c-\eta} \frac{\delta dx}{|x-c|}, \quad \eta' > \eta$$

a mi határozatlan.

156. Az általánosított integrálok alaptulajdonságai.

A 111. §-ban valamely integrálnak több integrál összegére való felbontására s a határok felcserélésére vonatkozólag megállapított tételek az általánosított integrálra nézve is érvényesek. Az integrálok transzformációja a 112. §-ban megállapított feltételek között szintén lehetséges. De ha az

$$x = \varphi(t)$$

függvénynek a differenciálhányadosa a transzformált integrál t_1, t_2 határai között pl. c helyen, folytonosságát elveszti, vagy végtelenné lesz, akkor az

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{t_1}^{c-\varepsilon} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt + \lim_{\varepsilon=0} \int_{c+\varepsilon}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

egyenlet lép a 112. §. megfelelő egyenlete helyébe,

Pl. Alkalmazzuk az

$$\int_{-1}^{+1} dx$$

integrálra a következő transzformációt:

$$x^2=t, \quad dx = \frac{1}{2} \pm \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Ha x változik -1 -től $+1$ -ig, akkor t változik $+1$ -től 0 -ig s. azután 0 -tól $+1$ -ig. De midőn x -1 -től 0 -ig változik, akkor $-\sqrt{t}$ -vel, ha pedig 0 -tól $+1$ -ig változik, akkor $+\sqrt{t}$ -vel egyenlő, tehát

$$\int_{-1}^{+1} dx = -\frac{1}{2} \int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2.$$

Az általánosított kettős integrálokban az integráció sorrendjét általában fölcserélni nem szabad. Így pl. meghatározandó:

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

és

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

Mínthogy

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\int \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

következőleg:

$$I_1 = - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \frac{\pi}{4},$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4},$$

tehát

$$I_1 \neq I_2.$$

Ha $f(x, y)$ x és y -nak az (a, ∞) , (a_1, ∞) tartományban folytonos és véges függvénye és

$$\int_a^\infty dx \int_{a_1}^\infty f(x, y) dy$$

határozott és véges még az integráció sorrendjének megváltoztatásával is, akkor

$$\int_a^\infty dx \int_{a_1}^\infty f(x, y) dy = \int_{a_1}^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx.$$

Föltevésünk szerint ugyanis b -t és b_1 -et megválaszthatjuk oly nagynak, hogy legyen

$$\left| \int_a^\infty dx \int_{a_1}^\infty f(x, y) dy - \int_a^b dx \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dy \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \int_{a_1}^\infty dy \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_{a_1}^{b_1} dy \int_a^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Amde $f(x, y)$ -ra vonatkozó feltevésünk alapján:

$$\int_a^b dx \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dy = \int_{a_1}^{b_1} dy \int_a^b f(x, y) dx;$$

főntebbi két egyenlőtlenségünkéből s ebből az egyenletből következik tételünk helyessége. Így pl. könnyű belátni, hogy

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx.$$

Ugyanis megválaszthatjuk A és B számokat úgy, hogy legyen

$$|e^{-xy} \sin x| < \frac{1}{(xy)^m} \quad m > 2$$

ha

$$x > A, \quad y > B,$$

tehát

$$\int_A^\infty dx \int_B^\infty e^{-xy} \sin x dy < \int_A^\infty dx \int_B^\infty \frac{dy}{(xy)^m},$$

de

$$\iint \frac{dx dy}{(xy)^m} = \frac{(xy)^{2-m}}{(1-m)(2-m)} \quad m > 2$$

A és B alkalmas megválasztásával tehát egyenlőtlenségünk jobboldala kisebbé tehető, mint egy tetszőleges kicsiny ε szám. Hasonlóképen kell kimutatni, hogy

$$\int_B^\infty dy \int_A^\infty e^{-xy} \sin x dx$$

szintén kisebb ε -nál, következőleg bebizonyítandó egyenletünk helyes.

Végül az integrál jele alatti differenciálás abban az esetben, ha a 113. §-ban kifejtett föltételek teljesülnek, az

$$\int_a^\infty f(x, a) dx$$

integrálban is lehetséges minden oly a helyen, melyre nézve az integrál véges és

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^\infty \frac{\partial f}{\partial a} dx = 0.$$

Ugyanis ebben az esetben, ha b -t már elég nagyra választottuk az

$$\int_a^b f(x, a) dx,$$

nemcsak integrálunkat képviseli a megkívántató pontosságig, hanem az a szerint vett differenciálhányadosa annak differenciálhányadosát is. Ugyanis

$$\frac{d}{da} \int_b^{\infty} f(x, a) dx = \lim_{\Delta a=0} \frac{1}{\Delta a} \int_b^{\infty} [f(x, a+\Delta a) - f(x, a)] dx$$

$$\lim_{\Delta a=0} \frac{1}{\Delta a} \int_b^{\infty} dx \int_a^{a+\Delta a} \frac{\partial f}{\partial a} da.$$

Amde föltevésünk értelmében

$$\int_b^{\infty} dx \int_a^{a+\Delta a} \frac{\partial f}{\partial a} da = \int_b^{\infty} f(x, a+\Delta a) dx - \int_b^{\infty} f(x, a) dx$$

és

$$\int_a^{a+\Delta a} da \int_b^{\infty} \frac{\partial f}{\partial a} dx$$

integrálok mindegyike véges, tehát

$$\lim_{\Delta a=0} \frac{1}{\Delta a} \int_b^{\infty} dx \int_a^{a+\Delta a} \frac{\partial f}{\partial a} da = \lim_{\Delta a=0} \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} da \int_b^{\infty} \frac{\partial f}{\partial a} dx = \int_b^{\infty} \frac{\partial f}{\partial a} dx,$$

mely föltevésünk értelmében, ha b -t elég nagyoknak választjuk kisebbé tehető bármily kicsiny ε számnál, következőleg

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial a} dx$$

tényleg integrálunk a szerinti differenciálhányadosának közelítő értéke. Így pl.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$$

a szerint nem differenciálható, mert $\frac{\sin ax}{x}$ x végtelen nagy értékei mellett a szerint nem differenciálható. Különben is a jelen esetben

$$\lim_{b=\infty} \int_b^{\infty} \frac{\partial f}{\partial a} dx = \lim_{b=\infty} \int_b^{\infty} \cos ax dx$$

teljesen határozatlan.

157. A Dirichlet-féle integrál.

Az előbbi fejezetben láttuk, hogy

$$\int_0^{\infty} \sin x dx \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx.$$

Amde

$$\int_0^{\infty} \sin x dx \int_0^{\infty} e^{-xy} dy = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

A 151. §. (2) képlete szerint pedig

$$\int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx = \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2},$$

következően:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Ez a DIRICHLET-féle integrál. Ennek segítségével határozzuk meg a következő integrált:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (1)$$

Az x helyett $-x$ -et írunk, lesz:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = - \int_{\infty}^0 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx,$$

következően:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Parciális integrációval nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= - \frac{\sin^2 x}{x} + \int \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx \\ &= - \frac{\sin^2 x}{x} + \int \frac{\sin 2x}{2x} d(2x). \end{aligned}$$

Ennélfogva :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi. \quad (2)$$

158. Az elsőfajú Euler-féle integrál.

Elsőfajú EULER-féle *integrálnak* nevezzük a következő integrált :

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx. \quad (p > 0, q > 0) \quad (1)$$

Ha p és q nagyobbak az egységnél, akkor integrálunk véges, ha kisebbek, akkor

$$f(x) = x^{p-1} (1-x)^{q-1}$$

az $x=0$, vagy $x=1$, vagy pedig mindkét helyen végtelenné lesz a szerint, a mint p , vagy q , vagy mindakettő kisebb az egységnél, de ekkor az integrál határai között

$$\begin{aligned} f(x) x^{1-p} &< 1 & 1-p < 1 \\ f(x) (1-x)^{1-q} &< 1, & 1-q < 1 \end{aligned}$$

tehát a 152. §. fejtegetései alapján $B(p, q)$ mindig véges, ha $p > 0, q > 0$.

Ha integrálunkban $1-x$ helyett z -t írunk, akkor nyerjük, hogy

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-z)^{p-1} z^{q-1} dz = B(q, p),$$

tehát

$$B(p, q) = B(q, p) \quad (2)$$

azaz: $B(p, q)$ p -nek és q -nak szimmetrikus függvénye. Ha a 125. §. (6) és (8) képleteiben t helyett $-x$ -et írunk, akkor a következőket nyerjük :

$$\begin{aligned} q \int x^{q-1} (1-x)^p dx - (p+q+1) \int x^q (1-x)^p dx &= x^q (1-x)^{p+1} \\ (q+1) \int x^q (1-x)^p dx - (p+q+2) \int x^{q+1} (1-x)^p dx &= x^{q+1} (1-x)^{p+1}, \end{aligned}$$

Ha egyenleteinkben p és q helyett rendre $p-1$ -et s $q-1$ -et írunk s azután az integrációt 0-tól 1-ig terjedő határra képezzük, a következő formulákat nyerjük:

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1), \quad (3)$$

$$B(p, q) = -\frac{p+q}{q} B(p, q+1). \quad (4)$$

Ha tehát q egész szám, akkor

$$B(p, q) = \frac{(q-1)(q-2) \dots 1 B(p, 1)}{(p+q-1)(p+q-2) \dots (p+1)}.$$

De

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = \frac{1}{p},$$

tehát

$$B(p, q) = \frac{(q-1)(q-2) \dots 1}{(p+q-1)(p+q-2) \dots p}. \quad (5)$$

Ha p is egész szám, akkor

$$B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}. \quad (6)$$

Ha p és q tetszőlegesek, akkor $B(p, q)$ -t következőképen határozzuk meg: A (4) képlet alapján

$$B(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1) \dots (p+q+k)}{q \cdot (q+1) \dots (q+k)} B(p, q+k+1). \quad (7)$$

Már most, ha megfontoljuk, hogy $B(p, q)$ q nagyobbodásával csökken; s ha

$$n < q < n+1$$

hol n egész szám, akkor

$$B(p, n+k+1) > B(p, q+k+1) > B(p, n+k+2),$$

de a (3) képlet alapján:

$$\begin{aligned} B(p, n+k+2) &= \frac{n+k+1}{p+n+k+1} B(p, n+k+1) \\ &= \left(1 - \frac{p}{p+n+k+1}\right) B(p, n+k+1), \end{aligned}$$

tehát:

$$B(p, q+k+1) = \left(1 - \frac{\theta p}{p+n+k+1}\right) B(p, n+k+1),$$

hol θ az egységnél, kisebb pozitív szám.

Az (5) képlet szerint:

$$B(p, n+k+1) = \frac{(n+k)(n+k-1) \dots 2 \cdot 1}{(p+n+k)(p+n+k-1) \dots p}$$

Így tehát a (7) egyenlet alapján:

$$B(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1) \dots (p+q+k)}{q \cdot (q+1) \dots (q+k)} \cdot \frac{(n+k)(n+k-1) \dots 2 \cdot 1}{(p+n+k)(p+n+k-1) \dots p} \cdot \left(1 - \frac{\theta}{p+n+k+1}\right).$$

Ha már most megfontoljuk, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(n+k)(n+k-1) \dots (k+1)}{(p+n+k)(p+n+k-1) \dots (p+k+1)} = 1,$$

akkor az imént talált egyenletünk alapján:

$$B(p, q) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! (p+q)(p+q+1) \dots (p+q+k)}{p(p+1) \dots (p+k) q(q+1) \dots (q+k)}. \quad (8)$$

Ha az (1) egyenletben x helyett $\sin^2 x$ -t írunk, akkor $B(p, q)$ a következő alakor veszi fel:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx. \quad (9)$$

Honnan látható, hogy

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi, \quad (10)$$

a (8) képletből, ha p és q helyett $\frac{1}{2}$ -t írunk, nyerjük a π meghatározására szolgáló WALLIS-féle formulát.

Ha pedig x helyett $x/(1+x)$ -t írunk, akkor a $B(p, q)$ -t definiáló (1) alatt levő integrál a következővé lesz:

$$B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p+1}}{(1+x)^{p+q}} dx. \quad (11)$$

159. A másodfajú Euler-féle integrál.

Másodfajú EULER-féle integrálnak nevezzük a következő integrált:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx. \quad n > 0 \quad (1)$$

Integrálunk véges. Ugyanis, ha az

$$f(x) = e^{-x} x^{n-1}$$

függvényt x bármily kitevőjű hatványával szorozzuk a szorzat limese $x = \infty$ -nél zérus, tehát integrálunk $n > 1$ esetében a 151. §. fejtegetései szerint véges. Ha azonban $0 < n < 1$, akkor $f(x)$ -nek az $x = 0$ hely végtelenje, ámde ekkor

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) x^{1-n} = 1, \quad 1-n < 1$$

tehát a 152. §. fejtegetései értelmében integrálunk ebben az esetben is véges.

Hogy $\Gamma(n)$ -t meghatározhassuk, írjunk x helyett kz -t, tehát

$$\Gamma(n) = k^n \int_0^{\infty} e^{-kz} z^{n-1} dz.$$

Minthogy

$$e^{-z} > 1-z, \quad z \leq 1$$

következően:

$$\Gamma(n) > k^n \int_0^1 e^{-kz} z^{n-1} dz > k^n \int_0^1 (1-z)^k z^{n-1} dz,$$

azaz:

$$\Gamma(n) > k^n B(n, k+1). \quad (2)$$

Másrésről ismeretes, hogy

$$e^z > 1+z,$$

tehát

$$e^{-kz} < (1+z)^{-k}$$

s így

$$\Gamma(n) < k^n \int_0^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1+z)^k} dz.$$

Az előbbi fejezet (11) képlete értelmében, tehát

$$\Gamma(n) < k^n B(n, k-n),$$

ha ebben a képletben k helyett $k+n+1$ -et írunk, akkor

$$\Gamma(n) < (k+n+1)^n B(n, k+1),$$

azaz:

$$\Gamma(n) < k^n B(n, k+1) \left(1 + \frac{n+1}{k}\right)^n. \quad (3)$$

A (2) és (3) egyenlőtlenségek összevetéséből következik, hogy

$$\Gamma(n) = k^n B(n, k+1) \left(1 + \theta \frac{n+1}{k}\right)^n, \quad \theta < 1$$

tehát

$$\Gamma(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^n B(n, k+1). \quad (4)$$

De az előbbi fejezet (5) képlete alapján:

$$B(n, k+1) = \frac{k!}{n(n+1) \dots (n+k)},$$

ennélfogva

$$\Gamma(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^n \frac{k!}{n(n+1) \dots (n+k)}. \quad (5)$$

Ha a (4)-ben n helyett $n-1$ -et írunk s azután egyenletünk mindkét oldalát megszorozzuk $n-1$ -el, akkor a következő egyenlethez jutunk:

$$(n-1) \Gamma(n-1) = (n-1) \lim_{k \rightarrow \infty} k^{n-1} B(n-1, k+1),$$

de az előbbi fejezet (2) és (4) képletei alapján:

$$B(n-1, k+1) = B(k+1, n-1) = \frac{n+k}{n-1} B(k+1, n),$$

tehát

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B(n-1, k+1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n-1} B(k+1, n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n-1} B(n, k+1),$$

következőleg:

$$(n-1) \Gamma(n-1) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^n B(n, k+1),$$

azaz:

$$\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1). \quad (6)$$

Ezen képlet alapján, ha n egész szám

$$\Gamma(n) = (n-1)! \Gamma(1),$$

de

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1,$$

tehát

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (7)$$

Továbbá

$$\Gamma(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^p \frac{k!}{p(p+1) \dots (p+k)},$$

$$\Gamma(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^q \frac{k!}{q(q+1) \dots (q+k)},$$

$$\Gamma(p+q) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{p+q} \frac{k!}{(p+q)(p+q+1) \dots (p+q+k)},$$

tehát

$$\frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! (p+q)(p+q+1) \dots (p+q+k)}{p(p+1) \dots (p+k) q(q+1) \dots (q+k)},$$

azaz:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (8)$$

Pl. Ha $p = q = \frac{1}{2}$, akkor

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

tehát

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (9)$$

De a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{-\frac{1}{2}} dz = \sqrt{\pi}$$

$z = x^2$ szubsztitucióval ily alakúvá lesz:

$$2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

tehát

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (10)$$

Ha ebben x helyett $x\sqrt{a}$ -t írunk, akkor a következő integrált nyerjük:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \quad (11)$$

160. Fresnel-féle integrálok.

A 151. fejezet (1) és (2) képletei szerint:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x} \cos x dx = \frac{a^2}{1+a^4},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x} \sin x dx = \frac{1}{1+a^4}.$$

De a 153. §. fejtegetései szerint:

$$\int_0^{\infty} da \int_0^{\infty} e^{-a^2x} \cos x dx = \int_0^{\infty} \cos x dx \int_0^{\infty} e^{-xa^2} da,$$

$$\int_0^{\infty} da \int_0^{\infty} e^{-a^2x} \sin x dx = \int_0^{\infty} \sin x dx \int_0^{\infty} e^{-xa^2} da,$$

azaz:

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2 da}{1+a^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad (1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{da}{1+a^4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx. \quad (2)$$

Ha ez utóbbi integrálban a helyett $\frac{1}{a}$ -t írunk nyerjük, hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{da}{1+a^4} = \int_0^{\infty} \frac{a^2 da}{1+a^4},$$

tehát

$$\int_0^{\infty} \frac{da}{1+a^4} = \int_0^{\infty} \frac{a^2 da}{1+a^4} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1+a^2}{1+a^4} da, \quad (3)$$

de

$$\frac{1+a^2}{1+a^4} = \frac{1}{1+(a\sqrt{2}+1)^2} + \frac{1}{1+(a\sqrt{2}-1)^2},$$

tehát

$$\int \frac{1+a^2}{1+a^4} da = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(a\sqrt{2}+1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(a\sqrt{2}-1),$$

s így

$$\frac{1}{2} \int \frac{1+a^2}{1+a^4} dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Az (1), (2), (3) és (4) egyenletek egybevetéséből tehát következik, hogy

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (5)$$

Ha ezekben az integrálokban x helyett x^2 -t írunk, akkor nyerjük, hogy

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (6)$$

Ezek a FRESNEL-féle integrálok. De, ha a FRESNEL-féle integrálok felső határa véges mondjuk u , akkor meghatározásukat a következő két integrál meghatározására vezetjük vissza:

$$M(u) = \int_0^u \cos(u^2 - x^2) dx = \cos u^2 \int_0^u \cos x^2 dx + \sin u^2 \int_0^u \sin x^2 dx,$$

$$N(u) = \int_0^u \sin(u^2 - x^2) dx = \sin u^2 \int_0^u \cos x^2 dx - \cos u^2 \int_0^u \sin x^2 dx,$$

honnan

$$\int_0^u \cos x^2 dx = M(u) \cos u^2 + N(u) \sin u^2,$$

$$\int_0^u \sin x^2 dx = M(u) \sin u^2 - N(u) \cos u^2.$$

$M(u)$ -t és $N(u)$ -t következőképpen határozzuk meg: Parciális integrálással találjuk, hogy

$$\int_0^u x^n \cos(u^2 - x^2) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1} \int_0^u x^{n+2} \sin(u^2 - x^2) dx$$

$$\int_0^u x^n \sin(u^2 - x^2) dx = \frac{2}{n+1} \int_0^u x^{n+2} \cos(u^2 - x^2) dx.$$

Ha a jobboldalon még egyszer alkalmazzuk a parciális integrációt, nyerjük, hogy

$$\int_0^u x^n \cos(u^2 - x^2) dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{4}{(n+1)(n+3)} \int_0^u x^{n+4} \cos(u^2 - x^2) dx,$$

$$\int_0^u x^n \sin(u^2 - x^2) dx = \frac{2u^{n+3}}{(n+1)(n+3)} - \frac{4}{(n+1)(n+3)} \int_0^u x^{n+4} \sin(u^2 - x^2) dx.$$

Ezen alapformulák alkalmazásával könnyű belátni a következő képletek helyességét:

$$\int_0^u \cos(u^2 - x^2) dx = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{4^r u^{4r+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4r+1)} + R_n \quad (7)$$

$$\int_0^u \sin(u^2 - x^2) dx = 2 \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{4^r u^{4r+3}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4r+3)} + R_{1n}, \quad (8)$$

hol

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4n+3)} \int_0^u x^{4n+4} \cos(u^2 - x^2) dx$$

$$R_{1n} = \frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4n+3)} \int_0^u x^{4n+4} \sin(u^2 - x^2) dx.$$

Ezen maradékok mindegyikének abszolút értéke kisebb, mint

$$\frac{4^{n+1} u^{4n+5}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4n+5)},$$

mely u minden véges értéke mellett $n = \infty$ -nél zérussá lesz, következőleg:

$$\int_0^u \cos(u^2 - x^2) dx = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{4^r u^{4r+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4r+1)}, \quad (9)$$

$$\int_0^u \sin(u^2 - x^2) dx = 2 \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{4^r u^{4r+3}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4r+3)} \quad (10)$$

XX. FOURIER-FÉLE SOROK S INTEGRÁLOK.

161. Segédtételek.

$\varphi(x)$ -et az (a, b) intervallumra vonatkozólag integrálhatónak mondjuk, ha bármiként osztsuk is az (a, b) intervallumot $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ részekre az

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

és az

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

összegek, hol M_i és m_i függvényünknek a Δx_i intervallumhoz tartozó maximumát, illetőleg minimumát jelölik, mindig ugyanazon határértékekhez közelednek, ha az intervallumokat végnélkül kisebbítjük, azaz:

$$\lim \sum (M_i - m_i) \Delta x_i = \lim \sum \sigma_i \Delta x_i = 0,$$

ha Δx_i intervallumban az ingadozást σ_i -vel jelöljük. Minthogy, ha $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, akkor

$$M_i \Delta x_i > \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) dx > m_i \Delta x_i,$$

tehát

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) dx = \mu \Delta x_i. \quad M_i > \mu < m_i$$

Azért ha ξ_i a Δx_i intervallumnak egy tetszőleges pontja s k_i -vel jelöljük a $\mu - \varphi(\xi_i)$ különbséget, akkor

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) dx = \varphi(\xi_i) \Delta x_i + k_i \Delta x_i,$$

minthogy

azért

$$|k_i| = |\mu - \varphi(\xi_i)| \leq \sigma_i,$$

$$\lim \sum_{i=1}^n k_i \Delta x_i = 0.$$

Végül kimutatjuk, hogy úgy

$$\int_x^b \varphi(x) dx, \text{ mint } \int_a^x \varphi(x) dx$$

integrál x -nek folytonos függvénye, ha $\varphi(x)$ integrálja (a, b) tartományban határozott s véges. Ugyanis

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^x \varphi(x) dx + \int_x^b \varphi(x) dx.$$

A jobb oldalon levő integrálok mindegyike határozott, mert a bal oldal is az. Következőleg:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{x+\varepsilon} \varphi(x) dx = \int_a^x \varphi(x) dx, \quad \varepsilon > 0$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{x+\eta}^b \varphi(x) dx = \int_x^b \varphi(x) dx. \quad \eta > 0$$

Továbbá

$$\int_a^{x+\varepsilon} \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx - \int_{x+\varepsilon}^b \varphi(x) dx,$$

$$\int_{x-\eta}^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^{x-\eta} \varphi(x) dx.$$

Föllebbi egyenleteink értelmében tehát

$$\lim_a^{x+\varepsilon} \int \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx - \int_x^b \varphi(x) dx = \int_a^x \varphi(x) dx,$$

$$\lim_{x \rightarrow \eta} \int_x^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^x \varphi(x) dx = \int_x^b \varphi(x) dx,$$

ezzel azután integráljaink folytonosságát kimutattuk.

162. Második középértéktétel.

Ha az (a, b) tartományban $(a < b)$:

1. $\varphi(x)$ -nek integrálja határozott és véges;
2. $f(x)$ sohasem növekvő, vagy sohasem fogyó véges függvény;
3. $f(x) \varphi(x)$ integrálja szintén határozott és véges, akkor

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(a+0) \int_a^{\xi} \varphi(x) dx + f(b-0) \int_{\xi}^b \varphi(x) dx,$$

hol ξ az (a, b) tartomány valamely pontja.

Ezt a tételt DU BOIS REYMOND után második középértéktételnek nevezzük.

Lássuk először tételünk bebizonyítását arra az esetre, mikor $\varphi(x)$ (a, b) tartományban integrálható, akkor az előbbi fejezet fejtegetései alapján:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) dx = \varphi(\xi_i) \Delta x_i + k_i \Delta x_i,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \varphi(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n k_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) dx, \quad (1)$$

hol azután $x_0 = a$, $x_n = b$. Megfontolva, hogy

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) d\varphi = \int_{x_{i-1}}^b \varphi(x) dx - \int_{x_i}^b \varphi(x) dx,$$

nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x) dx &= f(\xi_1) \int_a^b \varphi(x) dx + [f(\xi_2) - f(\xi_1)] \int_{x_1}^b \varphi(x) dx + \dots \\ &= f(\xi_1) \int_a^b \varphi(x) dx + \sum_{i=2}^n [f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] \int_{x_{i-1}}^b \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

Minthogy $f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})$ különbségek egyforma előjelűek, azért ha az

$$\int_{x_{i-1}}^b \varphi(x) dx$$

integrálok közül a legnagyobb értékűt M -el, a legkisebb értékűt pedig m -el jelöljük, akkor

$$\begin{aligned} M \sum [f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] &> \sum f(\xi_i) - f(\xi_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^b \varphi(x) dx > \\ &> m \sum [f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})]. \end{aligned}$$

Megfontolva már most, hogy

$$\sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] = f(\xi_n) - f(\xi_1),$$

következőleg:

$$\sum [f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] \int_{x_{i-1}}^b \varphi(x) dx = \mu [f(\xi_n) - f(\xi_1)]. \quad (3)$$

$M > \mu > m.$

Az előbbi fejezet fejtegetései értelmében van az (a, b) tartományban oly ξ érték, melyre nézve:

$$\mu = \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (4)$$

tehát az (1), (2), (3) és (4) egyenleteink alapján:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \varphi(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n k_i \Delta x_i = \\ &= f(\xi_1) \int_a^b \varphi(x) dx + [f(\xi_n) - f(\xi_1)] \int_a^b \varphi(x) dx \\ &= f(\xi_1) \int_a^b \varphi(x) dx + f(\xi_n) \int_a^b \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Ha már most a határértékre térünk át s megfontoljuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim \sum k_i \Delta x_i &= 0, \\ \lim f(\xi_1) &= f(a+0), \\ \lim f(\xi_n) &= f(b-0), \end{aligned}$$

akkor nyerjük, hogy

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(a+0) \int_a^{\xi_1} \varphi(x) dx + f(b-0) \int_{\xi_n}^b \varphi(x) dx,$$

a mi bebizonyítandó volt.

Ha pedig $\varphi(x)$ a $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$ szinguláris pontjai révén megszűnik integrálható függvény lenni, akkor $\varphi(x)$ integrálja alatt a következő szummát értjük:

$$\sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}+0}^{c_i-0} f(x) \varphi(x) dx,$$

hol $c_0=a$ és $c_n=b$, s a mely föltevésünk értelmében véges és határozott.

Az imént kimutatott tételünk értelmében:

$$\int_{c_{i-1}+0}^{c_i-0} f(x) \varphi(x) dx = f(c_{i-1}+0) \int_{c_{i-1}+0}^{\xi_i} \varphi(x) dx + f(c_i-0) \int_{\xi_i}^{c_i-0} \varphi(x) dx.$$

Már most ha még az

$$\int_{c_{i-1}+0}^{\xi_i} \varphi(x) dx = \int_{c_{i-1}+0}^b \varphi(x) dx - \int_{\xi_i}^b \varphi(x) dx$$

és az

$$\int_{\xi_i}^{c_i-0} \varphi(x) dx = \int_{\xi_i}^b \varphi(x) dx - \int_{c_i-0}^b \varphi(x) dx$$

szubstitucziót végezzük, nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= f(a+0) \int_a^b \varphi(x) dx + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} [f(c_i+0) - f(c_i-0)] \int_{c_i-0}^b \varphi(x) dx \\ &+ \sum_{i=1}^n [f(c_i-0) - f(c_{i-1}+0)] \int_{c_{i-1}+0}^{c_i-0} \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Az első szummában a szummácziót azért kellett csak $i=1$ -től $n-1$ -ig kiterjeszteni, mert

$$\int_{c_n-0}^b \varphi(x) dx = \int_{b-0}^b \varphi(x) dx = 0.$$

Minthogy (6) egyenletünk teljesen hasonló a (2)-hoz, azért hasonló okoskodással találjuk, hogy az (a, b) tartományban van oly ξ hely, melyre nézve:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi(x) dx &= \\ &= f(a+0) \int_a^{\xi} \varphi(x) dx + [f(b-0) - f(a-0)] \int_{\xi}^b \varphi(x) dx \\ &= f(a+0) \int_a^{\xi} \varphi(x) dx + f(b-0) \int_{\xi}^b \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

a mi behizonyítandó volt.

Minthogy bizonyításunkban a és b nagyságára nézve semmi feltevést nem tettünk, azért azok végtelen nagy értéket is felvehetnek.

163. A második középértéktétel alkalmazása; a Dirichlet-féle általánosított s a Fourier-féle kettős integrálok.

A következőkben $f(x)$ -et mindig oly függvénynek tételezzük fel, melyre alkalmazható a második középértéktétel, a vele fellépő $\varphi(x)$ függvényt pedig meg kell mindig vizsgálni, hogy az adott határok között integrálja véges és határozott-e.

Ezek után határozzuk meg a következő integrált

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(a) \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da. \quad a < x < b.$$

Integrálunkat mindenek előtt a következő két integrálra bontjuk fel:

$$\int_a^b = \int_a^x + \int_x^b$$

Könnyű kimutatni, hogy integrálunk bármelyikére alkalmazható a második középértéktétel. Foglalkozzunk pl. a második integrállal. Előbb bebizonyítandó, hogy

$$\lim_{n=\infty} \int_x^b \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da$$

véges. Ugyanis $n(a-x)=t$ szubstituczió alkalmazásával találjuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \int_x^b \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Tehát második középértéktételünk alkalmazható, s így

$$\begin{aligned} & \lim_{n=\infty} \int_x^b f(a) \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da \\ &= f(x+0) \lim_{n=\infty} \int_x^{\xi} \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da + \\ &+ f(b-0) \lim_{n=\infty} \int_{\xi}^b \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da, \end{aligned}$$

hol $f(x+0)$ együttthatója $\frac{\pi}{2}$, $f(b-0)$ -é pedig zérus, mert $n(a-x)=t$ szubstituczióval lesz:

$$\lim_{n=\infty} \int_{n(\xi-x)}^{n(b-x)} \frac{\sin t}{t} dt = 0,$$

mert éppen ez a feltétel arra nézve, hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

értéke véges és határozott legyen. Következőleg:

$$\lim_{n=\infty} \int_x^b f(a) \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da = \frac{\pi}{2} f(x+0),$$

hasonlóképen találjuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \int_a^x f(a) \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da = \frac{\pi}{2} f(x-0),$$

következőleg:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(a) \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da = \frac{\pi}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \quad (1)$$

$a < x < b.$

Már most, ha

$$F(a) = f(a) \frac{a-x}{\sin(a-x)}$$

szintén oly függvény, melyre az (a, x) és (x, b) intervallumokban külön alkalmazható a második középértéktétel, akkor, ha integrálunkban $f(a)$ helyett ezt a függvényt írjuk, annak megfontolásával, hogy

$$F(x \pm 0) = f(x \pm 0),$$

a következő integrált nyerjük:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(a) \frac{\sin n(a-x)}{\sin(a-x)} da = \frac{\pi}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \quad (2)$$

$a < x < b.$

Az (1) és (2) alatt levő integrálokat általánosított DIRICHLET-féle integráloknak nevezzük.

Ha $f(x)$ -re a $(-\infty, \infty)$ intervallumban is alkalmazható a második középértéktétel, úgy a mint fentebb láttuk, akkor

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da = \frac{\pi}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Már most, ha megfontoljuk, hogy

$$\frac{1}{2} \int_{-n}^{+n} \cos \mu(a-x) d\mu = \frac{\sin n(a-x)}{a-x},$$

akkor

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) \frac{\sin n(a-x)}{a-x} da = \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) da \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu(a-x) d\mu, \end{aligned}$$

következőleg:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(a) da \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu(a-x) d\mu = \pi [f(x+0) + f(x-0)]. \quad (3)$$

Ez a FOURIER-féle kettős integrál.

164. Fourier-féle sorok.

Legyen $f(x)$ $-\pi$ és $+\pi$ határok között véges függvény; vizsgáljuk meg, hogy mily feltételek alatt fejezhető ki ebben a tartományban $f(x)$ a következő sorral:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx. \quad (1)$$

Ha egyenletünk mindkét oldalát egyszer $\cos nxdx$ -el s egyszer $\sin nxdx$ -el megszorozzuk s aztán integrálunk $-\pi$ -től $+\pi$ -ig akkor, ha figyelembe vesszük, hogy a jobb oldalon a 132. §. (4), (5) és (6) képletei értelmében minden integrálunk zérus, kivéve ezeket:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nxdx &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nxdx &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \pi, \end{aligned}$$

a következő formulákhoz jutunk:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nxdx &= \pi a_n, \\ \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nxdx &= \pi b_n. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$n=1, 2, \dots$

Ha pedig (1) egyenletünk mindkét oldalát megszorozzuk dx -el s azután integrálunk $-\pi$ -től $+\pi$ -ig, akkor a következő formulát nyerjük:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx = 2\pi a_0. \quad (3)$$

Ha tehát az (1) sor létezik a mondott határok között, akkor a (2) és (3) formulák tényleg konvergens sorunk együtthatóit szolgáltatják, de ha nem létezik, akkor kutatásunknak semmi értelme sincs.

Kutassuk tehát azokat a feltételeket, melyek mellett a (2) és (3) alatt fölirt együtthatókkal bíró (1) alatt levő sor létezik s $f(x)$ -t szolgáltatja. E végből sorunkba az együtthatók értékeit beírjuk s azután a nyert sor összegét képezzük.

S-el jelölván sorunk összegét, lesz:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a) da + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(a) \cos nada \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(a) \sin nada,$$

honnan

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a) da + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(a) \cos n(a-x) da.$$

Legyen

$$S_r = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^r \cos n(a-x) \\ = \frac{1}{2 \sin \frac{a-x}{2}} \left[\sin \frac{a-x}{2} + \sum_{n=1}^r 2 \sin \frac{a-x}{2} \cos n(a-x) \right] \\ = \frac{1}{2 \sin \frac{a-x}{2}} \left[\sin \frac{a-x}{2} + \sum_{n=1}^r \left\{ \sin \frac{2n+1}{2} (a-x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \frac{2n-1}{2} (a-x) \right\} \right],$$

honnan

$$S_r = \frac{\sin \frac{2r+1}{2} (a-x)}{2 \sin \frac{a-x}{2}},$$

következőleg:

$$S = \frac{1}{\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(a) \sin \frac{2r+1}{2} (a-x)}{2 \sin \frac{1}{2} (a-x)} da. \quad (4)$$

Legyen már most

$$\frac{2r+1}{2} = n$$

s ha $f(a)$ oly függvény, hogy az

$$f(a) \frac{a-x}{2 \sin \frac{a-x}{2}} \text{ re} \quad (5)$$

$(-\pi, x)$ és (x, π) határok között alkalmazható a második középértéktétel, akkor a (2)-általánosított Dirichlet-féle integrál értelmében:

$$S = \frac{1}{\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(a) \sin n(a-x)}{2 \sin \frac{1}{2} (a-x)} dx = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)],$$

mely $f(x)$ -el egyenlő, ha $f(x)$ az x helyen folytonos.

Ha azonban $x = \pi$, akkor az (5) alatt levő függvényünk végtelenné lesz $a = \pi$ -nél, következőleg a (4) alatt levő integrál értékének meghatározása külön vizsgálódást követel. Bontsuk fel mindenek előtt integrálunkat a következő két részre:

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi}$$

Ezek másodika oly tulajdonságú, mint a 160. §-ban az a -tól x -ig terjedő integrál, miért is értéke $\frac{\pi}{2} f(\pi-0)$ -al egyenlő. Az első integrálra pedig alkalmazzuk a következő szubsztitucziót:

$$a = \beta - \pi,$$

melynek végrehajtása után

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^0 f(a) \frac{\sin \frac{2r+1}{2} (a-x)}{2 \sin \frac{1}{2} (a-x)} da = \\ & = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\pi} \frac{f(-\pi+\beta) \sin \frac{2r+1}{2} \beta}{2 \sin \frac{\beta}{2}} d\beta, \end{aligned}$$

ez pedig oly integrál, mint a 160. §-ban az x -től b -ig terjedő, tehát értéke $\frac{\pi}{2} f(-\pi+0)$. Ennélfogva $x=\pi$ mellett

$$S = \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)].$$

Ugyanezt az értéket találjuk az $x=-\pi$ helyen is.

Ha azonban $f(x)$ -t csak $x=0$ -tól $x=\pi$ -ig terjedő tartományban akarjuk sorba fejteni, akkor ez többféle módon lehetséges. Képzeljünk mindennek előtt egy oly $\varphi(x)$ függvényt, mely 0-tól π -ig $f(x)$ -el egyenlő, s azon felül:

$$\varphi(-x) = \varphi(x),$$

tehát $\varphi(x)$ $-\pi$ -től $+\pi$ -ig definiálva van s így

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \\ \pi b_n &= \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(a) \sin n a da. \end{aligned}$$

Ha a helyett $-a$ -t írunk, lesz:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(a) \sin n a da = \int_{+\pi}^{-\pi} \varphi(a) \sin n a da$$

a mi csak úgy lehetséges, ha integrálunk értéke zérus, tehát

$$b_n = 0.$$

Továbbá

$$2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(a) da.$$

Ha a helyett $-a$ -t írunk, akkor

$$\int_{-\pi}^0 = - \int_{\pi}^0 = \int_0^{\pi},$$

következőleg:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} = 2 \int_0^{\pi}$$

s így

$$\pi a_0 = \int_0^{\pi} \varphi(a) da.$$

Hasonlóképen találjuk, hogy

$$\pi a_n = 2 \int_0^{\pi} \varphi(a) \cos na da, \\ n=1, 2, \dots$$

Már most, ha megfontoljuk, hogy 0-tól π -ig $f(x)$ egyenlő $\varphi(x)$ -el, következőleg $f(x)$ számára a $(0, \pi)$ intervallumban érvényesek a következő egyenletek:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx. \quad (6)$$

hol

$$\left. \begin{aligned} \pi a_0 &= \int_0^{\pi} f(a) da, \\ \pi a_n &= 2 \int_0^{\pi} f(a) \cos na da. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ha pedig $f(x)$ $(0, \pi)$ tartományban oly $\varphi(x)$ -el volna egyenlő, melyre nézve:

$$\varphi(-x) = -\varphi(x),$$

akkor, mivel $\varphi(x)$ a $(-\pi, \pi)$ tartományban definiálva van, azért

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

de

$$2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a) da = 0,$$

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a) \cos n a da = 0, \\ n=1, 2, \dots$$

minthogy bármelyik integrálban a helyett $-a$ -t irván, nyerjük, hogy

$$\int_{-\pi}^{+\pi} = \int_{\pi}^{-\pi}.$$

Továbbá

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(a) \sin n a da = 2 \int_0^{\pi} \varphi(a) \sin n a da,$$

mivel, ha a helyett $-a$ -t írunk, nyerjük, hogy

$$\int_{-\pi}^0 = - \int_0^{\pi} = \int_{\pi}^0.$$

Minthogy $\varphi(x)$ a $(0, \pi)$ tartományban $f(x)$ -el egyenlő, azért (x) számára a $(0, \pi)$ tartományban érvényesek a következő ormulák:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (8)$$

$$\pi b_n = 2 \int_0^{\pi} f(a) \sin n a da. \quad (9)$$

Az (1), (2), (3), (6), (7), (8) és (9) formulák

$$x = \frac{\pi y}{a},$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi y}{a}\right) = \varphi(y)$$

szubstituczióval a következő általánosabb alakot veszik fel:

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi y}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{a}, \\ -a < y < +a.$$

$$2aa_0 = \int_{-a}^{+a} \varphi(a) da,$$

$$aa_n = \int_{-a}^{+a} \varphi(a) \cos \frac{n\pi a}{a} da,$$

$$ab_n = \int_a^{+a} \varphi(a) \sin \frac{n\pi a}{a} da,$$

$$n=1, 2, \dots$$

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi y}{a},$$

$$0 < y < a,$$

$$2aa_0 = \int_0^a \varphi(a) da$$

$$aa_n = 2 \int_0^a \varphi(a) \cos \frac{n\pi a}{a} da,$$

$$n=1, 2, \dots$$

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi y}{a},$$

$$ab_n = 2 \int_0^a \varphi(a) \sin \frac{n\pi a}{a} da.$$

165. A Fourier-féle sorok néhány alkalmazása.

1. Pl. Legyen

$$f(x) = 1,$$

könnyű meggyőződni, hogy $-\pi$ -től $+\pi$ -ig s a cosinus sor szerint 0-tól π -ig nincs sorbafejtés. Ellenben a sinussor szerint 0-tól π -ig van. Ugyanis

$$\pi b_n = 2 \int_0^{\pi} \sin n\alpha d\alpha = \frac{4}{n}, \text{ ha } n \text{ páratlan,}$$

$$= 0, \text{ ha } n \text{ páros,}$$

tehát

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1) x}{2n+1},$$

honnan

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n+1) x}{2n+1} \quad 0 < x < \pi.$$

2. Pl. Legyen

$$f(x) = x.$$

A $-\pi$ -től $+\pi$ -ig terjedő sorbafejtés alkalmával találjuk, hogy

$$\begin{aligned} a_0 &= a_n = 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \sin n a d a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a \sin n a d a \\ &= -\frac{2a \cos n a}{n\pi} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos n a d a = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

következőleg:

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n x}{n} \quad -\pi < x < \pi.$$

A 0-tól π -ig terjedő cosinus szerinti sorbafejtésnél:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} a d a = \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a \cos n a d a = \frac{2a \sin n a}{n\pi} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin n a d a, \end{aligned}$$

honnan

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{4}{n^2\pi}, \text{ ha } n \text{ páratlan,} \\ &= 0, \text{ ha } n \text{ páros,} \end{aligned}$$

következőleg:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos (2n+1) x}{(2n+1)^2} \quad 0 < x < \pi.$$

3. Legyen

$$f(x) = \sin ax,$$

$(-\pi, \pi)$ intervallumban való sorbafejtésnél:

$$a_0 = a_n = 0,$$

$$b_n = (-1)^n \frac{2n \sin a\pi}{(a^2 - n^2)\pi},$$

következőleg:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sin ax}{\sin a\pi} = \sum_{\substack{n=1 \\ -\pi < x < \pi}}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2}.$$

4. Ha pedig

$$f(x) = \cos ax,$$

akkor

$$b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n = (-1)^n \frac{2a \sin a\pi}{(a^2 - n^2)\pi},$$

következőleg:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\cos ax}{\cos a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{-\pi < x < \pi} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2}$$

XXI. A KOMPLEXVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLCÍÓJA.

166. Az integrál definíciója.

Legyen $f(z)$ valamely tartományban z -nek szinektikus függvénye. Az a -tól b -ig terjedő tetszőleges, de önmagát nem metsző L görbe (37. ábra) legyen benne ebben a tartományban, ha már most L -t z_1, z_2, \dots, z_{n-1} pontokkal n részre osztjuk s a

$$z_1 - a = s_1, \quad z_2 - z_1 = s_2, \quad \dots, \quad b - z_{n-1} = s_n$$

jelöléseket használjuk, akkor, ha ζ_i az s_i húrhoz tartozó ív valamely pontja, a

$$\sum_{i=1}^n f(\zeta_i) s_i$$

összeg határértékét, midőn $n = \infty$ s az s_i mindegyike zérus $f(z)$ a -tól b -ig terjedő integráljának nevezzük s így jelöljük:

$$\lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i) s_i = \int_a^b f(z) dz$$

Mindenek előtt kimutatjuk, hogy limesünk határozott értékhez közeledik. E végből legyen

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

$$z = x + iy,$$

tehát

$$f(\xi_r) = P(\xi_r, \eta_r) + iQ(\xi_r, \eta_r),$$

$$z_r - z_{r-1} = x_r - x_{r-1} + i(y_r - y_{r-1}),$$

következőleg:

$$f(\xi_r) s_r = P(\xi_r, \eta_r)(x_r - x_{r-1}) - Q(\xi_r, \eta_r)(y_r - y_{r-1}) + i[Q(\xi_r, \eta_r)(x_r - x_{r-1}) + P(\xi_r, \eta_r)(y_r - y_{r-1})].$$

Ennélfogva:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z) dz &= \int_{(L)} (P(x, y) dx - Q(x, y) dy) \\ &+ i \int_{(L)} (Q(x, y) dx + P(x, y) dy). \end{aligned}$$

Integráljaink mindegyike véges s határozott; mert mindegyike egyváltozós függvények integráljára vezethető vissza. Legyen ugyanis L görbének egyenlete

$$y = \varphi(x),$$

tehát

$$dy = \varphi'(x) dx,$$

ennélfogva

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z) dz &= \int_{x_1}^{x_2} P(x, \varphi(x)) dx - \int_{x_1}^x Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x) dx \\ &+ i \int_{x_1}^{x_2} Q(x, \varphi(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} P(x, \varphi(x)) \varphi'(x) dx, \end{aligned}$$

ha x_1 és x_2 -nek nevezzük az a és b pontoknak megfelelő x koordinátákat. Integráljaink mindegyike határozott s véges, mert az L görbe mentén $f(z)$ szinektikus, tehát P és Q az (x_1, x_2) tartományban végesek s határozottak.

167. Riemann tétele.

Ha P és Q az ω zárt tartományon belül x és y -nak folytonos és differenciálható függvényei és s -nek nevezzük az ω tartományt bezáró görbét, akkor

$$\int_{(s)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{(s)} (P dy + Q dx).$$

Foglalkozzunk mindenekelőtt a

$$\int Q dx$$

integrállal. Az integrációt terjeszszük ki egy oly végtelen kis $ABCD$ parallelogramm (38. ábra) σ kerületére, melynek egyik oldala $AB = dx$, a másik pedig $BC = dy$. Az integráció iránya legyen az ábrában megjelölt irány, tehát

$$\int_{(\sigma)} Q dx = \int_{(AB)} Q dx + \int_{(BC)} Q dx + \int_{(CD)} Q dx + \int_{(DA)} Q dx.$$

De a BC és DA vonalak mentén $dx = 0$, tehát

$$\int_{(BC)} + \int_{(DA)} = 0.$$

Ennélfogva

$$\int_{(\sigma)} = \int_{(AB)} + \int_{(CD)},$$

azaz:

$$\begin{aligned} \int_{(\sigma)} Q dx &= \int_x^{x+dx} Q(x, y) dx + \int_{x+dx}^x Q(x, y+dy) dx \\ &= - \int_x^{x+dx} [Q(x, y+dy) - Q(x, y)] dx = - \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Hasonlóképen találjuk, hogy

$$\int_{(\sigma)} P dy = \frac{\partial P}{\partial x} dx dy.$$

következően:

$$\int_{(\sigma)} (P dy + Q dx) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

Ha már most az ω tartomány összes $dxdy$ elemeinek kerületére kiterjesztjük integrálunkat az ábrában megjelölt irányban, s az így nyert integrálokat összeadjuk az összegben minden elemi vonaldarabra vonatkoztatott integrál, kivéve azokat, melyek ω határvonalának is részét képezik, kétszer fordul elő ellenkező előjellel: összegük tehát zérus lesz s így megmarad az s -re vonatkoztatott integrál, tehát

$$\int_{(s)} (Pdy + Qdx) = \int_{(\omega)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy, \quad (I)$$

a mi bebizonyítandó volt. Ezen tétel alapján aztán rögtön belátható, hogy

$$\int_{(s)} (Pdx - Qdy) = - \int_{(\omega)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy. \quad (II)$$

168. A Cauchy-féle integráltétel.

A 163. §-ban tárgyaltak szerint, ha

$$f(z) = P + Qi,$$

akkor

$$\int f(z) dz = \int (Pdx - Qdy) + i \int (Qdx + Pdy).$$

Ha $f(z)$ az s -el bezárt ω tartományban szinektikus, akkor az előbbi fejezet (I) és (II) képletei alapján:

$$\begin{aligned} \int_{(s)} f(z) dz &= \int_{(s)} (Pdx - Qdy) + i \int_{(s)} (Qdx + Pdy) \\ &= - \int_{(\omega)} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy + i \int_{(\omega)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

Ámde a szinektikus függvényekre nézve

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,$$

következésképpen:

$$\int_{(s)} f(z) dz = 0.$$

Ez a *Cauchy-féle integráltétel*, melyet szavakban így fogalmazhatunk: ha $f(z)$ valamely zárt görbe bezárta területen szinektikus; akkor a zárt görbére vonatkoztatott integrálja zérus.

Ha tehát $f(z)$ -nek a -tól b -ig terjedő integrálját képezzük, akkor mindegy akár az a -t a b -vel összekötő s_1 , akár az s_2 görbén át történik az integrálás, feltéve természetesen, hogy az s_1 és s_2 görbék alkototta zárt görbe bezárta területen $f(z)$ szinektikus marad, Ugyanis, ha a 39. ábrában megjelölt nyíl irányában történik az integráció, akkor

$$\int_{(s_1 + c_2)} f(z) dz = \int_{(s_1)} f(z) dz + \int_{(s_2)} f(z) dz = 0,$$

ha a jobboldal második integráljában az integráció irányát megváltoztatjuk, akkor jele ellenkezővé lesz, tehát

$$\int_{(s_1)} f(z) dz = \int_{(s_2)} f(z) dz,$$

hol mindkettő az a -tól b -ig terjedő integrált szolgáltatja, csak-hogy az egyik s_1 , a másik pedig s_2 görbe mentén.

Ha azonban oly zárt görbén történik az integrálás, melyen belül a függvénynek van egy szinguláris helye, akkor a szinguláris helyet végtelen kis s_1 zárt görbével vesszük körül, s ennek valamely pontját összekötjük l egyenessel s tetszőleges pontjával, azután az l, s_1, l, s görbéken rendre oly irányban integrálunk (40. ábra), hogy az s és s_1 görbék között levő tér az integráció irányától balra legyen, ezáltal az ls_1ls oly zártgörbét szolgáltat, melyen belül $f(z)$ -nek nincs szinguláris helye, tehát erre a zárt görbére kiterjesztett integrál zérus, minthogy pedig ebben az integrálban az l -re vonatkozó integrál kétszer fordul elő ellenkező előjellel, azért marad

$$\int_{(s)} f(z) dz + \int_{(s_1)} f(z) dz = 0.$$

Ha már most az s_1 -re vonatkozó integrálban az integráció irányát megváltoztatjuk, úgy hogy az integráció irányától balra eső terület az s_1 bezárta végtelen kis terület legyen, akkor integrálunk ellenkező előjelűvé lesz, s így

$$\int_{(s)} f(z) dz = \int_{(s_1)} f(z) dz.$$

Ha pedig az s bezárt térben a függvénynek n szinguláris pontja $0_1, 0_2, \dots, 0_n$ van, s mindegyiket végtelen kis s_1, s_2, \dots, s_n zárt görbével veszszük körül, akkor

$$\int_{(s)} f(z) dz = \int_{(s_1)} f(z) dz + \int_{(s_2)} f(z) dz + \dots + \int_{(s_n)} f(z) dz,$$

hol minden egyes integrálban az integráció irányától balra eső terület éppen az integráció görbéjétől bezárt terület.

Pl. Ha $\varphi(z)$ az s bezárt tartományban szinéktikus, akkor, ha a $\varphi(z)$ -nek nem zérus helye, akkor

$$\frac{\varphi(z)}{z-a}$$

a $z=a$ helyen végtelen, ha tehát a hely az s bezárt tartományban van és s_1 az a -t bezáró végtelen kis sugarú kör, akkor

$$\int_{(s)} \frac{\varphi(z)}{z-a} dz = \int_{(s_1)} \frac{\varphi(z)}{z-a} dz.$$

Amde

$$\int_{(s_1)} \frac{\varphi(z)}{z-a} dz = \varphi(a) \int_{(s_1)} \frac{dz}{z-a} + \int_{(s_1)} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z-a} dz,$$

hol

$$\lim_{s_1 \rightarrow 0} \int_{(s_1)} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z-a} dz = \varphi'(a) \int_{(s_1)} dz = 0.$$

A 41. ábra szerint:

$$z-a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Mínthogy s_1 végtelen kis sugarú kör, azért

$$dz = ir(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi = i(z-a) d\varphi,$$

tehát

$$\int_{(s_1)} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2i\pi,$$

következően:

$$\int_{(s)} \frac{\varphi(z)}{z-a} dz = 2i\pi \varphi(a),$$

honnan

$$\int_{(s)} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^2} dz = 2i\pi\varphi'(a),$$

általában

$$\int_{(s)} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2i\pi\varphi^{(n)}(a)}{n!}.$$

169. A szinektikus függvények sorbafejtése értelmezési tartományuk valamely helye körül írható körben. Cauchy tétele.

Valamely $f(z)$ függvénynek $z-a$ pozitív egész hatványai szerint történő sorbafejtésére nézve CAUCHY * a következő tételt állapította meg:

Ha $f(z)$ az a pont körül írható R sugarú körben szinektikus, akkor $z-a$ -nak oly pozitív egész kitevőjű hatványai szerint menő sorba fejthető, mely az R sugarú kör minden helyén konvergens.

Rajzoljunk az R sugarú körbe (42. ábra) egy koncentrikus r sugarú kört s legyen z ezen kör valamely pontja, tehát

$$|z-a| = \rho < r < R.$$

Ha már most t -vel jelöljük az r sugarú kör pontjait és s -el területét, akkor az előbbi fejezetben megállapított tétel értelmében:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(s)} \frac{f(t)}{t-z} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(s)} \frac{f(t)}{t-a} \cdot \frac{dt}{1 - \frac{z-a}{t-a}} \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{t-a}} &= 1 + \frac{z-a}{t-a} + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^2 + \dots + \\ &+ \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^n + \left(\frac{z-a}{t-a}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{z-a}{t-a}\right), \end{aligned}$$

* Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, t. II. 1832.

következőleg:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(s)} \frac{f(t)}{t-a} dt + \frac{z-a}{2\pi i} \int_{(s)} \frac{f(t)}{(t-a)^2} dt + \dots + \\ + \frac{(z-a)^n}{2\pi i} \int_{(s)} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt + \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(t)}{t-z} \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^{n+1} dt.$$

Honnan az előbbi fejtegetései alapján

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \dots + \\ + (z-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{1}{2i\pi} \int_s \frac{f(t)}{t-z} \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^{n+1} dt.$$

Vizsgáljuk már most meg a maradék tag abszolút értékét.

$$|z-a| = \rho, \quad |t-a| = r, \\ |t-z| \geq r-\rho.$$

Legyen továbbá

$$t-a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

tehát

$$dt = i(t-a) d\varphi.$$

Következőleg, ha M -el jelöljük $|f(t)|$ legnagyobb értékét az r sugarú kör kerületén, akkor

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{(s)} \frac{f(t)}{t-z} \cdot \left(\frac{z-a}{t-a} \right)^{n+1} dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{t-z} \cdot \frac{(z-a)^{n+1}}{(t-a)^n} d\varphi \right| \\ \leq \frac{\rho^{n+1}}{2\pi(r-\rho)r^n} \int_0^{2\pi} |f(t)| d\varphi < \frac{M}{1-\frac{\rho}{r}} \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n+1},$$

mely $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ -nél zérus, mert $\rho < r$, mivel $R \rightarrow r$ minden képzelhető kicsiny számnál kisebb lehet, azért a maradék tagra vonatkozó tételünkknél fogva:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n, \\ |z-a| < R$$

a mi behizonyítandó volt.

170. A függvények sorbafejtése körgyűrűben. Laurent-féle tétel.

$f(z)$ -nek valamely körgyűrűben való sorbafejtésére LAURENT a Comptes Rendus XVII. kötetében 1843-ban a következő tételt mutatta ki:

Ha $f(z)$ az a pont körül írható $R > R'$ sugarú körök meghatározta körgyűrűben szinektikus, akkor $z-a$ -nak oly pozitív és negatív hatványai szerint menő sorba fejthető, mely a körgyűrű minden helyén konvergens.

Rajzoljunk a körgyűrűbe a pont körül két $r > r'$ sugarú koncentrikus kört, tehát

$$R > r > r' > R'.$$

Ha továbbá z az r és r' körök meghatározta körgyűrűnek valamely pontja, akkor

$$r > |z-a| > r'.$$

Jelöljük az r és r' körök pontjait t és v , kerületeit pedig s és s' betűkkel. Akkor, ha az integrációt a 43. ábrában megjelölt irányban végezzük:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(s)} \frac{f(t)}{t-z} dt - \int_{(s')} \frac{f(v)}{v-z} dv.$$

Ugyanis az s és s' körök határolta körgyűrűben van a singuláris pont z ; tehát az integrációt mindig oly irányba kell végezni, hogy az integráció irányától balra legyen az integráció területe, s mivel az s' -re vonatkozó integráció irányát ellenkezővé változtattuk, azért kellett az erre vonatkozó integrált is negatív előjellel venni.

Az előbbi fejezet fejtegetései értelmében:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(s)} \frac{f(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \int_{(s)} \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n.$$

$|z-a| < R$

Továbbá

$$\begin{aligned} -\frac{z-a}{v-z} &= 1 : \left(1 - \frac{v-a}{z-a}\right) \\ &= 1 + \frac{v-a}{z-a} + \dots + \left(\frac{v-a}{z-a}\right)^n + \left(\frac{v-a}{z-a}\right)^{n+1} : \left(1 - \frac{v-a}{z-a}\right), \\ \text{tehát} \quad &-\frac{1}{2i\pi} \int_{(s')} \frac{f(v)}{v-z} dv = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_{(s')} f(v) dv + \dots + \\ &+ \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2i\pi} \int_{(s')} (v-a)^n f(v) dv + \frac{1}{2i\pi} \int_{(s')} \left(\frac{v-a}{z-a}\right)^{n+1} \frac{f(v)}{z-v} dv. \end{aligned}$$

Ha $|z-a|$ -t megint ρ -val jelöljük, akkor

$$|z-v| \geq \rho - r'$$

s ha $|f(v)|$ -nek a r' kör területén a legnagyobb értékét M' -el jelöljük, akkor az előbbi fejtegetéseihez hasonló módon találjuk, hogy maradéktagunk kisebb, mint

$$\frac{M'}{1 - \frac{r'}{\rho}} \left(\frac{r'}{\rho}\right)^{n+1},$$

mely $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ -nél zérus, mert $r' < \rho$, tehát

$$-\frac{1}{2i\pi} \int_{(s')} \frac{f(v)}{v-z} dv = \sum_{n=1}^{\infty} v_n (z-a)^{-n},$$

következésképpen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n (z-a)^{-n},$$

$R > |z-a| > R'$

a mi bebizonyítandó volt.

Főntebbi fejtegetéseink értelmében

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{(s)} \frac{f(t)}{t-a} dt, \\ \frac{dt}{t-a} &= i d\varphi, \end{aligned}$$

Saták: A differenciál- és integrálszámítás elmélete.

tehát

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) d\varphi,$$

ha $|f(t)|$ legnagyobb értékét, melyet a körgyűrűben felvesz M -el jelöljük, akkor egyenletünk értelmében

$$|u_0| < M.$$

Ha már most $(z-a)^n f(z)$, vagy $(z-a)^{-n} f(z)$ függvényekre alkalmazzuk ezt a tételt, akkor

$$|v_n| < |z-a|^n M$$

$$|u_n| < |z-a|^{-n} M.$$

Minthogy ezek az egyenlőtlenségek a körgyűrű minden helyére érvényesek, azért

$$|v_n| < R^n M$$

$$|u_n| < R^{-n} M.$$

Megállapítottuk tehát a következő tételt: *Az a pont körül rajzolt $R' < R$ sugarú körök definiálta körgyűrűben szinektikus $f(z)$ ily alakban állítható elő:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n (z-a)^{-n}$$

hol

$$|u_n| < R^{-n} M, \quad |v_n| < R^n M,$$

ha M $|f(z)|$ -nek legnagyobb értéke, melyet a körgyűrűben felvesz.

171. A Cauchy és Méray-Weierstrass-féle függvényelmélet összeegyeztetése.

Láttuk, hogyan jutott el CAUCHY a szinektikus függvények fogalmához, jóllehet azok analitikai alakjával nem ismerkedtünk meg. Láttunk végtelen sorok által definiált függvényeket, melyek a konvergencia területén szintén szinektikus függvények. Ezen végtelen sorok által adott függvényalakok tanulmányozása képezi alapját a MÉRAY-WEIERSTRASS-féle függvényelméletnek, csakhogy míg az előbbi *olotrop*, addig az utóbbi *ana-*

litikai függvényeknek nevezi őket. Az előbbi fejezetek azonban meggyőztek bennünket arról, hogy CAUCHY szinektikus függvényei, a függvény értelmezési tartományának mindazon helyein, melyeken szinektikus marad egész kitevőjű hatványokkal bíró végtelen sorba fejthető, következőleg CAUCHY szinektikus függvényei is megegyeznek MÉRAY *olotrop* és WEIERSTRASS *analitikai* függvényeivel. Ez azután az a lényeges pont, mely a kétféle függvényelmélet között látszólag felmerülő nagy különbségeket, csak a módszerbeli eltérésekre redukálja.

172. A Cauchy-féle integrál.

Legyen $\varphi(z)$ az s zárt görbe területén szinektikus; meghatározandó a következő integrál:

$$\int_{(s)} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Ha $z=a$ az $f(z)$ -nek m -szeres zérus helye, akkor $f(z)$ ilyen alakú:

$$f(z) = (z-a)^m f_1(z),$$

tehát

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1} f_1'(z) + (z-a)^m f_1''(z),$$

s így

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

tehát az a pontot bezáró végtelen kis c görbére nézve

$$\int_{(c)} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m \int_{(c)} \frac{\varphi(z)}{z-a} dz + \int_{(c)} \varphi(z) \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} dz.$$

A második integrálunk zérus, az első szintén zérus, ha $z=a$ $\varphi(z)$ -nek zérus helye, ellenben $2m\pi i \varphi(a)$; általában tehát mondhatjuk, hogy

$$\int_{(c)} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2m\pi i \varphi(a),$$

hol $\varphi(a)=0$ -al, az integrál is azzá lesz.

Ha pedig $z=a$ az $f(z)$ -nek n -szeres végtelenje, akkor

$$f(z) = (z-a)^{-n} f_1(z).$$

$$f'(z) = -n(z-a)^{-n-1}f_1(z) + (z-a)^{-n}f_1'(z),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{n}{z-a} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)},$$

tehát az a pontot bezáró végtelen kis c görbére nézve:

$$\int_{c_1} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2n\pi i \varphi(a).$$

Már most, ha a_1, a_2, \dots, a_j az s bezárt térben $f(z)$ -nek m_1, m_2, \dots, m_j -szeres zérus helyei, a_1, a_2, \dots, a_k pedig n_1, n_2, \dots, n_k -szoros végtelenjei, akkor

$$\int_{(s)} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi \sum_{r=1}^j m_r \varphi(a_r) - 2i\pi \sum_{r=1}^k n_r \varphi(a_r).$$

Ez a CAUCHY-féle integrál. Abban a különös esetben, midőn $\varphi(z) = 1$,

$$\int_s \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2i\pi \sum_{r=1}^j m_r - 2i\pi \sum_{r=1}^k n_r.$$

173. Az algebra alaptétele.

Ha $f(z)$ n -edfokú racionális egész függvény, tehát

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n,$$

akkor

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{nz^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}$$

Ha $|z|$ végtelen nagy, akkor

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{|z|=\infty} \frac{n}{z}.$$

Ennélfogva végtelen nagysugarú C körre nézve

$$\int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \int_{(C)} \frac{dz}{z} = 2i\pi n.$$

A mi az előző fejezetben megállapított CAUCHY-féle integrál alapján azt mondja ki, hogy

$$f(z) = 0$$

n-edfokú algebrai egyenletnek n gyöke van.

XXII. VONALOS-, FELÜLETI ÉS TÉRFOGATI INTEGRÁLOK.

174. Stokes tétele.

Ha az s görbével határolt ω felületet u, v orthogonális vonalrendszerrel végtelen kis derékszögű parallelogrammokra osztjuk s azután mindegyikre alkalmazzuk a RIEMANN-féle tétel levezetése alkalmával használt eljárást s azután az egyes elemi integrálokat összeadjuk, nyerjük, hogy

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv = \int_{(s)} (P du + Q dv). \quad (1)$$

Az ω felület valamely pontjának koordinátái legyenek

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v);$$

tehát

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ha a du és dv vonalelemek iránycosinusait $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, illetőleg $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ -vel jelöljük, akkor

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

Melyek között a következő relációk vannak:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0.$$

Ezen relációkra való tekintettel a (2) alatt levő egyenletekből nyerjük, hogy

$$\left. \begin{aligned} du &= \frac{\partial x}{\partial u} dx + \frac{\partial y}{\partial u} dy + \frac{\partial z}{\partial u} dz, \\ dv &= \frac{\partial x}{\partial v} dx + \frac{\partial y}{\partial v} dy + \frac{\partial z}{\partial v} dz. \end{aligned} \right\}$$

Ha már most

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial x}{\partial u} P + \frac{\partial x}{\partial v} Q, \\ Y &= \frac{\partial y}{\partial u} P + \frac{\partial y}{\partial v} Q, \\ Z &= \frac{\partial z}{\partial u} P + \frac{\partial z}{\partial v} Q, \end{aligned} \right\}$$

akkor

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\partial x}{\partial u} X + \frac{\partial y}{\partial u} Y + \frac{\partial z}{\partial u} Z, \\ Q &= \frac{\partial x}{\partial v} X + \frac{\partial y}{\partial v} Y + \frac{\partial z}{\partial v} Z, \end{aligned} \right\}$$

és

$$Pdu + Qdv = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial v} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ &+ \frac{\partial y}{\partial v} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ &+ \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ &+ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} X + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} Y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} Z, \\ \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial u} \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &+ \frac{\partial y}{\partial u} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
 & + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} X + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} Y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} Z.
 \end{aligned}$$

A differenciálásnál feltételeztük, hogy x, y, z -nek az u, v szerint vett differenciálhányadosaik képzésénél a differenciálás sorrendje közömbös. Két utóbbi egyenletünkben nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} &= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + \\
 &+ \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.
 \end{aligned}$$

Ha már most a $dudv$ felületelem normálisának iránycosinusait l, m, n -el jelöljük, akkor miként ismeretes:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{\beta_1 \gamma_1}{\beta_2 \gamma_2} = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \\
 m &= \frac{\gamma_1 \alpha_1}{\gamma_2 \alpha_2} = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \\
 n &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha_2 \beta_2} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},
 \end{aligned}$$

továbbá

$$ldudv = dydz, \quad mdudv = dx dz, \quad ndudv = dx dy.$$

Következőleg az (1), (6), (7) és ezen utóbbi egyenletek alapján:

$$\begin{aligned}
 & \int_{(s)} (Xdx + Ydy + Zdz) \\
 &= \int_{(a)} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \right].
 \end{aligned}$$

Ez STOKES-nak a fizikai kutatásokban nagy szerepet játszó tétele (Smith's Price Examination. 1854.).

175. A felületi és térfogati integrál között levő összefüggés.

Ha ω zárt felület valamely elemének, $d\omega$ normálisának irány-cosinusai l, m, n , akkor az

$$\int_{(\omega)} (lP + mQ + nR) d\omega = \int_{(\omega)} (Pdydz + Qdx dz + Rdx dy)$$

integrált felületi integrálnak nevezzük. Kimutatjuk a következő tételt:

Ha az ω bezárta τ térben, P, Q, R rendre az x, y, z szerint differenciálhatók s ezek a differenciálhányadosok is folytonosak, akkor

$$\int_{(\omega)} (Pdydz + Qdx dz + Rdx dy) = - \int_{(\tau)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) d\tau. \quad (I)$$

Foglalkozzunk előbb az

$$\int Pdydz$$

integrállal. Felületünk normálisának irányát számítsuk befelé pozitívnak; mivel felületünk zárt, azért egy az x tengelylyel párhuzamos egyenes annyiszor lép be a felületbe, mint ki; jelöljük a belépési helyeket x_1, x_3, x_5, \dots -el, a kilépési helyeket x_2, x_4, x_6, \dots -al, P -nek ezen helyekhez tartozó értékeit pedig P_1, P_2, \dots -vel. De a kilépési helyeken a normálist éppen ellenkező irányba vesszük pozitívnak, t. i. visszafelé a felületbe, mint a belépési helyeken, azért ennek a 180° -nyi eltérésnek megfelelőleg a kifelé pozitív előjellel számított iránycosinusok negatív előjellel veendőek s így

$$\int_{(\omega)} Pld\omega = \int_{(\omega)} Pdx dy = \int_{(\omega)} (P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + \dots) dx dy,$$

de föltevésünk értelmében:

$$P_1 - P_2 = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$$P_3 - P_4 = - \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

következőleg:

$$\int_{(\omega)} P dx dy = - \int_{(\tau)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = - \int_{(\tau)} \frac{\partial P}{\partial x} d\tau.$$

Hasonló képleteket írhatunk fel Q -ra és R -re, mely egyenletekből aztán következik tételünk helyessége.

176. Green-féle tétel.

Az előbbi fejezet (I) alatt levő képletben végezzük a következő szubsztitucziót:

$$P = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Q = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad R = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

következőleg:

$$lP + mQ + nR = \psi \left(l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right).$$

Ha az ω felület x, y, z pontjához tartozó normálisnak a felülettől dn távolságban befelé levő pontjának koordinátái $x+dx, y+dy, z+dz$, akkor erre a pontra vonatkoztatott függvény növekmény

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

de

$$\frac{dx}{dn} = l, \quad \frac{dy}{dn} = m, \quad \frac{dz}{dn} = n,$$

tehát

$$\frac{d\varphi}{dn} = l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$\frac{d\varphi}{dn}$ -t nevezzük φ n irányú differenciálhányadosának, melynek bevezetésével:

$$lP + mQ + nR = \psi \frac{d\varphi}{dn}.$$

Továbbá

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \\ = \psi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ennélfogva az előbbi fejezet (I) alatt levő egyenlete alapján:

$$\int_{(\omega)} \psi \frac{d\varphi}{dn} d\omega = - \int_{(\tau)} \psi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) d\tau - \\ - \int_{(\tau)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\tau. \quad (1)$$

Ez a GREEN-féle tétel.

Ha $\psi = 1$, akkor

$$\int_{(\omega)} \frac{d\varphi}{dn} d\omega = - \int_{\tau} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) d\tau. \quad (2)$$

Továbbá az (1) alapján

$$\int_{(\omega)} \varphi \frac{d\psi}{dn} d\omega = - \int_{(\tau)} \varphi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) d\tau - \\ - \int_{(\tau)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (3)$$

az (1) és (3) alapján pedig

$$\int_{(\omega)} \left(\varphi \frac{d\psi}{dn} - \psi \frac{d\varphi}{dn} \right) d\omega = \int_{(\tau)} \psi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) d\tau - \\ - \int_{(\tau)} \varphi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) d\tau. \quad (4)$$

Végül megjegyezzük, hogy az előbbi fejezetben P , Q és R -re vonatkozó föltevéseink alapján a τ térben nemcsak φ és ψ -nek hanem mindazon differenciálhányadosaiknak is folytonosaknak kell lenni, melyek egyenleteinkben előfordulnak.

177. A Green-féle tétel alkalmazása, Gauss-féle formulák.

Legyen

$$\varphi = \frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

(3) Ha az (a, b, c) pont az ω felületen kívül van, akkor φ a τ tér minden pontjában folytonos és differenciálható, és pedig

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x-a)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(y-b)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(z-c)^2}{r^5},$$

(4) következőleg

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

(5) tehát az előbbi fejezet (2) egyenlete alapján:

$$\int_{(\omega)} d \frac{1}{r} \frac{d\omega}{dn} = 0. \quad (1)$$

Ennek a formulának még más alakot is adhatunk. Ugyanis a 44. ábrából világosan látható, hogy

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dn} = -\frac{\cos(r, n)}{r^2},$$

ha (r, n) -el jelöljük azt a szöget, melyet r alkot a befelé számított normálissal. Az (1) egyenlet más alakja tehát

$$\int_{(\omega)} \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega = 0. \quad (2)$$

Ha pedig az (a, b, c) pont az ω felületen belül van, akkor vegyük körül egy végtelen kis sugarú ω_1 gömbbel, melynek

centruma maga az (a, b, c) pont. Az ω és ω_1 felületek határolta térben nincsen szingularis pont, tehát

$$\int_{(\omega)} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\omega + \int_{(\omega_1)} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\omega_1 = 0,$$

hol mindkét integrálban az ω és ω_1 határolta térrészbe befelé számítjuk a normálisokat pozitívnak. Változtassuk meg második integrálunkban a normális irányát, ez által integrálunk ellenkező előjelűvé lesz s így

$$\int_{(\omega)} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\omega = \int_{(\omega_1)} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\omega_1.$$

Láttuk, hogy

$$\frac{d \frac{1}{r}}{dn} = \frac{\cos(r, n)}{r^2}.$$

De az ω_1 végtelen kis gömb, melynek centrumában van az (a, b, c) pont s mivel az ω_1 -re vonatkozó integrálban a normálist is befelé számítjuk, tehát

$$\cos(r, n) = 1,$$

s így

$$\int_{(\omega_1)} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\omega_1 = \int_{(\omega_1)} \frac{d\omega_1}{r^2} = 4\pi,$$

következően

$$\int_{(\omega)} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\omega = 4\pi, \quad (3)$$

vagy

$$\int_{(\omega)} \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega = 4\pi. \quad (4)$$

A (2) és (4) formulákat Gauss-féle formuláknak nevezzük.

Lássuk még az előbbi fejezet (4) képletének az alkalmazását. Ha φ és ψ eleget tesznek a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

egyenletnek, akkor

$$\int_{(\omega)} \left(\psi \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d\psi}{dn} \right) d\omega = 0.$$

Már most, ha

$$\psi = \frac{1}{r}$$

s az (a, b, c) pont a felületen kívül van, akkor

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\omega = 0.$$

Ha pedig az (a, b, c) pont a felületen belül van, akkor ω_1 -nek a fentebbi jelentést tulajdonítva az imént végzett kutatások módszerével találjuk, hogy

$$\int_{(\omega)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\omega = \int_{(\omega_1)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\omega_1$$

az ω_1 -re vonatkozó integrálban

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2},$$

s ha az egységsugarú gömb felületelemét $d\sigma$ -val jelöljük, akkor

$$d\omega_1 = r^2 d\sigma,$$

tehát

$$\int_{(\omega_1)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\omega_1 = \int_{(\omega_1)} \left(r \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \right) d\sigma,$$

ámde

$$\lim_{r=0} \int_{\omega_1} r \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = 0,$$

$$\lim_{r=0} \int_{\omega} \varphi d\sigma = 4\pi\varphi(a, b, c),$$

következőleg:

$$\int_{(w)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dn} - \varphi \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) d\omega = 4\pi\varphi(a, b, c). \quad (5\bar{5})$$

Ezen fejezet formulái az elméleti fizikában játszanak kiválóan nagy szerepet.

XXIII. AZ INTEGRALSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA A KÖR NÉGYSZÖGESÍTÉSI PROBLEMÁJÁNAK MEGOLDÁSÁRA.

178. Az e szám transzcendens voltának bebizonyítása.

HERMITE mutatta ki először, hogy e nem lehet semmiféle algebrai egyenletnek a gyöke. A következő egyszerű bizonyítást HURWITZ-tól ered.

Parciális integrálással nyerjük, hogy

$$\int e^{-x} f(x) dx = -e^{-x} f(x) + \int e^{-x} f'(x) dx,$$

következőleg:

$$\int_0^x e^{-x} f(x) dx = -e^{-x} f(x) + f(0) + \int_0^x e^{-x} f'(x) dx.$$

Ha $f(x)$ raczionális egész függvény, akkor ezen formula többszörös alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\int_0^x e^{-x} f(x) dx = -e^{-x} F(x) + F(0), \quad (1)$$

hol

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \dots$$

Az (1) alatt levő egyenletünkből nyerjük, hogy

$$F(0) e^x = F(x) + e^x \int_0^x e^{-x} f(x) dx. \quad (2)$$

Ha e eleget tenne valamely n -ed fokú egész számú együtthatókkal bíró algebrai egyenletnek, akkor teljesülne a következő reláció:

$$a_0 e^n + a_1 e^{n-1} + \dots + a_{n-1} e + a_n = 0,$$

hol a_0, a_1, \dots, a_n racionális egész számok. Ha már most a (2) egyenletünkben x helyett rendre n -et, $n-1$ -et, \dots , 1 -et 0 -t írunk s az így nyert egyenleteket $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ -el szorozottan összeadjuk, akkor a következő relációhoz jutunk:

$$\sum_{r=n}^0 a_{n-r} F(r) + \sum_{r=n}^0 a_{n-r} e^r \int_0^r e^{-x} f(x) dx = 0. \quad (3)$$

Legyen már most

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p \dots (x-n)^p,$$

hol p törzsszám. Ha már most $f(x)$ -t x hatványai szerint rendezzük, nyerjük, hogy

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} [Ax^{p-1} + Bx^p + \dots], \quad (4)$$

hol A, B egész számok; p -t megválaszthatjuk oly nagynak, hogy A ne legyen osztható p -vel. (4) egyenletünkből különben könnyen látható, hogy

$$f(0) = 0, f'(0), \dots, f^{(p-2)}(0) = 0.$$

$$f^{(p-1)}(a) = A, f^{(p)}(0) = pB, \dots$$

tehát

$$F(0) = f(0) + f'(0) + f''(0) + \dots = A + pB + p(p+1)C + \dots,$$

honnan látható, hogy $F(0)$ p -vel nem osztható egész szám.

Ha pedig $f(x)$ -t $(x-r)$ hatványai szerint rendezzük ($0 < r \leq n$), akkor

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} [B_r (x-r)^p + C_r (x-r)^{p+1} + \dots],$$

hol B_r, C_r, \dots egész számok. Miként $F(0)$, úgy $F(r)$ számára is találjuk, hogy

$$F(r) = B_r p + C_r p(p+1) + \dots$$

Tehát $F(r)$ p -vel osztható egész szám, már most ha p -t oly nagynak választjuk, hogy a_n vele osztható ne legyen, akkor

$$\sum_{r=n}^0 a_{n-r} F(r) = a_0 F(n) + a_1 F(n-1) + \dots + a_{n-1} F(1) + a_n F(0)$$

okvetetlenül zérustól különböző p -vel nem osztható egész szám.

Amde a (3) egyenletben előforduló integrálok bármelyikében

$$|e^{-x} f(x)| < \frac{1}{(p-1)} n^{p-1} n^p n^p = \dots = \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!},$$

következőleg:

$$\left| \sum_{r=n}^0 a_{n-r} e^r \int_0^r e^{-x} f(x) dx \right| < \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=n}^0 |a_{n-r}| r e^r.$$

De ha a véges szám, akkor

$$\frac{a^x}{(x-1)!} = \frac{a}{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{a} \dots \frac{x-1}{a}}$$

$x=\infty$ -nél zérus, következőleg föntebbi kifejezésünk is p megnövesztésével kisebbé tehető, mint minden képzelhető kicsiny szám. Így tehát (3) egyenletünkben volna egy zérustól különböző egész szám s egy abszolút értékre nézve végtelen kis szám összege, melynek zérusnak kellene lenni, a mi lehetetlen, következőleg az a föltevésünk, hogy e eleget tesz egy n -ed fokú algebrai egyenletnek nem helyes s így e transzczendens szám.

179. π transzczendens voltának beh bizonyítása.

Ha π algebrai szám, akkor πi is az, tehát van oly

$$\varphi(x) = 0$$

n -ed fokú egész számú együtthatókkal bíró algebrai egyenlet, melynek gyökei között πi előfordul, ha tehát

$$\varphi(x) = a(x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n) = 0$$

s $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ között πi is előfordul, akkor az

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

egyenlet következtében:

$$(e^{\beta_1} + 1)(e^{\beta_2} + 1)\dots(e^{\beta_n} + 1) = 0.$$

Föltételezhetjük, hogy a β -tár között nincs zérustól különbözö, ennélfogva a szorzás végrehajtása után a következő egyenletet nyerjük:

$$1 + e^{a_1} + e^{a_2} + \dots + e^{a_m} = 0, \quad (2)$$

hol az a -ák $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ -nek összes lehetséges lineáris össze-tételei; az a -ák szimmetrikus egész függvényei, szimmetri-kus egész függvényei β -áknak is, tehát raczionális számok és pedig raczionális törtszámok, ha az (1)-ben $a \neq 1$. De aa_1, \dots, aa_m szimmetrikus egész függvényei, szimmetrikus egész függ-vényei az $a\beta_1, a\beta_2, \dots, a\beta_n$ -nek is, tehát raczionális egész szá-mok, mert kifejezhetők

$$(x - a\beta_1)(x - a\beta_2) \dots (x - a\beta_n) = 0$$

egyenlet együtthatóival, melyek raczionális egész számok s a mely egyenletet az (1)-ből úgy nyerjük, ha x helyett egyszerűen $\frac{x}{a}$ -t írunk.

Ha az előbbi fejezet (2) egyenletében x helyett rendre 0, a_1, a_2, \dots, a_m -t írunk s a nyert egyenleteket összeadjuk, akkor a következőhöz jutunk:

$$\sum_{r=0}^m F(a_r) + \sum_{r=1}^m e^{a_r} \int_0^{a_r} e^{-x} f(x) dx = 0, \quad (3)$$

hol a_0 alatt zérust kell érteni.

Legyen már most

$$f(x) = \frac{a^{(m+1)p-1}}{(p-1)} x^{p-1} (x - a_1)^p \dots (x - a_m)^p, \quad (4)$$

melyben, ha x helyett a_1 -et írunk, még akkor is minden a összekapcsolható egy a -val, tehát aa függvényével van dolgunk. $f(x)$ -t x hatványai szerint rendezve:

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)} (Ax^{p-1} + Bx^p + Cx^{p+1} + \dots)$$

egyenlethez jutunk, hol A, B, C az aa -k szimmetrikus egész függvényei, tehát raczionális egész számok; megválaszthatjuk tehát a p törzsszámot úgy, hogy A ne legyen osztható p -vel, s mivel

$$F(0) = A + pB + p(p+1)C + \dots,$$

következőleg $F(0)$ p -vel nem osztható egész szám. Az előbbi fejezet fejtegetéseihez hasonlóan találjuk, hogy

$$F(a_r) = pB_r + p(p+1)C_r + \dots,$$

hol B_r, C_r, \dots az aa -k raczionális egész függvényei, következőleg:

$$\sum_{r=1}^m F(a_r) = p \sum_{r=1}^m (B_r + (p+1)C_r + \dots)$$

az aa -k szimmetrikus egész függvényei, tehát p -vel osztható egész szám. Ennélfogva:

$$\sum_{r=0}^m F(a_r)$$

zérustól különböző p -vel nem osztható egész szám.

Ha már most az a_1, a_2, \dots, a_m között az abszolút értékre legnagyobb a -val jelöljük, akkor a (3) alatt levő integrálok mindegyikében:

$$|e^{+x} f(x)| < \frac{e^{|a|} (2|a| + |a|)^{(m+1)p-1}}{(p-1)!},$$

következőleg:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{r=1}^m e^{a_r} \int_0^{a_r} e^{-x} f(x) dx \right| < \\ & < \frac{e^{|a|} (2|a| + |a|)^{(m+1)p-1}}{(p-1)!} \sum_{r=1}^m |a_r| e^{a_r}, \end{aligned}$$

mely p megnövesztésével kisebbé tehető minden képzelhető kicsiny számnál, tehát a (3) alatt levő egyenlőség nem állhat meg, a miből következik, hogy π transzcendens szám.

180. A kör négyszögesítése.

A kör régi négyszögesítési problémája abban állott, hogy vajjon lehetséges-e vonalzó s körző segítségével egy olyan hosszú egyenes vonalat szerkeszteni, melynek hosszúsága π -vel egyenlő, s ha lehetséges, hogyan kell a szerkesztést végezni.

Mint hogy vonalzó és körző segítségével szerkeszteni annyit tesz, mint két egyenesnek, vagy egy egyenesnek s egy körnek,

vagy pedig két körnek a metszéspontjait meghatározni. Ez a művelet pedig analitikailag egyenlő jelentőségű az első s másodfokú egyenletek megoldásával, azért kimondhatjuk a tételt, hogy:

Valamely analitikai kifejezés akkor s csak akkor szerkeszthető meg vonalzó s körző segítségével, ha az ismeretes mennyiségekből véges számú összeadás, kivonás, szorzás, osztás és négyzetgyökvonással lezármaztatható.

A kör négyszögesítési problémájának megoldására vonatkozó kutatások tehát annak a kimutatását célozták, hogy van-e oly négyzetgyökök segítségével megoldható egész számú együtthatókkal bíró egyenlet, melynek π gyökét képezi?

Az előbbi fejezetben kimutattuk, hogy π semmiféle racionális egész számú együtthatókkal bíró egyenletnek nem lehet gyöke, tehát a kör négyszögesítése vonalzó s körző segítségével lehetetlen.

Már most az a kérdés, hogy lehet-e másféle oly készüléket szerkeszteni, melynek segítségével a kör négyszögesíthető. Erre a kérdésre megfelelt ABDANK-ABAKANOWICZ orosz mérnök, midőn készülékét, melyet *Integrgraph*-nak nevezett, elméletileg megalkotott s a melyet CORADI Zürichben meg is konstruált.

Az integrgraph segítségével valamely $y = f(x)$ görbéhez, melyet differenciál-görbének nevezünk, megalkotandó a hozzá tartozó integrálgörbe $y = F(x)$, hol $F(x)$ -et a következő integrál definiálja:

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Igy pl. ha a differenciálgörbe kör:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

akkor az integrálgörbe:

$$y = \int \sqrt{r^2 - x^2} dx,$$

azaz:

$$y = \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}.$$

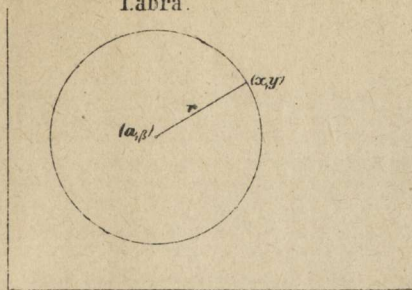
Ez a görbe $-r$ -től $+r$ -ig, minthogy arc sinus függvény periodikus, végtelen sok kongruens ágból áll (45. ábra), melyek pl. az y tengelyt $0, \pm r^2 \frac{\pi}{2}, \pm r^2 \pi, \dots$ pontokban metszik, ha

r helyébe 1-et írunk a metszéspontok lesznek $0, \pm \frac{\pi}{2}, +\pi, \dots$ tehát ezen görbe megszerkesztésével tényleg a kör négyszögesítési problémáját is megoldottuk, természetes, hogy nem oly alakban, mint a milyenben azt a régiek felvetették.

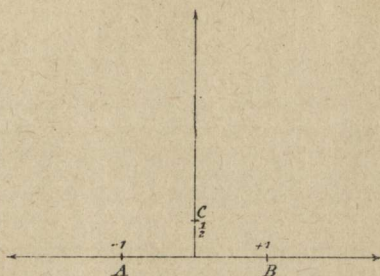
Az integraph leírása megjelent a Teubner czég kiadásában ABDANK-ABAKANOWICZ «die Integraphen» czím alatt.

I.

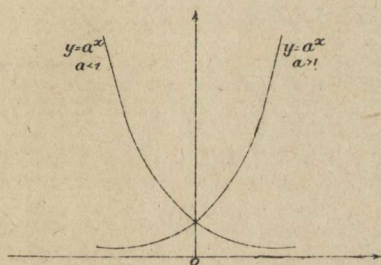
1. ábra.



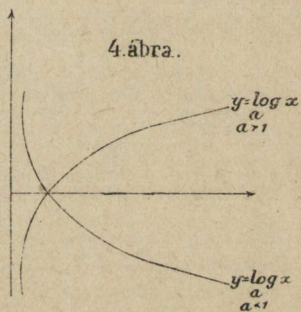
2. ábra.



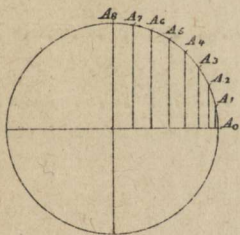
3. ábra.



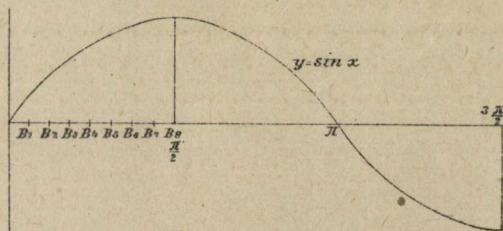
4. ábra.



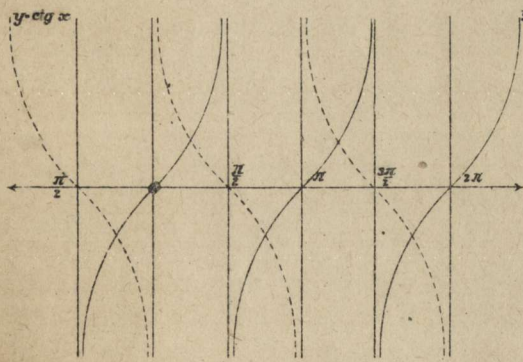
5. ábra.



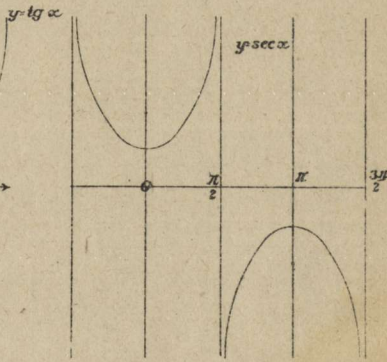
6. ábra.



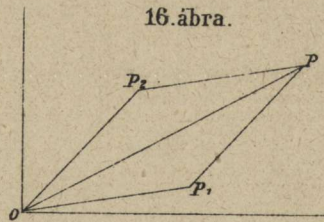
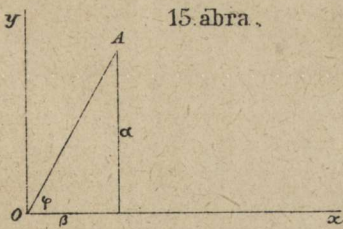
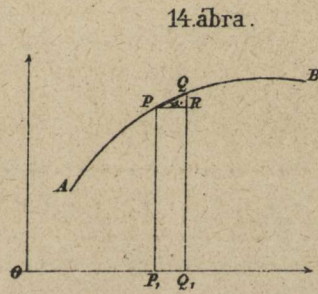
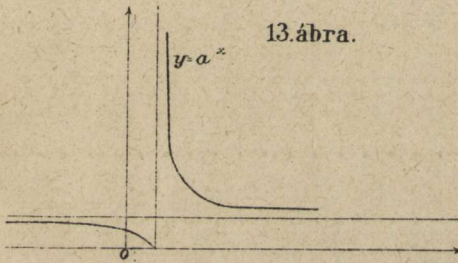
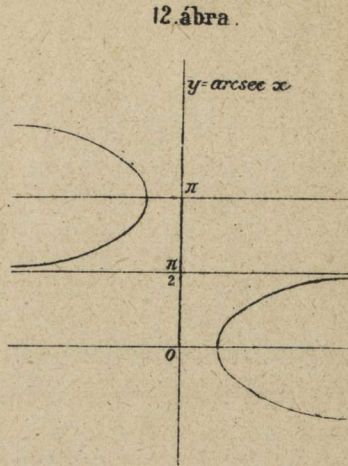
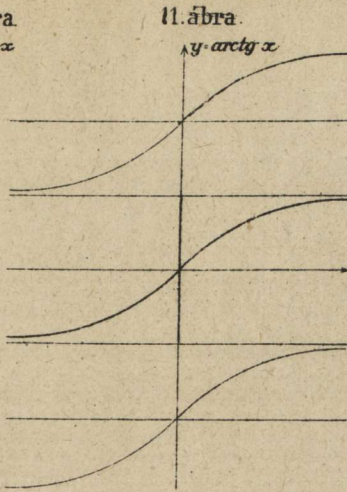
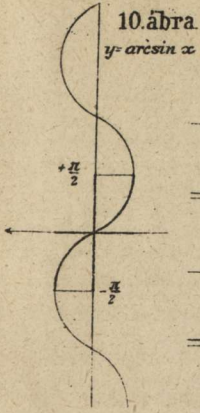
7. 8. ábra.



9. ábra.

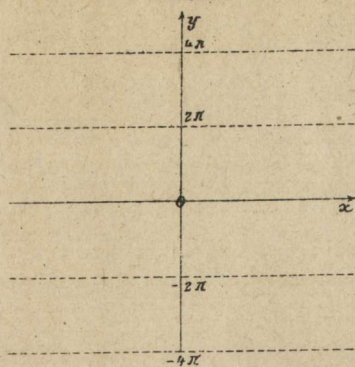


II.

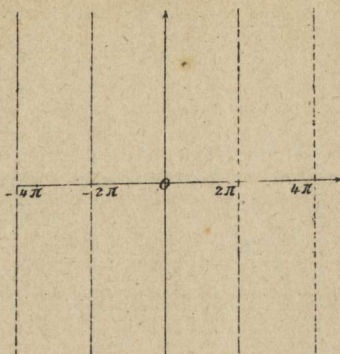


III.

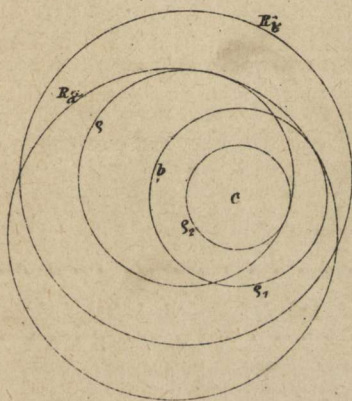
17. ábra.



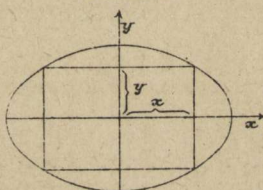
18. ábra.



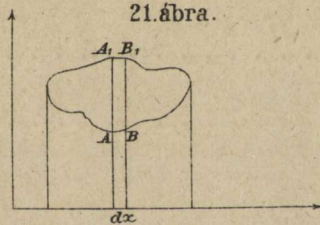
19. ábra.



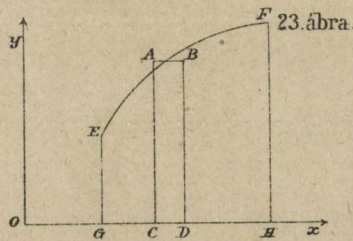
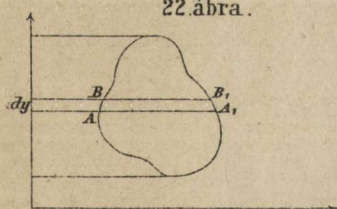
20. ábra.



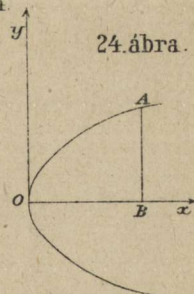
21. ábra.

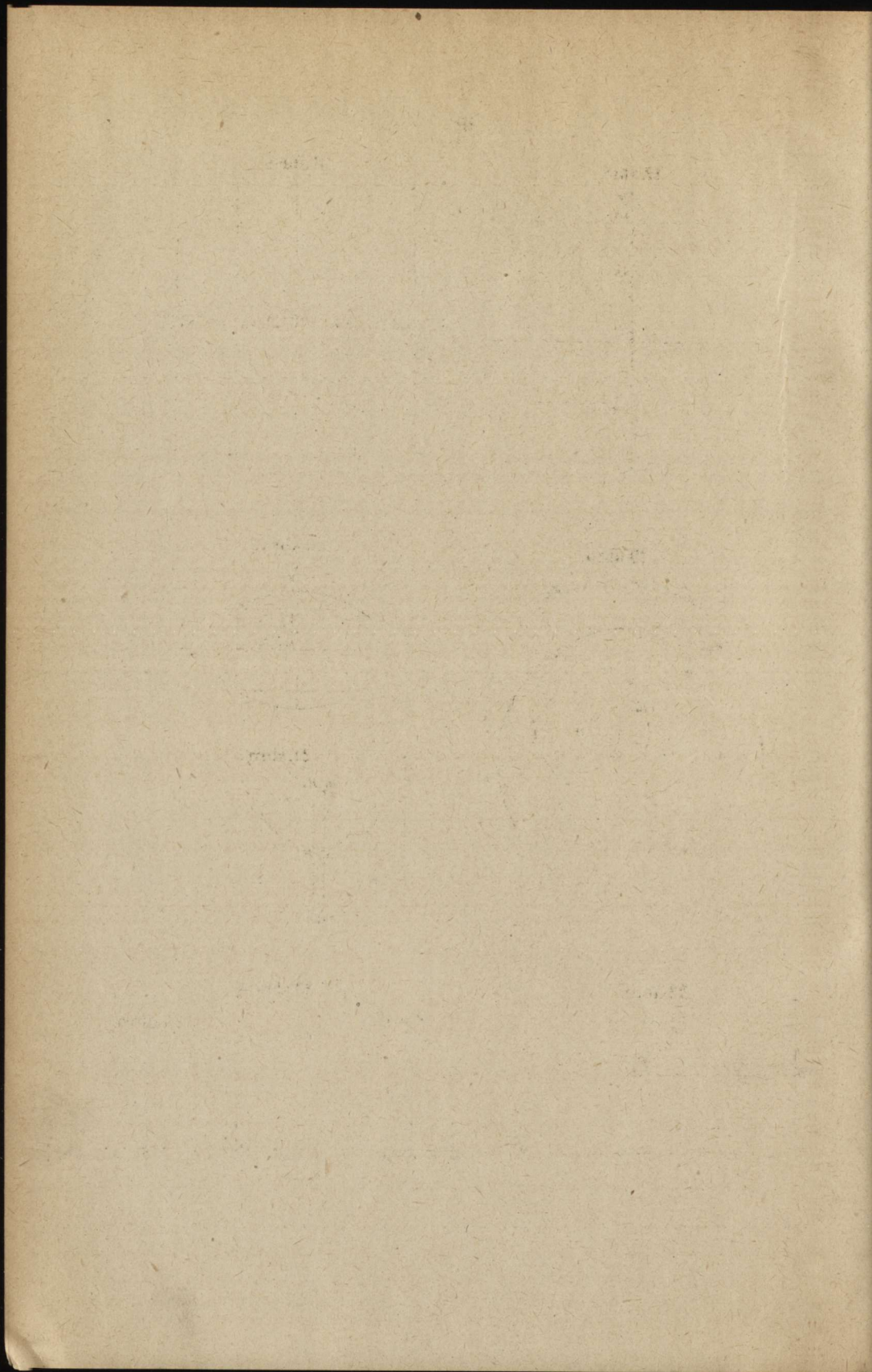


22. ábra.



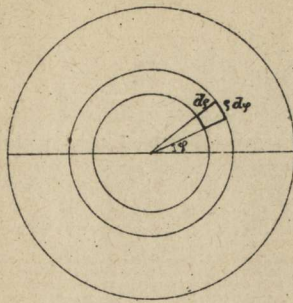
24. ábra.



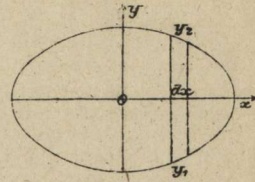


IV.

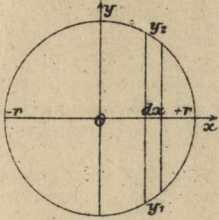
27. ábra.



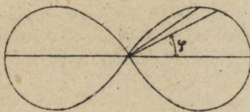
26. ábra.



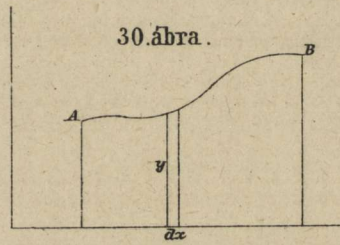
25. ábra.



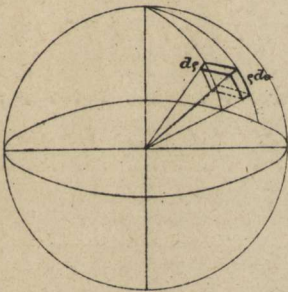
28. ábra.



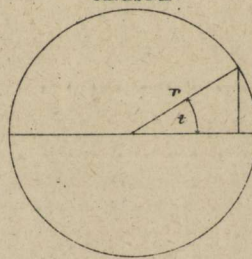
30. ábra.



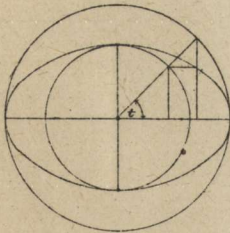
29. ábra.



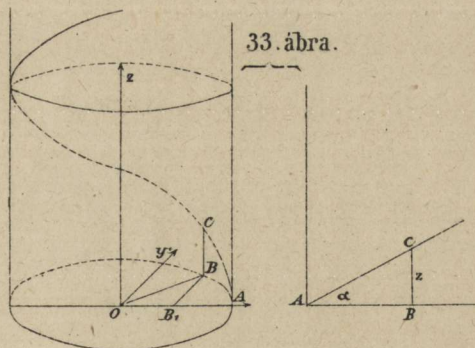
31. ábra.

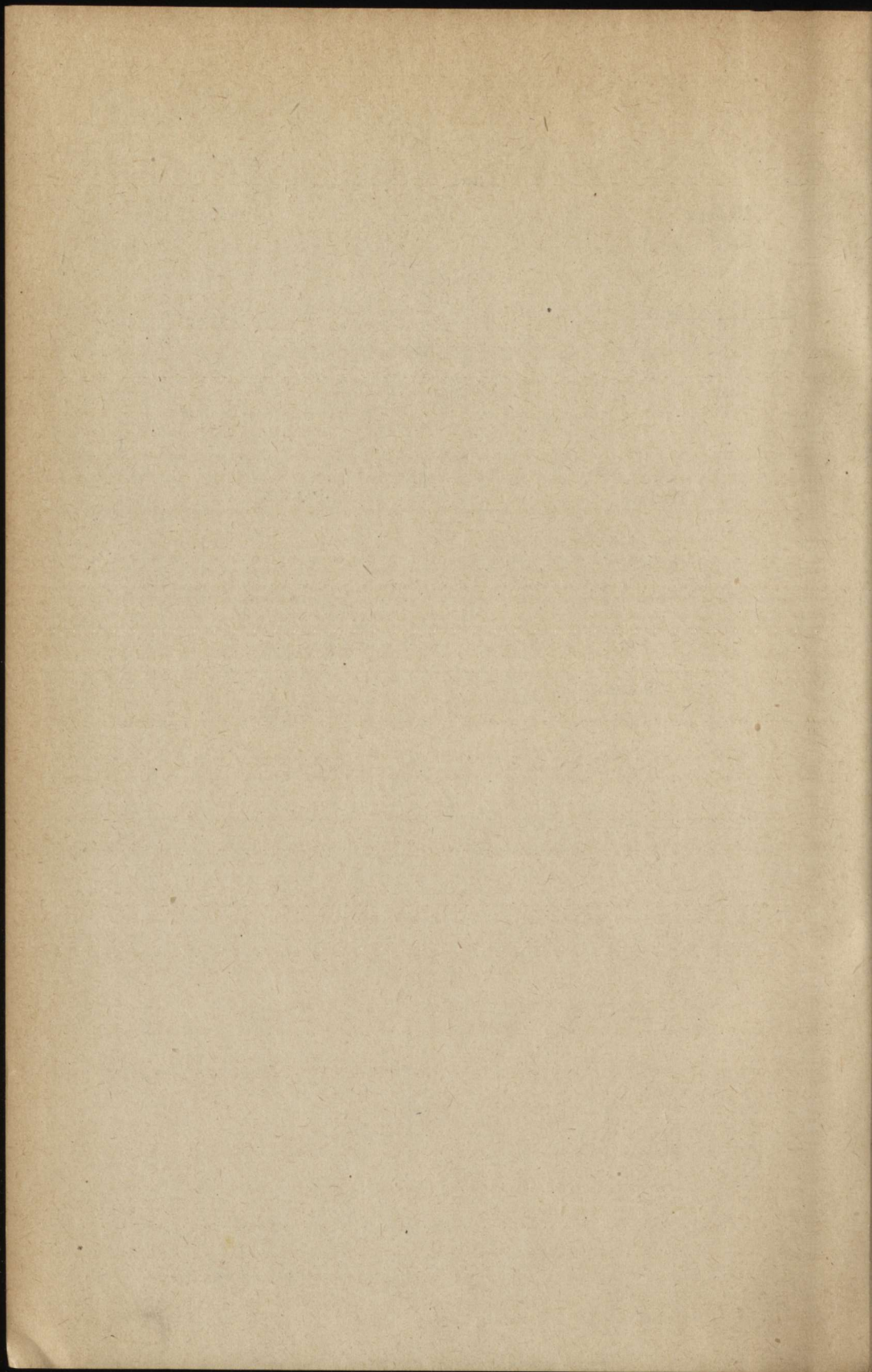


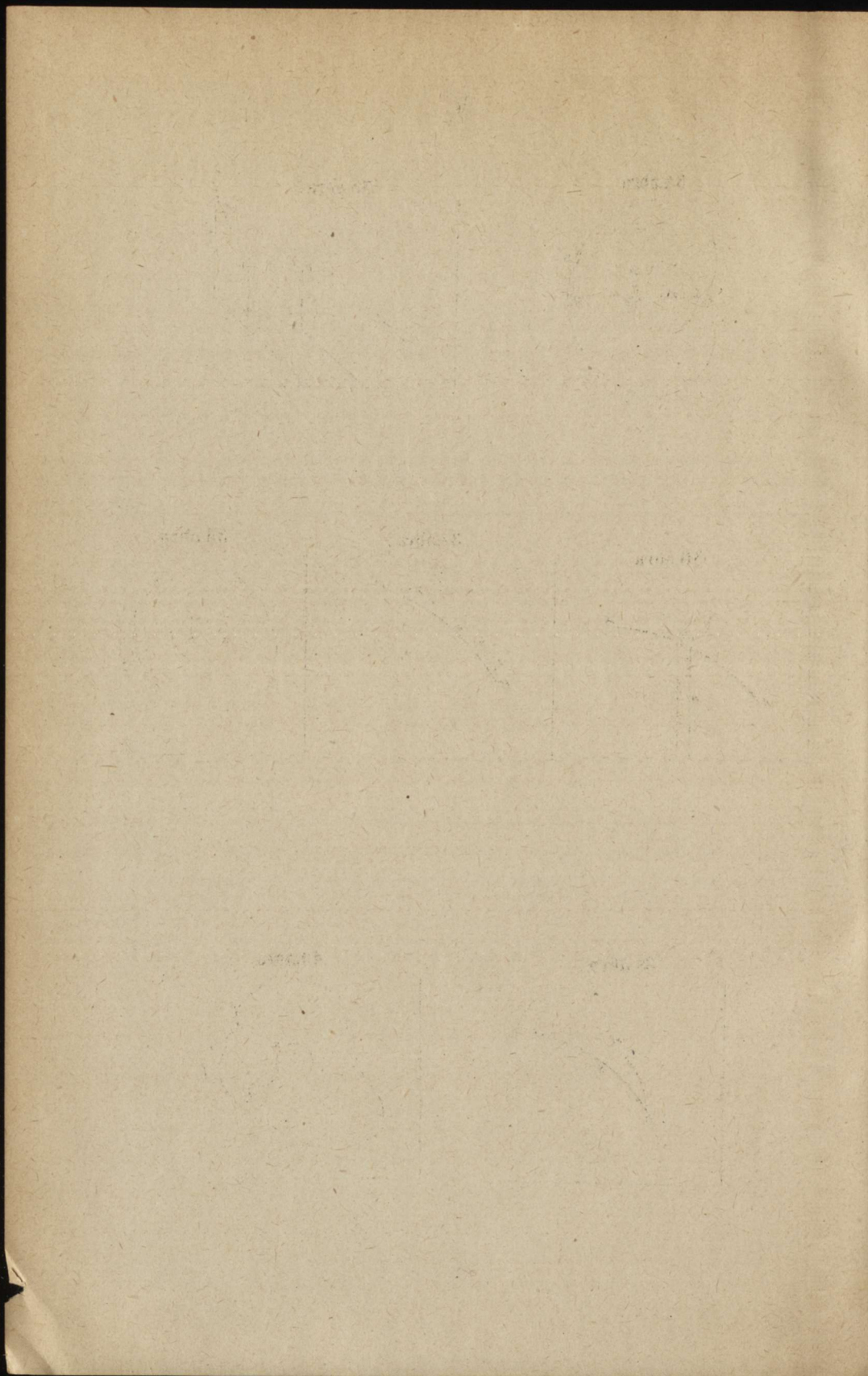
32. ábra.



33. ábra.

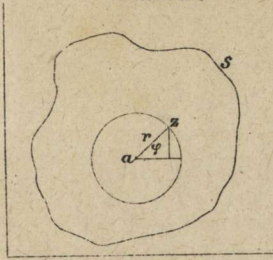




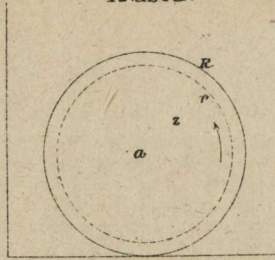


VI.

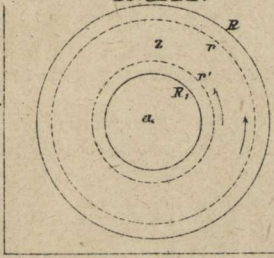
41. ábra.



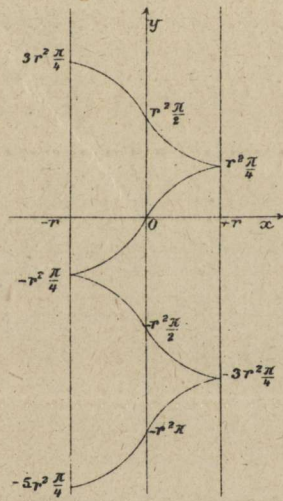
42. ábra.



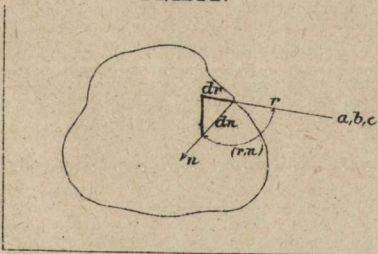
43. ábra.

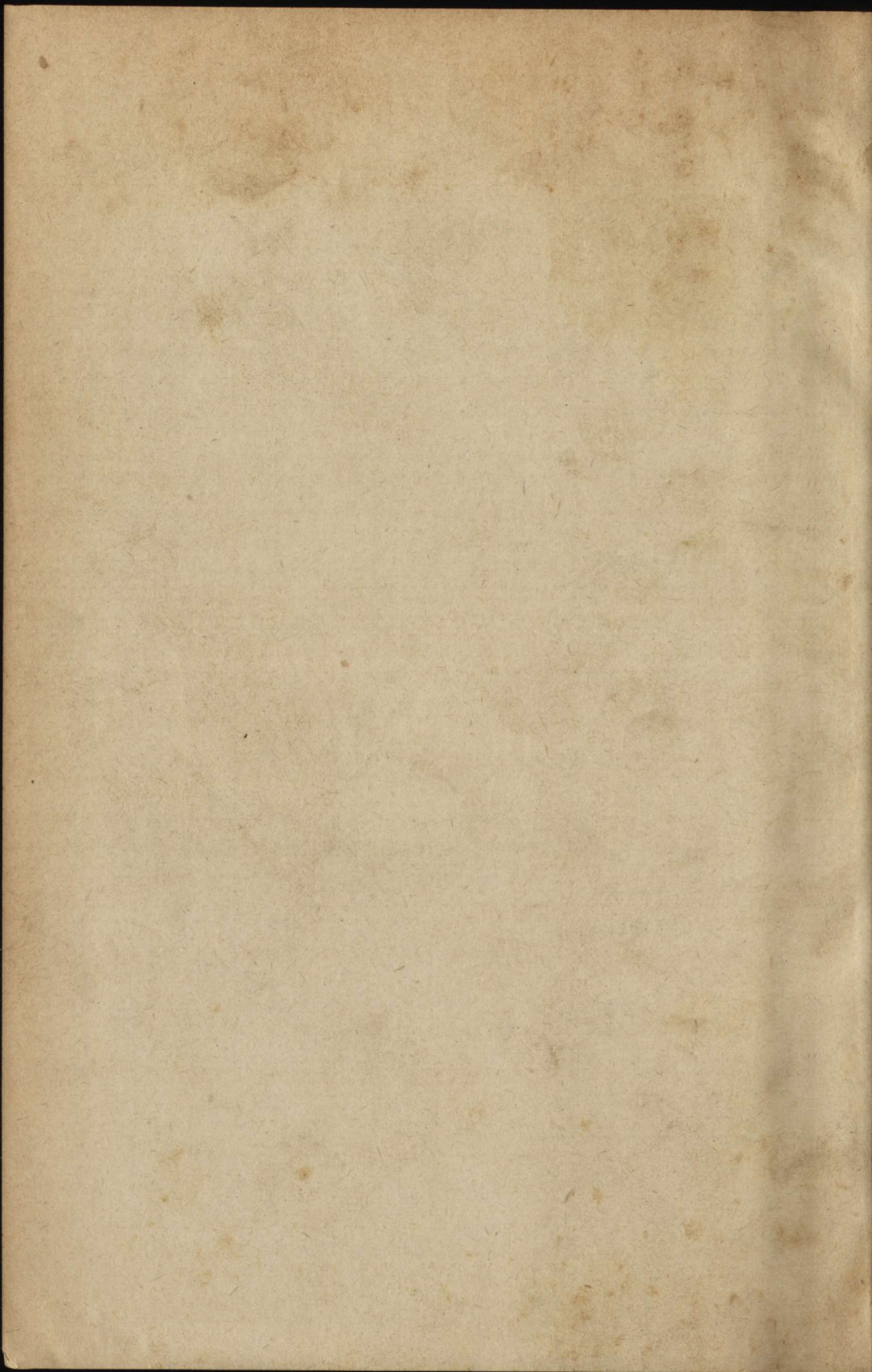


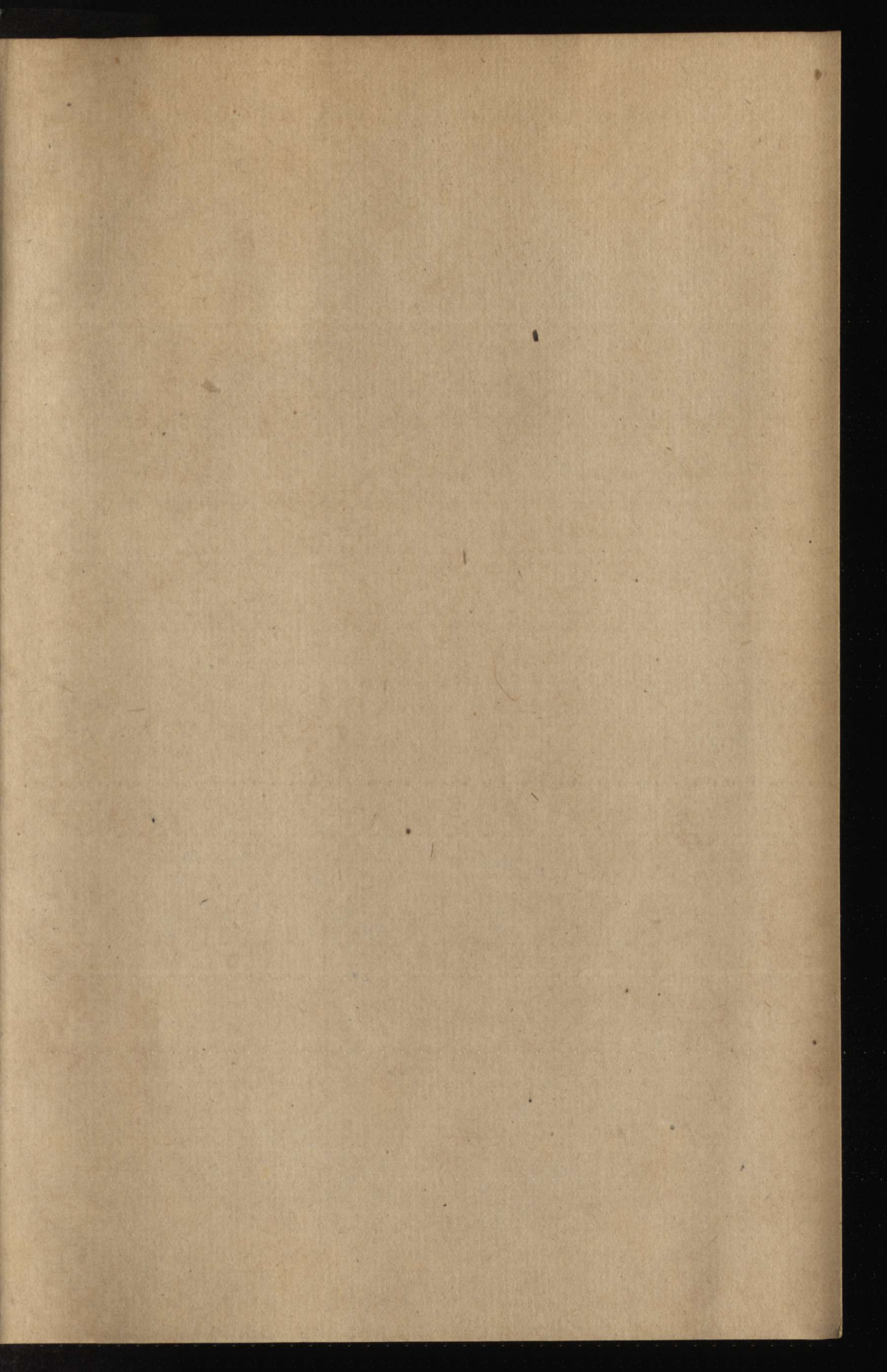
45. ábra.

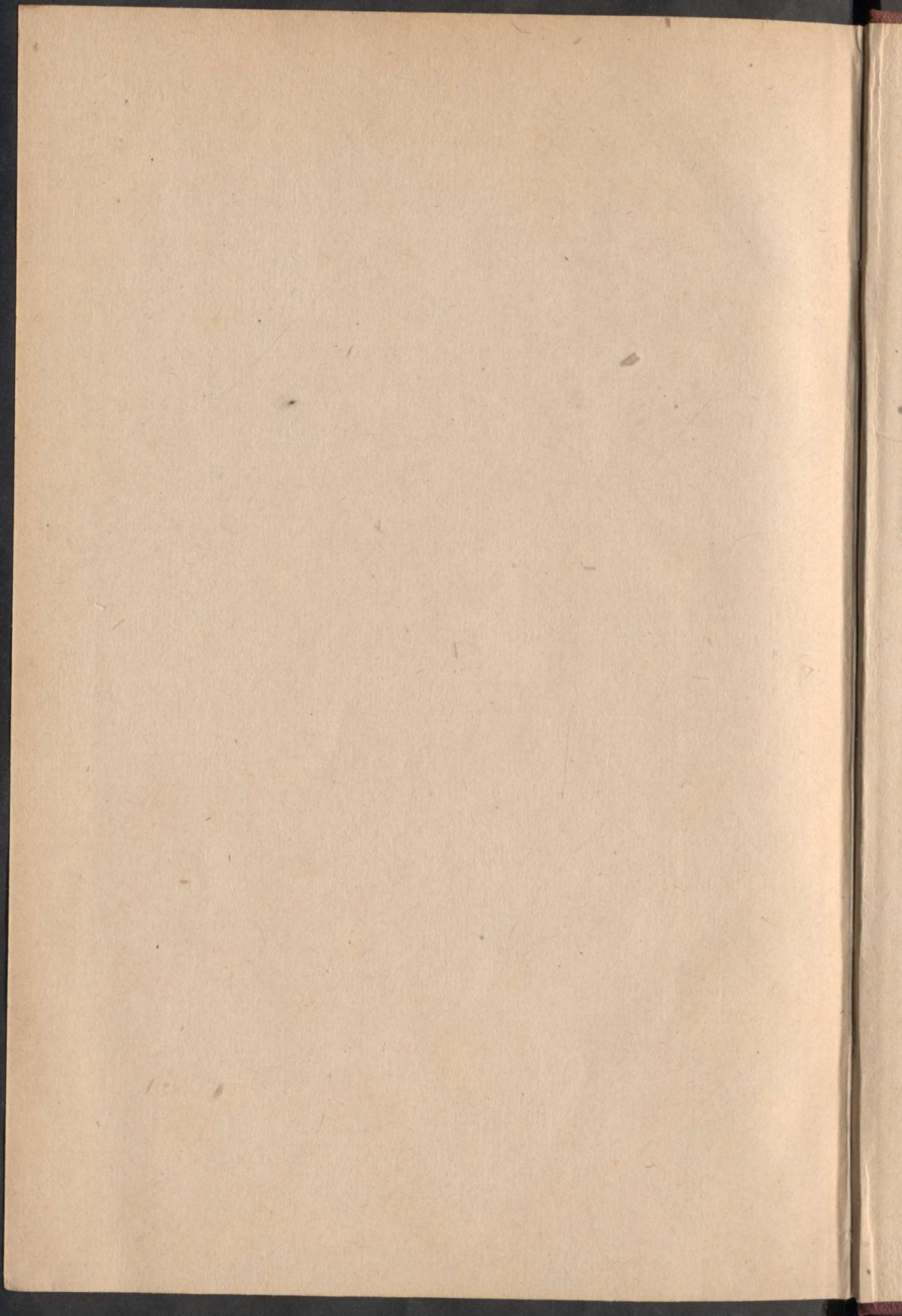


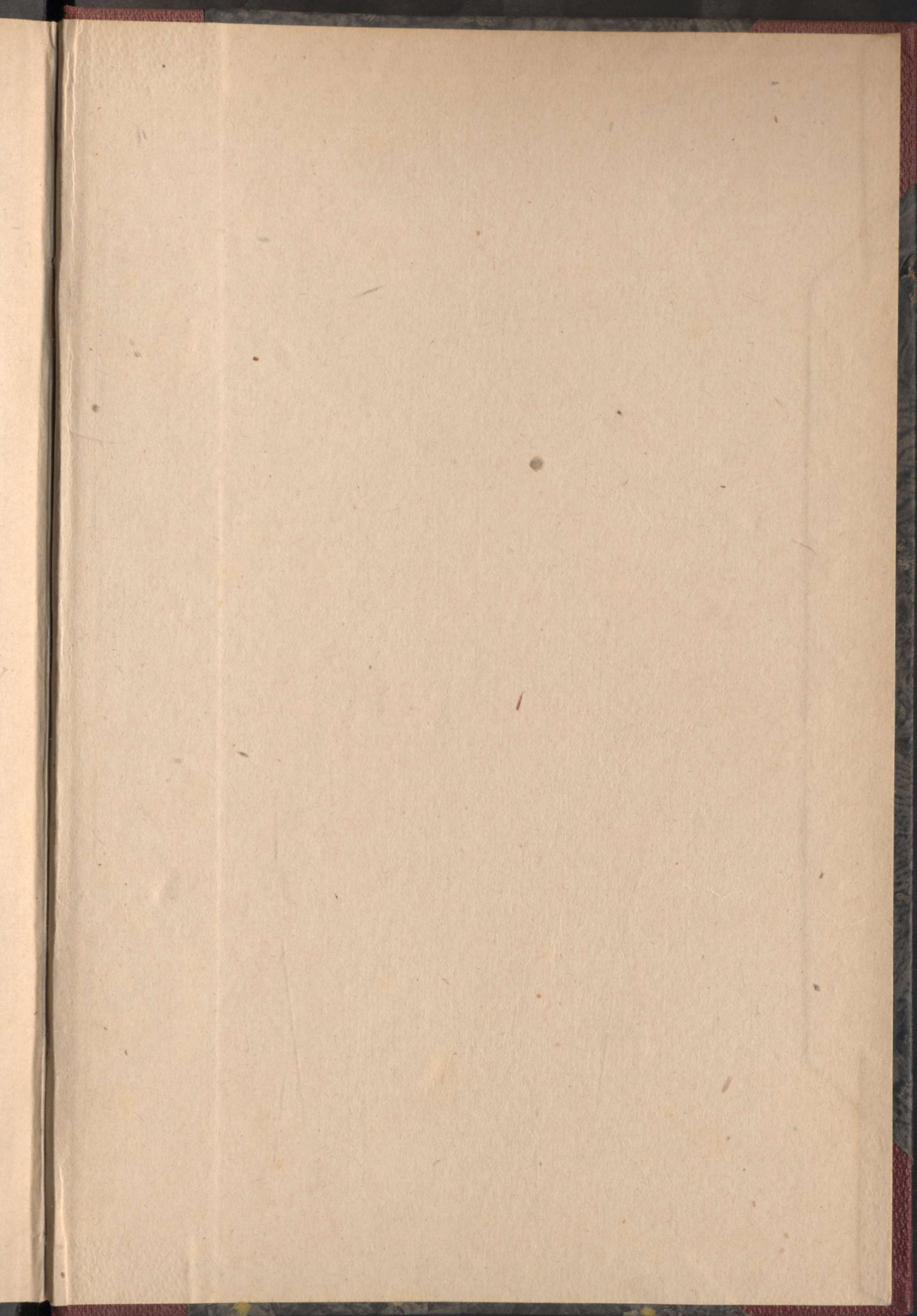
44. ábra.

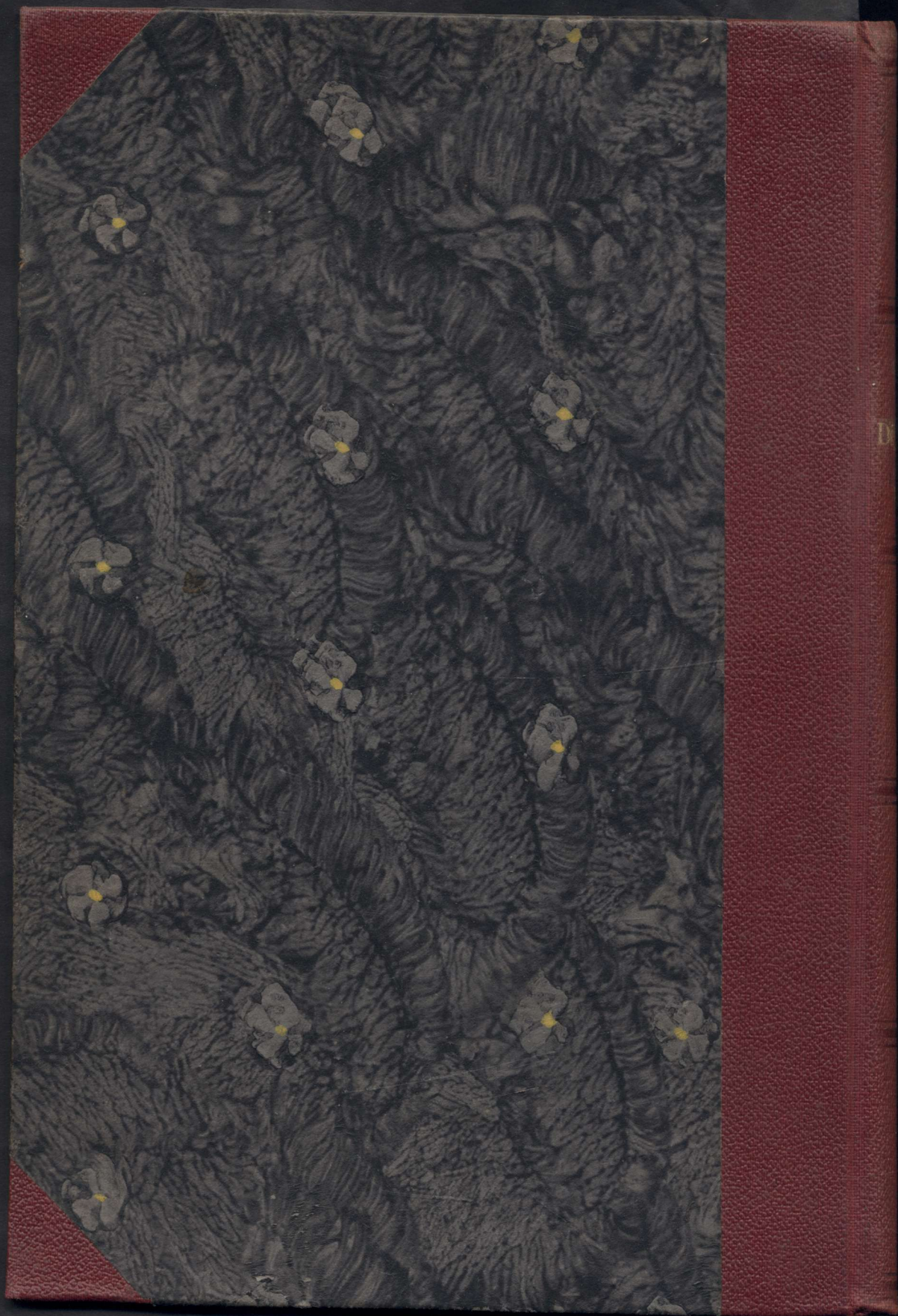












Suták:
Differenciál
számítás