KÜLÖNLENYOMAT

A

«MATEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESÍTŐ»

1942. évi LXI. kötetének második részéből

KÜLÖNLENYOMAT
a «Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítője»
LXI. kötetéből. Budapest, 1942.

SONDERABDRUCK
aus «Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wissenschaften»
Band LXI, Budapest 1942.

A FEKETE SUGÁRZÁS TÖRVÉNYEI.

I. és II. rész.

CSASZÁR ELEMÉR lev. tagtól.

Ismeretes, hogy bármilyen anyagi minőségű és alakú, de állandó hőmérsékleten tartott fallal határolt üregben fekete sugárzás uralkodik. Ez a sugárzás sokféle rezgésszámú részből áll, tehát összetett sugárzás. PLANCK a kvantumelmélet bevezetésével megállapította, hogy a ν rezgésszámú rész sűrűsége (ϱ_{ν_0}) a következőképpen függ a rezgésszámtól és az abszolút hőmérséklettől (T)-től:

$$\varrho_{\nu_0} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{1}$$

E képletben h jelenti a PLANCK-féle hatásmennyiséget, k pedig a BOLTZMANN-féle állandót. E mennyiségek régebbi értékei a következők:[1]

$$h = 6{\cdot}55.10^{-27} \text{ erg.sec},$$

$$k = 1{\cdot}373.10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{fok}}.$$

Ezek az értékek szoros kapcsolatban vannak az elektron töltésének MILLIKAN-féle értékével:

$$e = 4{\cdot}770{\cdot}10^{-10} \text{ els.cgs egység}.$$

Az (1) képletben előforduló c jelenti a fény terjedési sebességét:

$$c = (2{\cdot}99774 \pm 0{\cdot}00011).10^{10} \text{ cm.sec}^{-1}.$$

[1] M. PLANCK: Theorie der Wärme, 231, 1930.

Ha az állandóknak imént felsorolt értékét helyettesítjük be a PLANCK-féle formulába, meggyőződhetünk róla, hogy a tapasztalattal jól megegyezik. Ugyanis a belőle kiszámítható STEFAN-BOLTZMANN-*féle állandó* és a WIEN-féle állandó megegyezik a tapasztalati értékekkel, sőt a képlet teljes összhangban van a nagyjelentőségű RUBENS és MICHEL-féle mérésekkel is.

A STEFAN-BOLTZMANN-féle állandót (σ_0-t) kifejezhetjük az előbbi alapállandókkal, ha a fekete sugárzás sűrűségét (ϱ-t) integrációval kiszámítjuk:

$$\varrho = \int_0^\infty \varrho_{\nu_0} d\nu = aT^4. \tag{2}$$

Az a egy állandót jelent, melyből

$$\sigma_0 = \frac{c}{4} a = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}. \tag{2a}$$

A h és k előbbi értékét ebbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\sigma_0 = 5{\cdot}75.10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2.\,\text{sec}.\,\text{fok}^4}. \tag{2b}$$

Viszont a nagy gonddal végzett MÜLLER-*féle mérések*[2] eredménye szerint

$$\sigma_n = (5{\cdot}774 \pm 0{\cdot}02).10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2.\,\text{sec}.\,\text{fok}^4}. \tag{3}$$

Sok más mérés középértéke szerint pedig

$$\sigma_n' = 5{\cdot}768\,.\,10^{-5}, \tag{3a}$$

melynek pontosságát nem igen lehet megbecsülni. Az egyes adatok a következők:[3]

GERLACH	(1916)	5·800
COBLENTZ	(1917)	5·722
HOFFMANN	(1923)	5·760
KUSSMANN	(1924)	5·795
HOARE	(1928)	5·737
MÜLLER	(1929)	5·770
MENDENHALL	(1929)	5·790
MÜLLER	(1934)	5·774

[2] C. MÜLLER: Zs. f. Phys. **82**, 1, 1933.
[3] U. ő.: U. o.

Amint látjuk, az elmélet és a tapasztalat kielégítő módon megegyezik egymással.

A WIEN-féle állandó vizsgálata végett vezessük be a ν rezgésszám helyett a λ hullámhosszúságot és a ϱ_{ν_0} helyett a sugárzás erősségét (E_{λ_0}-t). Ekkor

$$E_{\lambda_0}=\frac{c^2h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{ch}{k\lambda T}}-1}=\frac{c_1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}-1}. \tag{4}$$

Ebből a képletből kiszámítható a WIEN-féle állandó:

$$\lambda_m T=\frac{1}{4\cdot 9651}\frac{ch}{k}=\frac{c_2}{4\cdot 9651}. \tag{5}$$

A h és k előbbi értékét behelyettesítve azt találjuk, hogy

$$\lambda_m T= 0\cdot 288 \text{ cm.fok.} \tag{5a}$$

A mérési eredmények középértéke pedig 0·291 cm.fok,[4] tehát a megegyezés kielégítő.

RUBENS és MICHEL[5] azt vizsgálták, hogy a (4) képletből kifejezhető

$$C_0=\frac{c_1}{\lambda^5}=E_{\lambda_0}\left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}}-1\right) \tag{6}$$

mennyiség változatlan λ esetében (egy izokromata mentén) állandó-e, ha T változik. Felvették, hogy $c_2 = 1\cdot 4300$ cm.fok, ami az említett h és k értékkel összhangban van. Méréseiket a $\frac{c_2}{\lambda T} = 0\cdot 1606\ldots 5\cdot 636$ tartományban és a $\lambda = 4\cdot 002$, $4\cdot 990$, $6\cdot 992$, $8\cdot 944$, $12\cdot 04$, $16\cdot 05$, $22\cdot 3$ és $51\cdot 8\mu$ izokromaták mentén végezték. Megállapították, hogy a (6) egyenlet baloldala a hibahatárokon belül állandó, tehát a PLANCK-féle formula a sugárzás színképi eloszlását is a tapasztalathoz híven írja le.

Sajnos, az utóbbi évtizedben végzett mérések megzavarták ezt a szép összhangot az elmélet és a tapasztalat között. Ugyanis először az uppsalai egyetem röntgen-laboratóriumában, majd

---

[4] W. NERNST: Verh. d. D. Phys. Ges. 302, 1919.

[5] H. RUBENS u. G. MICHEL: Sitzb. d. Pr. Ak. d. Wiss. 38, 590, 1921.

később máshol is végzett mérések szerint az elektron töltése valamivel nagyobb az előbb említettnél:[6]

$$e = (4{\cdot}8025 \pm 0{\cdot}007) . 10^{-10} \text{ els.cgs egység.}$$

Az elektron-töltésmértékszámának megváltozása maga után vonta a h és k állandó értékének megváltozását is. Ugyanis[7]

$$h = (6{\cdot}6133 \pm 0{\cdot}0034) . 10^{-27} \text{ erg.sec,}$$

$$k = (1{\cdot}381 \quad \pm 0{\cdot}0011) . 10^{-16} . \frac{\text{erg}}{\text{fok}} .$$

Az állandóknak ezt az új értékét behelyettesítve, a PLANCK-féle képlet összhangban marad ugyan a WIEN-féle állandó tapasztalati értékével és a RUBENS-MICHEL-féle mérésekkel, de a belőle kiszámítható STEFAN-BOLTZMANN-féle állandó (σ_0) kicsiny a mérési adatokhoz képest; mégpedig az eltérés a mérési hibát felülmúlja. Ugyanis az új állandókkal

$$\sigma_0 = (5{\cdot}709 \pm 0{\cdot}03) . 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 . \text{sec} . \text{fok}^4} . \tag{6a}$$

Ez a (3) alatti MÜLLER-féle értéknél kisebb, sőt kívül esik a hibahatáron. Ezen felül kisebb más mérések középértékénél (3*a*) is.[8] Csak az összes régi és új σ mennyiségek középértékével egyezik meg.[8a]

Az újabb mérésekre támaszkodva indokoltnak látszik egy olyan általánosabb képletet keresni, mely összhangban marad a WIEN-féle állandóval és a RUBENS-MICHEL-féle mérésekkel, de a STEFAN-BOLTZMANN-féle állandóra is helyes értéket ad. Az irodalomban már több ilyen irányú lépés történt. Különösen figyelemre méltó STRUM[9] eljárása, aki PLANCK régebbi gondolatainak EINSTEIN-féle fogalmazását követve vezetett le egy ilyen általá-

---

[6] F. G. DUNNINGTON: Phys. Rev. (2), **55**, 683, 1939.

[7] F. G. DUNNINGTON: l. c., F. HENNING: Hb. d. Phys. II, 496 és F. KIRCHNER: Erg. d. ex. Nat. **18**, 26, 1939.

[8] Ha a h és k új értékében nagyobb kísérleti hibát tételezünk fel, mint a megjelölt, akkor a számított σ_0 hibája esetleg olyan nagy lesz, hogy belejutunk a mérések hibatartományába. Azonban ez a körülmény a h és k értékek nagy pontossága miatt nem látszik valószínűnek.

[8a] H. T. WENSEL: Bur. Stand. J. Res., Wash. **22**, 375, 1939.

[9] L. STRUM: Zs. f. Phys. 51, 287, 1928.

nosított PLANCK-formulát. Ugyanezt más közelítő eljárással a szerző is előállította.[10] Majd a statisztikai mechanikai eljárások általánosításai is a PLANCK-féle képlet általánosításához vezettek.[11] A STRUM-féle képlet igen jó közelítő alakja a statisztikai úton levezetett képletnek, s természetesen fordítva is. A következőkben egy újabb közelítő eljárással oldjuk meg a sugárzási egyensúly feltételi egyenletét és közvetlenül eljutunk a statisztikai formulához, mely a tapasztalattal — mint látni fogjuk — jól megegyezik.

2. Egy üregben lévő fekete sugárzással nagyszámú atom legyen egyensúlyban. Az egyensúly elégséges feltétele:

$$a . e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} + f_e \varrho_\nu e^{-\frac{\varepsilon_m}{kT}} = f_a \varrho_\nu e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}}, \tag{7}$$

ahol a állandó, f_e (az «indukált» emisszió jellemző függvénye) és f_a a ϱ_ν-től függ; ϱ_ν a ν rezgésszámú sugárzás sűrűsége, ε_m és ε_n jelenti az energia értékét az m-ik és n-ik energia-tartományban.[12]

A (7) egyensúlyi feltételből következik, hogy

$$\varrho_\nu = \frac{\frac{a}{f_e}}{\frac{f_a}{f_e} e^{\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_n}{kT}} - 1}. \tag{8}$$

Az a, továbbá az f_e és f_a függvények a következő korlátozó feltételeknek vannak alávetve.

A WIEN-féle eltolódási törvényt kielégítjük, ha

$$\frac{f_a}{f_e} = 1, \quad \varepsilon_m - \varepsilon_n = h\nu \cdot \quad \text{és} \quad \frac{a}{f_e} = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right).$$

A RAYLEIGH-féle sugárzási törvénynek eleget teszünk, ha felvesszük, hogy

$$\lim_{\frac{\nu}{T}=0} \frac{a}{f_e} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}.$$

---

[10] E. CSÁSZÁR: Zs. f. Phys. **90**, 667, 1934.

[11] D. S. KOTHARI u. R. MAJUMDAR: Zs. f. Phys. **61**, 538, 1930. — A. GANGULI: U. o. **66**, 137, 1930.

[12] E. CSÁSZÁR: L. c.

A WIEN-féle sugárzási törvénynek ugyancsak eleget teszünk, ha felvesszük, hogy

$$\lim_{\frac{\nu}{T}=\infty} \frac{a}{f_e} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}.$$

A $\frac{\nu}{T}$-nek e két értéke között az $\frac{a}{f_e}$ valamilyen függvénye a $\frac{\nu}{T}$ változónak és tényezőként tartalmazza ν^3-t.

Tegyük fel, hogy f_e a ϱ_ν szerint hatványsorba fejthető:

$$f_e = b_0 + b_1\varrho_\nu + b_2\varrho_\nu^2 + \cdots \qquad (9)$$

A legegyszerűbb eset az, hogy az összes b együtthatók zérusok, kivéve b_0-t. Legyen továbbá

$$\frac{a}{b_0} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}.$$

Ekkor eleget teszünk az előírt feltételeknek és kapjuk a PLANCK-féle formulát.

De éppen az a baj, hogy ez a képlet az összes sugárzásra kicsiny értéket ad. Tehát nem jogos a b együtthatókat mind zérusnak tekinteni. STRUM szerint zárjuk be a sort a b_1-es taggal:

$$f_e = b_0 + b_1\varrho_\nu.$$

Ekkor a (7) egyenlet ϱ_ν-re nézve másodfokú egyenlet, melyből ϱ_ν *végtelen binomiális sor* alakjában állítható elő. STRUM e sornak csak az első két tagját veszi figyelembe és az állandóknak megfelelő választása után a következő közelítő formulát állítja elő:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^x - 1}\left(1 + \frac{C_1 x^3}{e^x - 1}\right), \qquad (9)$$

ahol $x = \frac{h\nu}{kT}$ és C_1 új állandó. Ez a formula nem egyezik meg egészen az általánosított statisztikai mechanikából levezetett képlettel, hanem ennek csak közelítő formulája. Éppen ezért olyan megoldási eljárást fogunk követni, mely közvetlenül a statisztikai eredményhez vezet.

3. Minthogy a PLANCK-féle formulának csekély változtatásá-

ról van szó, f_e kifejezésében ϱ_ν helyett írhatjuk közelítő értékét, ϱ_{ν_0}-t. Ekkor

$$f_e = b_0 + b_1 \varrho_{\nu_0}.$$

Behelyettesítve a (8)-ba, a tagoknak megfelelő csoportosítása után

$$\varrho_\nu = \frac{1}{e^x - 1} \cdot \frac{\dfrac{a}{b_0}}{1 + \dfrac{b_1}{b_0} \dfrac{8\pi h \nu^3}{c^3} \dfrac{1}{e^x - 1}}. \tag{10}$$

Az a, a b_0 és b_1 felől feltevéssel döntünk. Az előírt összes követelményeknek eleget teszünk, ha

$$\frac{a}{b_0} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad \text{és} \quad \frac{b_1}{b_0} = -\frac{c^3}{8\pi h\nu^3} n x^m,$$

ahol n és m két állandó; m-re nézve fennáll, hogy $\geqq 2$. Mindenekelőtt látjuk, hogy e feltétel esetén előfordul a ν^3 faktor a (10)-ben és $x = 0$ és $x = \infty$ esetében a (10) jobboldali szorzójának határértéke $\dfrac{8\pi h\nu^3}{c^3}$. Hogy az m értéke pontosan mekkora, arra nézve a Rayleigh-féle törvény nem ad felvilágosítást. Ha azonban m-et a megjelölt kikötéssel önkényesen választjuk, akkor n a Stefan-Boltzmann-féle törvény alapján már kiszámítható. Tehát tulajdonképpen m értéke az új állandó a sugárzási képletben. Közeleső gondolat, hogy $m = 2$; ekkor azonban az általánosított Planck-féle képlet nem egyezik meg olyan jól a Rubens-Michel-féle mérésekkel, mint ha $m = 3$; tehát ezt az utóbbi értéket választjuk. Ezzel tulajdonképpen már az n értéke felől is döntöttünk. (L. a (15) és (16) egyenletet.) — A negatív jel azért van, mert a jobboldali szorzónak 1-nél nagyobbnak kell lenni; ugyanis nagyobbítani akarjuk a Planck-féle formulát

Behelyettesítve a (10)-be, kapjuk a következő sugárzási formulát:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^x - 1} \frac{1}{1 - \dfrac{n x^3}{e^x - 1}}. \tag{11a}$$

A szorzás elvégzése után:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^x - 1 - n x^3}. \tag{11b}$$

Ez a formula teljes összhangban van azzal, melyet az általánosított statisztikai mechanikai tételek alapján vezettek le.[13] A STRUM-féle formula ennek közelítő képlete. Erről egyszerűen meggyőződhetünk. Minthogy n kicsiny törtszám, a $(11a)$ jobboldali utolsó tényezője *végtelen geometriai* sorba fejthető:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^x - 1}\left(1 + \frac{nx^3}{e^x - 1} + \frac{n^2x^6}{(e^x-1)^2} + \cdots\right). \qquad (12)$$

Ha a végtelen sort a második taggal bezárjuk, akkor kapjuk a STRUM-féle képletet (9); a benne előforduló C_1-et itt n-nel jelöltük.[14]

(Megjegyzendő, hogy az előírt követelményeket még egy általánosabb föltevéssel is kielégíthetjük.

Mégpedig:

$$\frac{b_1}{b_0} = -\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\left(e^{-nx} - 1\right)^m;$$

az n új állandó szám és $m \geq 2$. Ez esetben is teljesül az a követelmény, hogy a (10) jobboldali szorzójának határértéke $x = 0$ és $x = \infty$ esetében $\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$. Legyen $m = 3$. Ekkor a (10)-ből kapjuk a következő formulát:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^x - 1 - (e^{-nx} - 1)^3}.$$

Ez a formula kis és nagy x esetében átmegy a $(11b)$-be; ugyanis nagy x esetében [a nevezőben csak e^x marad meg. E formula statisztikai megalapozása valószínűleg elég bonyolult.)

4. Vizsgáljuk meg most, hogy a $(11b)$-ből a h és k állandóknak új értékével kiszámítható STEFAN-BOLTZMANN-féle állandó

---

[13] A $(11b)$ képlet emlékeztet bennünket NERNST és WULF formulájára: Ver. d. D. Phys. Ges. 294, 1919; ebben $1 + nx^3 = \Delta$, de a Δ explicit alakja nincs közölve, csak táblázatos előállítást találunk.

[14] A szerző által régebben levezetett formula (Zs. f. Phys. **90**, 667, 1934) a következő végtelen sor alakjában írható:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^x - 1}\left(1 + \frac{x}{2!\,e^{nx}} + \frac{x^2}{3!\,e^{nx}} + \frac{x^3}{4!\,e^{nx}} + \cdots\right); \text{ az } n \text{ értéke más.}$$

megegyezik-e a tapasztalati értékkel. E végett számítsuk ki az összetett sugárzás sűrűségét:

$$\varrho = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^x - 1 - nx^3} d\nu. \tag{13}$$

Az integráció elvégzése végett az integrandust végtelen geometriai sorba fejtjük (a ν^3 szorzót egyelőre figyelmen kívül hagyjuk és megjegyezzük, hogy n századrész rendű, l. 10. o.):

$$\frac{1}{e^x - 1 - nx^3} = \frac{e^{-x}}{1 - (1 + nx^3)e^{-x}}$$

$$\begin{aligned} &= e^{-x} + e^{-2x}(1+nx^3) + e^{-3x}(1+nx^3)^2 + e^{-4x}(1+nx^3)^3 + e^{-5x}(1+nx^3)^4 + \cdots \\ &= e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + \cdots \\ &\quad + e^{-2x}nx^3 + e^{-3x}2nx^3 + e^{-4x}3nx^3 + e^{-5x}4nx^3 + \cdots \\ &\quad + e^{-3x}n^2x^6 + e^{-4x}3n^2x^6 + e^{-5x}6n^2x^6 + \cdots \\ &\quad + e^{-4x}n^3x^9 + e^{-5x}4n^3x^9 + \cdots \\ &\quad + e^{-5x}n^4x^{12} + \cdots \end{aligned}$$

Ezt a végtelen sort tagonként integráljuk. Egy-egy tag integrálja (a ν^3-nal való szorzás után) a következő alakú:

$$\int_0^\infty a n^{\frac{k}{3}} x^k e^{-lx} \nu^3 . d\nu.$$

Az

$$x = \frac{h\nu}{kT}$$

helyettesítés után elvégezzük az integrációt. Majd pedig figyelembe véve, hogy

$$3!\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) = \frac{\pi^4}{15},$$

írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \varrho = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4 \Bigg\{ 1 + \frac{15}{\pi^4} \Bigg[& n 6!\left(\frac{1}{2^7} + \frac{2}{3^7} + \frac{3}{4^7} + \frac{4}{5^7} + \frac{5}{6^7} + \cdots\right) + \\ & n^2 9!\left(\frac{1}{3^{10}} + \frac{3}{4^{10}} + \frac{6}{5^{10}} + \frac{10}{6^{10}} + \cdots\right) + \\ & n^3 12!\left(\frac{1}{4^{13}} + \frac{4}{5^{13}} + \frac{10}{6^{13}} + \cdots\right) + \\ & n^4 15!\left(\frac{1}{5^{16}} + \frac{5}{6^{16}} + \cdots\right) + \\ & n^5 18!\left(\frac{1}{6^{19}} + \cdots\right) + \cdots \Bigg] \Bigg\} \end{aligned}$$

Vezessük be ebbe az egyenletbe a (2*a*) alapján σ_0-t és σ_n-et:

$$\sigma_n = \sigma_0\{1 + 0{\cdot}15398\,[6{\cdot}465n + 7{\cdot}257n^2 + \cdots]\}. \tag{14}$$

A magasabbrendű tagok nyugodtan elhagyhatók, mert az n értéke csak néhány századrész.

Ebben az egyenletben a σ_0 *számítás útján* meghatározható (6*a*), a σ_n pedig *mérés útján* (3) és (3*a*), tehát n ebből az egyenletből kiszámítható. A σ_n-nek (3) értékét felhasználva:

$$6{\cdot}465n + 7{\cdot}257n^2 + \cdots = 0{\cdot}07347. \tag{15}$$

Megoldva ezt a másodfokú egyenletet,

$$n = 0{\cdot}011091. \tag{16}$$

Tehát látjuk, hogy az nx^3 kivonandó tag együtthatója századrészrendű. Vagyis az eredeti Planck-féle formula csekély mértékben változott meg, mint az várható volt.

Magától értetődik, hogy az általánosított Planck-féle formula ezzel az állandóval eleget tesz a Stefan-Boltzmann-törvénnyel kapcsolatos tapasztalati követelményeknek, elsősorban a Müller-féle méréseknek.

5. Vizsgáljuk meg most, hogy az általánosított Planck-féle formulából kiszámított Wien-féle állandó megegyezik-e a tapasztalattal. E végett a (11*b*)-t a következő alakban írjuk:

$$E_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 - \frac{c_3}{(\lambda T)^3}}, \tag{17}$$

ahol

$$c_3 = nc_2^3.$$

Állítsuk elő a következő egyenletet:

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda} = 0.$$

A tagok megfelelő elrendezése és a

$$\frac{c_2}{\lambda_m T} = z$$

helyettesítés után kapjuk a következő egyenletet:

$$e^{-z} = \left(1 - \frac{z}{5}\right) - \frac{2n}{5} z^3 e^{-z}. \tag{18}$$

Ez az egyenlet a jobboldali z^3-t tartalmazó tagban különbözik az eredeti PLANCK-féle formulából előállítható egyenlettől. Az egyenletet grafikusan oldjuk meg. A bennünket érdeklő gyöke

$$z = \frac{c_2}{\lambda_m T} = 4{\cdot}9453, \tag{19}$$

míg PLANCK-nál

$$z = 4{\cdot}9651.$$

Az új z értékből a h és k új értékével a WIEN-féle állandóra a következő érték számítható ki

$$\lambda_m T = 0{\cdot}2903 \text{ cm.fok.} \tag{20}$$

Ez valamivel nagyobb, mint az eredeti PLANCK-féle formula alapján az új h és k értékkel számított mennyiség. A tapasztalati érték (PASCHEN és COBLENTZ):[15]

$$\lambda_m T = 0{\cdot}2915 \text{ cm.fok.} \tag{21}$$

A megegyezés valamivel jobb, mint az eredeti PLANCK-féle formula esetében.

6. Hátra van most, hogy az általánosított PLANCK-féle formulát összehasonlítsuk a RUBENS és MICHEL-féle mérésekkel.[16] NERNST és WULF[17] az 1919-ben rendelkezésre álló mérési adatok alapján kétségbe vonták a PLANCK-féle formula helyességét, különösen az $x = 1 \ldots 3$ tartományban. Ők egy új formulát javasoltak, mely szerkezetileg hasonlít a (11b) formulához,[18] azonban a benne szereplő Δ értékei különösen az említett x tartományban túlságosan nagyok; számításaikban

$$c_2 = 1{\cdot}4300 \text{ cm.fok.}$$

Amint már említettük, RUBENS és MICHEL megállapították, hogy az eredeti PLANCK-féle formulából kifejezhető

$$C_0 = E_{\lambda_0}(e^x - 1)$$

---

[15] W. NERNST u. Th. WULF: L. c. és H. T. Wensel: L. c.
[16] H. RUBENS u. G. MICHEL: L. c.
[17] W. NERNST u. Th. WULF: L. c.
[18] L. a. 8. oldal lábjegyzetét.

mennyiség eléggé állandó a hőmérsékletváltozás közben, ellenben a NERNST és WULF-féle módosítás alapján számított

$$C' = E_\lambda(e^x - \Delta)$$

mennyiség különösen feltűnő járást mutat 8·944 és 16·05μ-nál.

Igen fontos kérdés, hogy az új általánosított formulának nincs-e ugyanolyan hibája, mint a NERNST és WULF-félének. Az alábbi két táblázat meggyőz bennünket arról, hogy az új formula alapján a $c_2 = 1·4356$ cm.fok értékkel számított

$$C = E_\lambda(e^x - 1 - nx^3) \tag{22}$$

mennyiség legalább is olyan mértékben (vagy még inkább) állandó, mint a PLANCK-formulából ugyanezzel a c_2 értékkel számított C_0 mennyiség.[19]

I. táblázat.

$\lambda = 8·944\mu$ $c_2 = 1·4356$ cm.fok

T	$x = \frac{c_2}{\lambda T}$	E_λ	C_0	δC_0	C	δC
377	4·257	10·72	74·61	— 0·2	73·69	— 03
476	3·372	26·62	74·91	+ 28	73·82	+ 05
577	2·781	49·62	75·12	+ 49	73·96	+ 19
635	2·527	65·68	75·70	+107	74·53	+ 76
678	2·367	78·07	75·45	+ 82	74·35	+ 54
740	2·169	96·54	74·81	+ 18	73·72	— 05
844	1·901	130·51	74·39	— 24	73·39	— 38
923	1·739	158·49	74·37	— 26	73·47	— 30
1034	1·552	201·08	74·81	+ 18	73·97	+ 20
1126	1·425	235·51	74·42	— 21	73·64	— 13
1235	1·299	279·56	74·53	— 10	73·85	+ 08
1332	1·205	318·25	74·37	— 26	73·77	00
1437	1·116	359·08	73·79	— 84	73·25	— 52
1533	1·047	402·13	74·34	— 29	73·82	+ 05
1653	0·971	449·41	73·79	— 84	73·34	— 43
	Középértékek:		74·63		73·77	

[19] A szerző által régebben levezetett formula (L. c.) nem símul ennyire a tapasztalathoz.

II. táblázat.

$\lambda = 16{\cdot}05\mu$ $c_2 = 1{\cdot}4356$ cm fok

T	$x = \frac{c_2}{\lambda T}$	$E\lambda$	C_0	δC_0	C	δC
289	3·095	2·44	51·45	+ 32	50·65	+ 2
395	2·265	5·94	51·33	+ 20	50·56	− 7
516	1·733	10·90	50·79	− 34	50·15	− 48
622	1·438	15·93	51·14	+ 1	50·64	+ 1
636	1·407	16·69	51·47	+ 34	50·95	+ 32
732	1·221	21·24	50·76	− 37	50·34	− 29
732	1·221	21·28	50·86	− 27	50·43	− 20
813	1·099	25·29	50·52	− 61	50·15	− 48
835	1·071	26·56	50·99	− 14	50·57	− 6
934	0·9565	31·81	50·97	− 16	50·67	+ 4
1033	0·8659	37·18	51·20	+ 7	50·93	+ 30
1136	0·7873	42·34	50·68	− 45	50·43	− 20
1232	0·7260	48·12	51·30	+ 17	51·10	+ 47
1336	0·6695	53·47	50·96	− 17	50·77	+ 14
1442	0·6203	59·12	50·78	− 35	50·66	+ 3
1542	0·5801	65·09	51·16	+ 3	51·03	+ 40
1656	0·5401	71·04	50·86	− 27	50·72	+ 9
		Középérték:	51·13		50·63	

Az $E\lambda$ oszlopban található értékek galvanométer-kitéréseket jelentenek.

Ha e táblázatoknak C_0 és C alatti oszlopát megtekintjük, előbbi állításunkat igazolva látjuk. Megjegyzendő, hogy Rubens és Michel dolgozatából éppen azt a két λ értéket választottuk ki, melyeknek esetében a Nernst és Wulf-féle C' a legnagyobb változásokat mutatja, tehát várható volt, hogy esetleg most is járással találkozunk. Azonban ennek éppen az ellenkezője következett be, bizonyságául az új formula helyességének.

7. Most még azt kérdezhetjük, hogy az általánosított Planck-formulából a Rubens és Michel-féle mérések alapján kiszámítható c_2 állandó összhangban van-e a h és k új értékével számított c_2-vel (1·4356 cm.fok).

Erre a kérdésre az I. és II. táblázat tulajdonképpen már megadja a választ. Ugyanis nyilvánvaló, hogy egy izokromata mentén két különböző hőmérsékleten fenn kell állani a következő egyenletnek:

$$\frac{E_\lambda\left[e^{\frac{c_2}{\lambda T_2}}-1-n\left(\frac{c_2}{\lambda T_2}\right)^3\right]}{E_\lambda\left[e^{\frac{c_2}{\lambda T_1}}-1-n\left(\frac{c_2}{\lambda T_1}\right)^3\right]}=1. \qquad (23)$$

Ha $c_2 = 1{\cdot}4356$ kielégíti ezt az egyenletet bármilyen két hőmérsékleten, akkor azt mondhatjuk, hogy a RUBENS- és MICHEL-féle mérések c_2-re ezt az értéket adják. Már pedig a táblázatok szerint a baloldali hányados tulajdonképpen két C állandó hányadosa; ez a hányados pedig az I. táblázat szerint a legkedvezőtlenebb esetben 1437 és 635 abs. fokon a következő:

$$74{\cdot}53 : 73{\cdot}25 = 1{\cdot}017.$$

A II. táblázat szerint pedig a legkedvezőtlenebb esetben 1232 és 813 abs. fokon a következő:

$$51{\cdot}10 : 50{\cdot}15 = 1{\cdot}018.$$

Tehát mondhatjuk, hogy az általánosított PLANCK-formulából a Rubens- és Michel-féle mérések alapján is következik a c_2-nek más módon számított értéke. Egyébként MICHEL [20] az eredeti PLANCK-formula alapján a mérési anyag új feldolgozásával a következő értékhez jutott:

$$c_2 = (1{\cdot}4295 \pm 0{\cdot}007) \text{ cm.fok.}$$

Függelék.

8. Közölt számításainkban a röntgen-színkép határából számított h értéket vettük alapul. Ismeretes, hogy a RYDBERG-féle állandóból számított h érték nagyobb az előbbinél:

$$h = 6{\cdot}627 . 10^{-27} \text{ erg.sec.}$$

Ezzel számítva a σ_0 értéke még kisebb lesz, mint előbb, mert a σ_0 képletében a h harmadik hatványa a nevezőben fordul elő. Tehát az elmélet és a tapasztalat közötti eltérés még nagyobb lesz.

---

[20] H. GEIGER u. K. SCHEEL: Hb. d. Phys. XXIII. 303. I. kiad.

Egészen a legutóbbi időkig eldöntetlen volt, hogy tulajdonképpen melyik h érték a helyes. OHLIN[1] 1941-ben uppsalai doktori értekezésében megállapította, hogy a röntgen-színkép rövidhullámú határából is kb. az utóbbi h érték számítható ki. Az eddigi eltérésnek az volt az oka, hogy a használt röntgenlámpákban nem volt elég nagy a légritkítás; ugyanis a nyomásnak nem szabad nagyobbnak lenni néhány 10^{-6} mm-nél. Ilyen körülmények között OHLIN a következő értéket találta

$$h = (6{\cdot}622 \pm 0{\cdot}0038) . 10^{-27} \text{ erg.sec.} \tag{24}$$

Ezzel a h értékkel számítva

$$\sigma_0 = (5{\cdot}681 \pm 0{\cdot}03) . 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec fok}^4} . \tag{25}$$

Látjuk, hogy ez az érték kicsi a tapasztalati adathoz képest (3).

Hogy az általánosított PLANCK-féle formulából levezethető képlet ez új h állandó esetében is megegyezzék a tapasztalattal, az n értékét kell megfelelően választani. A (14) és (15) alapján most n-re nézve fennáll:

$$6{\cdot}465 n + 7{\cdot}257 n^2 + \cdots = 0{\cdot}09929. \tag{26}$$

Ebből

$$n = 0{\cdot}01509 \ (0{\cdot}015089). \tag{27}$$

Ezzel az n értékkel a (19) egyenletből kapjuk, hogy

$$z = \frac{c_2}{\lambda_m T} = 4{\cdot}93825. \tag{28}$$

Minthogy pedig az OHLIN-féle h értékkel számítva

$$c_2 = 1{\cdot}4374 \text{ cm.fok,} \tag{29}$$

a WIEN-féle állandóra a következő értéket kapjuk:

$$\lambda_m T = 0{\cdot}29107 \text{ cm.fok.} \tag{30}$$

A c_2 állandónak utóbbi értékét felhasználva is azt találjuk, hogy az általánosított PLANCK-formula összhangban van a RUBENS és MICHEL-féle mérésekkel, mint azt az I_1 és II_2 táblázat igazolja.

---

[1] P. OHLIN: Phys. Ber. **22**, 1789, 1941.

I_1. táblázat.

$\lambda = 8{\cdot}944\,\mu$ $c_2 = 1{\cdot}4374$ cm.fok

T	$x=\frac{c_2}{\lambda T}$	E_λ	C_0	δC_0	C	δC
377	4·263	10·72	75·05	+ 20	73·80	+ 13
476	3·376	26·62	75·25	+ 40	73·74	+ 7
577	2·785	49·62	75·43	+ 58	73·82	+ 15
635	2·531	65·68	75·96	+ 111	74·35	+ 68
678	2·370	78·07	75·69	+ 84	74·12	+ 45
740	2·172	96·54	75·05	+ 20	73·56	— 11
844	1·904	130·51	74·54	— 30	73·18	— 49
923	1·741	158·49	75·53	— 32	73·27	— 40
1034	1·554	201·08	75·03	+ 18	73·89	+ 22
1126	1·427	235·51	74·60	— 25	73·57	— 10
1235	1·301	279·56	74·75	— 10	73·82	+ 15
1332	1·206	318·25	74·52	— 33	73·68	+ 1
1437	1·118	359·08	73·96	— 89	73·20	— 47
1533	1·048	402·13	74·49	— 36	73·79	+ 12
1653	0·972	449·41	73·87	— 98	73·25	— 42
	Középértékek:		74·85		73·67	

II_2. táblázat.

$\lambda = 16{\cdot}05\,\mu$ $c_2 = 1{\cdot}4374$ cm.fok

T	$x=\frac{c_2}{\lambda T}$	E_λ	C_0	δC_0	C	δC
289	3·099	2·44	51·67	+ 48	50·58	— 4
395	2·267	5·94	51·40	+ 21	50 36	— 26
516	1·736	10·90	50·92	— 27	50·08	— 54
622	1·440	15·93	51·29	+ 10	50·57	— 5
636	1·408	16·69	51·53	+ 34	50·83	+ 21
732	1·223	21·24	50·96	— 23	50·37	— 25
732	1·223	21·28	51·04	— 15	50·45	— 17
813	1·102	25·29	50·81	— 37	50·30	— 32
835	1·072	26·56	51·06	— 13	50·57	— 5
934	0·9588	31·81	51·18	— 1	50·66	+ 4
1033	0·8669	37·18	51·30	+ 11	50 93	+ 31
1136	0·7883	42·34	50·78	— 41	50·47	— 15
1232	0·7275	48·12	51·48	+ 29	51·23	+ 61
1336	0·6703	53·47	51·05	— 14	50·71	+ 9
1442	0·6210	59·12	50·90	— 29	50·69	+ 27
1542	0·5807	65·09	51·25	+ 72	51·05	+ 43
1656	0·5408	71·04	50·96	— 23	50·79	+ 17
	Középértékek:		51·19		50·62	

Látható e táblázatokban, hogy a C mennyiség eléggé állandó. — Megvizsgáltuk még az új c_2-vel a $\lambda = 22{\cdot}3\mu$-ra vonatkozó RUBENS és MICHEL-féle táblázatot is: a benne közölt méréseket 296 és 1831 absz. fok között végezték; e hőmérsékleteknek megfelelő x értékek: 2·196 és 0·350. Ebben a tartományban a C feltűnően állandó.

9. A sugárzási egyensúly (7) feltételi egyenletéből még más módon is előállíthatjuk a (11*b*) sugárzási formulát. Ugyanis osztva a (7) egyenlet minden tagját f_a-val, a következő eredményre jutunk:

$$\varrho_\nu = \frac{\frac{a}{f_a}}{e^x - \frac{f_e}{f_a}};$$

ebben $\frac{f_e}{f_a}$ függvénye x-nek, illetőleg $\frac{\nu}{T}$-nek.

Ennek a képletnek kis x esetében át kell mennie a Rayleigh-féle formulába. Ez bekövetkezik, ha

$$\frac{a}{f_a} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \quad \text{és} \quad \left(e^x - \frac{f_e}{f_a}\right)_{x \sim 0} = x.$$

Erre nézve pedig elégséges az a követelmény, hogy

$$\frac{f_e}{f_a} = 1 + \eta x^m$$

legyen, továbbá $m \geq 2$; az η kis törtszám. A tapasztalattal összhangban leszünk, ha $m = 3$. Láthatjuk, hogy most

$$\frac{f_e}{f_a} \neq 1.$$

Ennek az utóbbi egyenlőtlenségnek fizikai jelentése az, hogy az indukált emisszió jellemző függvénye (f_e) most különbözik az abszorpció jellemző függvényétől (f_a-tól); ez utóbbi állandónak tekinthető.

10. Nem érdektelen megemlíteni a következő történelmi igazságot. PLANCK 1900. okt. 19-én a Deutsche Physikalische Gesellschaft ülésén közölte először formuláját KURLBAUM előadásához fűzött hozzászólásában. 1900. okt. 24-én LUMMER levél-

ben közölte PLANCKkal, hogy méréseikkel még jobban megegyezik a következő képlet:

$$E_\lambda = \frac{C}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1 + e^{-\frac{\lambda T}{c}}}.$$

LUMMER a $C = c_1$ és $c = c_2$ állandónak az akkori WIEN-féle értékét használta fel.[21]

Az a feltűnő, hogy e formula nevezőjében az $(e^x - 1)$ mellett még egy «*hozzáadandó*» tag szerepel, míg az általánosított PLANCK-féle formulában egy «*kivonandó*» tag. Tehát LUMMER az eredeti nevezőt nagyobbította, újabban pedig kisebbedett.

* * *

Megállapíthatjuk, hogy rendelkezésünkre áll egy olyan fekete sugárzási formula (11*b*), mely nemcsak a sugárzási mérésekkel, hanem a legkülönfélébb területeken végzett más mérésekkel is összhangban van. Sajnos, egy új állandó szerepel benne ($m = 3$); az n nem új, mert kifejezhető a STEFAN-BOLTZMANN-féle állandó tapasztalati értékével. Ez a formula tulajdonképpen PLANCK formulája, csak a kor kívánalmainak megfelelően kissé módosítottuk.

---

21 M. v. LAUE: Die Naturwissenschaften, 29, 137, 1941.

(A Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának 1938. jan. 24-én és 1940. márc. 11-én tartott üléséből.)

DIE GESETZE DER SCHWARZEN STRAHLUNG.

I. u. II. Teil.

Von E. CSÁSZÁR, Korr. Mitglied der Akademie.

In der PLANCK*schen Strahlungsformel* gibt es eigentlich 3 Konstanten: c (die Lichtgeschwindigkeit), h und k. Dasselbe gilt auch für das WIENsche Verschiebungsgesetz und das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz, welche aus der PLANCKschen Formel abgeleitet werden können.

Die älteren Werte von h und k sind folgende:

$$h = 6{\cdot}55 \,.\, 10^{-27} \text{ erg.sec},$$

$$k = 1{\cdot}373 \,.\, 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}} .$$

Wenn diese h- und k-Werte in die Formeln der schwarzen Strahlung eingesetzt werden, wird die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung allgemein zufriedenstellend.

Aber in dem letzten Jahrzehnt wurde festgestellt, dass die richtigen Werte der genannten Konstanten von den früheren abweichen:

$$h = 6{\cdot}622 \,.\, 10^{-27} \text{ erg.sec},$$

$$k = 1{\cdot}382 \,.\, 10^{-16} \frac{\text{erg}}{\text{grad}} .$$

Mit diesen neuen Werten der Konstanten bleibt die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung bestehen, wenn als Messwert für die STEFAN-BOLTZMANNsche Konstante der Mittelwert aller älteren und neueren Messergebnisse angenommen wird. Der theoretische Wert ist:

$$\sigma_0 = (5{\cdot}681 \pm 0{\cdot}03) \,.\, 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec grad}^4} .$$

Demgegenüber fand C. MÜLLER durch sehr sorgfältig ausgeführte Messungen

$$\sigma_n = (5{\cdot}774 \pm 0{\cdot}02) . 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \text{ sec grad}^4} .$$

Die Differenz dieser zwei letzteren Zahlenwerte ist

$$0{\cdot}093 . 10^{-5};$$

sie ist grösser als der maximale Fehler von σ_n.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage, wie die PLANCKsche Formel verallgemeinert werden müsste, wenn der MÜLLERsche Wert der Wirklichkeit entspräche. Eine solche verallgemeinerte Formel ist folgende:

$$\varrho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 - n\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3} ;$$

ϱ_ν bedeutet die Dichte der homogenen Strahlung von der Frequenz ν, T die absolute Temperatur. Es ist ersichtlich, dass im Nenner von (1) ein neues subtrahierendes Glied mit einer neuen Konstanten (n) auftritt.

Diese Formel ist in eine unendliche geometrische Reihe entwickelbar. Schliessen wir die unendliche Reihe mit dem ersten Glied ab ($n=0$), dann erhalten wir die PLANCKsche Formel; nach Abschliessen der Reihe mit dem zweiten Glied gelangen wir zur Formel von STRUM.

Die Formel (1) erreichen wir folgenderweise: Nehmen wir an, dass ein Atomsystem mit der schwarzen Strahlung im Gleichgewichtszustand steht. Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes lösen wir durch ein Näherungsverfahren auf. Dieses Näherungsverfahren weicht von dem STRUMschen Verfahren ab. Sein Vorteil besteht darin, dass es umittelbar jene Strahlunsformel ergibt, die durch die Verallgemeinerung der statistischen Methode abgeleitet wurde.

Aus der Formel (1) folgt ein solcher Ausdruck für die STEFAN-BOLTZMANNsche Konstante, welcher — nach Einsetzen der neuen h- und k-Werte — mit der Erfahrung in vollkommenem Einklang steht, wenn die Konstante n entsprechend gewählt wird. Den MÜLLERschen Wert σ_n erhalten wir, wenn

$$n = 0{\cdot}01509$$

ist. n ist also eine kleine Zahl, wie das zu erwarten war.

[Es ist zu bemerken, dass der Zahlenwert von h nach der Berechnung von F. G. DUNNINGTON etwas kleiner ausfällt als der hier benutzte:

$$h = 6{\cdot}613{\cdot}10^{-27} \text{ erg.sec.}$$

Der entsprechende n-Wert ist 0·01109.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass der von uns benutzte OHLINsche h-Wert der richtige ist, weil dieser — obwohl er im Röntgengebiet gemessen wurde — mit dem aus der RYDBERGschen Formel berechneten h-Wert ($6{\cdot}627 . 10^{-27}$) ziemlich genau übereinstimmt.]

Aus der Formel (3) ergibt sich für die Konstante des WIENschen *Verschiebungsgesetzes*

$$\lambda_m\, T = 0{\cdot}2911 \text{ cm.grad.}$$

Aus der PLANCKschen Formel erhält man 0·2895. Der Mittelwert der Messdaten stimmt mit diesen Zahlenwerten überein.

Die Formel (1) steht auch im Einklang mit den sehr bedeutenden Messungen von RUBENS und MICHEL. Das ist ein sehr wichtiger Umstand. Bei der Vergleichung der Formel (1) mit den Messergebnissen wurde der folgende neue Wert der Konstanten c_2 angewendet:

$$c_2 = \frac{hc}{k} = (1{\cdot}4374 \pm 0{\cdot}0019) \text{ cm.grad.}$$

Dieser Wert stimmt mit der Erfahrung überein.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vom 24. Jänn. 1938. u. 11. März 1940.)

Felelős kiadó: Császár Elemér.
4269. Franklin-Társulat nyomdája. — vitéz Litvay Ödön.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA